

НАРУШЕНИЯ УСТОЙЧИВОСТИ НАМАГНИЧЕННЫХ ПОТОКОВ, ВЫЗВАННЫЕ ДИССИПАЦИЕЙ

© 2016 г. **О. Н. КИРИЛЛОВ**

Аннотация. Изучаются локальные нарушения устойчивости дифференциально вращающегося потока электропроводящей несжимаемой жидкости, находящейся под воздействием внешнего азимутально-го магнитного поля. Гидродинамически устойчивый поток может быть дестабилизирован магнитным полем как в случае идеальной системы, так и в случае системы с вязкостью и сопротивлением; при этом возникает азимутальная магнитовращательная неустойчивость. Специальное решение уравнений идеальной магнитогидродинамики, для которого полное давление постоянно, скорость жидкости параллельна направлению магнитного поля, а магнитная и кинетическая энергии конечны и равны друг другу (такое решение называется чандрасекаровской эквипартицией), маргинально устойчиво при отсутствии вязкости и сопротивления. Локальный анализ устойчивости позволяет найти условия, при которых азимутальную магнитовращательную неустойчивость можно трактовать как нарушение устойчивости чандрасекаровской эквипартиции, вызванное диссипацией.

СОДЕРЖАНИЕ

| | |
|--|----|
| 1. Введение | 82 |
| 2. Уравнения геометрической оптики | 86 |
| 3. Уравнения переноса. Дисперсионное соотношение | 88 |
| 4. Гамильтонова формулировка | 89 |
| 5. Локальная линейная устойчивость идеальной системы | 90 |
| 6. Азимутальная магнитовращательная неустойчивость при малом Rm как неустойчивость, порожденная диссипацией | 93 |
| Список литературы | 96 |

1. ВВЕДЕНИЕ

Динамика течения вязкой несжимаемой жидкости, проводящей электрический ток и взаимодействующей с магнитным полем, описывается следующей системой, состоящей из уравнения Навье—Стокса для скорости жидкости \mathbf{u} и уравнения индукции для магнитного поля \mathbf{B} (см. [14]):

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} - \frac{1}{\mu_0 \rho} \mathbf{B} \cdot \nabla \mathbf{B} + \frac{1}{\rho} \nabla P - \nu \nabla^2 \mathbf{u} &= 0, \\ \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{B} - \mathbf{B} \cdot \nabla \mathbf{u} - \eta \nabla^2 \mathbf{B} &= 0. \end{aligned} \quad (1.1)$$

В уравнениях (1.1) полное давление обозначается через $P = p + \frac{\mathbf{B}^2}{2\mu_0}$, p обозначает гидродинамическое давление, $\rho = \text{const}$ — плотность, $\nu = \text{const}$ — кинематическая вязкость, $\eta = (\mu_0 \sigma)^{-1}$ — коэффициент магнитной диффузии, σ — проводимость жидкости, а μ_0 — магнитная проницаемость свободного пространства. Кроме того, несжимаемый поток и соленоидальное магнитное поле удовлетворяют следующим ограничениям:

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \quad \nabla \cdot \mathbf{B} = 0. \quad (1.2)$$

Предположим, что в стационарном состоянии поток жидкости дифференциально вращается в пределах между радиусами R_1 и $R_2 > R_1$, причем профиль угловой скорости $\Omega(R)$ зависит только от радиальной координаты R в цилиндрической системе координат (R, ϕ, z) . Предположим, что у

стационарного магнитного поля есть только азимутальная компонента и $B_\phi^0(R)$ — ее радиальный профиль, а гидродинамическое давление зависит только от R :

$$\mathbf{u}_0(R) = R\Omega(R)\mathbf{e}_\phi, \quad p = p_0(R), \quad \mathbf{B}_0(R) = B_\phi^0(R)\mathbf{e}_\phi. \quad (1.3)$$

В [12] найдено, что $\Omega = \frac{B_\phi^0}{R\sqrt{\rho\mu_0}}$ и $P = \text{const}$ являются точным стационарным решением системы (1.1)-(1.2) в идеальном случае, т. е. когда $\nu = 0$ и $\eta = 0$. На этом решении скорость жидкости в каждой точке параллельна направлению магнитного поля в этой же точке (см. [14]), а их относительные величины таковы, что кинетическая и магнитная энергии равны друг другу: $\frac{\rho(\Omega R)^2}{2} = \frac{(B_\phi^0)^2}{2\mu_0}$. В [12, 14] доказано, что это решение идеальной магнитогидродинамики (называемое *эквипартицией*) маргинально устойчиво, что, как впоследствии отмечал в своих воспоминаниях (см. [15]) автор указанных работ, несколько удивило его самого: «Так или иначе, один замечательный результат в то время появился — доказательство устойчивости эквипартиции. Вентцель и Гольдбергер проверили мой анализ, так как я сам не очень поверил в результат.»

Введем угловую скорость Альфвена

$$\omega_{A_\phi} = \frac{B_\phi^0}{R\sqrt{\rho\mu_0}} \quad (1.4)$$

(см. [47]), а также гидродинамическое число Россби

$$\text{Ro} := \frac{R}{2\Omega}\partial_R\Omega \quad (1.5)$$

и магнитное число Россби

$$\text{Rb} := \frac{R}{2B_\phi^0 R^{-1}}\partial_R(B_\phi^0 R^{-1}) \quad (1.6)$$

(см. [31]), где $\partial_R = \frac{\partial}{\partial R}$. Из эквипартиции Чандрасекара следует (см. [33, 34]), что

$$\Omega = \omega_{A_\phi}, \quad \text{Ro} = \text{Rb} = -1. \quad (1.7)$$

Последнее равенство следует из условия постоянства полного давления и того факта, что в устойчивом состоянии центробежное ускорение фонового потока компенсируется градиентом давления: $R\Omega^2 = \frac{1}{\rho}\partial_R p_0$. Отметим, что значение $\text{Ro} = -1$ соответствует профилю скорости $\Omega(R) \sim R^{-2}$, а значение $\text{Rb} = -1$ соответствует магнитному полю, порожденному осевым током I , изолированным от жидкости: $B_\phi^0(R) = \frac{\mu_0 I}{2\pi R}$ (см. [34]).

Эквипартиция Чандрасекара принадлежит широкому классу точных решений устойчивого состояния для уравнения идеальной магнитогидродинамики (МГД); это — решения с постоянным полным давлением. О свежих результатах в этой области можно узнать в [7, 22].

Если магнитное поле отсутствует, то вращающийся поток идеальной жидкости устойчив относительно осесимметрических возмущений тогда и только тогда, когда $\text{Ro} > -1$ (см. критерий Рэлея в [50]). В противном случае он становится центробежно неустойчивым из-за бифуркации устойчивого состояния (см. [30]). Отметим, что идеальный поток с кеплеровским профилем вращения, т. е. такой, для которого $\Omega(R) \propto R^{-3/2}$, гидродинамически устойчив, поскольку $\text{Ro} = -\frac{3}{4} > -1$.

Согласно критерию Майкла (см. [45]), вращающийся поток идеальной полностью проводящей жидкости, на который действует азимутальное магнитное поле, устойчив относительно осесимметрических возмущений, если

$$\delta := \text{Ro} - \text{Rb}N^2 > -1, \quad (1.8)$$

где

$$N = \frac{\omega_{A_\phi}}{\Omega}. \quad (1.9)$$

Очевидно, неравенство (1.8) справедливо для чандрасекаровской эквипартиции (1.7).

Неустойчивости вращающегося потока невязкой полностью проводящей жидкости, отличные от осесимметрических, изучались в [3, 47, 64]. Как показывают коротковолновые приближения,

если осевые и азимутальные волновые числа возмущений бесконечно растут, то устойчивость гидродинамического потока нарушается слабым азимутальным магнитным полем при

$$N^2 < -\frac{4Ro}{n^2}, \quad (1.10)$$

где $n \gg 1$ — азимутальное волновое число, а $Ro < 0$. Более того, при переходе к пределу при $n \rightarrow \infty$ скорость роста возмущения стремится к значению Оорта $|\Omega Ro|$ (см. [47]). Следовательно, в случае идеальной магнитогидродинамики, т. е. при $\nu = 0$ и $\eta = 0$, для гидродинамически устойчивых потоков, для которых $-1 < Ro < 0$, включая кеплеровский поток, для которого $Ro = -\frac{3}{4}$, возможно развитие азимутальной магнитовращательной неустойчивости, если выполнено условие (1.10). Для чандрасекаровской эквипартиции (1.7) условие неустойчивости (1.10) нарушается уже при $n > 2$.

Физический механизм указанных нарушений устойчивости в случае идеальной магнитогидродинамики заключается в нарушении устойчивости медленных кориолисовских магнитных волн (см. [64]), что весьма сходно со стандартной магнитовращательной неустойчивостью по Велюху и Чандрасекару (см. [2, 13, 60]), имеющими место в намагниченном вращающемся потоке, находящемся под воздействием осевого магнитного поля (см. [29, 30]).

Магнитовращательные неустойчивости (как стандартные, так и азимутальные) считаются наиболее вероятными кандидатами на роль триггеров турбулентности в аккреционных дисках, в протопланетарных дисках и даже в звездах и внутренностях планет (см. [2, 3, 34, 52, 53]). Стандартная магнитовращательная неустойчивость подобна нарушениям устойчивости, возникающим в таких связанных искусственных космических системах, как пара соединенных спутников или даже кольцо связанных между собой спутников на орбите планеты (см. [2, 4, 41]). Азимутальная магнитовращательная неустойчивость имеет своим аналогом вязкоупругую устойчивость вращающихся полимерных потоков в предельном случае, т. е. при бесконечном времени релаксации сложной жидкости (см. [48, 49]). Обе аналогии возможны, поскольку линии магнитного поля, замороженные в идеально проводящей жидкости в силу теоремы Альфвена, «усиливают» жидкость и фактически превращают ее в сложную или неньютоновскую жидкость (см. [14]). Эти аналогии не только позволяют лучше понять механизм нарушения устойчивости в приложениях, не имеющих, на первый взгляд, никакого отношения друг к другу, но и открывают путь для изучения магнитогидродинамической неустойчивости в компактных лабораторных экспериментах с полимерными жидкостями (см. [8]).

Реалистичное моделирование астрофизических явлений, для которых важна магнитовращательная неустойчивость, требует учета диссипативных эффектов различной физической природы (см. [46]). Каждый отдельный диссипативный механизм может быть довольно слаб, но сила одного из них может отличаться от силы другого на несколько порядков. Это требует трудоемких численных вычислений. Поэтому, чтобы поддержать численные и теоретические исследования магнитовращательной неустойчивости, проводятся лабораторные эксперименты с электропроводящими средами (такими, как жидкие металлы или плазмы) в магнитных полях (см. [17, 23, 57]).

К настоящему времени спиралевидная и азимутальная магнитовращательная неустойчивость продемонстрирована лабораторными экспериментами с потоком Куэтта—Тейлора, состоящим из жидкого металла с особыми профилями скоростей в спиралевидном (т. е. осевом плюс азимутальном) либо чисто азимутальном магнитном поле (см. [51, 54]). Жидкие металлы — это материалы, характеризующиеся очень малым отношением вязкости жидкости к ее электрическому сопротивлению. Это отношение, называемое магнитным числом Прандтля ($Pm = \frac{\nu}{\eta}$), для таких материалов составляет, как правило, от 10^{-6} до 10^{-5} . Поэтому один цикл стандартной магнитовращательной неустойчивости требует очень высоких скоростей вращения цилиндров ячейки Куэтта—Тейлора, что не обеспечивает ламинарность потока даже в отсутствие магнитного поля (см. [23]). То же самое свойство жидких металлов препятствует дестабилизации кеплеровских потоков в успешных экспериментах с азимутальными или спиралевидными полями, если азимутальная компонента создается осевым электрическим током, изолированным от жидкости (см. [23]). Действительно, для $Rb = -1$ диапазон гидродинамически устойчивых потоков, допускающих дестабилизацию азимутальным или спиралевидным магнитным полем, ограничен числами Россби от $Ro = -1$ до

$Ro = 2 - 2\sqrt{2}$, что не содержит кеплеровского профиля, для которого $Ro = -\frac{3}{4}$ (см. [32, 42]). Следовательно, существующие эксперименты с жидкими металлами нуждаются в дальнейших улучшениях, чтобы их можно было использовать для лабораторного моделирования значимых для астрофизических приложений нарушений устойчивости (см. [23]).

В [31] показана возможность нарушить устойчивость гидродинамически устойчивого потока Куэтта—Тейлора жидкого металла, если снять ограничение $Rb = -1$. С физической точки зрения это становится возможным за счет вклада в азимутальное поле, добавляемого электрическими токами через жидкий металл к полю, создаваемому изолированным осевым током (см. [33, 34]). В [31] найдено имеющее сравнительно простой вид условие неустойчивости, выражающееся при помощи гидродинамического и магнитного чисел Россби и получающееся в пределе при Rm , стремящемся к нулю:

$$Rb > -\frac{1}{8} \frac{(Ro + 2)^2}{Ro + 1}. \quad (1.11)$$

Отсюда вытекает нарушение устойчивости кеплеровского потока при $Rb > Rb^{crit} = -\frac{25}{32}$, т. е. в случае, когда радиальный профиль азимутального поля является чуть более плоским, чем R^{-1} . Отметим, как значительно отличаются условия дестабилизации кеплеровского потока азимутальным магнитным полем для случая идеальной МГД, когда неустойчивость, не являющаяся осесимметрической, возможна уже при $Rb = -1$, и для случая, когда есть вязкость и сопротивление (при $Rm \ll 1$) — в этом случае существует предельная крутизна $Rb^{crit} > -1$ радиального профиля магнитного поля.

Различие между порогами устойчивости идеальной системы без диссипации и системы с диссипацией (включая предельный случай, в котором диссипация стремится к нулю) является универсальным явлением, давно известным для многих областей физики и техники (см. [35]). В физике плазмы и магнитогидродинамике это уже привело к довольно радикальным выводам (см. [46]): «Очень много времени потрачено на анализ равновесий в идеальной МГД, которых невозможно достичь предельным переходом от равновесий в МГД с малым, но ненулевым сопротивлением. В результате мы получили неточные концепции, которые, видимо, будет очень трудно уточнить. Возможно, в этом причина того, что в настоящее время теория используется скорее как декорация для эксперимента, чем как руководство, куда двигаться дальше.» Такое же явление известно в гидродинамике, например, для бароклинной неустойчивости (см. [36, 58]), модуляционной неустойчивости Бенджамина—Фейра (см. [11, 26]) и неустойчивости устойчиво стратифицированного сдвигового потока (см. [59]). В механике этот эффект известен с 1952 г. как парадокс Циглера (см. [63]), который в [9] был назван «проблемой, представляющей наибольший теоретический интерес».

В [10] была найдена связь между парадоксом Циглера и особенностью «зонтик Уитни» в области асимптотической устойчивости диссипативной системы. После работы [1], посвященной типичным особенностям многопараметрических семейств матриц, прикладники постепенно приняли эту точку зрения и стали развивать для исследования парадокса дестабилизации и нарушений устойчивости, вызванных диссипацией, в системах с множественными механизмами затухания, методы, основанные на возмущениях кратных собственных значений, теории индекса и применении фундаментальных симметрий идеальной системы (см. [6, 25, 27, 35, 40, 43, 44]). Отметим, что роль взаимного влияния различных диссипационных механизмов на пороги устойчивости отмечалась еще в тридцатых годах прошлого века (см. работы [24, 55] о динамике ротора).

В [34] впервые получены признаки того, что азимутальное нарушение устойчивости магнитного поля или вращения может быть вызвано диссипативным возмущением чандрасекаровской эквипартиции для идеальной МГД. В настоящей работе мы развиваем эту идею, заново выводим уравнения ВКБ для этой задачи, выписывая гамильтонову форму соответствующей алгебраической задачи на собственные значения (она определяет отношение дисперсии для идеальной системы) и систематически изучая ее негамильтоновы возмущения вязкими членами и членами с ненулевым сопротивлением. Мы находим условия, при которых азимутальное нарушение устойчивости магнитного поля или вращения действительно является неустойчивостью чандрасекаровской эквипартиции либо ее расширений, и эта неустойчивость вызвана диссипацией.

2. УРАВНЕНИЯ ГЕОМЕТРИЧЕСКОЙ ОПТИКИ

Линеаризуем уравнения (1.1)-(1.2) вблизи стационарного решения (1.3), вводя общие возмущения $\mathbf{u} = \mathbf{u}_0 + \mathbf{u}'$, $p = p_0 + p'$ и $\mathbf{B} = \mathbf{B}_0 + \mathbf{B}'$ и оставляя только члены первого порядка относительно первых производных. Получим выражения

$$\begin{aligned} \partial_t \mathbf{u}' + \mathbf{u}_0 \cdot \nabla \mathbf{u}' + \mathbf{u}' \cdot \nabla \mathbf{u}_0 - \frac{1}{\rho \mu_0} (\mathbf{B}_0 \cdot \nabla \mathbf{B}' + \mathbf{B}' \cdot \nabla \mathbf{B}_0) - \nu \nabla^2 \mathbf{u}' &= -\frac{1}{\rho} \nabla p' - \frac{1}{\rho \mu_0} \nabla (\mathbf{B}_0 \cdot \mathbf{B}'), \\ \partial_t \mathbf{B}' + \mathbf{u}_0 \cdot \nabla \mathbf{B}' + \mathbf{u}' \cdot \nabla \mathbf{B}_0 - \mathbf{B}_0 \cdot \nabla \mathbf{u}' - \mathbf{B}' \cdot \nabla \mathbf{u}_0 - \eta \nabla^2 \mathbf{B}' &= 0 \end{aligned} \quad (2.1)$$

(см. [34, 38]), где возмущения удовлетворяют ограничениям

$$\nabla \cdot \mathbf{u}' = 0, \quad \nabla \cdot \mathbf{B}' = 0. \quad (2.2)$$

Введем градиенты фоновых полей, представимые следующими двумя матрицами размерности 3×3 :

$$\mathcal{U}(R) = \nabla \mathbf{u}_0 = \Omega \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 + 2\text{Ro} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{B}(R) = \nabla \mathbf{B}_0 = \frac{B_\phi^0}{R} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 + 2\text{Rb} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (2.3)$$

Тогда линеаризованную систему магнитогидродинамики можно записать в следующем виде (см. [34]):

$$\begin{pmatrix} \partial_t + \mathcal{U} + \mathbf{u}_0 \cdot \nabla - \nu \nabla^2 & -\frac{1}{\rho \mu_0} (\mathcal{B} + \mathbf{B}_0 \cdot \nabla) \\ \mathcal{B} - \mathbf{B}_0 \cdot \nabla & \partial_t - \mathcal{U} + \mathbf{u}_0 \cdot \nabla - \eta \nabla^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{u}' \\ \mathbf{B}' \end{pmatrix} + \frac{\nabla}{\rho} \begin{pmatrix} p' + \frac{1}{\mu_0} (\mathbf{B}_0 \cdot \mathbf{B}') \\ 0 \end{pmatrix} = 0. \quad (2.4)$$

Решения линеаризованных уравнений (2.4) ищутся в виде асимптотических рядов «геометрической оптики» по малому параметру ϵ , $0 < \epsilon \ll 1$ (см. [27]):

$$\begin{aligned} \mathbf{u}'(\mathbf{x}, t, \epsilon) &= e^{i\Phi(\mathbf{x}, t)/\epsilon} (\mathbf{u}^{(0)}(\mathbf{x}, t) + \epsilon \mathbf{u}^{(1)}(\mathbf{x}, t) + \epsilon \mathbf{u}^{(r)}(\mathbf{x}, t), \\ \mathbf{B}'(\mathbf{x}, t, \epsilon) &= e^{i\Phi(\mathbf{x}, t)/\epsilon} (\mathbf{B}^{(0)}(\mathbf{x}, t) + \epsilon \mathbf{B}^{(1)}(\mathbf{x}, t) + \epsilon \mathbf{B}^{(r)}(\mathbf{x}, t), \\ p'(\mathbf{x}, t, \epsilon) &= e^{i\Phi(\mathbf{x}, t)/\epsilon} (p^{(0)}(\mathbf{x}, t) + \epsilon p^{(1)}(\mathbf{x}, t) + \epsilon p^{(r)}(\mathbf{x}, t), \end{aligned} \quad (2.5)$$

где \mathbf{x} — вектор координат, Φ — вещественнозначная скалярная функция, представляющая фазу колебаний, $\mathbf{u}^{(j)}$, $\mathbf{B}^{(j)}$ и $p^{(j)}$ ($j = 0, 1, r$) — комплекснозначные амплитуды, а индекс r обозначает остаточные члены.

Следуя [16, 18, 39], мы полагаем, что $\nu = \epsilon^2 \tilde{\nu}$ и $\eta = \epsilon^2 \tilde{\eta}$. Подставляя разложения (2.5) и (2.4) и приводя подобные при ϵ^{-1} и ϵ^0 , мы приходим к следующим двум системам уравнений (см. [34]):

$$\begin{aligned} &\begin{pmatrix} \partial_t \Phi + (\mathbf{u}_0 \cdot \nabla \Phi) & -\frac{1}{\rho \mu_0} (\mathbf{B}_0 \cdot \nabla \Phi) \\ -(\mathbf{B}_0 \cdot \nabla \Phi) & \partial_t \Phi + (\mathbf{u}_0 \cdot \nabla \Phi) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{u}^{(0)} \\ \mathbf{B}^{(0)} \end{pmatrix} = -\frac{\nabla \Phi}{\rho} \begin{pmatrix} p^{(0)} + \frac{1}{\mu_0} (\mathbf{B}_0 \cdot \mathbf{B}^{(0)}) \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (2.6) \\ &i \begin{pmatrix} \partial_t \Phi + (\mathbf{u}_0 \cdot \nabla \Phi) & -\frac{1}{\rho \mu_0} (\mathbf{B}_0 \cdot \nabla \Phi) \\ -(\mathbf{B}_0 \cdot \nabla \Phi) & \partial_t \Phi + (\mathbf{u}_0 \cdot \nabla \Phi) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{u}^{(1)} \\ \mathbf{B}^{(1)} \end{pmatrix} + i \frac{\nabla \Phi}{\rho} \begin{pmatrix} p^{(1)} + \frac{1}{\mu_0} (\mathbf{B}_0 \cdot \mathbf{B}^{(1)}) \\ 0 \end{pmatrix} + \\ &+ \begin{pmatrix} \partial_t + \mathcal{U} + \mathbf{u}_0 \cdot \nabla + \tilde{\nu} (\nabla \Phi)^2 & -\frac{1}{\rho \mu_0} (\mathcal{B} + \mathbf{B}_0 \cdot \nabla) \\ \mathcal{B} - \mathbf{B}_0 \cdot \nabla & \partial_t - \mathcal{U} + \mathbf{u}_0 \cdot \nabla + \tilde{\eta} (\nabla \Phi)^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{u}^{(0)} \\ \mathbf{B}^{(0)} \end{pmatrix} + \\ &+ \frac{\nabla}{\rho} \begin{pmatrix} p^{(0)} + \frac{1}{\mu_0} (\mathbf{B}_0 \cdot \mathbf{B}^{(0)}) \\ 0 \end{pmatrix} = 0. \quad (2.7) \end{aligned}$$

Из условия соленоидальности (2.2) следует, что

$$\begin{aligned} \mathbf{u}^{(0)} \cdot \nabla \Phi &= 0, \quad \nabla \cdot \mathbf{u}^{(0)} + i \mathbf{u}^{(1)} \cdot \nabla \Phi = 0, \\ \mathbf{B}^{(0)} \cdot \nabla \Phi &= 0, \quad \nabla \cdot \mathbf{B}^{(0)} + i \mathbf{B}^{(1)} \cdot \nabla \Phi = 0. \end{aligned} \quad (2.8)$$

Скалярно умножая первое уравнение системы (2.6) на $\nabla\Phi$, удовлетворяющее ограничению (2.8), получаем, что

$$(\nabla\Phi)^2 \left(\frac{p^{(0)}}{\rho} + \frac{1}{\rho\mu_0} (\mathbf{B}_0 \cdot \mathbf{B}^{(0)}) \right) = 0. \quad (2.9)$$

Следовательно, если $\nabla\Phi \neq 0$, то

$$p^{(0)} = -\frac{1}{\mu_0} (\mathbf{B}_0 \cdot \mathbf{B}^{(0)}). \quad (2.10)$$

При условии (2.10) уравнение (2.6) имеет нетривиальное решение, если определитель матрицы размерности 6×6 в его левой части обращается в нуль. Это дает нам два характеристических корня, соответствующих двум волнам Альфвена (см. [19, 20, 38]), порождающим следующие два уравнения Гамильтона—Якоби для фазы Φ :

$$\partial_t \Phi + \left(\mathbf{u}_0 \pm \frac{\mathbf{B}_0}{\sqrt{\rho\mu_0}} \right) \cdot \nabla \Phi = 0. \quad (2.11)$$

Характеристические корни $\left(-\mathbf{u}_0 \pm \frac{\mathbf{B}_0}{\sqrt{\rho\mu_0}} \right) \cdot \nabla \Phi$ — тройные и полупростые, с собственными векторами

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{\pm 1}{\sqrt{\rho\mu_0}} \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{\pm 1}{\sqrt{\rho\mu_0}} \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \frac{\pm 1}{\sqrt{\rho\mu_0}} \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (2.12)$$

На поверхности

$$\mathbf{B}_0 \cdot \nabla \Phi = 0 \quad (2.13)$$

тройные корни Альфвена сливаются в полупростой характеристический корень кратности 6 (см. [19, 20, 38]). Тогда

$$\frac{D\Phi}{Dt} = 0, \quad (2.14)$$

где $\frac{D}{Dt} := \partial_t + \mathbf{u}_0 \cdot \nabla$ — производная по направлению потока жидкости. Вычислим градиент от (2.14):

$$\nabla \partial_t \Phi + \nabla (\mathbf{u}_0 \cdot \nabla) \Phi = \partial_t \nabla \Phi + (\mathbf{u}_0 \cdot \nabla) \nabla \Phi + \mathcal{U}^T \nabla \Phi = \frac{D}{Dt} \nabla \Phi + \mathcal{U}^T \nabla \Phi = 0. \quad (2.15)$$

Аналогично

$$\nabla (\mathbf{B}_0 \cdot \nabla \Phi) = (\mathbf{B}_0 \cdot \nabla) \nabla \Phi + \mathcal{B}^T \nabla \Phi = 0. \quad (2.16)$$

Используя соотношения (2.10), (2.13) и (2.14), мы упрощаем уравнения (2.7) следующим образом:

$$\begin{aligned} \left(\frac{D}{Dt} + \tilde{\nu} (\nabla \Phi)^2 + \mathcal{U} \right) \mathbf{u}^{(0)} - \frac{1}{\rho\mu_0} (\mathcal{B} + \mathbf{B}_0 \cdot \nabla) \mathbf{B}^{(0)} &= -\frac{i}{\rho} \left(p^{(1)} + \frac{1}{\mu_0} (\mathbf{B}_0 \cdot \mathbf{B}^{(1)}) \right) \nabla \Phi, \\ \left(\frac{D}{Dt} + \tilde{\eta} (\nabla \Phi)^2 - \mathcal{U} \right) \mathbf{B}^{(0)} + (\mathcal{B} - \mathbf{B}_0 \cdot \nabla) \mathbf{u}^{(0)} &= 0. \end{aligned} \quad (2.17)$$

Исключим давление из первого из уравнений (2.17), умножив его на $\nabla \Phi$, и учтем ограничения (2.8). Тогда уравнение примет вид

$$\begin{aligned} \left(\frac{D}{Dt} + \tilde{\nu} (\nabla \Phi)^2 + \mathcal{U} \right) \mathbf{u}^{(0)} - \frac{1}{\rho\mu_0} (\mathcal{B} + \mathbf{B}_0 \cdot \nabla) \mathbf{B}^{(0)} &= \\ = \frac{\nabla \Phi}{|\nabla \Phi|^2} \cdot \left[\left(\frac{D}{Dt} + \mathcal{U} \right) \mathbf{u}^{(0)} - \frac{1}{\rho\mu_0} (\mathcal{B} + \mathbf{B}_0 \cdot \nabla) \mathbf{B}^{(0)} \right] \nabla \Phi \end{aligned} \quad (2.18)$$

(соответствующая стандартная процедура описана, например, в [61]). Дифференцируя первое из тождеств (2.8), получаем, что

$$\frac{D}{Dt}(\nabla\Phi \cdot \mathbf{u}^{(0)}) = \frac{D\nabla\Phi}{Dt} \cdot \mathbf{u}^{(0)} + \nabla\Phi \cdot \frac{D\mathbf{u}^{(0)}}{Dt} = 0. \quad (2.19)$$

С другой стороны, из третьего тождества (2.8) следует, что

$$(\mathbf{B}_0 \cdot \nabla)(\nabla\Phi \cdot \mathbf{B}^{(0)}) = ((\mathbf{B}_0 \cdot \nabla)\nabla\Phi) \cdot \mathbf{B}^{(0)} + \nabla\Phi \cdot (\mathbf{B}_0 \cdot \nabla)\mathbf{B}^{(0)} = 0. \quad (2.20)$$

Используя тождества (2.19) и (2.20), приведем уравнение (2.18) к виду

$$\begin{aligned} & \left(\frac{D}{Dt} + \tilde{\nu}(\nabla\Phi)^2 + \mathcal{U} \right) \mathbf{u}^{(0)} - \frac{1}{\rho\mu_0}(\mathcal{B} + \mathbf{B}_0 \cdot \nabla)\mathbf{B}^{(0)} = \\ & = \frac{\nabla\Phi}{|\nabla\Phi|^2} \cdot \left[\mathcal{U}\mathbf{u}^{(0)} - \frac{1}{\rho\mu_0}\mathcal{B}\mathbf{B}^{(0)} \right] \nabla\Phi + \frac{1}{\rho\mu_0} \frac{\nabla\Phi}{|\nabla\Phi|^2} ((\mathbf{B}_0 \cdot \nabla)\nabla\Phi) \cdot \mathbf{B}^{(0)} - \frac{\nabla\Phi}{|\nabla\Phi|^2} \frac{D\nabla\Phi}{Dt} \cdot \mathbf{u}^{(0)}. \end{aligned} \quad (2.21)$$

Учитывая тождества (2.16) и (2.15), приводим уравнение (2.21) и, следовательно, первое из уравнений (2.17) к виду

$$\begin{aligned} & \left(\frac{D}{Dt} + \tilde{\nu}(\nabla\Phi)^2 + \mathcal{U} \right) \mathbf{u}^{(0)} - \frac{1}{\rho\mu_0}(\mathcal{B} + \mathbf{B}_0 \cdot \nabla)\mathbf{B}^{(0)} = \\ & = \nabla\Phi \frac{\nabla\Phi}{|\nabla\Phi|^2} \cdot \left[\mathcal{U}\mathbf{u}^{(0)} - \frac{1}{\rho\mu_0}\mathcal{B}\mathbf{B}^{(0)} \right] - \frac{1}{\rho\mu_0} \frac{\nabla\Phi}{|\nabla\Phi|^2} \mathcal{B}^T \nabla\Phi \cdot \mathbf{B}^{(0)} + \frac{\nabla\Phi}{|\nabla\Phi|^2} \mathcal{U}^T \nabla\Phi \cdot \mathbf{u}^{(0)} = \\ & = 2 \frac{\nabla\Phi(\nabla\Phi)^T}{|\nabla\Phi|^2} \left[\mathcal{U}\mathbf{u}^{(0)} - \frac{1}{\rho\mu_0}\mathcal{B}\mathbf{B}^{(0)} \right]. \end{aligned} \quad (2.22)$$

Вводя обозначение $\mathbf{k} = \nabla\Phi$, из фазового уравнения (2.15) получаем, что

$$\frac{D\mathbf{k}}{Dt} = -\mathcal{U}^T \mathbf{k}. \quad (2.23)$$

Аналогично уравнения переноса для амплитуд (2.17) принимают окончательный вид

$$\begin{aligned} \frac{D\mathbf{u}^{(0)}}{Dt} &= - \left(\mathcal{I} - \frac{2\mathbf{k}\mathbf{k}^T}{|\mathbf{k}|^2} \right) \mathcal{U}\mathbf{u}^{(0)} - \tilde{\nu}|\mathbf{k}|^2 \mathbf{u}^{(0)} + \frac{1}{\rho\mu_0} \left(\left(\mathcal{I} - \frac{2\mathbf{k}\mathbf{k}^T}{|\mathbf{k}|^2} \right) \mathcal{B} + \mathbf{B}_0 \cdot \nabla \right) \mathbf{B}^{(0)}, \\ \frac{D\mathbf{B}^{(0)}}{Dt} &= \mathcal{U}\mathbf{B}^{(0)} - \tilde{\eta}|\mathbf{k}|^2 \mathbf{B}^{(0)} - (\mathcal{B} - \mathbf{B}_0 \cdot \nabla)\mathbf{u}^{(0)}, \end{aligned} \quad (2.24)$$

где \mathcal{I} — единичная матрица размерности 3×3 . Напомним, что уравнения (2.23) и (2.24) выполняются при предположении, что выполнено условие (2.13).

Локальные уравнения в частных производных (2.24) эквивалентны уравнениям переноса, выведенным в [27, 33, 34]. В случае идеальной МГД (с нулевыми вязкостью и сопротивлением) уравнения (2.24) в точности совпадают с уравнениями из [38] и эквивалентны уравнениям переноса, выведенным в [21, 61]. Если магнитное поле отсутствует, то эти уравнения можно рассматривать как обыкновенные дифференциальные уравнения относительно конвективной производной $\frac{D}{Dt}$. Тогда они сводятся к уравнениям из работы [18], исследующей устойчивость вязкого потока Куэтта—Тейлора. Отметим, что амплитудные уравнения той же формы (с другой матрицей \mathcal{U}) возникают при изучении эллиптической неустойчивости (см. [39]) и трехмерных локальных неустойчивостей вязких и невязких потоков более общего вида (см. [16]).

3. УРАВНЕНИЯ ПЕРЕНОСА. ДИСПЕРСИОННОЕ СООТНОШЕНИЕ

Пусть ортогональные единичные векторы $\mathbf{e}_R(t)$, $\mathbf{e}_\phi(t)$ и $\mathbf{e}_z(t)$ образуют базис в цилиндрической координатной системе, движущейся вдоль траектории движения жидкости. Если $\mathbf{k}(t) = k_R \mathbf{e}_R(t) + k_\phi \mathbf{e}_\phi(t) + k_z \mathbf{e}_z(t)$, $\mathbf{u}(t) = u_R \mathbf{e}_R(t) + u_\phi \mathbf{e}_\phi(t) + u_z \mathbf{e}_z(t)$, а матрица \mathcal{U} — такая, как в (2.3), то

$$\dot{\mathbf{e}}_R = \Omega(R)\mathbf{e}_\phi, \quad \dot{\mathbf{e}}_\phi = -\Omega(R)\mathbf{e}_R. \quad (3.1)$$

Следовательно, уравнение (2.23) в координатной форме имеет вид

$$\dot{k}_R = -R\partial_R \Omega k_\phi, \quad \dot{k}_\phi = 0, \quad \dot{k}_z = 0. \quad (3.2)$$

Согласно [18, 21], чтобы исследовать потенциально неустойчивые режимы, имеющие физический смысл, нужно выбирать ограниченные решения системы (3.2), не затухающие на бесконечности. Для таких решений $k_\phi \equiv 0$, а k_R и k_z не зависят от времени. Отметим, что такое решение удовлетворяет ограничению $\mathbf{B}_0 \cdot \mathbf{k} = 0$, вытекающему из (2.13).

Введем обозначение $\alpha = k_z |\mathbf{k}|^{-1}$, где $|\mathbf{k}|^2 = k_R^2 + k_z^2$. Тогда $k_R k_z^{-1} = \sqrt{1 - \alpha^2} \alpha^{-1}$, и мы можем представить локальные амплитудные уравнения в частных производных (2.24) в координатном виде. Тогда уравнения для осевых компонент отделены от уравнений для радиальных и азимутальных компонент. Последние имеют следующий вид (см. [33, 34]):

$$\begin{aligned} (\partial_t + \Omega \partial_\phi + \tilde{\nu} |\mathbf{k}|^2) u_R^{(0)} - 2\alpha^2 \Omega u_\phi^{(0)} - \frac{B_\phi^0}{\rho \mu_0 R} \partial_\phi B_R^{(0)} + 2\alpha^2 \frac{B_\phi^0}{\rho \mu_0 R} B_\phi^{(0)} &= 0, \\ (\partial_t + \Omega \partial_\phi + \tilde{\nu} |\mathbf{k}|^2) u_\phi^{(0)} + 2\Omega(1 + \text{Ro}) u_R^{(0)} - \frac{2}{\rho \mu_0} \frac{B_\phi^0}{R} (1 + \text{Rb}) B_R^{(0)} - \frac{1}{\rho \mu_0} \frac{B_\phi^0}{R} \partial_\phi B_\phi^{(0)} &= 0, \\ (\partial_t + \Omega \partial_\phi + \tilde{\eta} |\mathbf{k}|^2) B_R^{(0)} - \frac{B_\phi^0}{R} \partial_\phi u_R^{(0)} &= 0, \\ (\partial_t + \Omega \partial_\phi + \tilde{\eta} |\mathbf{k}|^2) B_\phi^{(0)} - 2\Omega \text{Ro} B_R^{(0)} + 2\text{Rb} \frac{B_\phi^0}{R} u_R^{(0)} - \frac{B_\phi^0}{R} \partial_\phi u_\phi^{(0)} &= 0. \end{aligned} \quad (3.3)$$

Решение уравнений (3.3) ищется в модальной форме: $\mathbf{u}^{(0)} = \hat{\mathbf{u}} e^{\alpha \Omega \lambda t + im\phi}$, $\mathbf{B}^{(0)} = \sqrt{\rho \mu_0} \hat{\mathbf{B}} e^{\alpha \Omega \lambda t + im\phi}$. Введем вязкую и резистивную частоты, модифицированное азимутальное волновое число и гидродинамическое и магнитное числа Рейнольдса (см. [33, 34]):

$$\omega_\nu = \tilde{\nu} |\mathbf{k}|^2, \quad \omega_\eta = \tilde{\eta} |\mathbf{k}|^2, \quad n = \frac{m}{\alpha}, \quad \text{Re} = \frac{\alpha \Omega}{\omega_\nu}, \quad \text{Rm} = \frac{\alpha \Omega}{\omega_\eta}. \quad (3.4)$$

Запишем амплитудные уравнения (3.3) в матричной форме

$$\mathbf{A} \mathbf{z} = \lambda \mathbf{z}, \quad (3.5)$$

где $\mathbf{z} = (\hat{u}_R, \hat{u}_\phi, \hat{B}_R, \hat{B}_\phi)^T$, $\mathbf{A} = \mathbf{A}_0 + \mathbf{A}_1$ и

$$\mathbf{A}_0 = \begin{pmatrix} -in & 2\alpha & inN & -2\alpha N \\ -\frac{2(1 + \text{Ro})}{\alpha} & -in & \frac{2(1 + \text{Rb})}{N} & inN \\ inN & 0 & \frac{\alpha}{-in} & 0 \\ -\frac{2\text{Rb}}{\alpha} N & inN & \frac{2\text{Ro}}{\alpha} & -in \end{pmatrix}, \quad \mathbf{A}_1 = - \begin{pmatrix} \frac{1}{\text{Re}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\text{Re}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\text{Rm}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\text{Rm}} \end{pmatrix}. \quad (3.6)$$

(см. [31, 33, 34, 56]).

Записав условие разрешимости для этой системы алгебраических уравнений, получим дисперсионное соотношение

$$p(\lambda) := \det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}) = 0, \quad (3.7)$$

где \mathbf{I} — единичная матрица размерности 4×4 , а $p(\lambda)$ — следующий комплексный полином четвертого порядка:

$$p(\lambda) = (a_0 + ib_0)\lambda^4 + (a_1 + ib_1)\lambda^3 + (a_2 + ib_2)\lambda^2 + (a_3 + ib_3)\lambda + a_4 + ib_4. \quad (3.8)$$

В частном случае, когда $\omega_\nu = 0$ и $\omega_\eta = 0$, коэффициенты дисперсионного соотношения (3.7) в точности совпадают с коэффициентами, найденными в [21, 47]. Если магнитное поле отсутствует, то дисперсионное соотношение (3.7) сводится к тому, которое было выведено в [37].

4. ГАМИЛЬТОНОВА ФОРМУЛИРОВКА

Матрица \mathbf{A}_0 в (3.6) соответствует идеальной системе, а \mathbf{A}_1 представляет собой ее возмущение членами с ненулевыми вязкостью и сопротивлением. Наша цель — переформулировать задачу на собственные значения для матрицы $\mathbf{A} = \mathbf{A}_0 + \mathbf{A}_1$ в виде задачи на спектре диссипативно возмущенной гамильтоновой системы (см. [44]).

Введем эрмитову матрицу

$$\mathbf{G} = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 & iN \\ i & 0 & -iN & 0 \\ 0 & iN & 4\frac{Ro - Rb}{\alpha n} & -i \\ -iN & 0 & i & 0 \end{pmatrix}. \quad (4.1)$$

Тогда матрица $\mathbf{H}_0 = -i\mathbf{G}\mathbf{A}_0$ — тоже эрмитова. Действительно,

$$\mathbf{H}_0 = \begin{pmatrix} -\frac{2(N^2Rb - Ro - 1)}{\alpha} & in(N^2 + 1) & -\frac{2N(1 + Rb - Ro)}{\alpha} & -2inN \\ -in(N^2 + 1) & 2\alpha & 2inN & -2\alpha N \\ -\frac{2N(1 + Rb - Ro)}{\alpha} & -2inN & \frac{2(N^2Rb + N^2 + 2Rb - 3Ro)}{\alpha} & in(N^2 + 1) \\ 2inN & -2\alpha N & -in(N^2 + 1) & 2\alpha N^2 \end{pmatrix}. \quad (4.2)$$

Следовательно, задача на собственные значения

$$\mathbf{A}_0\mathbf{z} = \lambda\mathbf{z}$$

может быть записана в гамильтоновой форме с гамильтонианом \mathbf{H}_0 (см. [27, 62]):

$$\mathbf{H}_0\mathbf{z} = i^{-1}\mathbf{G}\lambda\mathbf{z}. \quad (4.3)$$

Из фундаментальной симметрии

$$\mathbf{A}_0 = -\mathbf{G}^{-1}\overline{\mathbf{A}_0}^T\mathbf{G}, \quad (4.4)$$

где черта сверху означает комплексное сопряжение, следует симметрия спектра матрицы \mathbf{A}_0 относительно мнимой оси (см. [27, 62]).

Таким образом, полная задача на собственные значения (3.5) является следующим диссипативным возмущением гамильтоновой задачи (4.3) на собственные значения:

$$(\mathbf{H}_0 + \mathbf{H}_1)\mathbf{z} = i^{-1}\mathbf{G}\lambda\mathbf{z}, \quad (4.5)$$

где $\mathbf{H}_1 = -i\mathbf{G}\mathbf{A}_1$ — это комплексная неэрмитова матрица

$$\mathbf{H}_1 = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{Re} & 0 & -\frac{N}{Rm} \\ -\frac{1}{Re} & 0 & \frac{N}{Rm} & 0 \\ 0 & -\frac{N}{Re} & 4i\frac{Ro - Rb}{\alpha n Rm} & \frac{1}{Rm} \\ \frac{N}{Re} & 0 & -\frac{1}{Rm} & 0 \end{pmatrix}. \quad (4.6)$$

5. Локальная линейная устойчивость идеальной системы

Идеальная система (4.3) без вязкости и сопротивления имеет характеристический полином

$$\begin{aligned} p(\lambda) &= \lambda^4 + 4in\lambda^3 + (2N^2n^2 - 6n^2 + 4 + 4\delta)\lambda^2 + \\ &+ 4in(2\delta + (n^2 - 2)(N^2 - 1))\lambda + n^2(N^2 - 1)(4\delta + (n^2 - 4)(N^2 - 1)), \end{aligned} \quad (5.1)$$

где $\delta = Ro - RbN^2$.

Дисперсионное соотношение, соответствующее (5.1), можно представить в более компактном виде (см. [21, 33, 34, 47, 64]):

$$4\delta((i\lambda - n)^2 - n^2N^2) + 4(i\lambda - n + nN^2)^2 - ((i\lambda - n)^2 - n^2N^2)^2 = 0. \quad (5.2)$$

Если $\delta = 0$, т. е. $Ro = RbN^2$, то уравнение (5.2) упрощается, а его корни имеют вид

$$\lambda_{1,2} = -i(n + 1) \pm i\sqrt{N^2(n + 1)^2 + 1 - N^2}, \quad (5.3)$$

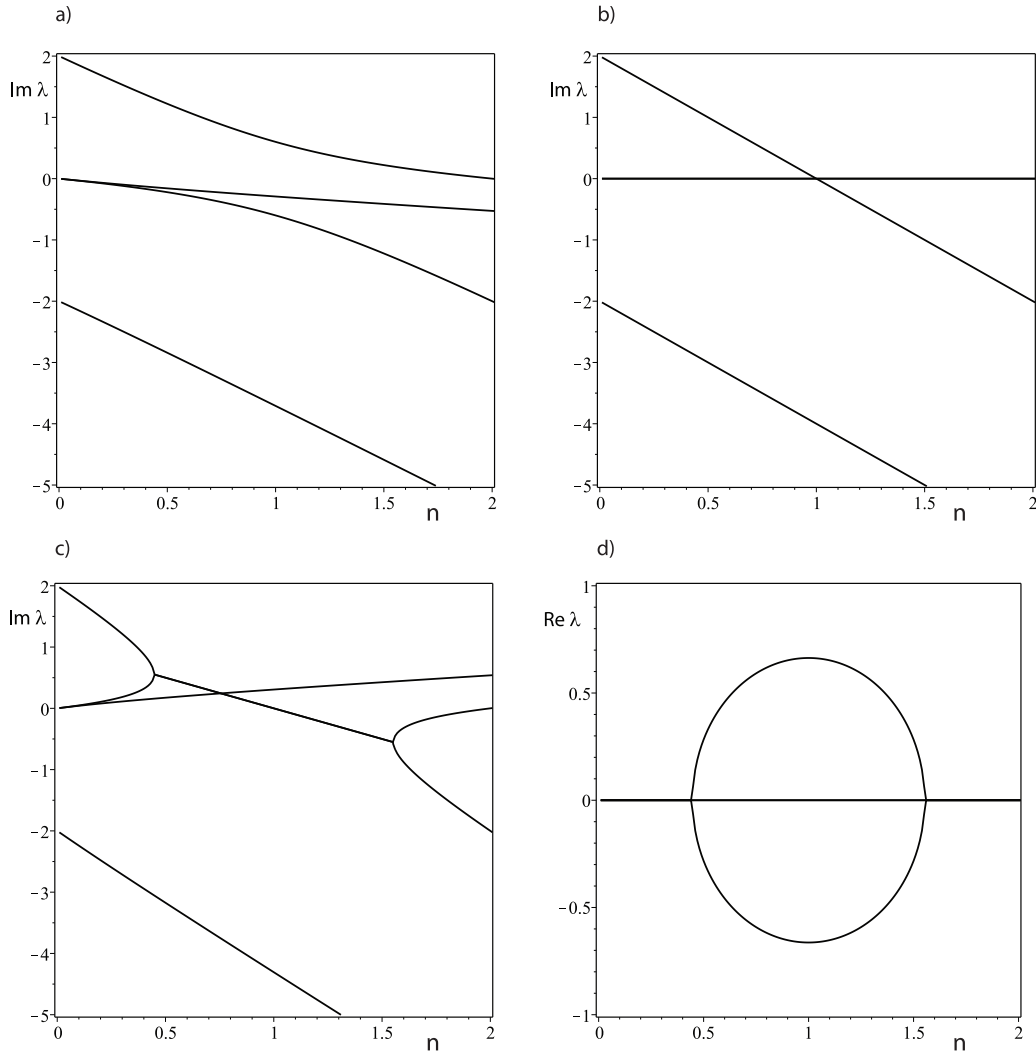


Рис. 1. Частоты и скорости роста корней (5.3) и (5.4) дисперсионного соотношения (5.2) при ограничении $Ro = RbN^2$ для (a) $N = 0,8$, (b) $N = 1$ и (c,d) $N = 1,2$.

$$\lambda_{3,4} = -i(n - 1) \pm i\sqrt{N^2(n - 1)^2 + 1 - N^2}. \quad (5.4)$$

Эти корни показаны на рис. 1 для разных значений N . Если $0 \leq N < 1$, то собственные значения мнимы и просты для всех $0 < n \leq 2$; при $n = 0$ ноль является двукратным собственным значением с жордановым блоком и парой простых мнимых собственных значений, как показано на рис. 1(a). Если $N = 1$, то ноль является двукратным собственным значением, полупростым для всех n из $(0, 2)$, кроме случая $n = 1$; в этом случае у него есть жорданов блок второго порядка. Две остальные ветви собственных значений состоят из простых собственных значений, как показано на рис. 1(b), и соответствуют значениям $N = 1$ и $Ro = Rb$, что включает в себя и чандрасекаровскую эквипартицию. Если $N > 1$, то возникает пузырь комплексно сопряженных собственных значений, как показано на рис. 1(c,d); случай, когда n принадлежит области, ограниченной кривой

$$N = \frac{1}{\sqrt{1 - (n - 1)^2}}, \quad (5.5)$$

показан на рис. 2(a).

На границе (5.5) имеем двойные мнимые собственные значения с жордановым блоком второго порядка. Следовательно, на пересечении маргинальная устойчивость пропадает за счет бифуркации Гамильтона—Хопфа, как показано на рис. 1(c,d). Если $N = 1$ и $n = 1$, то двойное собственное значение с жордановым блоком — это ноль. Если его разбить на фиксированное $N = 1$ и переменное n , то полученная функция будет линейной по n ; она вырождается, поскольку это происходит вдоль направления, касательного к границе устойчивости. Отметим, что такой тип разбиения,

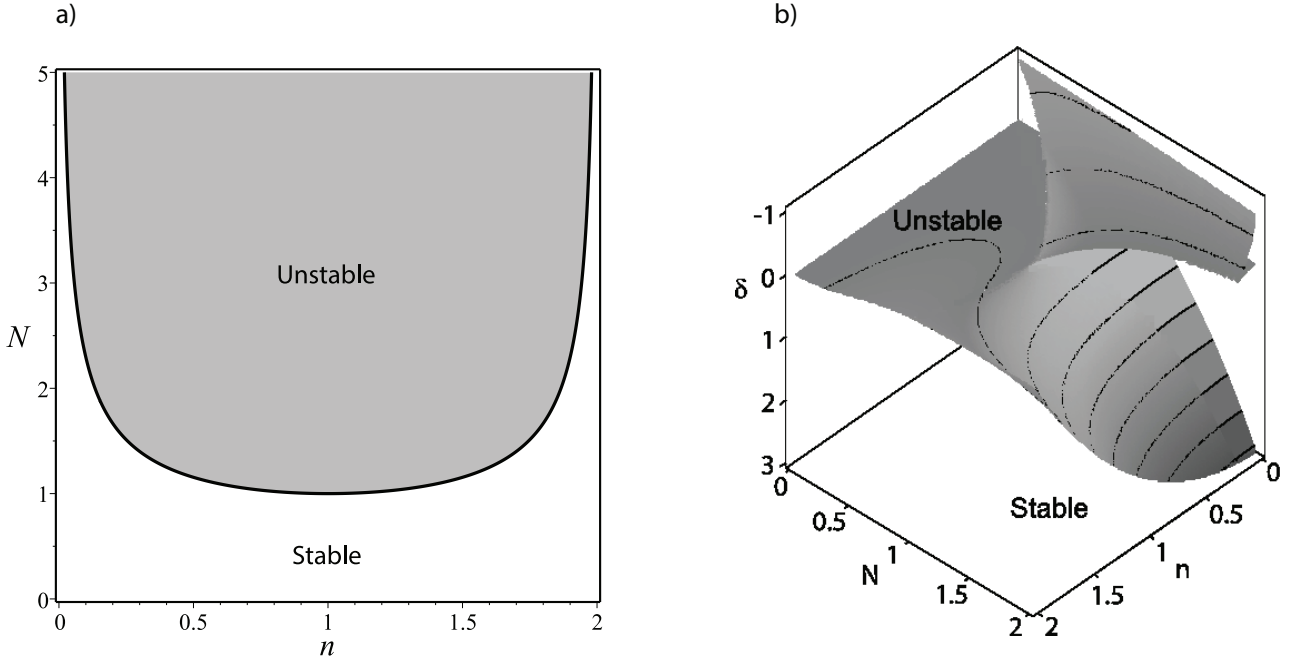


Рис. 2. (а) Диаграмма устойчивости идеальной системы (плоский случай), удовлетворяющей ограничению $\delta := \text{Ro} - \text{Rb}N^2 = 0$, с границей (5.5) является сечением полной диаграммы устойчивости (b) с границей (5.6), имеющей особенность типа «ласточкин хвост» при $n = 1, N = 1$ и $\delta = 0$.

равно как и соответствующие изменения кривых собственных значений, показанные на рис. 1, аналитически описан в [27, 28].

На рис. 2(а) показана только часть диаграммы неустойчивости полинома (5.1), удовлетворяющего ограничению $\delta = 0$. Чтобы представить себе, что происходит при $\delta \neq 0$, рассмотрим дискриминантное множество полинома (5.1):

$$\begin{aligned}
 &4\delta^5 + (N^2n^2 - 4N^2 + 16)\delta^4 + (8N^4n^2 + 12N^2n^2 - 12N^2 + 24)\delta^3 + \\
 &+ (2N^6n^4 - 8N^6n^2 + 2N^4n^4 - 22N^4n^2 + 22N^2n^2 - 12N^2 + 16)\delta^2 + \\
 &+ 4(N^2 - 1)(N^6n^4 - 2N^4n^4 + 5N^4n^2 - 3N^2n^2 - 1)\delta + \\
 &+ N^2n^2(N^2 - 1)^2(N^4n^4 - 4N^4n^2 + 2N^2n^2 + 1) = 0.
 \end{aligned} \tag{5.6}$$

Уравнение (5.6) определяет сингулярную поверхность в пространстве параметров n, N, δ с особенностью типа «ласточкин хвост» в точке $n = 1, N = 1, \delta = 0$, как показано на рис. 2(b). Гладкие части этой поверхности соответствуют двойным мнимым собственным значениям с жордановыми блоками второго порядка; на двух ребрах возврата имеем тройные мнимые собственные значения с жордановыми блоками третьего порядка.

Для чандрасекаровской эквипартиции имеем $N = 1$ и $\delta = \text{Ro} - \text{Rb} = 0$. следовательно, имеет смысл рассмотреть сечение полной диаграммы устойчивости, показанной на рис. 2(b), плоскостью $N = 1$. Из (5.6) получаем границу на плоскости (n, δ) :

$$n = \frac{1}{4} \sqrt{-2\delta^2 - 40\delta + 16 \pm 2\sqrt{\delta(\delta - 8)^3}}. \tag{5.7}$$

Результат изображен на рис. 3(а), где область неустойчивости плоской идеальной системы закрашена светло-серым цветом. Отметим, что стабилизация при $n = 0$ и $\delta > -1$ соответствует критерию Майкла (см. [45]), а ветвь границы устойчивости при $n > 1$ имеет следующее асимптотическое представление при $\delta \rightarrow -\infty$:

$$n = 2\sqrt{-\delta} + O\left(\frac{1}{\sqrt{-\delta}}\right); \tag{5.8}$$

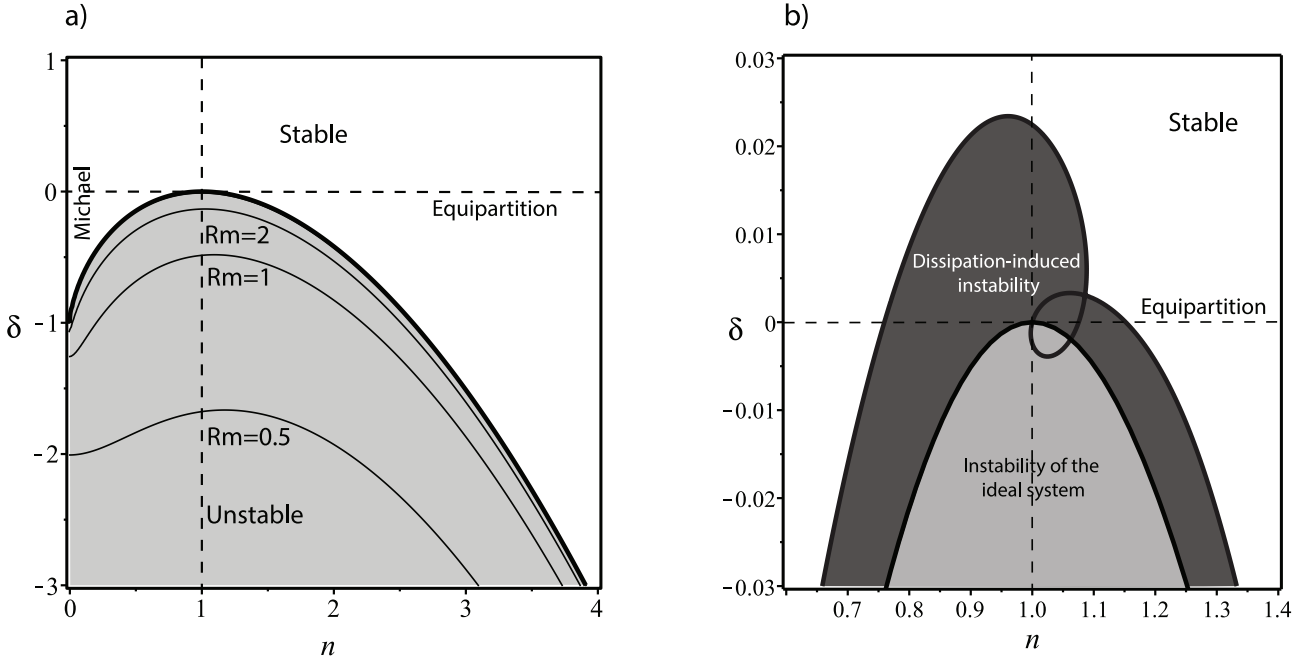


Рис. 3. (а) При $N = 1$ область неустойчивости идеальной системы с границей (5.7) закрашена светло-серым цветом и показаны границы (6.3) областей неустойчивости диссипативной системы с $Re = Rm$, которые при $Rm \rightarrow \infty$ стремятся к границе области неустойчивости идеальной системы. (б) При $N = 1$ область неустойчивости идеальной системы (закрашена светло-серым цветом) сравнивается с областью неустойчивости диссипативной системы (закрашена темно-серым цветом) для $Re = 10^6$, $Rm = 10$ и $Rm = 10^{-5}$, чтобы показать неустойчивость, вызванную диссипацией.

это полностью соответствует порогу азимутального нарушения устойчивости магнитного поля или вращения (1.10) в идеальном случае (см. [47, 64]).

Прямая $\delta = 0$, которой принадлежит экипартиция, находится в области устойчивости идеальной системы, как показано на рис. 3(а). Соответствующие кривые мнимых собственных значений показаны на рис. 4(а); видно, что они пересекаются при $n = 1$, т. е. в случае, когда существуют чисто мнимое собственное значение, собственное значение — простой нуль и собственное значение — двойной нуль с жордановым блоком второго порядка. При $\delta > 0$ пересечения нет, как показано на рис. 4(б), и все собственные значения мнимы (маргинальная устойчивость). При $\delta < 0$ кривые собственных значений сливаются и образуется пузырь комплексных собственных значений, как показано на рис. 4(с, д). Неустойчивость имеет место в результате бифуркации Гамильтона—Хопфа на пороге (см. (5.7)).

6. АЗИМУТАЛЬНАЯ МАГНИТОВРАЩАТЕЛЬНАЯ НЕУСТОЙЧИВОСТЬ ПРИ МАЛОМ Rm КАК НЕУСТОЙЧИВОСТЬ, ПОРОЖДЕННАЯ ДИССИПАЦИЕЙ

Рассмотрим влияние вязкости и сопротивления жидкости на порог неустойчивости идеальной системы. Вначале заметим, что при $Ro = RbN^2$ и $Re = Rm$ корни характеристического полинома (3.7) могут быть найдены в явном виде:

$$\lambda_{1,2} = -i(n + 1) - \frac{1}{Rm} \pm i\sqrt{N^2(n + 1)^2 + 1 - N^2}, \quad (6.1)$$

$$\lambda_{3,4} = -i(n - 1) - \frac{1}{Rm} \pm i\sqrt{N^2(n - 1)^2 + 1 - N^2}. \quad (6.2)$$

Это означает, что при $Rm = 1$ чисто мнимые собственные значения (5.3) и (5.4) сдвигаются диссипацией влево на комплексной плоскости (асимптотическая устойчивость). Кроме того, если

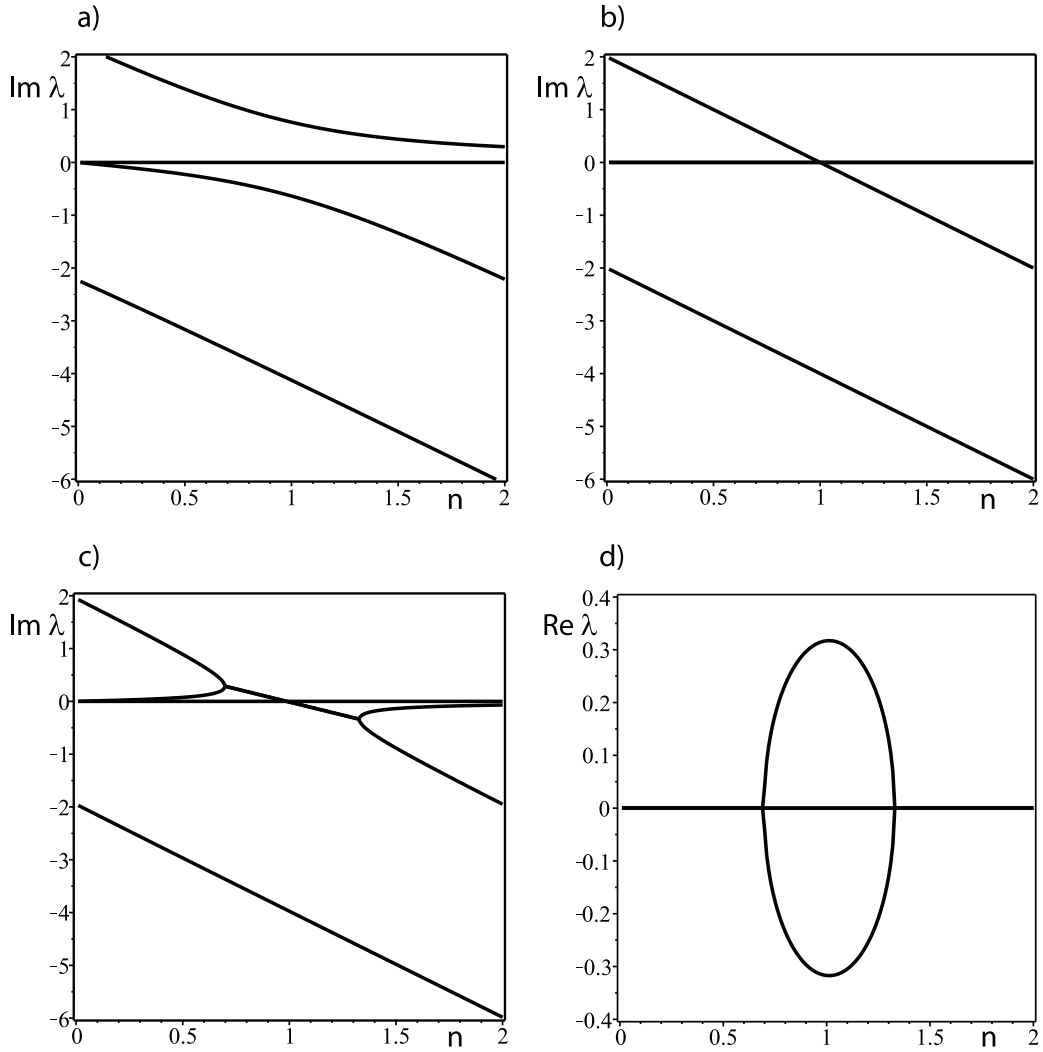


Рис. 4. Частоты и скорости роста корней дисперсионного соотношения (5.2) при выполнении ограничения $N = 1$ для (a) $Ro = -0,75$ и $Rb = -1$ ($\delta = 0,25$), (b) $Ro = -0,75$ и $Rb = -0,75$ ($\delta = 0$) и (c,d) $Ro = -0,75$ и $Rb = -0,7$ ($\delta = -0,05$).

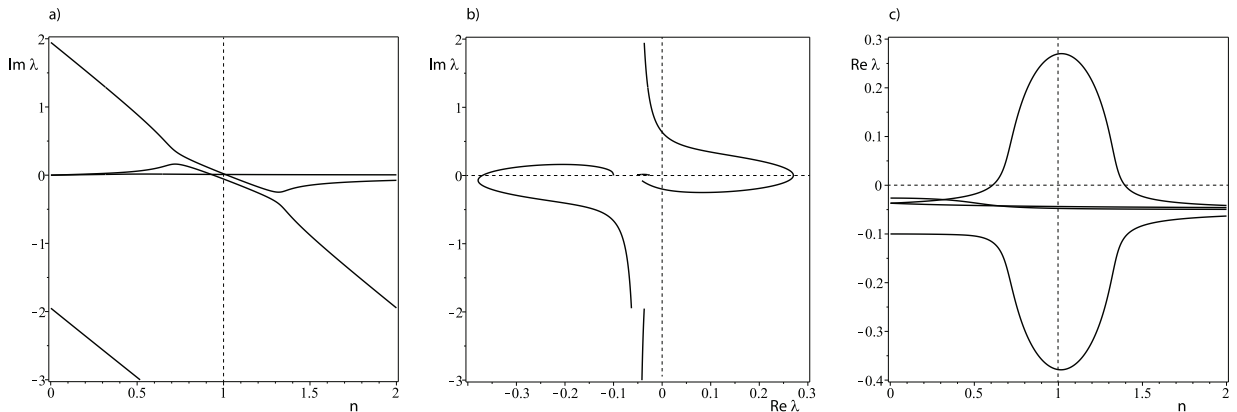


Рис. 5. Частоты и скорости роста в диссипативной системе при $Re = 10^6$, $Rm = 10$, $Rm = 10^{-5}$ и $Ro = -0,75$, $Rb = -0,7$, $N = 1$. Увеличение интервала неустойчивости из-за несовершенного объединения мод в случае, когда Re и Rm не равны друг другу.

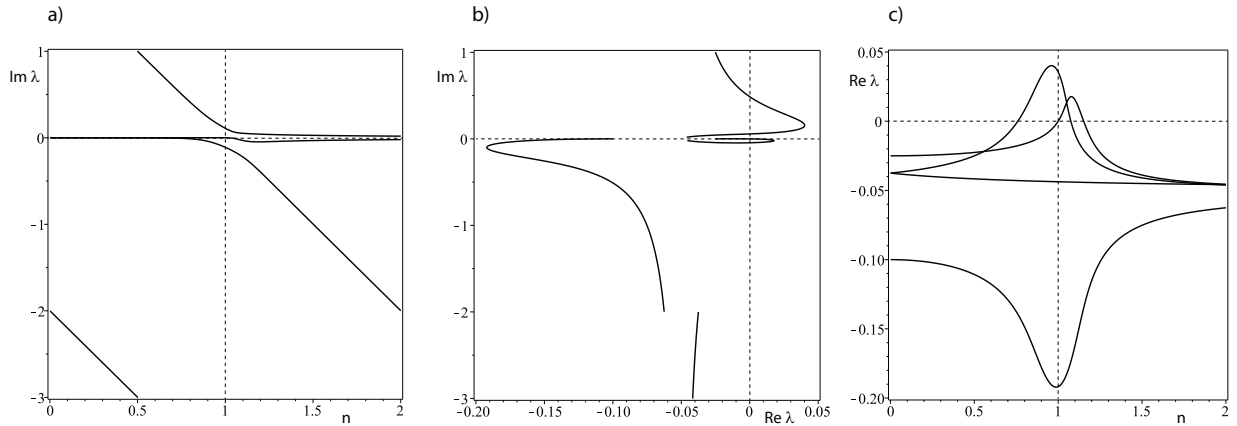


Рис. 6. Частоты и скорости роста в диссипативной системе при $Re = 10^6$, $Rm = 10$, $Pm = 10^{-5}$, $Ro = -0,75$, $Rb = -0,75$, $N = 1$. Отсутствие пересечения частот и положительные скорости роста эквипартиции.

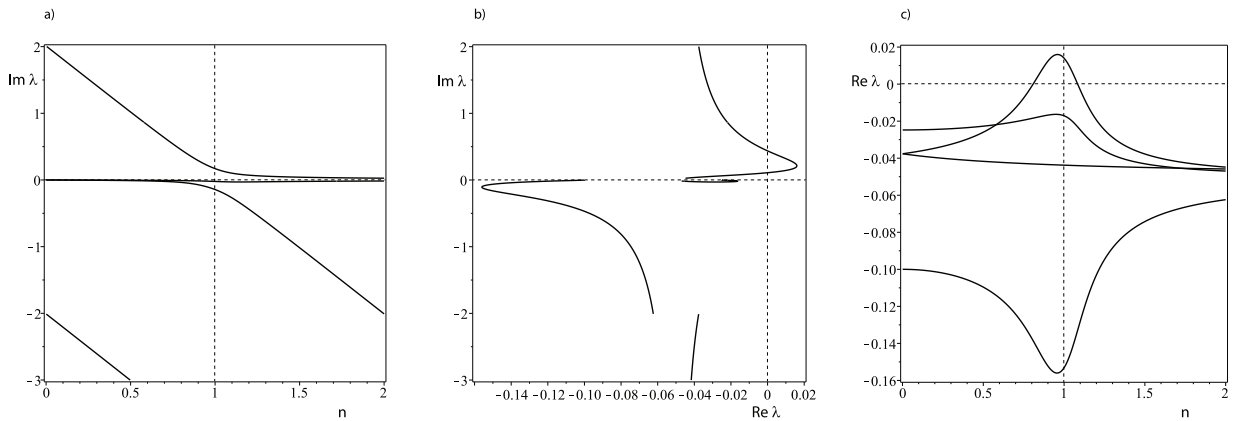


Рис. 7. Частоты и скорости роста в диссипативной системе при $Re = 10^6$, $Rm = 10$, $Pm = 10^{-5}$, $Ro = -0,75$, $Rb = -0,76$, $N = 1$. Порожденная диссипацией неустойчивость для случая, когда параметры находятся в области устойчивости для идеальной системы.

гидродинамическое и магнитное числа Рейнольдса равны друг другу, то диссипация уменьшает область неустойчивости.

Мы демонстрируем это явление, применяя критерий Бильхарца (см. [5]) к полиному (3.7) и полагая $Re = Rm$, $N = 1$ и $\delta = Ro - Rb$, чтобы получить следующую границу области устойчивости:

$$4\delta^3 + \left(n^2 + 12 + \frac{9}{Rm^2} \right) \delta^2 + 2 \left(10n^2 + 6 + \frac{3n^2}{Rm^2} + \frac{9}{Rm^2} + \frac{3}{Rm^4} \right) \delta + \left(4 + \frac{1}{Rm^2} \right) \left((n+1)^2 + \frac{1}{Rm^2} \right) \left((n-1)^2 + \frac{1}{Rm^2} \right) = 0. \quad (6.3)$$

Из рис. 3(а) видно, что при $Pm = 1$ плоская область неустойчивости системы с диссипацией меньше, чем область неустойчивости идеальной системы, растет с ростом Rm и стремится к области неустойчивости идеальной системы при стремлении числа Рейнольдса к бесконечности.

Изучим вопрос, что происходит с порогом устойчивости идеальной системы, если отношение вязкости к сопротивлению меньше единицы и особенно если $Pm \ll 1$. На рис. 3(б) изображена (темно-серым цветом) область неустойчивости системы с вязкостью и сопротивлением, в которой

$N = 1$, $Re \gg Rm$ и $Pm = 10^{-5}$. Область, закрашенная светло-серым цветом, является частью области неустойчивости идеальной системы, закрашенной светло-серым цветом на рис. 3(a). Темно-серым цветом на рис. 3(b) закрашена область неустойчивости для тех значений параметров, которые соответствуют маргинальной устойчивости идеальной системы. Прямая $\delta = 0$, которой принадлежит чандрасекаровская эквипартиция, пересекает область неустойчивости, вызванной диссипацией. Если Pm фиксировано, а Re и Rm бесконечно возрастают, то область неустойчивости, вызванной диссипацией, расширяется и стремится к некоторому пределу. Например, при $Ro = -\frac{3}{4}$ разность $\delta := Ro - Rb$ не может превзойти величину $-\frac{3}{4} + \frac{25}{32} = \frac{1}{32} = 0,03125$. Указанная величина может быть достигнута только в предельном безиндукционном случае $Pm = 0$ (см. [31, 33, 34]). Собственные значения диссипативной системы, показанной на рис. 5–7, показывают расширение области маргинальной устойчивости под воздействием двух различных диссипативных механизмов: вязкости и сопротивления. В отличие от случая, в котором коэффициенты вязкости и сопротивления совпадают, преобладание сопротивления над вязкостью действительно приводит к азимутальным нарушениям устойчивости магнитного поля или вращения для тех значений параметров, для которых указанные нарушения для идеальной системы запрещены. В частности, несоответствие вязкости и сопротивления нарушает устойчивость чандрасекаровской эквипартиции. Представляет интерес дальнейшее изучение этого эффекта с использованием фундаментальной симметрии гамильтоновой системы, чтобы классифицировать режимы идеальной системы и понять, какое воздействие на режимы с положительным или отрицательным симплектическим знаком (см. [27, 62]) могут оказывать возмущения вязкости и сопротивления. Эти вопросы будут изучены впоследствии.

Автор признателен С. Ю. Доброхотову за полезные обсуждения.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Арнольд В. И. О матрицах, зависящих от параметра// Усп. мат. наук. — 1971. — 26, № 2. — С. 101–114.
2. Balbus S. A., Hawley J. F. A powerful local shear instability in weakly magnetized disks 1. Linear analysis// *Astrophys. J.* — 1991. — 376. — С. 214–222.
3. Balbus S. A., Hawley J. F. A powerful local shear instability in weakly magnetized disks 4. Nonaxisymmetric perturbations// *Astrophys. J.* — 1992. — 400. — С. 214–222.
4. Beletsky V. V., Levin E. M. Stability of a ring of connected satellites// *Acta Astron.* — 1985. — 12. — С. 765–769.
5. Bilharz H. Bemerkung zu einem Satze von Hurwitz// *Z. Angew. Math. Mech.* — 1944. — 24. — С. 77–82.
6. Bloch A. M., Krishnaprasad P. S., Marsden J. E., Ratiu T. S. Dissipation-induced instabilities// *Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire* — 1994. — 11. — С. 37–90.
7. Bogoyavlenskij O. I. Unsteady equipartition MHD solutions// *J. Math. Phys.* — 2004. — 45. — С. 381–390.
8. Boldyrev S., Huynh D., Pariev V. Analog of astrophysical magnetorotational instability in a Couette–Taylor flow of polymer fluids// *Phys. Rev. E.* — 2009. — 80. — 066310.
9. Bolotin V. V. Nonconservative problems of the theory of elastic stability. — Oxford–London–New York–Paris: Pergamon Press, 1963.
10. Bottema O. The Routh–Hurwitz condition for the biquadratic equation// *Indag. Math.* — 1956. — 18. — С. 403–406.
11. Bridges T. J., Dias F. Enhancement of the Benjamin–Feir instability with dissipation// *Phys. Fluids.* — 2007. — 19. — 104104.
12. Chandrasekhar S. On the stability of the simplest solution of the equations of hydromagnetics// *Proc. Natl. Acad. Sci. USA.* — 1956. — 42. — С. 273–276.
13. Chandrasekhar S. The stability of nondissipative Couette flow in hydromagnetics// *Proc. Natl. Acad. Sci. USA.* — 1960. — 46. — С. 253–257.
14. Chandrasekhar S. Hydrodynamic and hydromagnetic stability. — Oxford: Oxford University Press, 1961.
15. Chandrasekhar S. A scientific autobiography: S. Chandrasekhar. — Singapore: World Scientific, 2010.
16. Dobrokhotov S., Shafarevich A. Parametrix and the asymptotics of localized solutions of the Navier–Stokes equations in R^3 , linearized on a smooth flow// *Math. Notes.* — 1992. — 51. — С. 47–54.
17. Ebrahimi F., Lefebvre B., Forest C. B., Bhattacharjee A. Global Hall-MHD simulations of magnetorotational instability in the plasma Couette flow experiment// *Phys. Plasmas.* — 2011. — 18. — 062904.

18. *Eckhardt B., Yao D.* Local stability analysis along Lagrangian paths// *Chaos Solitons Fractals.* — 1995. — 5, №11. — С. 2073–2088.
19. *Eckhoff K. S.* On stability for symmetric hyperbolic systems, I// *J. Differential Equations.* — 1981. — 40. — С. 94–115.
20. *Eckhoff K. S.* Linear waves and stability in ideal magnetohydrodynamics// *Phys. Fluids.* — 1987. — 30. — С. 3673–3685.
21. *Friedlander S., Vishik M. M.* On stability and instability criteria for magnetohydrodynamics// *Chaos.* — 1995. — 5. — С. 416–423.
22. *Golovin S. V., Krutikov M. K.* Complete classification of stationary flows with constant total pressure of ideal incompressible infinitely conducting fluid// *J. Phys. A.* — 2012. — 45. — 235501.
23. *Ji H., Balbus S.* Angular momentum transport in astrophysics and in the lab// *Phys. Today.* — 2013. — August 2013. — С. 27–33.
24. *Kapitsa P. L.* Stability and passage through the critical speed of the fast spinning rotors in the presence of damping// *Z. Tech. Phys.* — 1939. — 9. — С. 124–147.
25. *Kirillov O. N.* Campbell diagrams of weakly anisotropic flexible rotors// *Proc. R. Soc. Lond. Ser. A Math. Phys. Eng. Sci.* — 2009. — 465. — С. 2703–2723.
26. *Kirillov O. N.* Stabilizing and destabilizing perturbations of PT-symmetric indefinitely damped systems// *Philos. Trans. R. Soc. Lond. Ser. A Math. Phys. Eng. Sci.* — 2013. — 371. — 20120051.
27. *Kirillov O. N.* Nonconservative stability problems of modern physics. — Berlin–Boston: De Gruyter, 2013.
28. *Kirillov O. N., Seyranian A. P.* Metamorphoses of characteristic curves in circulatory systems// *J. Appl. Math. Mech.* — 2002. — 66, №3. — С. 371–385.
29. *Kirillov O. N., Stefani F.* On the relation of standard and helical magnetorotational instability// *Astrophys. J.* — 2010. — 712. — С. 52–68.
30. *Kirillov O. N., Stefani F.* Standard and helical magnetorotational instability: How singularities create paradoxal phenomena in MHD// *Acta Appl. Math.* — 2012. — 120. — С. 177–198.
31. *Kirillov O. N., Stefani F.* Extending the range of the inductionless magnetorotational instability// *Phys. Rev. Lett.* — 2013. — 111. — 061103.
32. *Kirillov O. N., Stefani F., Fukumoto Y.* A unifying picture of helical and azimuthal MRI, and the universal significance of the Liu limit// *Astrophys. J.* — 2012. — 756. — С. 83.
33. *Kirillov O. N., Stefani F., Fukumoto Y.* Instabilities of rotational flows in azimuthal magnetic fields of arbitrary radial dependence// *Fluid Dyn. Res.* — 2014. — 46. — 031403.
34. *Kirillov O. N., Stefani F., Fukumoto Y.* Local instabilities in magnetized rotational flows: A short-wavelength approach// *J. Fluid Mech.* — 2014. — 760. — С. 591–633.
35. *Kirillov O. N., Verhulst F.* Paradoxes of dissipation-induced destabilization or who opened Whitney’s umbrella?// *Z. Angew. Math. Mech.* — 2010. — 90, №6. — С. 462–488.
36. *Krechetnikov R., Marsden J. E.* Dissipation-induced instabilities in finite dimensions// *Rev. Modern Phys.* — 2007. — 79, №2. — С. 519–553.
37. *Krueger E. R., Gross A., Di Prima R. C.* On relative importance of Taylor-vortex and nonaxisymmetric modes in flow between rotating cylinders// *J. Fluid Mech.* — 1966. — 24, №3. — С. 521–538.
38. *Kucherenko V. V., Kryuko A.* Interaction of Alfvén waves in the linearized system of magnetohydrodynamics for an incompressible ideal fluid// *Russ. J. Math. Phys.* — 2013. — 20, №1. — С. 56–67.
39. *Landman M. J., Saffman P. G.* The three-dimensional instability of strained vortices in a viscous fluid// *Phys. Fluids.* — 1987. — 30. — С. 2339–2342.
40. *Langford W. F.* Hopf meets Hamilton under Whitney’s umbrella// *Solid Mech. Appl.* — 2003. — 110. — С. 157–165.
41. *Latter H. N., Rein H., Ogilvie G. I.* The gravitational instability of a stream of coorbital particles// *Mon. Not. R. Astron. Soc.* — 2012. — 423. — С. 1267–1276.
42. *Liu W., Goodman J., Herron I., Ji H.* Helical magnetorotational instability in magnetized Taylor–Couette flow// *Phys. Rev. E.* — 2006. — 74, №1. — 056302.
43. *MacKay R. S.* Movement of eigenvalues of Hamiltonian equilibria under non-Hamiltonian perturbation// *Phys. Lett. A.* — 1991. — 155. — С. 266–268.
44. *Maddocks J. H., Overton M. L.* Stability theory for dissipatively perturbed Hamiltonian systems// *Comm. Pure Appl. Math.* — 1995. — 48. — С. 583–610.
45. *Michael D. H.* The stability of an incompressible electrically conducting fluid rotating about an axis when current flows parallel to the axis// *Mathematika.* — 1954. — 1. — С. 5–50.
46. *Montgomery D.* Hartmann, Lundquist, and Reynolds: The role of dimensionless numbers in nonlinear magnetofluid behavior// *Plasma Phys. Control. Fusion.* — 1993. — 35. — С. B105–B113.

47. *Ogilvie G. I., Pringle J. E.* The nonaxisymmetric instability of a cylindrical shear flow containing an azimuthal magnetic field// *Mon. Not. R. Astron. Soc.* — 1996. — 279. — С. 152–164.
48. *Ogilvie G. I., Potter A. T.* Magnetorotational-type instability in Couette–Taylor flow of a viscoelastic polymer liquid// *Phys. Rev. Lett.* — 2008. — 100. — 074503.
49. *Ogilvie G. I., Proctor M. R. E.* On the relation between viscoelastic and magnetohydrodynamic flows and their instabilities// *J. Fluid Mech.* — 2003. — 476. — С. 389–409.
50. *Rayleigh J. W. S.* On the dynamics of revolving fluids// *Proc. R. Soc. Lond. A.* — 1917. — 93. — С. 148–154.
51. *Rüdiger G., Gellert M., Schultz M., Hollerbach R.* Dissipative Taylor–Couette flows under the influence of helical magnetic fields// *Phys. Rev. E.* — 2010. — 82. — 016319.
52. *Rüdiger G., Gellert M., Schultz M., Hollerbach R., Stefani F.* The azimuthal magnetorotational instability (AMRI)// *Mon. Not. R. Astron. Soc.* — 2014. — 438. — С. 271–277.
53. *Rüdiger G., Kitchatinov L., Hollerbach R.* Magnetic processes in astrophysics. — New York: Wiley-VCH, 2013.
54. *Seilmayer M., Galindo V., Gerbeth G., Gundrum T., Stefani F., Gellert M., Rüdiger G., Schultz M., Hollerbach R.* Experimental evidence for nonaxisymmetric magnetorotational instability in an azimuthal magnetic field// *Phys. Rev. Lett.* — 2014. — 113. — 024505.
55. *Smith D. M.* The motion of a rotor carried by a flexible shaft in flexible bearings// *Proc. R. Soc. Lond. A.* — 1933. — 142. — С. 92–118.
56. *Squire J., Bhattacharjee A.* Nonmodal growth of the magnetorotational instability// *Phys. Rev. Lett.* — 2014. — 113. — 025006.
57. *Stefani F., Gailitis A., Gerbeth G.* Magnetohydrodynamic experiments on cosmic magnetic fields// *Z. Angew. Math. Mech.* — 2008. — 88. — С. 930–954.
58. *Swaters G. E.* Modal interpretation for the Ekman destabilization of inviscidly stable baroclinic flow in the Phillips model// *J. Phys. Oceanogr.* — 2010. — 40. — С. 830–839.
59. *Thorpe S. A., Smyth W. D., Li L.* The effect of small viscosity and diffusivity on the marginal stability of stably stratified shear flows// *J. Fluid Mech.* — 2013. — 731. — С. 461–476.
60. *Velikhov E. P.* Stability of an ideally conducting liquid flowing between cylinders rotating in a magnetic field// *Sov. Phys. JETP-USSR* — 1959. — 9. — С. 995–998.
61. *Vishik M., Friedlander S.* Asymptotic methods for magnetohydrodynamic instability// *Quart. Appl. Math.* — 1998. — 56. — С. 377–398.
62. *Yakubovich V. A., Starzhinskii V. M.* Linear differential equations with periodic coefficients. — New York: Wiley, 1975.
63. *Ziegler H.* Die Stabilitätskriterien der Elastomechanik// *Ing.-Arch.* — 1952. — 20. — С. 49–56.
64. *Zou R., Fukumoto Y.* Local stability analysis of the azimuthal magnetorotational instability of ideal MHD flows// *Prog. Theor. Exp. Phys.* — 2014. — 113J01.

О. Н. Кириллов

Helmholtz-Zentrum Dresden Rossendorf, Дрезден, Германия

E-mail: o.kirillov@hzdr.de

UDC 531.3, 532.5, 537.6

Dissipation-induced instabilities in magnetized flows

© 2016 O. N. Kirillov

Abstract. We study local instabilities of a differentially rotating viscous flow of electrically conducting incompressible fluid subject to an external azimuthal magnetic field. The hydrodynamically stable flow can be destabilized by the magnetic field both in the ideal and in the viscous and resistive system giving rise to the azimuthal magnetorotational instability. A special solution to the equations of the ideal magnetohydrodynamics characterized by the constant total pressure, the fluid velocity parallel to the direction of the magnetic field, and by the magnetic and kinetic energies that are finite and equal — the Chandrasekhar equipartition solution — is marginally stable in the absence of viscosity and resistivity. Performing a local stability analysis we find the conditions when the azimuthal magnetorotational instability can be interpreted as a dissipation-induced instability of the Chandrasekhar equipartition solution.

REFERENCES

1. V. I. Arnold, "O matritsakh, zavisyaschikh ot parametra" [On matrices depending on parameter], *Usp. mat. nauk* [Progr. Math. Sci.], 1971, **26**, No. 2, 101–114 (in Russian).
2. S. A. Balbus and J. F. Hawley, "A powerful local shear instability in weakly magnetized disks 1. Linear analysis," *Astrophys. J.*, 1991, **376**, 214–222.
3. S. A. Balbus and J. F. Hawley, "A powerful local shear instability in weakly magnetized disks 4. Nonaxisymmetric perturbations," *Astrophys. J.*, 1992, **400**, 610–621.
4. V. V. Beletsky and E. M. Levin, "Stability of a ring of connected satellites," *Acta Astron.*, 1985, **12**, 765–769.
5. H. Bilharz, "Bemerkung zu einem Satze von Hurwitz," *Z. Angew. Math. Mech.*, 1944, **24**, 77–82.
6. A. M. Bloch, P. S. Krishnaprasad, J. E. Marsden, and T. S. Ratiu, "Dissipation-induced instabilities," *Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire*, 1994, **11**, 37–90.
7. O. I. Bogoyavlenskij, "Unsteady equipartition MHD solutions," *J. Math. Phys.*, 2004, **45**, 381–390.
8. S. Boldyrev, D. Huynh, and V. Pariev, "Analog of astrophysical magnetorotational instability in a Couette–Taylor flow of polymer fluids," *Phys. Rev. E*, 2009, **80**, 066310.
9. V. V. Bolotin, *Nonconservative Problems of the Theory of Elastic Stability*, Pergamon Press, Oxford–London–New York–Paris, 1963.
10. O. Bottema, "The Routh–Hurwitz condition for the biquadratic equation," *Indag. Math.*, 1956, **18**, 403–406.
11. T. J. Bridges and F. Dias, "Enhancement of the Benjamin–Feir instability with dissipation," *Phys. Fluids*, 2007, **19**, 104104.
12. S. Chandrasekhar, "On the stability of the simplest solution of the equations of hydromagnetics," *Proc. Natl. Acad. Sci. USA*, 1956, **42**, 273–276.
13. S. Chandrasekhar, "The stability of nondissipative Couette flow in hydromagnetics," *Proc. Natl. Acad. Sci. USA*, 1960, **46**, 253–257.
14. S. Chandrasekhar, *Hydrodynamic and Hydromagnetic Stability*, Oxford University Press, Oxford, 1961.
15. S. Chandrasekhar, *A Scientific Autobiography: S. Chandrasekhar*, World Scientific, Singapore, 2010.
16. S. Dobrokhotov and A. Shafarevich, "Parametrix and the asymptotics of localized solutions of the Navier–Stokes equations in R^3 , linearized on a smooth flow," *Math. Notes*, 1992, **51**, 47–54.
17. F. Ebrahimi, B. Lefebvre, C. B. Forest, and A. Bhattacharjee, "Global Hall–MHD simulations of magnetorotational instability in the plasma Couette flow experiment," *Phys. Plasmas*, 2011, **18**, 062904.
18. B. Eckhardt and D. Yao, "Local stability analysis along Lagrangian paths," *Chaos Solitons Fractals*, 1995, **5** (11), 2073–2088.
19. K. S. Eckhoff, "On stability for symmetric hyperbolic systems, I.," *J. Differ. Equ.*, 1981, **40**, 94–115.
20. K. S. Eckhoff, "Linear waves and stability in ideal magnetohydrodynamics," *Phys. Fluids*, 1987, **30**, 3673–3685.
21. S. Friedlander and M. M. Vishik, "On stability and instability criteria for magnetohydrodynamics," *Chaos*, 1995, **5**, 416–423.
22. S. V. Golovin and M. K. Krutikov, "Complete classification of stationary flows with constant total pressure of ideal incompressible infinitely conducting fluid," *J. Phys. A*, 2012, **45**, 235501.
23. H. Ji and S. Balbus, "Angular momentum transport in astrophysics and in the lab," *Phys. Today*, 2013, **August 2013**, 27–33.
24. P. L. Kapitsa, "Stability and passage through the critical speed of the fast spinning rotors in the presence of damping," *Z. Tech. Phys.*, 1939, **9**, 124–147.

25. O. N. Kirillov, "Campbell diagrams of weakly anisotropic flexible rotors," *Proc. R. Soc. Lond. Ser. A Math. Phys. Eng. Sci.*, 2009, **465**, 2703–2723.
26. O. N. Kirillov, "Stabilizing and destabilizing perturbations of PT-symmetric indefinitely damped systems," *Philos. Trans. R. Soc. Lond. Ser. A Math. Phys. Eng. Sci.*, 2013, **371**, 20120051.
27. O. N. Kirillov, *Nonconservative Stability Problems of Modern Physics*, De Gruyter, Berlin–Boston, 2013.
28. O. N. Kirillov and A. P. Seyranian, "Metamorphoses of characteristic curves in circulatory systems," *J. Appl. Math. Mech.*, 2002, **66** (3), 371–385.
29. O. N. Kirillov and F. Stefani, "On the relation of standard and helical magnetorotational instability," *Astrophys. J.*, 2010, **712**, 52–68.
30. O. N. Kirillov and F. Stefani, "Standard and helical magnetorotational instability: How singularities create paradoxal phenomena in MHD," *Acta Appl. Math.*, 2012, **120**, 177–198.
31. O. N. Kirillov and F. Stefani, "Extending the range of the inductionless magnetorotational instability," *Phys. Rev. Lett.*, 2013, **111**, 061103.
32. O. N. Kirillov, F. Stefani, and Y. Fukumoto, "A unifying picture of helical and azimuthal MRI, and the universal significance of the Liu limit," *Astrophys. J.*, 2012, **756**(83).
33. O. N. Kirillov, F. Stefani, and Y. Fukumoto, "Instabilities of rotational flows in azimuthal magnetic fields of arbitrary radial dependence," *Fluid Dyn. Res.*, 2014, **46**, 031403.
34. O. N. Kirillov, F. Stefani, and Y. Fukumoto, "Local instabilities in magnetized rotational flows: A short-wavelength approach," *J. Fluid Mech.*, 2014, **760**, 591–633.
35. O. N. Kirillov and F. Verhulst, "Paradoxes of dissipation-induced destabilization or who opened Whitney's umbrella?" *Z. Angew. Math. Mech.*, 2010, **90** (6), 462–488.
36. R. Krechetnikov and J. E. Marsden, "Dissipation-induced instabilities in finite dimensions," *Rev. Mod. Phys.*, 2007, **79**, 519–553.
37. E. R. Krueger, A. Gross, and R. C. Di Prima, "On relative importance of Taylor-vortex and nonaxisymmetric modes in flow between rotating cylinders," *J. Fluid Mech.*, 1966, **24** (3), 521–538.
38. V. V. Kucherenko and A. Kryvko, "Interaction of Alfvén waves in the linearized system of magnetohydrodynamics for an incompressible ideal fluid," *Russ. J. Math. Phys.*, 2013, **20** (1), 56–67.
39. M. J. Landman and P. G. Saffman, "The three-dimensional instability of strained vortices in a viscous fluid," *Phys. Fluids*, 1987, **30**, 2339–2342.
40. W. F. Langford, "Hopf meets Hamilton under Whitney's umbrella," *Solid Mech. Appl.*, 2003, **110**, 157–165.
41. H. N. Latter, H. Rein, and G. I. Ogilvie, "The gravitational instability of a stream of coorbital particles," *Mon. Not. R. Astron. Soc.*, 2012, **423**, 1267–1276.
42. W. Liu, J. Goodman, I. Herron, and H. Ji, "Helical magnetorotational instability in magnetized Taylor–Couette flow," *Phys. Rev. E*, 2006, **74** (5), 056302.
43. R. S. MacKay, "Movement of eigenvalues of Hamiltonian equilibria under non-Hamiltonian perturbation," *Phys. Lett. A*, 1991, **155**, 266–268.
44. J. H. Maddocks and M. L. Overton, "Stability theory for dissipatively perturbed Hamiltonian systems," *Commun. Pure Appl. Math.*, 1995, **48**, 583–610.
45. D. H. Michael, "The stability of an incompressible electrically conducting fluid rotating about an axis when current flows parallel to the axis," *Mathematika*, 1954, **1**, 45–50.
46. D. Montgomery, "Hartmann, Lundquist, and Reynolds: The role of dimensionless numbers in nonlinear magnetofluid behavior," *Plasma Phys. Control. Fusion*, 1993, **35**, B105–B113.
47. G. I. Ogilvie and J. E. Pringle, "The nonaxisymmetric instability of a cylindrical shear flow containing an azimuthal magnetic field," *Mon. Not. R. Astron. Soc.*, 1996, **279**, 152–164.
48. G. I. Ogilvie and A. T. Potter, "Magnetorotational-type instability in Couette–Taylor flow of a viscoelastic polymer liquid," *Phys. Rev. Lett.*, 2008, **100**, 074503.
49. G. I. Ogilvie and M. R. E. Proctor, "On the relation between viscoelastic and magnetohydrodynamic flows and their instabilities," *J. Fluid Mech.*, 2003, **476**, 389–409.
50. J. W. S. Rayleigh, "On the dynamics of revolving fluids," *Proc. R. Soc. Lond. A*, 1917, **93**, 148–154.
51. G. Rüdiger, M. Gellert, M. Schultz, and R. Hollerbach, "Dissipative Taylor–Couette flows under the influence of helical magnetic fields," *Phys. Rev. E*, 2010, **82**, 016319.
52. G. Rüdiger, M. Gellert, M. Schultz, R. Hollerbach, and F. Stefani, "The azimuthal magnetorotational instability (AMRI)," *Mon. Not. R. Astron. Soc.*, 2014, **438**, 271–277.
53. G. Rüdiger, L. Kitchatinov, and R. Hollerbach, *Magnetic Processes in Astrophysics*, Wiley-VCH, 2013.

54. M. Seilmayer, V. Galindo, G. Gerbeth, T. Gundrum, F. Stefani, M. Gellert, G. Rüdiger, M. Schultz, and R. Hollerbach, "Experimental evidence for nonaxisymmetric magnetorotational instability in an azimuthal magnetic field," *Phys. Rev. Lett.*, 2014, **113**, 024505.
55. D. M. Smith, "The motion of a rotor carried by a flexible shaft in flexible bearings," *Proc. R. Soc. Lond. A*, 1933, **142**, 92–118.
56. J. Squire and A. Bhattacharjee, "Nonmodal growth of the magnetorotational instability," *Phys. Rev. Lett.*, 2014, **113**, 025006.
57. F. Stefani, A. Gailitis, and G. Gerbeth, "Magnetohydrodynamic experiments on cosmic magnetic fields," *Z. Angew. Math. Mech.*, 2008, **88**, 930–954.
58. G. E. Swaters, "Modal interpretation for the Ekman destabilization of inviscidly stable baroclinic flow in the Phillips model," *J. Phys. Oceanogr.*, 2010, **40**, 830–839.
59. S. A. Thorpe, W. D. Smyth, and L. Li, "The effect of small viscosity and diffusivity on the marginal stability of stably stratified shear flows," *J. Fluid Mech.*, 2013, **731**, 461–476.
60. E. P. Velikhov, "Stability of an ideally conducting liquid flowing between cylinders rotating in a magnetic field," *Sov. Phys. JETP-USSR*, 1959, **9**, 995–998.
61. M. Vishik and S. Friedlander, "Asymptotic methods for magnetohydrodynamic instability," *Quart. Appl. Math.*, 1998, **56**, 377–398.
62. V. A. Yakubovich and V. M. Starzhinskii, *Linear Differential Equations with Periodic Coefficients*. V. 1 and 2, Wiley, New York, 1975.
63. H. Ziegler, "Die Stabilitätskriterien der Elastomechanik," *Archive Appl. Mech.*, 1952, **20**, 49–56.
64. R. Zou and Y. Fukumoto, "Local stability analysis of the azimuthal magnetorotational instability of ideal MHD flows," *Prog. Theor. Exp. Phys.*, 2014, 113J01.

Oleg N. Kirillov
Helmholtz-Zentrum Dresden Rossendorf, Dresden, Germany
E-mail: o.kirillov@hzdr.de