Современная математика. Фундаментальные направления. Том 60 (2016). С. 23–81

УДК 517+517.9+536

О ПРИРОДЕ ЛОКАЛЬНОГО РАВНОВЕСИЯ УРАВНЕНИЙ КАРЛЕМАНА И ГОДУНОВА—СУЛТАНГАЗИНА

© 2016 г. **О. А. ВАСИЛЬЕВА, С. А. ДУХНОВСКИЙ, Е. В. РАДКЕВИЧ**

Аннотация. Для одномерных кинетических уравнений Карлемана и Годунова—Султангазина получены условия локального равновесия для решений задачи Коши с ограниченной энергией и периодическими начальными данными. Более того, доказана экспоненциальная стабилизация к состоянию равновесия.

СОДЕРЖАНИЕ

1. Введение

В этой статье мы продолжим исследование [2] стабилизации (асимптотической устойчивости) решений нелинейных гиперболических уравнений в частных производных на примере так называемых дискретных моделей кинетического уравнения Больцмана [1,3]. Гипотеза такова: *на больших*

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (гранты № 15-01-03587, № 09-01-12024).

временах решения задачи Коши с ограниченной энергией распадаются на суперпозицию слабо взаимодействующих солитонов и убывающих дисперсионных волн [5, 9, 10].

В этой статье мы ограничимся исследованием стабилизации решений задачи Коши для так называемых одномерных уравнений Карлемана [3, 4]:

$$\partial_t u + \partial_x u = -\frac{1}{\varepsilon}(u^2 - w^2), \quad x \in \mathbb{R},\ t > 0, \tag{1.1}$$
$$\partial_t w - \partial_x w = \frac{1}{\varepsilon}(u^2 - w^2),$$
$$u|_{t=0} = u^0,\ w|_{t=0} = w^0$$

и Годунова—Султангазина

$$\partial_t u + \partial_x u = \frac{1}{\varepsilon}(v^2 - uw) \tag{1.2}$$
$$\partial_t v = -\frac{2}{\varepsilon}(v^2 - uw)$$
$$\partial_t w - \partial_x w = \frac{1}{\varepsilon}(v^2 - uw)$$
$$v(0) = v^0,\ u(0) = u^0,\ w(0) = w^0. \tag{1.3}$$

Здесь $x \in S^1 = [0, 2\pi]$ и $U(t, 0) = U(t, 2\pi)$ — пространственно-периодические граничные условия, ε — малый параметр, соответствующий числу Кнудсена.

Система (1.1) является кинетическим уравнением Больцмана модельного одномерного газа [1], состоящего из частиц со скоростями $c = 1, -1$ (их плотности соответственно $u = n_1(x, t)$, $w = n_2(x, t)$). Для этой модели не сохраняются импульс и энергия. На примере модели Карлемана хорошо видна суть уравнения Больцмана. Оно описывает смесь «конкурирующих» процессов: релаксации и свободного движения. Релаксация стремится сделать n_1 равным n_2 — «максвеллизировать». Свободное движение разгоняет эти две функции распределения в разные стороны (описывая слабо взаимодействующие солитоны).

Система же (1.2) является кинетическим уравнением Больцмана модельного одномерного газа [1], состоящего из частиц со скоростями $c = 1,\ 0, -1$ (их плотности соответственно $u = n_1(x, t)$, $v = n_2(x, t)$, $w = n_3(x, t)$). Две частицы — одна первого, а вторая третьего типов, сталкиваясь с вероятностью, пропорциональной $uw = n_1(x, t)n_3(x, t)$, вызывают реакцию, переводящую их в две частицы второго типа. В свою очередь, две частицы второго типа, сталкиваясь с вероятностью $v^2 = n_2^2(x, t)$, переходят в одну частицу первого типа и в одну частицу третьего типа. Здесь сохраняется импульс, а энергия — нет. Модель (1.2) при всей схожести с моделью Карлемана не имеет квадратичных диссипирующих интегралов, в связи с чем, как отмечено в [3], получение глобальной теоремы существования затруднительно.

Мы уточним результаты [7] о природе локального равновесия для дискретных кинетических моделей для периодических начальных данных. На наш взгляд, чрезвычайно простое доказательство глобальной разрешимости задачи Коши для одномерного кинетического уравнения (1.1) позволяет исследовать природу локального равновесия и установить скорость стабилизации к состоянию равновесия решений задачи Коши с ограниченной энергией и периодическими начальными данными. Здесь ε — малый параметр, соответствующий числу Кнудсена в кинетической теории. Система Карлемана хорошо исследована. Например, в [4] приводится доказательство Темама теоремы существования и единственности решения двумерной системы Карлемана в классах Соболева $W^{1,2}$. Приводимое нами доказательство позволяет выделить недиссипативную часть решения и свести задачу о существовании глобального решения к разрешимости соответствующего уравнения для секулярных членов. Как мы покажем ниже, для системы Карлемана такое уравнение имеет решение, аннулирующее недиссипативную часть решения задачи Коши. Мы приведем основные идеи доказательств и прежде всего исследуем интегродифференциальный оператор с трансляцией, определяющий линеаризацию задачи Коши.

В заключение — коротко о структуре предлагаемой работы. Первые три пункта раздела 2 об уравнении Карлемана носят предварительный характер. В пунктах 2.4–2.6 этого раздела — вывод условия секулярности, исследование его разрешимости и исследование разрешимости нелинейного уравнения для дисперсионной волны невозмущенной задачи Коши. В пункте 2.7 доказывается разрешимость линеаризованной задачи в весовых L_2 классах. В последнем пункте этого раздела доказывается теорема существования и единственности глобального решения задачи Коши (1.1) и его экспоненциальной стабилизации к состоянию равновесия.

Раздел 3 статьи посвящен исследованию стабилизации периодических решений задачи Коши с конечной энергией для модели Годунова—Султангазина. Здесь развиваются подходы и методы раздела 2 и устанавливается их универсальность для дискретных моделей типа Броудэла. Распределение материла раздела по пунктам идентично предыдущему разделу.

2. Локальное равновесие для уравнения Карлемана

2.1. Малые возмущения. Начнем наши исследования с периодических начальных данных задачи Коши. Мы исследуем задачу Коши (1.1) для малых возмущений состояния равновесия $w_e^2 = u_e^2$, $u_e = w_e > 0$, системы (1.1). Положим

$$u = u_e + w_e^{1/2}\varepsilon^2\widehat{u},\ \ w = w_e + w_e^{1/2}\varepsilon^2\widehat{w} \tag{2.1}$$

Тогда

$$\begin{gathered}\partial_t\widehat{u} + \partial_x\widehat{u} - 2w_e\frac{1}{\varepsilon}(\widehat{w}-\widehat{u}) = -\varepsilon w_e^{1/2}(\widehat{u}+\widehat{w})(\widehat{u}-\widehat{w}),\quad x\in\mathbb{R},\ t>0, \qquad (2.2)\\ \partial_t\widehat{w} - \partial_x\widehat{w} + 2w_e\frac{1}{\varepsilon}(\widehat{w}-\widehat{u}) = \varepsilon w_e^{1/2}(\widehat{u}+\widehat{w})(\widehat{u}-\widehat{w}).\\ \widehat{u}|_{t=0} = \widehat{u}^0,\quad \widehat{w}|_{t=0} = \widehat{w}^0.\end{gathered}$$

Для периодических решении с нулевыми средними

$$\widehat{u}(t,x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}_0} u_k(t)e^{ikx},\quad \widehat{w}(t,x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}_0} w_k(t)e^{ikx},\quad \mathbb{Z}_0 = \{k\in\mathbb{Z}, k\neq 0\},$$

введем весовые пространства $\mathcal{H}_\sigma$, $W^1_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+;\mathcal{H}_\sigma)$, $L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+;\mathcal{H}_\sigma)$ с нормами:

$$\|\widehat{u}|_{t=0}\|^2_{\mathcal{H}_\sigma} = \sum_{k\in\mathbb{Z}_0} k^{2\sigma}|u_k^0|^2,$$

$$\|\widehat{u}\|_{W^1_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+;\mathcal{H}_\sigma)} = \|\frac{d}{dt}\widehat{u}\|_{L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+;\mathcal{H}_{\sigma-1})} + \|\widehat{u}\|_{L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+;\mathcal{H}_\sigma)}$$

$$\|\widehat{u}\|^2_{L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+;\mathcal{H}_\sigma)} = \int\limits_0^\infty e^{2\gamma t}\sum_{k\in\mathbb{Z}_0} k^{2\sigma}|u_k(t)|^2\,dt.$$

Теорема 2.1. *Существуют такие постоянные $\gamma > 0$, $\gamma = O(\varepsilon)$, $q\in(0,1)$, $q = O(1)$, что для периодических начальных данных $(\widehat{u}^0,\widehat{w}^0)$ с нулевыми средними и ограниченной нормой*

$$\sqrt{\varepsilon}\Big(\|\widehat{u}^0\|_{\mathcal{H}_\sigma} + \|\widehat{w}^0\|_{\mathcal{H}_\sigma}\Big) \leqslant q \tag{2.3}$$

для $\sigma > 2$ существует глобальное решение $(\widehat{u},\widehat{w}) \in W^1_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+;\mathcal{H}_\sigma)$ задачи Коши (2.2). *Отсюда следует принцип локального равновесия с экспоненциальной стабилизацией к состоянию равновесия.*

Из (2.2) следует закон сохранения

$$\partial_t(\widehat{u}+\widehat{w}) + \partial_x(\widehat{u}-\widehat{w}) = 0,$$

Для коэффициентов Фурье имеем

$$\frac{d}{dt}u_k + iku_k = -(\frac{d}{dt}w_k - ikw_k).$$

$$\frac{d}{dt}w_k - ikw_k + 2w_e\frac{1}{\varepsilon}(w_k-u_k) = \varepsilon w_e^{1/2}\sum_{k_1+k_2=k}(u_{k_1}+w_{k_1})(u_{k_2}-w_{k_2})$$

Интегрируя первое уравнение, получим

$$u_k = -w_k + (u_k^0 + w_k^0)e^{-ikt} + 2ik\int\limits_0^t e^{ik(s-t)}w_k ds, \quad k \neq 0, \tag{2.4}$$

$$u_0 + w_0 \equiv 0,$$

если предположить, что выполнено

Условие 2.1.

$$u_0^0 + w_0^0 = \int\limits_0^1 (u_0 + w_0)dx = 0.$$

Для $k = 0$ в силу условия (2.1) имеем

$$\frac{d}{dt}w_0 + 4w_e\frac{1}{\varepsilon}w_0 = \varepsilon w_e^{1/2}\sum_{k_1+k_2=0,\ k_1\neq 0}((u_{k_1} - w_{k_1})(u_{k_2} + w_{k_2})$$

или

$$\frac{d}{dt}w_0 + 4w_e\frac{1}{\varepsilon}w_0 = \varepsilon w_e^{1/2}(d_0 + 2l_0(w) + 4B_0(w,w)), \tag{2.5}$$

где

$$d_0 = \sum_{k_1\neq 0}(u_{k_1}^0 + w_{k_1}^0)((u_{-k_1}^0 + w_{-k_1}^0),$$

$$l_0(w) = \sum_{k_1\neq 0}\Big\{(u_{k_1}^0 + w_{k_1}^0)e^{-ik_1t}(-ik_1\int\limits_0^t e^{-ik_1(s-t)}w_{-k_1}ds) +$$

$$+\Big(ik_1\int\limits_0^t e^{ik_1(s-t)}w_{k_1}ds - w_{k_1}\Big)((u_{-k_1}^0 + w_{-k_1}^0)e^{ik_1t}\Big\},$$

$$B_0(w,w) = \sum_{k_1\neq 0}(-ik_1\int\limits_0^t e^{-ik_1(s-t)}w_{-k_1}ds)\Big(ik_1\int\limits_0^t e^{ik_1(s-t)}w_{k_1}ds - w_{k_1}\Big).$$

Интегрируя (2.5), получим

$$w_0 = \varepsilon w_e^{1/2}\int\limits_0^t e^{4w_e\frac{1}{\varepsilon}(s-t)}\Big(d_0 + 2l_0(w) + 4B_0(w,w)\Big)ds, \tag{2.6}$$

если

$$w_0^0 = 0.$$

Так же для коэффициентов Фурье w_k для $k \neq 0$ имеем

$$\frac{d}{dt}w_k - ikw_k + 2w_e\frac{1}{\varepsilon}(w_k - u_k) =$$

$$= \varepsilon w_e^{1/2}\Big((u_0 + w_0)(u_k - w_k) + (u_0 - w_0)(u_k + w_k)\Big) +$$

$$+\varepsilon w_e^{1/2}\sum_{k_1+k_2=k,\ k_1k_2\neq 0}(u_{k_1} - w_{k_1})(u_{k_2} + w_{k_2}).$$

В силу (2.4) и (2.1) получим бесконечную систему обыкновенных уравнений.

$$T_k(w_k) = \frac{d}{dt}w_k - ikw_k + 4w_e\frac{1}{\varepsilon}w_k - 4ikw_e\frac{1}{\varepsilon}\int\limits_0^t e^{ik(s-t)}w_k ds = \tag{2.7}$$

$$= w_e^{1/2}\frac{1}{\varepsilon}d_k e^{-ikt} - \varepsilon w_e^{1/2}T_k^{add}(w) + \varepsilon w_e^{1/2}\Big(2l_k(w) + 4B_k(w,w)\Big),$$

$$w_k|_{t=0} = w_k^0, \quad k \in \mathbb{Z}_0,$$

где

$$T_k^{add}(w) = 2w_0\Big((u_k^0 + w_k^0)e^{-ikt} + 2ik\int\limits_0^t e^{ik(s-t)}w_k ds\Big),$$

$$d_k = 2w_e^{1/2}(u_k^0 + w_k^0) - \varepsilon^2 \sum_{k_1+k_2=k,\ k_1k_2\neq 0}(u_{k_1}^0 + w_{k_1}^0)(u_{k_2}^0 + w_{k_2}^0),$$

$$l_k(w) = \sum_{k_1+k_2=k,\ k_1k_2\neq 0}\Big\{(u_{k_1}^0 + w_{k_1}^0)e^{-ik_1t}(ik_2\int\limits_0^t e^{ik_2(s-t)}w_{k_2}ds) +$$
$$+ \Big(ik_1\int\limits_0^t e^{ik_1(s-t)}w_{k_1}ds - w_{k_1}\Big)\Big)(u_{k_2}^0 + w_{k_2}^0)e^{-ik_2t}\Big\},$$

$$B_k(w,w) = \sum_{k_1+k_2=k,\ k_1k_2\neq 0} ik_2\int\limits_0^t e^{ik_2(s-t)}w_{k_2}ds\Big(ik_1\int\limits_0^t e^{ik_1(s-t)}w_{k_1}ds - w_{k_1}\Big).$$

Теперь перейдем к нулевым начальным условиям, положив

$$w_k = w_k^0 e^{(ik-4w_e\frac{1}{\varepsilon})t} + y_k.$$

Имеем

$$-4ikw_e\frac{1}{\varepsilon}\int\limits_0^t e^{ik(s-t)}w_k ds = -4ikw_e\frac{1}{\varepsilon}\int\limits_0^t e^{ik(s-t)}y_k ds -$$
$$- \frac{2ik}{(ik-2w_e\frac{1}{\varepsilon})}w_e w_k^0\frac{1}{\varepsilon}(e^{(ik-4w_e\frac{1}{\varepsilon})t} - e^{-ikt}),$$

$$l_k(w) = l_k(y) - \frac{1}{2}\sum_{k_1+k_2=k,\ k_1k_2\neq 0}\Big\{(u_{k_1}^0 + w_{k_1}^0)\frac{ik_2}{(ik_2-2w_e\frac{1}{\varepsilon})}w_{k_2}^0 +$$
$$+ \frac{ik_1}{(ik_1-2w_e\frac{1}{\varepsilon})}w_{k_1}^0(u_{k_2}^0 + w_{k_2}^0)\Big\}e^{-ikt} +$$
$$+ e^{-4w_e\frac{1}{\varepsilon}t}\sum_{k_1+k_2=k,\ k_1k_2\neq 0}\Big\{(u_{k_1}^0 + w_{k_1}^0)e^{-ik_1t}\frac{1}{2}\frac{ik_2}{(ik_2-2w_e\frac{1}{\varepsilon})}w_{k_2}^0 +$$
$$+ \Big(\frac{1}{2}\frac{ik_1}{(ik_1-2w_e\frac{1}{\varepsilon})}w_{k_1}^0 - w_{k_1}^0\Big)\Big)(u_{k_2}^0 + w_{k_2}^0)e^{-ik_2t}\Big\},$$

$$B_k(w,w) = \sum_{k_1+k_2=k,\ k_1k_2\neq 0}\Big\{\frac{1}{2}\frac{ik_2}{(ik_2-2w_e\frac{1}{\varepsilon})}w_{k_2}^0\frac{1}{2}\frac{ik_1}{(ik_1-2w_e\frac{1}{\varepsilon})}w_{k_1}^0 e^{-ikt} +$$
$$+ e^{-4w_e\frac{1}{\varepsilon}t}\Big[\frac{1}{2}\frac{ik_2}{(ik_2-2w_e\frac{1}{\varepsilon})}w_{k_2}^0 e^{ik_2t}\times$$
$$\times\Big(\frac{1}{2}\frac{ik_1}{(ik_1-2w_e\frac{1}{\varepsilon})}w_{k_1}^0(e^{(ik_1-4w_e\frac{1}{\varepsilon})t} - e^{-ik_1t}) - w_k^0 e^{(ik_1-4w_e\frac{1}{\varepsilon})t}\Big) -$$
$$- \frac{1}{2}\frac{ik_2}{(ik_2-2w_e\frac{1}{\varepsilon})}w_{k_2}^0 e^{-ik_2t}\ e^{ik_1t}\Big(\frac{1}{2}\frac{ik_1}{(ik_1-2w_e\frac{1}{\varepsilon})}w_{k_1}^0 - w_{k_1}^0 + \Big)\Big]$$
$$+ \frac{1}{2}\frac{ik_2}{(ik_2-2w_e\frac{1}{\varepsilon})}w_{k_2}^0(e^{(ik_2-4w_e\frac{1}{\varepsilon})t} - e^{-ik_2t})\Big(ik_1\int\limits_0^t e^{ik_1(s-t)}y_{k_1}ds - y_{k_1}\Big) +$$
$$+ ik_2\int\limits_0^t e^{ik_2(s-t)}y_{k_2}ds\Big(\frac{1}{2}\frac{ik_1}{(ik_1-2w_e\frac{1}{\varepsilon})}w_{k_1}^0(e^{(ik_1-4w_e\frac{1}{\varepsilon})t} - e^{-ik_1t}) - w_k^0 e^{(ik-4w_e\frac{1}{\varepsilon})t}\Big) +$$

$$+ ik_2 \int\limits_0^t e^{ik_2(s-t)} y_{k_2} ds \Big(ik_1 \int\limits_0^t e^{ik_1(s-t)} y_{k_1} ds - y_{k_1} \Big).$$

Тогда

$$B_k(y,y) = \sum_{k_1+k_2=k,\ k_1k_2\neq 0} ik_2 \int\limits_0^t e^{ik_2(s-t)} y_{k_2} ds \Big(ik_1 \int\limits_0^t e^{ik_1(s-t)} y_{k_1} ds - y_{k_1} \Big),$$

$$L_k(y) = l_k(y) +$$

$$+ \sum_{k_1+k_2=k,\ k_1k_2\neq 0} \Big\{ \frac{1}{2} \frac{ik_2}{(ik_2 - 2w_e\frac{1}{\varepsilon})} w^0_{k_2} (e^{(ik_2 - 4w_e\frac{1}{\varepsilon})t} - e^{-ik_2t}) \Big(ik_1 \int\limits_0^t e^{ik_1(s-t)} y_{k_1} ds - y_{k_1} \Big) +$$

$$+ ik_2 \int\limits_0^t e^{ik_2(s-t)} y_{k_2} ds \Big(\frac{1}{2} \frac{ik_1}{(ik_1 - 2w_e\frac{1}{\varepsilon})} w^0_{k_1} (e^{(ik_1 - 4w_e\frac{1}{\varepsilon})t} - e^{-ik_1t}) - w^0_k e^{(ik - 4w_e\frac{1}{\varepsilon})t} \Big) \Big\},$$

$$D_k = 2w_e^{1/2}(u^0_k - \frac{2w_e\frac{1}{\varepsilon}}{(ik - 2w_e\frac{1}{\varepsilon})} w^0_k) + \varepsilon^2 \sum_{k_1+k_2=k,\ k_1k_2\neq 0} \Big((u^0_{k_1} + w^0_{k_1})(u^0_{k_2} + w^0_{k_2}) -$$

$$- (u^0_{k_1} + w^0_{k_1}) \frac{ik_2}{(ik_2 - 2w_e\frac{1}{\varepsilon})} w^0_{k_2} - \frac{ik_1}{(ik_1 - 2w_e\frac{1}{\varepsilon})} w^0_{k_1} (u^0_{k_2} + w^0_{k_2}) +$$

$$+ \frac{ik_2}{(ik_2 - 2w_e\frac{1}{\varepsilon})} w^0_{k_2} \frac{ik_1}{(ik_1 - 2w_e\frac{1}{\varepsilon})} w^0_{k_1} \Big\} = 2w_e^{1/2}(u^0_k - \frac{2w_e\frac{1}{\varepsilon}}{(ik - 2w_e\frac{1}{\varepsilon})} w^0_k) -$$

$$+ \varepsilon^2 \sum_{k_1+k_2=k,\ k_1k_2\neq 0} \Big(u^0_{k_1} - \frac{2w_e\frac{1}{\varepsilon}}{(ik_1 - 2w_e\frac{1}{\varepsilon})} w^0_{k_1} \Big) \Big(u^0_{k_2} - \frac{2w_e\frac{1}{\varepsilon}}{(ik_2 - 2w_e\frac{1}{\varepsilon})} w^0_{k_2} \Big),$$

$$f_k(t) = -\frac{2ik}{(ik - 2w_e\frac{1}{\varepsilon})} w_e w^0_k \frac{1}{\varepsilon} e^{ikt} +$$

$$+ 4\varepsilon w_e^{1/2} \sum_{k_1+k_2=k,\ k_1k_2\neq 0} \Big\{ \frac{1}{2} \frac{ik_2}{(ik_2 - 2w_e\frac{1}{\varepsilon})} w^0_{k_2} e^{ik_2t} \times$$

$$\times \Big(\frac{1}{2} \frac{ik_1}{(ik_1 - 2w_e\frac{1}{\varepsilon})} w^0_{k_1} (e^{(ik_1 - 4w_e\frac{1}{\varepsilon})t} - e^{-ik_1t}) - w^0_k e^{(ik_1 - 4w_e\frac{1}{\varepsilon})t} \Big) -$$

$$- \frac{1}{2} \frac{ik_2}{(ik_2 - 2w_e\frac{1}{\varepsilon})} w^0_{k_2} e^{-ik_2t}\ e^{ik_1t} \Big(\frac{1}{2} \frac{ik_1}{(ik_1 - 2w_e\frac{1}{\varepsilon})} w^0_{k_1} - w^0_{k_1} \Big) \Big\} +$$

$$+ 2\varepsilon w_e^{1/2} \sum_{k_1+k_2=k,\ k_1k_2\neq 0} \Big\{ \frac{1}{2} \frac{ik_2}{(ik_2 - 2w_e\frac{1}{\varepsilon})} w^0_{k_2} e^{ik_2t} \times$$

$$\times \Big(\frac{1}{2} \frac{ik_1}{(ik_1 - 2w_e\frac{1}{\varepsilon})} w^0_{k_1} (e^{(ik_1 - 4w_e\frac{1}{\varepsilon})t} - e^{-ik_1t}) - w^0_k e^{(ik_1 - 4w_e\frac{1}{\varepsilon})t} \Big) -$$

$$- \frac{1}{2} \frac{ik_2}{(ik_2 - 2w_e\frac{1}{\varepsilon})} w^0_{k_2} e^{-ik_2t}\ e^{ik_1t} \Big(\frac{1}{2} \frac{ik_1}{(ik_1 - 2w_e\frac{1}{\varepsilon})} w^0_{k_1} - w^0_{k_1} \Big) \Big\}.$$

Это позволяет переписать систему (2.7)

$$\frac{d}{dt} y_k - iky_k + 4w_e \frac{1}{\varepsilon} y_k - 4ikw_e \frac{1}{\varepsilon} \int\limits_0^t e^{ik(s-t)} y_k ds = \tag{2.8}$$

$$= w_e^{1/2} \frac{1}{\varepsilon} D_k e^{-ikt} + f_k(t) e^{-4w_e\frac{1}{\varepsilon}t} +$$

$$+ \varepsilon w_e^{1/2} \Big(2L_k(y) + 4B_k(y,y) \Big) - \varepsilon w_e^{1/2} T^{add}_k(w),$$

$$w_k|_{t=0} = w^0_k, \quad k \in \mathbb{Z}_0.$$

Здесь $T_k^{add}(w)$ — оператор возмущения базовой системы

$$\frac{d}{dt}y_k - iky_k + 4w_e\frac{1}{\varepsilon}\,y_k - 4ikw_e\frac{1}{\varepsilon}\int\limits_0^t e^{ik(s-t)}y_k ds = \tag{2.9}$$

$$= w_e^{1/2}\frac{1}{\varepsilon}D_k e^{-ikt} + f_k(t)e^{-4w_e\frac{1}{\varepsilon}t} + \varepsilon w_e^{1/2}\Big(2L_k(y) + 4B_k(y,y)\Big),$$

$$w_k|_{t=0} = w_k^0, \quad k \in \mathbb{Z}_0,$$

исследованию задачи Коши которой мы посвятим следующий пункт.

Нулевая мода. Далее имеем

$$l_0(w) = l_0(y) + e^{-4w_e\frac{1}{\varepsilon})t}f_0^L(t) -$$

$$-\frac{1}{2}\sum_{k_1+k_2=0,\ k_1k_2\neq 0}\Big\{(u_{k_1}^0 + w_{k_1}^0)\frac{ik_2}{(ik_2 - 2w_e\frac{1}{\varepsilon})}w_{k_2}^0 +$$

$$+\frac{ik_1}{(ik_1 - 2w_e\frac{1}{\varepsilon})}w_{k_1}^0(u_{k_2}^0 + w_{k_2}^0)\Big\},$$

$$f_0^L(t) = \sum_{k_1+k_2=0,\ k_1k_2\neq 0}\Big\{(u_{k_1}^0 + w_{k_1}^0)e^{-ik_1t}\frac{1}{2}\frac{ik_2}{(ik_2 - 2w_e\frac{1}{\varepsilon})}w_{k_2}^0 +$$

$$+\Big(\frac{1}{2}\frac{ik_1}{(ik_1 - 2w_e\frac{1}{\varepsilon})}w_{k_1}^0 - w_{k_1}^0\Big)\Big)(u_{k_2}^0 + w_{k_2}^0)e^{-ik_2t}\Big\},$$

$$B_0(w,w) = f_0^B(t)e^{-4w_e\frac{1}{\varepsilon}t} + l_0^B(y) + B_0(y,y) +$$

$$+\sum_{k_1+k_2=k,\ k_1k_2\neq 0}\Big\{\frac{1}{2}\frac{ik_2}{(ik_2 - 2w_e\frac{1}{\varepsilon})}w_{k_2}^0\frac{1}{2}\frac{ik_1}{(ik_1 - 2w_e\frac{1}{\varepsilon})}w_{k_1}^0,$$

$$B_0(y,y) = \sum_{k_1+k_2=k,\ k_1k_2\neq 0}\Big\{ik_2\int\limits_0^t e^{ik_2(s-t)}y_{k_2}ds\Big(ik_1\int\limits_0^t e^{ik_1(s-t)}y_{k_1}ds - y_{k_1}\Big)\Big\},$$

$$l_0^B(y) = \sum_{k_1+k_2=k,\ k_1k_2\neq 0}\Big\{\frac{1}{2}\frac{ik_2}{(ik_2 - 2w_e\frac{1}{\varepsilon})}w_{k_2}^0(e^{(ik_2 - 4w_e\frac{1}{\varepsilon})t} - e^{-ik_2t})\Big(ik_1\int\limits_0^t e^{ik_1(s-t)}y_{k_1}ds - y_{k_1}\Big) +$$

$$+ik_2\int\limits_0^t e^{ik_2(s-t)}y_{k_2}ds\Big(\frac{1}{2}\frac{ik_1}{(ik_1 - 2w_e\frac{1}{\varepsilon})}w_{k_1}^0(e^{(ik_1 - 4w_e\frac{1}{\varepsilon})t} - e^{-ik_1t}) - w_k^0e^{(ik - 4w_e\frac{1}{\varepsilon})t}\Big)\Big\},$$

$$f_0^B(t) = \frac{1}{2}\frac{ik_2}{(ik_2 - 2w_e\frac{1}{\varepsilon})}w_{k_2}^0e^{ik_2t}\times$$

$$\times\Big(\frac{1}{2}\frac{ik_1}{(ik_1 - 2w_e\frac{1}{\varepsilon})}w_{k_1}^0(e^{(ik_1 - 4w_e\frac{1}{\varepsilon})t} - e^{-ik_1t}) - w_k^0e^{(ik_1 - 4w_e\frac{1}{\varepsilon})t}\Big) -$$

$$-\frac{1}{2}\frac{ik_2}{(ik_2 - 2w_e\frac{1}{\varepsilon})}w_{k_2}^0e^{-ik_2t}\ e^{ik_1t}\Big(\frac{1}{2}\frac{ik_1}{(ik_1 - 2w_e\frac{1}{\varepsilon})}w_{k_1}^0 - w_{k_1}^0\Big).$$

Отсюда

$$w_0 = \varepsilon w_e^{1/2}\int\limits_0^t e^{4w_e\frac{1}{\varepsilon}(s-t)}\Big(D_0 + 2L_0(y) + 4B_0(y,y) + f_0(t)e^{-4w_e\frac{1}{\varepsilon}t}\Big)ds, \tag{2.10}$$

где $L_0(y) = l_0(y) + 2l_0^B(y)$,

$$D_0 = \sum_{k_1\in\mathbb{Z}_0}\Big(u_{k_1}^0 - \frac{2w_e\frac{1}{\varepsilon}}{(ik_1 - 2w_e\frac{1}{\varepsilon})}w_{k_1}^0\Big)\Big(u_{-k_1}^0 + \frac{2w_e\frac{1}{\varepsilon}}{(ik_1 + 2w_e\frac{1}{\varepsilon})}w_{-k_1}^0\Big).$$

Определение. *Фурье-решением* задачи Коши для системы (2.2) будем называть систему абсолютно непрерывных коэффициентов Фурье $U_k = (u_k, w_k)$, $k \in \mathbb{Z}$, удовлетворяющих системе (2.7), (2.4), (2.6) для почти всех $t \in \mathbb{R}_+$.

2.2. Конечная аппроксимация. Для любого $m \in \mathbb{N}$ рассмотрим конечную аппроксимацию:

$$T_k^{(m)}(y_k^{(m)}) = \frac{d}{dt} y_k^{(m)} - iky_k^{(m)} + 4w_e \frac{1}{\varepsilon}\, y_k^{(m)} - 4ikw_e \frac{1}{\varepsilon} \int_0^t e^{ik(s-t)} y_k^{(m)} ds = \tag{2.11}$$

$$= w_e^{1/2} \frac{1}{\varepsilon} D_k^{(m)} e^{-ikt} + f_k^{(m)}(t) e^{-4w_e \frac{1}{\varepsilon} t} + \varepsilon w_e^{1/2} \Big(2L_k^{(m)}(y^{(m)}) + 4B_k^{(m)}(y^{(m)}, y^{(m)}) \Big),$$

$$w_k|_{t=0} = w_k^0, \quad k \in \mathbb{Z}_0.$$

Для нулевой моды положим

$$w_0^{(m)} = \varepsilon w_e^{1/2} \int_0^t e^{4w_e \frac{1}{\varepsilon}(s-t)} \Big(D_0^{(m)} + 2L_0^{(m)}(y^{(m)}) + \tag{2.12}$$

$$+ 4B_0^{(m)}(y^{(m)}, y^{(m)} + f_0^{(m)}(t) e^{-4w_e \frac{1}{\varepsilon} t}) \Big) ds.$$

Здесь

$$D_k^{(m)} = 2w_e^{1/2}(u_k^0 - \frac{2w_e \frac{1}{\varepsilon}}{(ik - 2w_e \frac{1}{\varepsilon})} w_k^0) +$$

$$+ \varepsilon^2 \sum_{k_1+k_2=k,\ |k_1|,|k_2|=1,\dots,m} \Big(u_{k_1}^0 - \frac{2w_e \frac{1}{\varepsilon}}{(ik_1 - 2w_e \frac{1}{\varepsilon})} w_{k_1}^0 \Big) \Big(u_{k_2}^0 - \frac{2w_e \frac{1}{\varepsilon}}{(ik_2 - 2w_e \frac{1}{\varepsilon})} w_{k_2}^0 \Big),$$

$$L_k^{(m)}(y) = l_k^{(m)}(y) +$$

$$+ 2 \sum_{k_1+k_2=k,\ |k_1|,|k_2|=1,\dots,m} \Big\{ \frac{1}{2} \frac{ik_2}{(ik_2 - 2w_e \frac{1}{\varepsilon})} w_{k_2}^0 (e^{(ik_2 - 4w_e \frac{1}{\varepsilon})t} - e^{-ik_2 t}) \Big(ik_1 \int_0^t e^{ik_1(s-t)} y_{k_1} ds - y_{k_1} \Big) +$$

$$+ ik_2 \int_0^t e^{ik_2(s-t)} y_{k_2} ds \Big(\frac{1}{2} \frac{ik_1}{(ik_1 - 2w_e \frac{1}{\varepsilon})} w_{k_1}^0 (e^{(ik_1 - 4w_e \frac{1}{\varepsilon})t} - e^{-ik_1 t}) - w_k^0 e^{(ik - 4w_e \frac{1}{\varepsilon})t} \Big) \Big\}.$$

Остальные функции $f_k^{(m)}(t), B_k^{(m)}(y,y), f_0^{(m)}(t), B_0^{(m)}(y,y), D_0^{(m)}, L_0^{(m)}$ определяются аналогично.

Теорема 2.2. *Пусть* $\sigma > 1$, $u|_{t=0}, v|_{t=0}, w|_{t=0} \in H^\sigma(0, 2\pi)$ *и средние значения* $u_0^0 = v_0^0 = w_0^0 = 0$. *Пусть* $m \in \mathbb{N}$ *фиксировано. Тогда существует* $T^* > 0$, *возможно, зависящее от* m, *такое что усеченная система* (2.11), (2.12) *имеет единственное решение на интервале* $[0, T^*]$. *Как мы покажем ниже, решение* $U^{(m)} = \{w_0^{(m)}(t), y_k^{(m)}(t),\ |k| = 1 \dots, m\}$, *при дополнительных так называемых условиях несекулярности, может быть продолжено на максимальный интервал* $[0, T^*_{max})$ *такой, что* $T^*_{max} = +\infty$, *если сумма норм* $\|u|_{t=0}\|_{H^\sigma(0,2\pi)} + \|v|_{t=0}\|_{H^\sigma(0,2\pi)} + \|w|_{t=0}\|_{H^\sigma(0,2\pi)}$ *достаточно мала.*

Следствие 2.1. *Пусть выполнены условия теоремы* 2.2. *Тогда существует глобальное Фурье-решение задачи Коши для системы* (2.2).

2.3. Невозмущенная задача Коши. Решим сначала невозмущенную задачу Коши

$$\frac{d}{dt} y_k^{(m)} - iky_k^{(m)} + 4w_e \frac{1}{\varepsilon}\, y_k^{(m)} - 4ikw_e \frac{1}{\varepsilon} \int_0^t e^{ik(s-t)} y_k^{(m)} ds = \tag{2.13}$$

$$= w_e^{1/2} \frac{1}{\varepsilon} D_k^{(m)} e^{-ikt} + f_k^{(m)}(t) e^{-4w_e \frac{1}{\varepsilon} t} + \varepsilon w_e^{1/2} \Big(2L_k^{(m)}(y^{(m)}) + 4B_k^{(m)}(y^{(m)}, y^{(m)}) \Big),$$

$$w_k|_{t=0} = w_k^0, \quad k \in \mathbb{Z}_0.$$

Введем векторное пространство $Q_m \in \mathcal{H}_\sigma^{(m)},\ Q_m = (Q_k^{(m)},\ |k| \leqslant m, k \neq 0)$ с нормой

$$\|Q_m\|^2_{\mathcal{H}_\sigma^{(m)}} = \sum_{k,\ |k|\leqslant m, k\neq 0} k^{2\sigma}|Q_k^{(m)}|^2.$$

Как мы покажем ниже (лемма 2.3), для некоторого $\gamma > 0$ для любого $k \in \mathbb{Z}_0$ существует единственное решение задачи Коши

$$T_k(x_k) = e^{-ikt}, \quad x_k|_{t=0} = 0 \tag{2.14}$$

принадлежащее $x_k(t) \in W^1_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+)$. Такое решение будем обозначать через $x_k(t) = T_k^{-1}(e^{-ikt})$. Так же, единственное решение задачи Коши

$$T_k(x_k) = z_k, \quad x_k|_{t=0} = 0,\ z_k(t) \in L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+), \tag{2.15}$$

$x_k(t) \in W^1_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+)$, будем обозначать через $x_k(t) = T_k^{-1}(z_k)$.

Решение (2.13) будем искать в виде

$$y_k^{(m)} = Q_k^{(m)} T_k^{-1}(e^{-ikt}) + T_k^{-1}(z_k^{(m)}), \quad z_k^{(m)}|_{t=0} = 0,$$
$$Q_m \in \mathcal{H}_\sigma^{(m)}, \quad z^{(m)} \in W^1_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+; \mathcal{H}_\sigma^{(m)}),$$

где $x^{(m)} = (x_k^{(m)},\ |k| \leqslant m, k \neq 0)$, $z^{(m)} = (z_k^{(m)},\ |k| \leqslant m, k \neq 0)$, норма

$$\|x^{(m)}\|_{W^1_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+;\mathcal{H}_\sigma^{(m)})} = \|\frac{d}{dt}x^{(m)}\|_{L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+;\mathcal{H}_{\sigma-1}^{(m)})} + \|x^{(m)}\|_{L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+;\mathcal{H}_\sigma^{(m)})},$$

$$\|x^{(m)}\|^2_{L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+;\mathcal{H}_\sigma^{(m)})} = \int\limits_0^\infty e^{2\gamma t} \sum_{k,\ |k|\leqslant m, k\neq 0} k^{2\sigma}|x_k^{(m)}(t)|^2\ dt.$$

Тогда

$$\begin{gathered} z_k^{(m)} = \Big(w_e^{1/2}\frac{1}{\varepsilon}D_k^{(m)} - Q_k\Big)e^{-ikt} + f_k^{(m)}(t)e^{-4w_e\frac{1}{\varepsilon}t} + \\ +\varepsilon w_e^{1/2}\Big(2L_k^{(m)}(Q_k T_k^{-1}(e^{-ikt})) + 2L_k^{(m)}(T_k^{-1}(z_k^{(m)})) + \\ +4B_k^{(m)}(Q_k^{(m)}T_k^{-1}(e^{-ikt}) + T_k^{-1}(z_k^{(m)}), Q_k^{(m)}T_k^{-1}(e^{-ikt}) + T_k^{-1}(z_k^{(m)}))\Big), \end{gathered} \tag{2.16}$$

Имеем

$$\begin{gathered} B_k^{(m)}(Q_k^{(m)}T_k^{-1}(e^{-ikt}) + T_k^{-1}(z_k^{(m)}), Q_k^{(m)}T_k^{-1}(e^{-ikt}) + T_k^{-1}(z_k^{(m)}))\Big) = \\ = L_k^B(T_k^{-1}(z_k^{(m)})) + B_k^{(m)}(T_k^{-1}(z_k^{(m)}), T_k^{-1}(z_k^{(m)})) + \\ + \sum_{k_1+k_2=k,\ |k_1|,|k_2|=1,\dots,m} \Big\{ik_2\int\limits_0^t e^{ik_2(s-t)}(Q_{k_2}^{(m)}T_{k_2}^{-1}(e^{-ik_2t})ds \times \\ \times\Big(ik_1\int\limits_0^t e^{ik_1(s-t)}Q_{k_1}^{(m)}T_{k_1}^{-1}(e^{-ik_1t})ds - Q_{k_1}^{(m)}T_{k_1}^{-1}(e^{-ik_1t})\Big)\Big\}, \end{gathered}$$

$$\begin{gathered} L_k^B(T_k^{-1}(z_k^{(m)})) = \sum_{k_1+k_2=k,\ |k_1|,|k_2|=1,\dots,m} \Big\{ik_2\int\limits_0^t e^{ik_2(s-t)}(Q_{k_2}^{(m)}T_{k_2}^{-1}(e^{-ik_2t}) \times \\ \times\Big(ik_1\int\limits_0^t e^{ik_1(s-t)}T_{k_1}^{-1}(z_{k_1}^{(m)})ds - T_{k_1}^{-1}(z_{k_1}^{(m)})\Big) + \\ + ik_2\int\limits_0^t e^{ik_2(s-t)}T_{k_2}^{-1}(z_{k_2}^{(m)})ds \times \end{gathered}$$

$$\times\Big(ik_1\int\limits_0^t e^{ik_1(s-t)}Q_{k_1}^{(m)}T_{k_1}^{-1}(e^{-ik_1t})ds-Q_{k_1}^{(m)}T_{k_1}^{-1}(e^{-ik_1t})\Big)\Big\},$$

$$B_k^{(m)}(T_k^{-1}(z_k^{(m)}),T_k^{-1}(z_k^{(m)}))=\sum_{k_1+k_2=k,\ |k_1|,|k_2|=1,\dots,m}\Big\{ik_2\int\limits_0^t e^{ik_2(s-t)}T_{k_2}^{-1}(z_{k_2}^{(m)})ds\times$$

$$\times\Big(ik_1\int\limits_0^t e^{ik_1(s-t)}T_{k_1}^{-1}(z_{k_1}^{(m)}ds-T_{k_1}^{-1}(z_{k_1}^{(m)})\Big)\Big\}.$$

Теперь применим трюк, который позволит выделить в (2.16) неинтегрируемые в $\mathbb{R}_+$ члены (солитонную часть). Заметим, что

$$ik\int\limits_0^t e^{ik(s-t)}Q_kT_k^{-1}(e^{-iks})ds=-\frac{\varepsilon}{4w_e}Q_ke^{-ikt}+G_k,\tag{2.17}$$

где в силу приведенных выше свойств оператора T_k^{-1} функция

$$G_k=\frac{\varepsilon}{4w_e}Q_k\Big(\frac{d}{dt}T_k^{-1}(e^{-ikt})-ikT_k^{-1}(e^{-ikt})+4w_e\frac{1}{\varepsilon}T_k^{-1}(e^{-ikt})\Big)\in L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+).$$

Тогда

$$\sum_{k_1+k_2=k,\ |k_1|,|k_2|=1,\dots,m}\Big\{ik_2\int\limits_0^t e^{ik_2(s-t)}(Q_{k_2}^{(m)}T_{k_2}^{-1}(e^{-ik_2t})ds\times$$

$$\times\Big(ik_1\int\limits_0^t e^{ik_1(s-t)}Q_{k_1}^{(m)}T_{k_1}^{-1}(e^{-ik_1t})ds-Q_{k_1}^{(m)}T_{k_1}^{-1}(e^{-ik_1t})\Big)\Big\}=$$

$$=H_k^B(t)+\sum_{k_1+k_2=k,\ |k_1|,|k_2|=1,\dots,m}\frac{\varepsilon}{4w_e}Q_{k_2}\frac{\varepsilon}{4w_e}Q_{k_1}e^{-ikt}.$$

Отсюда следует, что

$$B_k^{(m)}(Q_k^{(m)}T_k^{-1}(e^{-ikt})+T_k^{-1}(z_k^{(m)}),Q_k^{(m)}T_k^{-1}(e^{-ikt})+T_k^{-1}(z_k^{(m)}))\Big)=$$

$$=H_k^B(t)+L_k^B(T_k^{-1}(z_k^{(m)}))+B_k^{(m)}(T_k^{-1}(z_k^{(m)}),T_k^{-1}(z_k^{(m)}))+$$

$$+\sum_{k_1+k_2=k,\ |k_1|,|k_2|=1,\dots,m}\frac{\varepsilon}{4w_e}Q_{k_2}\frac{\varepsilon}{4w_e}Q_{k_1}e^{-ikt}.$$

Так же получим, что

$$L_k^{(m)}(Q_kT_k^{-1}(e^{-ikt}))=l_k^{(m)}(Q_kT_k^{-1}(e^{-ikt})+h_k^L(t)+g_k^L(t)e^{-4w_e\frac{1}{\varepsilon}t}+$$

$$+\sum_{k_1+k_2=k,\ |k_1|,|k_2|=1,\dots,m}\Big\{\frac{ik_2}{(ik_2-2w_e\frac{1}{\varepsilon})}w_{k_2}^0\frac{\varepsilon}{4w_e}Q_{k_1}+\frac{\varepsilon}{4w_e}Q_{k_2}\frac{ik_1}{(ik_1-2w_e\frac{1}{\varepsilon})}w_{k_1}^0\Big\}e^{-ikt},$$

$$l_k^{(m)}(Q_kT_k^{-1}(e^{-ikt})=h_k^l(t)-\sum_{k_1+k_2=k,\ k_1k_2\neq0}\Big\{(u_{k_1}^0+w_{k_1}^0)\frac{\varepsilon}{4w_e}Q_{k_2}+\frac{\varepsilon}{4w_e}Q_{k_1}(u_{k_2}^0+w_{k_2}^0)\Big\}.e^{-ikt}$$

Окончательно получим

$$L_k^{(m)}(Q_kT_k^{-1}(e^{-ikt}))=H_k^L(t)+g_k^L(t)e^{-4w_e\frac{1}{\varepsilon}t}+$$

$$+\frac{1}{2}\sum_{k_1+k_2=k,\ |k_1|,|k_2|=1,\dots,m}\Big\{\frac{ik_2}{(ik_2-2w_e\frac{1}{\varepsilon})}w_{k_2}^0\frac{\varepsilon}{2w_e}Q_{k_1}+\frac{\varepsilon}{2w_e}Q_{k_2}\frac{ik_1}{(ik_1-2w_e\frac{1}{\varepsilon})}w_{k_1}^0-$$

$$-(u_{k_1}^0+w_{k_1}^0)\frac{\varepsilon}{2w_e}Q_{k_2}+\frac{\varepsilon}{2w_e}Q_{k_1}(u_{k_2}^0+w_{k_2}^0)\Big\}e^{-ikt}=H_k^L(t)+g_k^L(t)e^{-4w_e\frac{1}{\varepsilon}t}+$$

$$-\frac{1}{2}\sum_{k_1+k_2=k,\ |k_1|,|k_2|=1,\dots,m}\Big\{(u^0_{k_1}-\frac{2w_e\frac{1}{\varepsilon}}{(ik_1-2w_e\frac{1}{\varepsilon})}w^0_{k_1})\frac{\varepsilon}{2w_e}Q_{k_2}+$$
$$+\frac{\varepsilon}{2w_e}Q_{k_1}(u^0_{k_2}-\frac{2w_e\frac{1}{\varepsilon}}{(ik_2-2w_e\frac{1}{\varepsilon})}w^0_{k_2})\Big\}e^{-ikt}.$$

Отсюда

$$4B^{(m)}_k(Q^{(m)}_kT^{-1}_k(e^{-ikt})+T^{-1}_k(z^{(m)}_k),Q^{(m)}_kT^{-1}_k(e^{-ikt})+T^{-1}_k(z^{(m)}_k))\Big)+$$
$$+2L^{(m)}_k(Q_kT^{-1}_k(e^{-ikt})+T^{-1}_k(z^{(m)}_k))=2(H^L_k(t)+g^L_k(t)e^{-4w_e\frac{1}{\varepsilon}t})+$$
$$+4H^B_k(t)+4L^B_k(T^{-1}_k(z^{(m)}_k))+4B^{(m)}_k(T^{-1}_k(z^{(m)}_k),T^{-1}_k(z^{(m)}_k))+2L^{(m)}_k(T^{-1}_k(z^{(m)}_k)+$$
$$-\sum_{k_1+k_2=k,\ |k_1|,|k_2|=1,\dots,m}\Big\{(u^0_{k_1}-\frac{2w_e\frac{1}{\varepsilon}}{(ik_1-2w_e\frac{1}{\varepsilon})}w^0_{k_1})\frac{\varepsilon}{2w_e}Q_{k_2}+$$
$$+\frac{\varepsilon}{2w_e}Q_{k_1}(u^0_{k_2}-\frac{2w_e\frac{1}{\varepsilon}}{(ik_2-2w_e\frac{1}{\varepsilon})}w^0_{k_2})-\frac{\varepsilon}{2w_e}Q_{k_2}\frac{\varepsilon}{2w_e}Q_{k_1}\Big\}e^{-ikt}.$$

Положим

$$S_k(Q)=-\sum_{k_1+k_2=k,\ |k_1|,|k_2|=1,\dots,m}\Big\{(u^0_{k_1}-\frac{2w_e\frac{1}{\varepsilon}}{(ik_1-2w_e\frac{1}{\varepsilon})}w^0_{k_1})\frac{\varepsilon}{2w_e}Q_{k_2}+$$
$$+\frac{\varepsilon}{2w_e}Q_{k_1}(u^0_{k_2}-\frac{2w_e\frac{1}{\varepsilon}}{(ik_2-2w_e\frac{1}{\varepsilon})}w^0_{k_2})-\frac{\varepsilon}{2w_e}Q_{k_2}\frac{\varepsilon}{2w_e}Q_{k_1}\Big\}.$$

В переменных $(z^{(m)}_k,Q^{(m)}_k)$ система (2.16)

$$z^{(m)}_k=\Big(w_e^{1/2}\frac{1}{\varepsilon}D^{(m)}_k-Q^{(m)}_k+\varepsilon w_e^{1/2}S^{(m)}_k(Q^{(m)})\Big)e^{-ikt}+f^{(m)}_k(t)e^{-4w_e\frac{1}{\varepsilon}t}+ \tag{2.18}$$
$$+\varepsilon w_e^{1/2}\Big(2(H^L_k(t)+g^L_k(t)e^{-4w_e\frac{1}{\varepsilon}t})+$$
$$+4H^B_k(t)+4L^B_k(T^{-1}_k(z^{(m)}_k))+4B^{(m)}_k(T^{-1}_k(z^{(m)}_k),T^{-1}_k(z^{(m)}_k))+2L^{(m)}_k(T^{-1}_k(z^{(m)}_k),$$

Здесь

$$\|z^{(m)}\|^2_{L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+;\mathcal{H}_{\sigma,m})}=\int\limits_0^\infty e^{2\gamma t}|||z^{(m)}(t)|||^2_{\mathcal{H}_{\sigma,m}}dt.$$

Если выполнено условие секулярности

$$w_e^{1/2}\frac{1}{\varepsilon}D^{(m)}_k-Q^{(m)}_k+\varepsilon w_e^{1/2}S^{(m)}_k(Q^{(m)})=0,\ |k|-1,\dots,m. \tag{2.19}$$

получаем нелинейное уравнение

$$z^{(m)}_k=f^{(m)}_k(t)+\varepsilon w_e^{1/2}g^L_k(t))e^{-4w_e\frac{1}{\varepsilon}t}+\varepsilon w_e^{1/2}(2(H^L_k(t)+4H^B_k(t))+ \tag{2.20}$$
$$+\varepsilon w_e^{1/2}\Big(4L^B_k(T^{-1}_k(z^{(m)}_k))+4B^{(m)}_k(T^{-1}_k(z^{(m)}_k),T^{-1}_k(z^{(m)}_k))+2L^{(m)}_k(T^{-1}_k(z^{(m)}_k)\Big)$$

в гильбертовом пространстве $L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+;\mathcal{H}_{\sigma,m})$.

Нулевая мода. Теперь сделаем подстановку

$$y_k=Q_kT^{-1}_k(e^{-ikt})+T^{-1}_k(z_k),\quad k\in\mathbb{Z}_0$$

в уравнении (2.12) нулевой моды. Тогда, так же как выше, получим

$$L_0(Q_kT^{-1}_k(e^{-ikt})=l^B_0(Q_kT^{-1}_k(e^{-ikt})+l_0(Q_kT^{-1}_k(e^{-ikt})=$$
$$L_0(T^{-1}_k(z_k))=l^B_0(T^{-1}_k(z_k))+l_0(T^{-1}_k(z_k)=$$
$$l^B_0(Q_kT^{-1}_k(e^{-ikt})=f^{B,l}_0(t)e^{-4w_e\frac{1}{\varepsilon}t}+h^{B,l}_0(t)+$$
$$+\frac{1}{4}\sum_{k_1+k_2=k,\ k_1k_2\neq0}\Big\{\frac{ik_2}{(ik_2-2w_e\frac{1}{\varepsilon})}w^0_{k_2}\frac{\varepsilon}{2w_e}Q_{k_1}+\frac{\varepsilon}{2w_e}Q_{k_2}\frac{ik_1}{(ik_1-2w_e\frac{1}{\varepsilon})}w^0_{k_1}\Big\},$$

$$l_0(Q_kT_k^{-1}(e^{-ikt})) = h_0^l(t) - \frac{1}{2}\sum_{k_1\neq 0}\Big\{(u^0_{k_1}+w^0_{k_1})\frac{\varepsilon}{2w_e}Q_{-k_1}e^{ik_1t} + \frac{\varepsilon}{2w_e}Q_{k_1}((u^0_{-k_1}+w^0_{-k_1})\Big\},$$

$$B_0((Q_kT_k^{-1}(e^{-ikt}),(Q_kT_k^{-1}(e^{-ikt})) = h_0^B(t) + \frac{1}{4}\sum_{k_1\neq 0}\frac{\varepsilon}{2w_e}Q_{-k_1}\frac{\varepsilon}{4w_e}Q_{k_1}ds.$$

Отсюда

$$2L_0(Q_kT_k^{-1}(e^{-ikt})) + 4B_0(Q_kT_k^{-1}(e^{-ikt}), Q_kT_k^{-1}(e^{-ikt}) =$$
$$= 2h_0^l(t) + 4f_0^{B,l}(t)e^{-4w_e\frac{1}{\varepsilon}t} + 4h_0^{B,l}(t) + 4h_0^B(t) -$$
$$+\sum_{k_1\neq 0}\Big\{\frac{\varepsilon}{2w_e}Q_{-k_1}\frac{\varepsilon}{2w_e}Q_{k_1}ds +$$
$$-(u^0_{k_1} - \frac{2w_e\frac{1}{\varepsilon}}{(ik_1 - 2w_e\frac{1}{\varepsilon})})\frac{\varepsilon}{2w_e}Q_{-k_1} - \frac{\varepsilon}{2w_e}Q_{k_1}(u^0_{-k_1} + \frac{2w_e\frac{1}{\varepsilon}}{(ik_1+2w_e\frac{1}{\varepsilon})}w^0_{-k_1})\Big\}.$$

Положим

$$S_0(Q) = \sum_{k_1\neq 0}\Big\{\frac{\varepsilon}{2w_e}Q_{-k_1}\frac{\varepsilon}{2w_e}Q_{k_1}ds +$$
$$-(u^0_{k_1} - \frac{2w_e\frac{1}{\varepsilon}}{(ik_1 - 2w_e\frac{1}{\varepsilon})})\frac{\varepsilon}{2w_e}Q_{-k_1} - \frac{\varepsilon}{2w_e}Q_{k_1}(u^0_{-k_1} + \frac{2w_e\frac{1}{\varepsilon}}{(ik_1+2w_e\frac{1}{\varepsilon})}w^0_{-k_1})\Big\}$$

Теперь заметим, что (2.12) можно переписать в виде

$$w_0^{(m)} = \varepsilon w_e^{1/2}\int_0^t e^{4w_e\frac{1}{\varepsilon}(s-t)}\Big(D_0 + S_0(Q) + \tag{2.21}$$
$$+ 2h_0^l(t) + (4f_0^{B,l}(t) + f_0(t))e^{-4w_e\frac{1}{\varepsilon}t} + 4(h_0^{B,l}(t) + h_0^B(t)) +$$
$$+ 2\mathcal{L}_0(T_k^{-1}(z_k^{(m)})) + 4B_0(T_k^{-1}(z_k^{(m)}), T_k^{-1}(z_k^{(m)}))\Big)ds,$$

где $\mathcal{L}_0(y) = l_0(y) + 2l_0^B(y) + 2B_0(y, Q_kT_k^{-1}(e^{-ikt})) + 2B_0(Q_kT_k^{-1}(e^{-ikt}), y)$. Условие секулярности нулевой моды записывается в виде

$$D_0 + S_0(Q) = 0. \tag{2.22}$$

Тогда (2.12) сводится к уравнению

$$w_0^{(m)} = \varepsilon w_e^{1/2}\int_0^t e^{4w_e\frac{1}{\varepsilon}(s-t)}\Big(2h_0^l(t) + (4f_0^{B,l}(t) + f_0(t))e^{-4w_e\frac{1}{\varepsilon}t} + \tag{2.23}$$
$$+ 4(h_0^{B,l}(t) + h_0^B(t)) + 2\mathcal{L}_0(T_k^{-1}(z_k^{(m)})) + 4B_0(T_k^{-1}(z_k^{(m)}), T_k^{-1}(z_k^{(m)}))\Big)ds,$$

где правая часть принадлежит $L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+)$, если $z_k^{(m)} \in L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+)$, $|k| = 1,\dots,m$.

Окончательно получили систему нелинейных уравнений

$$z_k^{(m)} = (f_k^{(m)}(t) + \varepsilon w_e^{1/2}g_k^L(t))e^{-4w_e\frac{1}{\varepsilon}t} + \varepsilon w_e^{1/2}(2(H_k^L(t) + 4H_k^B(t)) - \tag{2.24}$$
$$+\varepsilon w_e^{1/2}\Big(4L_k^B(T_k^{-1}(z_k^{(m)})) + 4B_k^{(m)}(T_k^{-1}(z_k^{(m)}), T_k^{-1}(z_k^{(m)})) + 2L_k^{(m)}(T_k^{-1}(z_k^{(m)})\Big),$$
$$w_0^{(m)} = \varepsilon w_e^{1/2}\int_0^t e^{4w_e\frac{1}{\varepsilon}(s-t)}\Big(2h_0^l(t) + (4f_0^{B,l}(t) + f_0(t))e^{-4w_e\frac{1}{\varepsilon}t} +$$
$$+ 4(h_0^{B,l}(t) + h_0^B(t)) + 2\mathcal{L}_0(T_k^{-1}(z_k^{(m)})) + 4B_0(T_k^{-1}(z_k^{(m)}), T_k^{-1}(z_k^{(m)}))\Big)ds$$

в гильбертовом пространстве $(L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+))^{2m}$. Таким образом, окончательно, условие секулярности запишется в виде:

$$w_e^{1/2}\frac{1}{\varepsilon}D_k^{(m)} - Q_k^{(m)} + \varepsilon w_e^{1/2}S_k^{(m)}(Q^{(m)}) = 0,\ |k| - 1, \ldots, m, \tag{2.25}$$
$$D_0 + S_0(Q) = 0.$$

2.4. Локальное равновесие. Теперь заметим, что конечная аппроксимация первой компоненты скорости

$$u_k^{(m)} = \Big(u_k^0 - \frac{2w_e\frac{1}{\varepsilon}}{ik - 2w_e\frac{1}{\varepsilon}}w_k^0\Big)e^{-ikt} - w_k^0 e^{-4w_e\frac{1}{\varepsilon}t}\Big(e^{-ikt} - \frac{ik}{ik - 2w_e\frac{1}{\varepsilon}}e^{ikt}\Big) - \tag{2.26}$$
$$- y_k^{(m)} + 2ik\int\limits_0^t e^{ik(s-t)}y_k^{(m)}ds, \quad k \neq 0,$$

в силу (2.17) в переменных (Q_k, z_k) запишется в виде

$$u_k^{(m)} = \Big(u_k^0 - \frac{2w_e\frac{1}{\varepsilon}}{ik - 2w_e\frac{1}{\varepsilon}}w_k^0 - \frac{\varepsilon}{2w_e}Q_k\Big)e^{-ikt} + \tag{2.27}$$

$$+ \frac{\varepsilon}{2w_e(1 - \frac{1}{4w_e}a_0^{(m)}\varepsilon^4)}Q_k\Big(\frac{d}{dt}T_k^{-1}(e^{-ikt}) - ikT_k^{-1}(e^{-ikt}) + 4w_e\frac{1}{\varepsilon}T_k^{-1}(e^{-ikt})\Big) - \tag{2.28}$$
$$- w_k^0 e^{-4w_e\frac{1}{\varepsilon}t}\Big(e^{-ikt} - \frac{ik}{ik - 2w_e\frac{1}{\varepsilon}}e^{ikt}\Big) -$$
$$- Q_k^{(m)}T_k^{-1}(e^{-ikt}) - T_k^{-1}(z_k^{(m)}) + 2ik\int\limits_0^t e^{ik(s-t)}T_k^{-1}(z_k^{(m)})ds, \quad k \neq 0,$$

При выполнении условия секулярности (3.28) из приведенных выше оценок получим

$$u_k^{(m)} \to \ \Big(u_k^0 - \frac{2w_e\frac{1}{\varepsilon}}{ik - 2w_e\frac{1}{\varepsilon}}w_k^0 - \frac{\varepsilon}{2w_e}Q_k\Big)e^{-ikt}, \tag{2.29}$$
$$w_k^{(m)} \to 0, \quad t \to \infty$$

Таким образом, при выполнении принципа локального равновесия,

$$Q_k = \frac{2w_e}{\varepsilon}\Big(u_k^0 - \frac{2w_e\frac{1}{\varepsilon}}{ik - 2w_e\frac{1}{\varepsilon}}w_k^0\Big), \quad |k| = 1\ldots, m, \tag{2.30}$$

должно быть решением условия секулярности (2.25)

2.5. Условие секулярности. Итак, проверим, что

$$Q_k = \frac{2w_e}{\varepsilon}\Big(u_k^0 - \frac{2w_e\frac{1}{\varepsilon}}{ik - 2w_e\frac{1}{\varepsilon}}w_k^0\Big), \quad |k| = 1, \ldots, m. \tag{2.31}$$

есть решение условия секулярности (2.25). Действительно, в этом случае

$$D_k^{(m)} = 2w_e^{1/2}(u_k^0 - \frac{2w_e\frac{1}{\varepsilon}}{(ik - 2w_e\frac{1}{\varepsilon})}w_k^0) +$$
$$+ \varepsilon^2 \sum_{k_1+k_2=k,\ |k_1|,|k_2|=1,\ldots,m} \Big(u_{k_1}^0 - \frac{2w_e\frac{1}{\varepsilon}}{(ik_1 - 2w_e\frac{1}{\varepsilon})}w_{k_1}^0\Big)\Big(u_{k_2}^0 - \frac{2w_e\frac{1}{\varepsilon}}{(ik_2 - 2w_e\frac{1}{\varepsilon})}w_{k_2}^0\Big),$$

а также

$$S_k(Q) = -\sum_{k_1+k_2=k,\ |k_1|,|k_2|=1,\ldots,m} \Big(u_{k_1}^0 - \frac{2w_e\frac{1}{\varepsilon}}{(ik_1 - 2w_e\frac{1}{\varepsilon})}w_{k_1}^0\Big)\Big(u_{k_2}^0 - \frac{2w_e\frac{1}{\varepsilon}}{ik_2 - 2w_e\frac{1}{\varepsilon}}w_{k_2}^0\Big),$$

откуда следует справедливость первых $2m$ уравнений($|k| = 1, \ldots, m$) условия секулярности (2.25).

Теперь проверим, что (2.31) удовлетворяет и последнему уравнению условия секулярности (2.25). В этом случае имеем

$$S_0(Q) = -\sum_{k_1\neq 0}\Big\{\Big(u^0_{-k_1} + \frac{2w_e\frac{1}{\varepsilon}}{ik_1 + 2w_e\frac{1}{\varepsilon}}w^0_{-k_1}\Big)\Big(u^0_{k_1} - \frac{2w_e\frac{1}{\varepsilon}}{ik_1 - 2w_e\frac{1}{\varepsilon}}w^0_{k_1}\Big),$$

откуда следует справедливость последнего уравнения в условии секулярности (2.25). Тем самым разрешимость системы условий секулярности доказана.

Теперь докажем единственность решения в классе решений $Q^{(m)} \in \mathcal{H}^{(m)}_\sigma$, $Q^{(m)} = (Q^{(m)}_k, |k| \leqslant m, k \neq 0)$. Пусть помимо решения $Q^{(1)}_k = \frac{2w_e}{\varepsilon}\Big(u^0_k - \frac{2w_e\frac{1}{\varepsilon}}{ik-2w_e\frac{1}{\varepsilon}}w^0_k\Big), |k| = 1,\dots,m$, есть второе решение условия секулярности $Q^{(2)}_k, |k| = 1,\dots,m$. Положим $\mathcal{Q}_k = Q^{(2)}_k - Q^{(1)}_k$. В силу (2.25) получим

$$\mathcal{Q}_k = \varepsilon w_e^{1/2}\sum_{k_1+k_2=k,\ |k_1|,|k_2|=1,\dots,m}\Big\{(u^0_{k_1} - \frac{2w_e\frac{1}{\varepsilon}}{(ik_1 - 2w_e\frac{1}{\varepsilon})}w^0_{k_1})\frac{\varepsilon}{2w_e}\mathcal{Q}_{k_2} +$$

$$+\frac{\varepsilon}{2w_e}\mathcal{Q}_{k_1}(u^0_{k_2} - \frac{2w_e\frac{1}{\varepsilon}}{(ik_2 - 2w_e\frac{1}{\varepsilon})}w^0_{k_2}) - (\frac{\varepsilon}{2w_e})^2(\mathcal{Q}_{k_2}Q^{(2)}_{k_1} + \mathcal{Q}_{k_1}Q^{(1)}_{k_1}\Big\}.$$

Сделаем нормировку $2w_eX_k = \varepsilon\mathcal{Q}_k$, $2w_e\widehat{Q}^{(j)}_k = \varepsilon Q^{(2)}_k, j = 1,2$. Тогда

$$X_k = \varepsilon^2\frac{1}{2w_e^{1/2}}\sum_{k_1+k_2=k,\ |k_1|,|k_2|=1,\dots,m}(u^0_{k_1} - \frac{2w_e\frac{1}{\varepsilon}}{(ik_1 - 2w_e\frac{1}{\varepsilon})}w^0_{k_1} - \widehat{Q}^{(2)}_{k_1})X_{k_2}. \tag{2.32}$$

Введем нормы

$$|||X|||_{\sigma,m} = \sup_{|k|=1,\dots,m}|k|^\sigma\ |X_k|,\ \|X\|^2_{\mathcal{H}^{(m)}_\sigma} = \sum_{|k|=1,\dots,m,k\neq 0}|k|^{2\sigma}\ |X_k|^2.$$

Тогда

$$|||X|||_{\sigma,m} \leqslant \tag{2.33}$$

$$\leqslant \varepsilon^2\frac{C_{\sigma,m}}{2w_e^{1/2}}\ |||X|||_{\sigma,m}\Big(|||\widehat{Q}^{(m)}|||_{\sigma,m} + |||u^0|||_{\sigma,m} + |||w^0|||_{\sigma,m}\Big),$$

где

$$C_{\sigma,m} = \frac{1}{2w_e(1 - \frac{1}{4w_e}a^{(m)}_0\varepsilon^4)}\sup_{|k|=1,\dots,m}\sum_{k_1+k_2=k,\ k_1k_2\neq 0,|k|,|k_1|,|k_2|\leqslant m}\Big(\frac{1}{|k_2|^\sigma} + \frac{1}{|k_1|^\sigma}\Big) \leqslant$$

$$\leqslant \frac{c_\sigma}{w_e(1 - \frac{1}{4w_e}a^{(m)}_0\varepsilon^4)},\quad c_\sigma = \sum_{|k|\geqslant 1}\frac{1}{|k|^\sigma}.$$

Отсюда следует, что если для некоторого $q \in (0,1)$ имеем

$$\varepsilon^2\frac{C_{\sigma,m}}{2w_e^{1/2}}\ \Big(|||\widehat{Q}^{(2)}|||_{\sigma,m} + |||u^0|||_{\sigma,m} + |||w^0|||_{\sigma,m}\Big) \leqslant q < 1$$

то $X = 0$, т. е. решение системы секулярности единственно в классе решений

$$|||\widehat{Q}^{(2)}|||_{\sigma,m} < \Big(\frac{2qw_e^{1/2}}{\varepsilon^2C_{\sigma,m}} - |||u^0|||_{\sigma,m} + |||w^0|||_{\sigma,m}\Big) \tag{2.34}$$

если

$$\varepsilon^2\ \Big(|||u^0|||_{\sigma,m} + |||w^0|||_{\sigma,m}\Big) \leqslant \frac{2qw_e^{1/2}}{C_{\sigma,m}} \tag{2.35}$$

В то же время имеем

$$|||\widehat{Q}^{(1)}|||_{\sigma,m} \leqslant \Big(|||u^0|||_{\sigma,m} + |||w^0|||_{\sigma,m}\Big),$$

и это решение лежит в окрестности (2.34), если

$$\varepsilon^2\,\Big(|||u^0|||_{\sigma,m}+|||w^0|||_{\sigma,m}\Big)\leqslant \frac{qw_e^{1/2}}{C_{\sigma,m}}. \tag{2.36}$$

Лемма 2.1. *Для любых $\sigma>1$, $\varepsilon\leqslant 0$ существует единственное решение условия секулярности* (2.25)*, если для некоторого $q\in(0,1)$ справедлива оценка* (2.36).

2.6. Нелинейное уравнение. Теперь перейдем к исследованию нелинейного уравнения в гильбертовом пространстве $L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+;\mathcal{H}_\sigma^{(m)})$:

$$\begin{gathered}z_k^{(m)}=\frac{1}{\varepsilon}e^{-4w_e\frac{1}{\varepsilon}t}\mathcal{F}_k^{(m)}(t)+\varepsilon\mathcal{G}_k^{(m)}(t)+\\ +\varepsilon w_e^{1/2}\Big\{4B_k^{(m)}(T_k^{-1}(z_k^{(m)}),Q_kT_k^{-1}(e^{-ikt}))+4B_k^{(m)}(Q_kT_k^{-1}(e^{-ikt}),T_k^{-1}(z_k^{(m)}))+\\ +2L_k^{(m)}(T_k^{-1}(z_k^{(m)}))+4B_k^{(m)}(T_k^{-1}(z_k^{(m)}),T_k^{-1}(z_k^{(m)}))-T^{add}(T_k^{-1}(z_k^{(m)})\Big\}.\end{gathered} \tag{2.37}$$

где $Z_m,\mathcal{G}_m\in L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+;\mathcal{H}_{m,\sigma})$ и $\mathcal{F}_m\in L_\infty(\mathbb{R}_+;\mathcal{H}_{m,\sigma})$. Здесь $Z_m(t)=(z_k^{(m)}(t),\ |k|\leqslant m,\ k\neq 0)$; $\mathcal{G}_m(t)=(\mathcal{G}_k^{(m)}(t),\ |k|\leqslant m,\ k\neq 0)$, $\mathcal{F}_m(t)=(\mathcal{F}_k^{(m)}(t),\ |k|\leqslant m,\ k\neq 0)$,

$$\begin{gathered}T^{add}(T_k^{-1}(z_k^{(m)})=2w_0\Big((u_k^0-\frac{2w_e\frac{1}{\varepsilon}}{(ik-2w_e\frac{1}{\varepsilon})}w_k^0)e^{-ikt}+\frac{ik}{(ik-2w_e\frac{1}{\varepsilon})}w_k^0e^{(ik-4w_e\frac{1}{\varepsilon})t}+\\ +2ik\int\limits_0^t e^{ik(s-t)}(Q_k^{(m)}T_k^{-1}(e^{-ikt})ds+2ik\int\limits_0^t e^{ik(s-t)}T_k^{-1}(z_k^{(m)})ds\Big),\end{gathered}$$

где в силу (2.17) имеем

$$2ik\int\limits_0^t e^{ik(s-t)}(Q_k^{(m)}T_k^{-1}(e^{-ikt})ds=-\frac{\varepsilon}{2w_e}Q_ke^{-ikt}+2G_k(t),$$

$$2G_k=\frac{\varepsilon}{2w_e}Q_k\Big(\frac{d}{dt}T_k^{-1}(e^{-ikt})-ikT_k^{-1}(e^{-ikt})+4w_e\frac{1}{\varepsilon}T_k^{-1}(e^{-ikt})\Big).$$

Отсюда

$$\begin{gathered}T^{add}(T_k^{-1}(z_k^{(m)})=2w_0^{(m)}\Big\{\Big(u_k^0-\frac{2w_e\frac{1}{\varepsilon}}{(ik-2w_e\frac{1}{\varepsilon})}w_k^0-\frac{\varepsilon}{2w_e}Q_k\Big)e^{-ikt}+\\ +\frac{ik}{(ik-2w_e\frac{1}{\varepsilon})}w_k^0e^{(ik-4w_e\frac{1}{\varepsilon})t}+2G_k(t)+2ik\int\limits_0^t e^{ik(s-t)}T_k^{-1}(z_k^{(m)})ds\Big\}.\end{gathered}$$

При выполнении условия секулярности (3.28) получим

$$\begin{gathered}T^{add}(T_k^{-1}(z_k^{(m)})=2w_0^{(m)}\Big\{\frac{ik}{(ik-2w_e\frac{1}{\varepsilon})}w_k^0e^{(ik-4w_e\frac{1}{\varepsilon})t}+\\ +2G_k(t)+2ik\int\limits_0^t e^{ik(s-t)}T_k^{-1}(z_k^{(m)})ds\Big\},\end{gathered} \tag{2.38}$$

$$\begin{gathered}w_0^{(m)}=-\varepsilon w_e^{1/2}\int\limits_0^t e^{4w_e\frac{1}{\varepsilon}(s-t)}\Big(2h_0^l(t)+(4f_0^{B,l}(t)+f_0(t))e^{-4w_e\frac{1}{\varepsilon}t}+\\ +4(h_0^{B,l}(t)+h_0^B(t))+2\mathcal{L}_0(T_k^{-1}(z_k^{(m)}))+4B_0(T_k^{-1}(z_k^{(m)}),T_k^{-1}(z_k^{(m)}))\Big)ds.\end{gathered}$$

В силу свойств оператора T_k^{-1} (см. пункт 3.11) получим

$$\|T^{add}(T_k^{-1}(z_k^{(m)})(t)\|_{L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+;\mathcal{H}_{\sigma,m})}\leqslant(||||u^0|||_{\mathcal{H}_{\sigma,m}}+|||w^0|||_{\mathcal{H}_{\sigma,m}})\ \|w_0^{(m)}(t)\ e^{-4w_e\frac{1}{\varepsilon}t}\|_{L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+)}+$$

$$+|||Q^{(m)}|||_{\mathcal{H}_{\sigma,m}}\|\frac{d}{dt}T_k^{-1}(e^{-ikt})-ikT_k^{-1}(e^{-ikt})+4w_e\frac{1}{\varepsilon}T_k^{-1}(e^{-ikt})\|_{L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+;\mathcal{H}_{0,m})}+$$

$$+\|w_0^{(m)}(t)(ik\int\limits_0^t e^{ik(s-t)}T_k^{-1}(z_k^{(m)})ds)\|_{L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+;\mathcal{H}_{0,m})}.$$

Далее

$$|w_0^{(m)}(t)|\leqslant\varepsilon w_e^{1/2}\Big|\int\limits_0^t e^{4w_e\frac{1}{\varepsilon}(s-t)}\Big(2h_0^l(t)+(4f_0^{B,l}(t)+f_0(t))e^{-4w_e\frac{1}{\varepsilon}t}+4(h_0^{B,l}(t)+h_0^B(t))\Big)ds+$$

$$+\varepsilon w_e^{1/2}\int\limits_0^t e^{4w_e\frac{1}{\varepsilon}(s-t)}\Big(2\mathcal{L}_0(T_k^{-1}(z_k^{(m)}))+4B_0(T_k^{-1}(z_k^{(m)}),T_k^{-1}(z_k^{(m)}))\Big)ds$$

Теперь заметим, что для функции $g(t)\in L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+)$ имеем

$$\varepsilon|\int\limits_0^t g(s)ds|=\varepsilon|\int\limits_0^t e^{-\gamma s}(e^{\gamma s}g(s))ds|\leqslant\|g\|_{L_{2,\gamma}}\ \frac{\varepsilon}{\sqrt{2\gamma}},\quad \frac{\varepsilon}{\sqrt{2\gamma}}=O(\sqrt{\varepsilon}). \tag{2.39}$$

Фиксируем $\sigma>1$. Это позволяет получить следующую оценку:

$$\varepsilon w_e^{1/2}\Big|\int\limits_0^t e^{4w_e\frac{1}{\varepsilon}(s-t)}\Big(2h_0^l(t)+(4f_0^{B,l}(t)+f_0(t))e^{-4w_e\frac{1}{\varepsilon}t}+4(h_0^{B,l}(t)+h_0^B(t))\Big)ds\Big|\leqslant$$

$$\leqslant\sqrt{\varepsilon}\ c_\sigma\Big(|||u^0|||_{\mathcal{H}_{\sigma,m}}+|||w^0|||_{\mathcal{H}_{\sigma,m}}+|||Q^{(m)}|||_{\mathcal{H}_{\sigma,m}}\Big)$$

Перейдем к оценке интегралов

$$J_1=2\varepsilon w_e^{1/2}\int\limits_0^t e^{4w_e\frac{1}{\varepsilon}(s-t)}\mathcal{L}_0(T_k^{-1}(z_k^{(m)}))ds,$$

$$J_2=4\varepsilon w_e^{1/2}\int\limits_0^t e^{4w_e\frac{1}{\varepsilon}(s-t)}B_0(T_k^{-1}(z_k^{(m)}),T_k^{-1}(z_k^{(m)})ds.$$

В силу соотношения (2.17) и свойств оператора T_k^{-1} получим

$$|J_1(t)|\leqslant\sqrt{\varepsilon}\ c_\sigma^{(1)}\|\mathcal{L}_0(T_k^{-1}(z_k^{(m)})\|_{L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+;\mathcal{H}_{\sigma,m})},$$

$$|J_2(t)|\leqslant\sqrt{\varepsilon}\ c_\sigma^{(1)}\|B_0(T_k^{-1}(z_k^{(m)}),T_k^{-1}(z_k^{(m)})\|_{L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+;\mathcal{H}_{\sigma,m})}.$$

Теперь оценим

$$\|l_0^{(m)}(T_k^{-1}(z_k^{(m)}))\|_{L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+;\mathcal{H}_{\sigma,m})}=$$

$$=\|\sum_{|k_1|=1,\ldots,m}(u_{k_1}^0+w_{k_1}^0)e^{-ik_1t}(-ik_1\int\limits_0^t e^{-ik_1(s-t)}T_{-k_1}^{-1}(z_{-k_1}^{(m)}))ds\|_{L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+;\mathcal{H}_{\sigma,m})}+$$

$$+\|\sum_{|k_1|=1,\ldots,m}\Big(ik_1\int\limits_0^t e^{ik_1(s-t)}T_{k_1}^{-1}(z_{k_1}^{(m)})ds-T_{k_1}^{-1}(z_{k_1}^{(m)})\Big)((u_{-k_1}^0+w_{-k_1}^0)e^{ik_1t}\|_{L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+;\mathcal{H}_{\sigma,m})}\leqslant$$

$$\leqslant c_\sigma^l\Big(|||u^0|||_{\mathcal{H}_{\sigma,m}}+|||w^0|||_{\mathcal{H}_{\sigma,m}}\Big)\times$$

$$\times\Big(\|(ik\int\limits_0^t e^{-ik(s-t)}T_k^{-1}(z_{k_1}^{(m)}))ds\|_{L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+;\mathcal{H}_{\sigma,m})}+\|T_k^{-1}(z_{k_1}^{(m)})s\|_{L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+;\mathcal{H}_{\sigma,m})}\Big).$$

В силу (2.17) имеем

$$ik_1\int\limits_0^t e^{ik_1(s-t)}T_{k_1}^{-1}(z_{k_1}^{(m)})ds=-\frac{\varepsilon}{4w_e}z_{k_1}^{(m)}+ \tag{2.40}$$

$$+\frac{\varepsilon}{4w_e}\Big(\frac{d}{dt}T_k^{-1}(z_{k_1}^{(m)})-ikT_k^{-1}(z_{k_1}^{(m)})+4w_e\frac{1}{\varepsilon}T_k^{-1}(z_{k_1}^{(m)})\Big).$$

Отсюда

$$\|(ik\int\limits_0^t e^{-ik(s-t)}T_k^{-1}(z_{k_1}^{(m)}))ds\|_{L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+;\mathcal{H}_{\sigma,m})}=\frac{\varepsilon}{4w_e}\|z_{k_1}^{(m)}\|_{L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+;\mathcal{H}_{\sigma,m})}+$$

$$+\frac{\varepsilon}{4w_e}\|\Big(\frac{d}{dt}T_k^{-1}(z_{k_1}^{(m)})-ikT_k^{-1}(z_{k_1}^{(m)})+4w_e\frac{1}{\varepsilon}T_k^{-1}(z_{k_1}^{(m)})\Big)\|_{L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+;\mathcal{H}_{\sigma,m})}\leqslant$$

$$\leqslant\frac{\varepsilon}{4w_e}(1+c_3)\|z_{k_1}^{(m)}\|_{L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+;\mathcal{H}_{\sigma,m})}.$$

Здесь мы опять воспользовались свойствами оператора T_k^{-1}. Окончательно получаем

$$\|l_0^{(m)}(T_k^{-1}(z_k^{(m)}))\|_{L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+;\mathcal{H}_{\sigma,m})}\leqslant$$

$$\leqslant c_\sigma^l c_3(1+\frac{\varepsilon}{4w_e}(1+c_3))\Big(|||u^0|||_{\mathcal{H}_{\sigma,m}}+|||w^0|||_{\mathcal{H}_{\sigma,m}}\Big)\|z_{k_1}^{(m)}\|_{L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+;\mathcal{H}_{\sigma,m})}.$$

Аналогичная оценка справедлива для

$$L_0^{(m)}(T_k^{-1}(z_k^{(m)}))=l_0^{(m)}(T_k^{-1}(z_k^{(m)}))+$$

$$+2\sum_{k_1+k_2=0,\ |k_1|,|k_2|=1,\dots,m}\Big\{\frac{1}{2}\frac{ik_2}{(ik_2-2w_e\frac{1}{\varepsilon})}w_{k_2}^0(e^{(ik_2-4w_e\frac{1}{\varepsilon})t}-e^{-ik_2t})\times$$

$$\times\Big(ik_1\int\limits_0^t e^{ik_1(s-t)}T_{k_1}^{-1}(z_{k_1}^{(m)})ds-T_{k_1}^{-1}(z_{k_1}^{(m)})\Big)+$$

$$+ik_2\int\limits_0^t e^{ik_2(s-t)}T_{k_2}^{-1}(z_{k_2}^{(m)})ds\Big(\frac{1}{2}\frac{ik_1}{(ik_1-2w_e\frac{1}{\varepsilon})}w_{k_1}^0(e^{(ik_1-4w_e\frac{1}{\varepsilon})t}-e^{-ik_1t})-w_k^0e^{(ik-4w_e\frac{1}{\varepsilon})t}\Big)\Big\}.$$

Имеем

$$\|L_0^{(m)}(T_k^{-1}(z_k^{(m)}))\|_{L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+;\mathcal{H}_{\sigma,m})}\leqslant$$

$$\leqslant 2c_\sigma^l c_3(1+\frac{\varepsilon}{4w_e}(1+c_3))\Big(|||u^0|||_{\mathcal{H}_{\sigma,m}}+|||w^0|||_{\mathcal{H}_{\sigma,m}}\Big)\|z_{k_1}^{(m)}\|_{L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+;\mathcal{H}_{\sigma,m})}.$$

Теперь воспользуемся аналогом оценки (2.39):

$$\varepsilon|ik_1\int\limits_0^t e^{ik_1(s-t)}T_{k_1}^{-1}(z_{k_1}^{(m)})ds|\leqslant\frac{\varepsilon}{\sqrt{2\gamma}}\ \|k_1T_{k_1}^{-1}(z_{k_1}^{(m)})\|_{L_{2,\gamma}}\leqslant\frac{\varepsilon}{\sqrt{2\gamma}}\ c_4\ \|z_{k_1}^{(m)}\|_{L_{2,\gamma}}. \tag{2.41}$$

Здесь мы опять воспользовались свойствами оператора T_k^{-1}. Это позволяет оценить норму $\|B_0(T_k^{-1}(z_k^{(m)}),T_k^{-1}(z_k^{(m)}))\|_{L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+;\mathcal{H}_{\sigma,m})}$. Имеем:

$$\varepsilon\|B_0(T_k^{-1}(z_k^{(m)}),T_k^{-1}(z_k^{(m)}))\|_{L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+;\mathcal{H}_{\sigma,m})}\leqslant$$

$$\leqslant\varepsilon\|\sum_{k_1\neq0}(-ik_1\int\limits_0^t e^{-ik_1(s-t)}T_{-k_1}^{-1}(z_{-k_1}^{(m)})ds\Big(ik_1\int\limits_0^t e^{ik_1(s-t)}T_{k_1}^{-1}(z_{k_1}^{(m)})ds\Big)\|_{L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+;\mathcal{H}_{\sigma,m})}+$$

$$+\varepsilon\|\sum_{k_1\neq0}(-ik_1\int\limits_0^t e^{-ik_1(s-t)}T_{-k_1}^{-1}(z_{-k_1}^{(m)})ds)\Big(T_{k_1}^{-1}(z_{k_1}^{(m)})\Big)\|_{L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+;\mathcal{H}_{\sigma,m})}\leqslant$$

$$\leqslant \frac{\varepsilon}{\sqrt{2\gamma}}\ c_4\ c_\sigma^B\ \left(\|z^{(m)}\|_{L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+;\mathcal{H}_{\sigma,m})}\right)^2.$$

Суммируя, получим

$$T^{add}(T_k^{-1}(z_k^{(m)})(t)\|_{L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+;\mathcal{H}_{\sigma,m})} \leqslant \frac{\varepsilon}{\sqrt{\gamma}} c_\sigma^T\Big(|||u^0|||_{\mathcal{H}_{\sigma,m}} + |||w^0|||_{\mathcal{H}_{\sigma,m}} + \tag{2.42}$$

$$+ |||Q^{(m)}|||_{\mathcal{H}_{\sigma,m}} + \|z^{(m)}\|_{L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+;\mathcal{H}_{\sigma,m})}\Big)\ \|z^{(m)}\|_{L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+;\mathcal{H}_{\sigma,m})}\Big)$$

Итерации. Рассмотрим последовательность итераций

$$X_k^{(j)} - X_k^{(0)} = \varepsilon w_e^{1/2}\Big\{B_k^{(m)}(T_k^{-1}(X_k^{(j-1)}), T_k^{-1}(X_k^{(j-1)})) + \tag{2.43}$$

$$+ 4B_k^{(m)}(T_k^{-1}(X_k^{(j-1)}), Q_k T_k^{-1}(e^{-ikt})) + 4B_k^{(m)}(Q_k T_k^{-1}(e^{-ikt}), T_k^{-1}(X_k^{(j-1)})) +$$

$$+ 2L_k^{(m)}(T_k^{-1}(X_k^{(j-1)})) - T^{add}(T_k^{-1}(X_k^{(j-1)})\Big\},\ j \geqslant 1,$$

$$X_k^{(0)} = \frac{1}{\varepsilon} e^{-4w_e \frac{1}{\varepsilon} t}\mathcal{F}_k^{(m)}(t) + \varepsilon\mathcal{G}_k^{(m)}(t).$$

Так же, как выше, получим

$$\|(X^{(j)} - X^{(0)})(t)\|_{L_{2\gamma}(\mathbb{R}_+;\mathcal{H}_{\sigma,m}} \leqslant \frac{\varepsilon}{\sqrt{\gamma}} c_\sigma\ \Big(|||u^0|||_{\mathcal{H}_{\sigma,m}} + |||w^0|||_{\mathcal{H}_{\sigma,m}} + \tag{2.44}$$

$$+ |||Q^{(m)}|||_{\mathcal{H}_{\sigma,m}} + \|X^{(j-1)}\|_{L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+;\mathcal{H}_{\sigma,m})}\Big)\ \|X^{(j-1)}\|_{L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+;\mathcal{H}_{\sigma,m})}\Big).$$

Неравенство (2.44) можно переписать в виде

$$\|(X^{(j)} - X^{(0)})(t)\|_{L_{2\gamma}(\mathbb{R}_+;\mathcal{H}_{\sigma,m}} \leqslant \frac{\varepsilon}{\sqrt{\gamma}} c_\sigma E_*^{(m)}\ \|X^{(0)}\|_{L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+;\mathcal{H}_{\sigma,m})} + \tag{2.45}$$

$$+ \frac{\varepsilon}{\sqrt{\gamma}} c_\sigma\ \ \|X^{(j-1)} - X^{(0)}\|_{L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+;\mathcal{H}_{\sigma,m})}\Big(E_*^{(m)} + \|X^{(0)}\|_{L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+;\mathcal{H}_{\sigma,m})}\Big),$$

где

$$E_*^{(m)} = |||u^0|||_{\mathcal{H}_{\sigma,m}} + |||w^0|||_{\mathcal{H}_{\sigma,m}} +\ + |||Q^{(m)}|||_{\mathcal{H}_{\sigma,m}} + \|X^{(0)}\|_{L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+;\mathcal{H}_{\sigma,m})}.$$

Отсюда следует ограниченность итераций

$$\|(X^{(j)} - X^{(0)})(t)\|_{L_{2\gamma}(\mathbb{R}_+;\mathcal{H}_{\sigma,m})} \leqslant \frac{\varepsilon}{\sqrt{\gamma}}\frac{2c_\sigma}{1-q} E_*^{(m)}\ \|X^{(0)}\|_{L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+;\mathcal{H}_{\sigma,m})},$$

если

$$\frac{\varepsilon}{\sqrt{\gamma}} c_\sigma\ \ \Big(E_*^{(m)} + \|X^{(0)}\|_{L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+;\mathcal{H}_{\sigma,m})}\Big) \leqslant q,\quad q \in (0,1).$$

Таким образом, справедлива

Теорема 2.3. *Пусть $\sigma > 1$ и существует $q \in (0,1)$, не зависящее от m, σ, ε, такое что*

$$\frac{\varepsilon}{\sqrt{\gamma}} c_\sigma\ \ \Big(|||u^0|||_{\mathcal{H}_{\sigma,m}} + |||w^0|||_{\mathcal{H}_{\sigma,m}} + |||Q^{(m)}|||_{\mathcal{H}_{\sigma,m}} + 2\|X^{(0)}\|_{L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+;\mathcal{H}_{\sigma,m})}\Big) \leqslant q,\quad q \in (0,1). \tag{2.46}$$

Тогда для любого $j \geqslant 1$ справедлива оценка

$$\|(X^{(j)} - X^{(0)})(t)\|_{L_{2\gamma}(\mathbb{R}_+;\mathcal{H}_{\sigma,m}} \leqslant \frac{\varepsilon}{\sqrt{\gamma}}\ \frac{2c_\sigma}{1-q}\ E_*^{(m)}\ \|X^{(0)}\|_{L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+;\mathcal{H}_{\sigma,m})}. \tag{2.47}$$

Для $l,\ 0 < l < j$, (2.43) можно переписать в виде

$$X_k^{(j)} - X_k^{(l)} = \varepsilon w_e^{1/2}\Big\{4B_k^{(m)}(T_k^{-1}(X_k^{(j-1)}) - T_k^{-1}(X_k^{(l-1)}), Q_k T_k^{-1}(e^{-ikt})) + \tag{2.48}$$

$$+ 4B_k^{(m)}(Q_k T_k^{-1}(e^{-ikt}), T_k^{-1}(X_k^{(j-1)}) - T_k^{-1}(X_k^{(l-1)}) +$$

$$+ 2L_k^{(m)}(T_k^{-1}(X_k^{(j-1)}) - T_k^{-1}(X_k^{(l-1)}) - T^{add}(T_k^{-1}(X_k^{(j-1)} - T_k^{-1}(X_k^{(l-1)}) +$$

$$+ B_k^{(m)}(T_k^{-1}(X_k^{(j-1)}) - T_k^{-1}(X_k^{(l-1)}), T_k^{-1}(X_k^{(j-1)})) +$$

$$+ B_k^{(m)}(T_k^{-1}(X_k^{(l-1)}), T_k^{-1}(X_k^{(j-1)}) - T_k^{-1}(X_k^{(l-1)}))\Big\},$$

откуда следует аналог оценки (2.44):

$$\|(X^{(j)}-X^{(l)})(t)\|_{L_{2\gamma}(\mathbb{R}_+;\mathcal{H}_{\sigma,m}}\leqslant\frac{\varepsilon}{\sqrt{\gamma}}c_\sigma\,\Big(|||u^0|||_{\mathcal{H}_{\sigma,m}}+|||w^0|||_{\mathcal{H}_{\sigma,m}}+$$

$$+|||Q^{(m)}|||_{\mathcal{H}_{\sigma,m}}+\|X^{(j-1)}-X^{(l-1)}\|_{L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+;\mathcal{H}_{\sigma,m})}\Big)\,\|X^{(j-1)}-X^{(l-1)}\|_{L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+;\mathcal{H}_{\sigma,m})}+$$

$$+\frac{\varepsilon}{\sqrt{\gamma}}c_\sigma\,\Big(\|X^{(j-1)}\|_{L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+;\mathcal{H}_{\sigma,m})}+\|X^{(l-1)}\|_{L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+;\mathcal{H}_{\sigma,m})}+$$

$$+\|X^{(j-1)}-X^{(l-1)}\|_{L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+;\mathcal{H}_{\sigma,m})}\Big)\|X^{(j-1)}-X^{(l-1)}\|_{L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+;\mathcal{H}_{\sigma,m})}.$$

Положим

$$\mathcal{E}_*^{(m)}=\frac{\varepsilon}{\sqrt{\gamma}}c_\sigma\,\Big(|||u^0|||_{\mathcal{H}_{\sigma,m}}+|||w^0|||_{\mathcal{H}_{\sigma,m}}+|||Q^{(m)}|||_{\mathcal{H}_{\sigma,m}}+$$

$$+\|X^{(j-1)}\|_{L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+;\mathcal{H}_{\sigma,m})}+\|X^{(l-1)}\|_{L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+;\mathcal{H}_{\sigma,m})}+2\|X^{(j-1)}-X^{(l-1)}\|_{L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+;\mathcal{H}_{\sigma,m})}\Big).$$

Тогда имеем

$$\|(X^{(j)}-X^{(l)})(t)\|_{L_{2\gamma}(\mathbb{R}_+;\mathcal{H}_{\sigma,m}}\leqslant\frac{\varepsilon}{\sqrt{\gamma}}c_\sigma\,(\mathcal{E}_*^{(m)})^{j-l}\|X^{(l-1)}\|_{L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+;\mathcal{H}_{\sigma,m})}\leqslant \tag{2.49}$$

$$\leqslant\frac{\varepsilon^2}{\gamma}\,\frac{2c_\sigma^2}{1-q}\,E_*^{(m)}\,\|X^{(0)}\|_{L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+;\mathcal{H}_{\sigma,m})}\,\,(\mathcal{E}_*^{(m)})^{j-l}.$$

Как следствие, получается

Теорема 2.4. *В условиях теоремы* 2.3 *последовательность* $X^{(j)}$ *фундаментальна в пространстве* $L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+;\mathcal{H}_{\sigma,m})$, *если*

$$\mathcal{E}_*^{(m)}\leqslant q_1,\quad q_1\in(0,1).$$

Таким образом, справедлива

Теорема 2.5. *Пусть* $\sigma>1$. *В условиях теоремы* 2.3 *существует единственное решение* $Z_m\in L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+;\mathcal{H}_{m,\sigma})$ *нелинейного уравнения* (2.37), *если*

$$\frac{\varepsilon}{\sqrt{\gamma}}c_\sigma\,\Big\{|||u^0|||_{\mathcal{H}_{\sigma,m}}+|||w^0|||_{\mathcal{H}_{\sigma,m}}+|||Q^{(m)}|||_{\mathcal{H}_{\sigma,m}}+ \tag{2.50}$$

$$+6\Big(1+\frac{\varepsilon}{\sqrt{\gamma}}\,\frac{2c_\sigma}{1-q}\,E_*^{(m)}\Big)\,\|X^{(0)}\|_{L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+;\mathcal{H}_{\sigma,m})}\Big\}\leqslant q_1<1.$$

Теперь отметим, что в рассматриваемом случае

$$\mathcal{F}_k^{(m)}(t)=(f_k^{(m)}(t)-\varepsilon w_e^{1/2}g_k^L(t)),$$

$$\mathcal{G}_k^{(m)}(t)=-\varepsilon w_e^{1/2}(2(H_k^L(t)+4H_k^B(t)),$$

где

$$\|w_e^{1/2}g_k^L(t)e^{-4w_e\frac{1}{\varepsilon}t}\|_{L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+;\mathcal{H}_{\sigma,m})}+\|\mathcal{G}_k^{(m)}\|_{L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+;\mathcal{H}_{\sigma,m})}\leqslant \tag{2.51}$$

$$\leqslant\frac{\varepsilon}{\sqrt{\gamma}}c_\sigma\,\Big(|||u^0|||_{\mathcal{H}_{\sigma,m}}+|||w^0|||_{\mathcal{H}_{\sigma,m}}+|||Q^{(m)}|||_{\mathcal{H}_{\sigma,m}}\Big),$$

$$\|f_k^L(t)e^{-4w_e\frac{1}{\varepsilon}t}\|_{L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+;\mathcal{H}_{\sigma,m})}\leqslant\frac{w_e}{4w_e-\varepsilon\gamma}|||w^0|||_{\mathcal{H}_{\sigma,m}}+$$

$$+\frac{\varepsilon}{\sqrt{\gamma}}c_\sigma\,\Big(|||u^0|||_{\mathcal{H}_{\sigma,m}}+|||w^0|||_{\mathcal{H}_{\sigma,m}}+|||Q^{(m)}|||_{\mathcal{H}_{\sigma,m}}\Big). \tag{2.52}$$

Здесь мы воспользовались тем, что

$$\int\limits_0^\infty\,e^{-2(\frac{1}{\varepsilon}4w_e-\gamma)t}dt\leqslant\frac{\varepsilon}{4w_e-\varepsilon\gamma}.$$

Теорема 2.6. *Построенное в теореме* 2.5 *решение нелинейного уравнения* (2.37) *определяет аппроксимацию*

$$(u^{(m)}(x,t), w^{(m)}(x,t)) \in W^1_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+;\mathcal{H}_{\sigma,m})$$

$$u^{(m)} = u_e + w_e^{1/2}\varepsilon^2\Big\{-w_0(t) + \sum_{|k|=1,\dots,m}\Big((u_k^0 - \frac{4w_e\frac{1}{\varepsilon}}{2iks-4w_e\frac{1}{\varepsilon}}w_k^0)e^{ik(x-t)}+ \tag{2.53}$$

$$+\sum_{|k|=1,\dots,m}\Big(\frac{4w_e\frac{1}{\varepsilon}}{2iks-4w_e\frac{1}{\varepsilon}})w_k^0 e^{(ik-4w_e\frac{1}{\varepsilon})t}+$$

$$+2ik\int_0^t e^{ik(s-t)}(Q_k^{(m)}T_k^{-1}(e^{-ikt})+T_k^{-1}(z_k^{(m)})ds - Q_k^{(m)}T_k^{-1}(e^{-ikt}) - T_k^{-1}(z_k^{(m)})\Big)\ e^{ikx},$$

$$w^{(m)} = w_e + w_e^{1/2}\varepsilon^2\Big(w_0(t) + \sum_{|k|=1,\dots,m}(w_k^0 e^{(ik-4w_e\frac{1}{\varepsilon})t}+$$

$$+Q_k^{(m)}T_k^{-1}(e^{-ikt}) + T_k^{-1}(z_k^{(m)}))e^{ikx}\Big)$$

решения задачи Коши (1.1) (см. ниже), в том смысле, что в $W^1_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+;\mathcal{H}_\sigma)$

$$(u^{(m)}(x,t), w^{(m)}(x,t)) \to (u(x,t), w(x,t)) \in W^1_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+;\mathcal{H}_\sigma),$$

где $(u(x,t), w(x,t))$ — решение задачи Коши (1.1).

2.7. Интегродифференциальное уравнение. Задача этого пункта — получить условия разрешимости задачи Коши для интегродифференциального уравнения

$$(\frac{d}{dt} - \partial_x + \frac{1}{\varepsilon}4w_e)u + \frac{1}{\varepsilon}\int_0^t(-4w_e\partial_x u(x-(t-s),s)ds = f, \quad u_{t=0}=0,$$

в классе периодических по x функций с нулевым средним, $u(t,x), f(t,x)$ — периодичны по x на интервале $x\in(-1,1)$. Сделав преобразование Фурье по x, для $k\in\mathbb{Z}_0$ получим

$$T_k(\widehat{u}(t,k)) = \Big(\frac{d}{dt} - ik + \frac{1}{\varepsilon}4w_e\Big)\widehat{u}(t,k) - \tag{2.54}$$

$$-4ikw_e\frac{1}{\varepsilon}\int_0^t e^{-ik(t-s)}\widehat{u}(s,k)ds = \widehat{f}(t,k), \quad \widehat{u}(t,k)|_{t=0}=0$$

оператор, рассмотренный выше (2.11). Преобразование Лапласа L по t приводит к алгебраическому уравнению

$$\sigma(p,k)(L(\widehat{u})(p,k)) = L(\widehat{f})(p,k) \Rightarrow\ L(\widehat{u})(p,k) = \frac{L(\widehat{f})(p,k)}{\sigma(p,k)},$$

где символ $\sigma(p,k)$ оператора T_k:

$$\sigma(p,k) = p - ik + \frac{1}{\varepsilon}4w_e - \frac{1}{\varepsilon}\frac{4ikw_e}{p+ik}.$$

Докажем существование $\gamma>0$ такого, что для любого $k\in\mathbb{Z}_0$ функция $1/\sigma(p,k)$ аналитична в полуплоскости $\mathrm{Re}\,p \geqslant -\gamma$.

В этой статье мы исследуем случай $u_e = w_e > 0$. Тогда

$$\sigma(p,k) = \frac{p^2+k^2+\frac{1}{\varepsilon}4w_e p}{p+ik} = \frac{(p-p_-)(p-p_+)}{p+ik},$$

где

$$p_- = -(\frac{1}{\varepsilon}2w_e + \sqrt{(\frac{1}{\varepsilon}2w_e)^2 - k^2}), \quad p_+ = -\frac{\varepsilon k^2}{2w_e + \sqrt{(2w_e)^2 - \varepsilon^2 k^2}},$$

корни уравнения $P_k(p) = p^2 + \frac{1}{\varepsilon}4w_e p + k^2 = 0$. Имеем

$$\operatorname{Re} p_- \geqslant -\frac{1}{\varepsilon}2w_e \quad \forall k \in \mathbb{Z}_0, \quad \operatorname{Re} p_+ = -\frac{2w_e}{\varepsilon}, \quad |k| \geqslant 2w_e/\varepsilon,$$

$$\operatorname{Re} p_+ = -\frac{\varepsilon k^2}{2w_e + \sqrt{(2w_e)^2 - \varepsilon^2 k^2}} \geqslant -\frac{\varepsilon k^2}{4w_e}, \quad 1 \leqslant |k| \leqslant 2w_e/\varepsilon.$$

Следовательно,

$$\min(\operatorname{Re} p_-, \operatorname{Re} p_+) \geqslant -\frac{\varepsilon}{4w_e}, \quad \forall k \in \mathbb{Z}_0.$$

Лемма 2.2. *Функция $1/\sigma(p,k)$ для любого $k \in \mathbb{Z}_0$ аналитична в полуплоскости*

$$\operatorname{Re} p \geqslant -\gamma, \quad \gamma = \frac{\varepsilon}{5w_e} \tag{2.55}$$

Более того,

$$\frac{1}{|\sigma(p,k)|} \leqslant \frac{|p+ik|}{|p-p_-|}\,\frac{1}{\operatorname{Re}(p-p_+)} \leqslant c_0\frac{20w_e}{\varepsilon}, \tag{2.56}$$
$$\frac{|p|+|k|}{|\sigma(p,k)|} \leqslant c_1, \;\; k \in \mathbb{Z}_0, \;\; \operatorname{Re} p \geqslant -\gamma.$$

Здесь $|p+ik| \leqslant c_0|p-p_-| \;\forall k \in \mathbb{Z}_0, \operatorname{Re} p \geqslant \gamma$.

Определение 2.1. Назовем *пространством Харди* $H_2(\operatorname{Re} p > -\gamma, H)$, $\gamma > 0$, класс вектор-функций $\widetilde{f(p)}$ со значениями в сепарабельном гильбертовом пространстве H, голоморфных в полуплоскости $\{p \in \mathbb{C}: \; \operatorname{Re} p > -\gamma\}$, для которых

$$\sup_{x>-\gamma} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \|f\widetilde{(x+iy)}\|_H^2 dy < \infty, \quad p = x + iy.$$

Сформулируем теорему Пэли—Винера для пространств Харди.

Теорема 2.7 (Пэли—Винер)**.**

1. *Пространство $H_2(\operatorname{Re} p > -\gamma, H)$ совпадает со множеством вектор-функций* (*преобразований Лапласа*), *допускающих представление*

$$\widetilde{f(p)} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_0^{\infty} e^{pt} f(t)dt \tag{2.57}$$

для $f(t) \in L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+, H)$, $p \in \mathbb{C}$, $\operatorname{Re} p > -\gamma \geqslant 0$.

2. *Для любой вектор-функции $\widetilde{f(p)} \in H_2(\operatorname{Re} p > -\gamma, H)$ существует единственное представление* (2.57)*, где вектор-функция $f(t) \in L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+, H)$, причем справедлива формула обращения*

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{(-\gamma+iy)t} f\widetilde{(-\gamma+iy)}dy, \quad t \in \mathbb{R}_+, \;\; \gamma > 0.$$

3. *Для вектор-функций $\widetilde{f(p)} \in H_2(\operatorname{Re} p > -\gamma, H)$ и $f(t) \in L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+, H)$, связанных соотношением* (2.57)*, справедливо равенство*

$$\|\widetilde{f}\|^2_{H_2(\operatorname{Re} p > -\gamma, H)} \equiv \sup_{x>-\gamma} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \|f\widetilde{(x+iy)}\|_H^2 dy = \int\limits_0^{\infty} e^{-2\gamma t}\|f(t)\|_N^2 dt \equiv \|f\|^2_{L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+;H)}$$

Лемма 2.3. *Для любой $f \in L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+;\mathcal{H}_\sigma)$ решение задачи Коши* (2.54)

$$\widehat{u}(t) = \{\widehat{u}(t,k) = L^{-1}(\frac{L(\widehat{f})(p,k)}{\sigma(p,k)}), \;\; k \in \mathbb{Z}_0\} \in H^1_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+;\mathcal{H}_\sigma) \tag{2.58}$$

$$\|\widehat{u}(t)\|_{H^1_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+;\mathcal{H}_\sigma)} \leqslant c_\gamma \;\|\widehat{f}(t)\|_{L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+;\mathcal{H}_\sigma)} \tag{2.59}$$

Рассмотрим случай $\widehat{f}(t,k) = e^{-ikt}$. Тогда

$$\sigma(p,k)L(\widehat{u})(p,k) = \frac{1}{p+ik} \Rightarrow \; L(\widehat{u})(p,k) = \frac{1}{(p-p_-)(p-p_+)}. \tag{2.60}$$

Лемма 2.4. *Решение* (2.60) *задачи Коши*

$$T_k(\widehat{u}(t,k)) = e^{-ikt}, \quad \widehat{u}(t,k)|_{t=0} = 0, \tag{2.61}$$

принадлежит

$$\widehat{u}(t) = \{\widehat{u}(t,k) = L^{-1}(\frac{1}{(p-p_-)(p-p_+)}), \; k \in \mathbb{Z}_0\} \in H^1_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+;\mathcal{H}_\sigma), \tag{2.62}$$

$$\|Q_k\widehat{u}(t,k)\|_{H^1_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+;\mathcal{H}_\sigma)} \leqslant c_\gamma \; |||Q|||_{\mathcal{H}_\sigma}. \tag{2.63}$$

Доказательство лемм следует из результатов теоремы 2.7 и оценок (2.56).

2.8. Существование решения задачи Коши. Теперь покажем, что аппроксимационное решение $(u^{(m)}(x,t), w^{(m)}(x,t))$

$$(u^{(m)}(x,t), w^{(m)}(x,t)) \to (u(x,t), w(x,t)) \in W^1_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+;\mathcal{H}_\sigma) \tag{2.64}$$

в смысле $W^1_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+;\mathcal{H}_\sigma)$, к решению $(u(x,t), w(x,t))$ задачи Коши (1.1).

Теорема 2.8. *Пусть равномерно по m выполнено условие теорем* 2.4, 2.5 *на начальные данные. Тогда существует решение $(u(x,t), w(x,t)) \in W^1_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+;\mathcal{H}_\sigma)$ задачи Коши* (1.1).

Прежде всего, докажем утверждение (2.64), т. е. существование предела $(u(x,t), w(x,t)) \in W^1_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+;\mathcal{H}_\sigma)$. Из полученных выше результатов следует ограниченность нормы

$$\|(u^{(m)}(x,t), w^{(m)}(x,t))\|_{W^1_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+;\mathcal{H}_{\sigma,m})} \leqslant C_*, \tag{2.65}$$

с постоянной C_*, не зависящей от m, если равномерно по m выполнено условия теорем 2.4–2.6 на начальные данные. Более того, эта последовательность фундаментальна при $m \to \infty$. Отсюда следует существование подпоследовательности $(u^{(m')}(x,t), w^{(m')}(x,t)) \in W^1_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+;\mathcal{H}_{2\sigma,m'})$, сходящейся при $m' \to \infty$ в $W^1_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+;\mathcal{H}_{\sigma,m'})$ к элементу $(u(x,t), w(x,t)) \in W^1_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+;\mathcal{H}_\sigma)$.

Теперь покажем, что полученное $(u(x,t), w(x,t))$ — решение задачи Коши (1.1). Подставляя в (1.1), в образах Фурье получим

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}_0}(\partial_t u_k + iku_k)e^{ikx} - \frac{1}{\varepsilon}\Big((u_e + \sum_{k\in\mathbb{Z}_0} u_k e^{ikx})^2 - (w_e + \sum_{k\in\mathbb{Z}_0} w_k e^{ikx})^2\Big) = \mathcal{F}_1(u,w),$$

$$\mathcal{F}(u,w) = \sum_{|k|=1,\dots,m} (\partial_t(u_k - u_k^{(m)}) + ik(u_k - u_k^{(m)}))e^{ikx} +$$

$$+ \sum_{k\in\mathbb{Z}_0,|k|>m} (\partial_t u_k + iku_k)e^{ikx} - \frac{1}{\varepsilon}\mathcal{Q}(u,w),$$

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}_0}(\partial_t w_k - ikw_k)e^{ikx} + \frac{1}{\varepsilon}\Big((u_e + \sum_{k\in\mathbb{Z}_0} u_k e^{ikx})^2 - (w_e + \sum_{k\in\mathbb{Z}_0} w_k e^{ikx})^2\Big) = \mathcal{F}_2(u,w),$$

$$\mathcal{F}_2(u,w) = \sum_{|k|=1,\dots,m} (\partial_t(w_k - w_k^{(m)}) - ik(w_k - w_k^{(m)}))e^{ikx} +$$

$$+ \sum_{k\in\mathbb{Z}_0,|k|>m} (\partial_t w_k - ikw_k)e^{ikx} + \frac{1}{\varepsilon}\mathcal{Q}(u,w),$$

где

$$\mathcal{Q}(u,w) = (\sum_{k\in\mathbb{Z}_0, \; |k|>m} u_k e^{ikx})^2 - (\sum_{k\in\mathbb{Z}_0, \; |k|>m} w_k e^{ikx})^2 +$$

$$+ 2(u_e + \sum_{|k|=1,\dots,m} u_k e^{ikx})(\sum_{k\in\mathbb{Z}_0, \; |k|>m} u_k e^{ikx}) -$$

$$
\begin{aligned}
&-2(w_e+\sum_{|k|=1,\dots,m} w_k e^{ikx})(\sum_{k\in\mathbb{Z}_0,\ |k|>m} w_k e^{ikx})+\\
&+2u_e\sum_{|k|=1,\dots,m}(u_k-u_k^{(m)})e^{ikx}-2w_e\sum_{|k|=1,\dots,m}(w_k-w_k^{(m)})e^{ikx}+\\
&+(\sum_{|k|=1,\dots,m} u_k e^{ikx})^2-\sum_{|k|=1,\dots,m}\ \sum_{k_1+k_2=k,|k_1|,|k_2|\leqslant m} u_{k_1}^{(m)}u_{k_2}^{(m)}e^{ikx}-\\
&-(\sum_{|k|=1,\dots,m} w_k e^{ikx}))^2+\sum_{|k|=1,\dots,m}\ \sum_{k_1+k_2=k,|k_1|,|k_2|\leqslant m} w_{k_1}^{(m)}w_{k_2}^{(m)}e^{ikx}.
\end{aligned}
$$

Из приведенных выше оценок следует, что

$$\|\mathcal{F}_1(u,w)\|_{L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+;\mathcal{H}_\sigma)}+\|\mathcal{F}_2(u,w)\|_{L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+;\mathcal{H}_\sigma)}\to 0,\quad m\to\infty.$$

Это завершает доказательство теоремы 2.8.

В заключение докажем следующую лемму:

Лемма 2.5. *Периодическое решение* $(u,w)\in W_2^{1,1}(\mathbb{R}_+\times(0,1))\cap C_B(\mathbb{R}_+\times(0,1))$ *задачи Коши* (1.1) *с вещественными начальными условиями является вещественным.*

Доказательство. В силу (1.1) для $X=u-\overline{u}$, $Y=w-\overline{w}$ имеем

$$
\begin{gathered}
\partial_t X+\partial_x X=\frac{1}{\varepsilon}(AX-BY),\quad x\in\mathbb{R},\ t>0, \qquad (2.66)\\
\partial_t w-\partial_x w=-\frac{1}{\varepsilon}(AX-BY),\\
X|_{t=0}=0,\quad Y|_{t=0}=0,
\end{gathered}
$$

где $A=u+\overline{u},\ B=w+\overline{w}$. Отсюда

$$
\begin{gathered}
\frac{d}{dt}\int_0^1|X|^2dx=\frac{1}{\varepsilon}\int_0^1((A+\overline{A})|X|^2-BY\overline{X}-X\overline{BY})dx,\ t>0, \qquad (2.67)\\
\frac{d}{dt}\int_0^1|Y|^2dx=-\frac{1}{\varepsilon}\int_0^1(AX\overline{Y}+Y\overline{AX}-(B+\overline{B})|Y|^2)dx.
\end{gathered}
$$

Для вещественного решения

$$X|_{t=0}=0,\quad Y|_{t=0}=0.$$

Интегрируя, получим

$$
\begin{gathered}
\int_0^1|X(x,t)|^2dx=\leqslant CT\max_{t\in[0,T]}\Big(\int_0^1|X(x,t)|^2dx+\int_0^1|Y(x,t)|^2dx\Big), \qquad (2.68)\\
\int_0^1|Y(x,t)|^2dx\leqslant CT\max_{t\in[0,T]}\Big(\int_0^1|X(x,t)|^2dx+\int_0^1|Y(x,t)|^2dx\Big),\quad \forall t\in(0,T),
\end{gathered}
$$

где $C=2\max\limits_{(x,t)\in\mathbb{R}_+\times[0,1]}(|A|+|B|)\leqslant 4\max\limits_{(x,t)\in\mathbb{R}_+\times[0,1]}(|u|+|w|)$. Выбирая T достаточно малым, так чтобы $CT<1$, получим, что

$$\int_0^1|X(x,t)|^2dx=\int_0^1|Y(x,t)|^2dx\equiv 0,\quad t\in(0,T),$$

откуда следует вещественность u и w. $\square$

3. О природе локального равновесия кинетического уравнения Годунова—Султангазина

В этом разделе мы рассмотрим задачу Коши для одномерной модели Годунова—Султангазина (типа Бродуэлла) (см. [3]):

$$\partial_t u + \partial_x u = \frac{1}{\varepsilon}(v^2 - uw), \tag{3.1}$$

$$\partial_t v = -\frac{2}{\varepsilon}(v^2 - uw),$$

$$\partial_t w - \partial_x w = \frac{1}{\varepsilon}(v^2 - uw),$$

$$v(0) = v^0,\ u(0) = u^0,\ w(0) = w^0. \tag{3.2}$$

Здесь $x \in S^1 = [0, 2\pi]$ и $U(t, 0) = U(t, 2\pi)$ — пространственно-периодические граничные условия, ε — малая величина, которую мы выберем ниже. Все полученные результаты переносятся на двумерную и трехмерную модели, приведенные в [3].

3.1. Малые возмущения. Наша задача исследовать природу локального равновесия для модели Годунова—Султангазина (3.1) для периодических начальных данных с ограниченной энергией. Рассмотрим окрестность состояния равновесия $v_e^2 = u_e w_e,\ v_e, u_e, w_e > 0$

$$u = u_e + \varepsilon^2 u_e^{1/2}\widehat{u},\ w = w_e + \varepsilon^2 w_e^{1/2}\widehat{w},\ v = v_e + \varepsilon^2 v_e^{1/2}\widehat{v}.$$

Тогда можно переписать в виде

$$\partial_t\widehat{u} + \partial_x\widehat{u} - \frac{1}{\varepsilon}w_e^{1/2}\Big(2v_e^{1/2}\widehat{v} - u_e^{1/2}\widehat{w} - w_e^{1/2}\widehat{u}\Big) = \varepsilon\ w_e^{1/2}\Big(\widehat{v}^2 - \widehat{u}\widehat{w}\Big), \tag{3.3}$$

$$\partial_t\widehat{v} + \frac{2}{\varepsilon}v_e^{1/2}\Big(2v_e^{1,2}\widehat{v} - u_e^{1,2}\widehat{w} - w_e^{1,2}\widehat{u}\Big) = -2\varepsilon v_e^{1/2}\Big(\widehat{v}^2 - \widehat{u}\widehat{w}\Big),$$

$$\partial_t\widehat{w} - \partial_x\widehat{w} - \frac{1}{\varepsilon}u_e^{1/2}\Big(2v_e^{1/2}\widehat{v} - u_e^{1/2}\widehat{w} - w_e^{1/2}\widehat{u}\Big) = \varepsilon u_e^{1/2}\Big(\widehat{v}^2 - \widehat{u}\widehat{w}\Big),$$

$$v(0) = v^0,\ \widehat{u}(0) = u^0,\ w(0) = w^0. \tag{3.4}$$

Два независимых закона сохранения:

$$\partial_t\widehat{u} + \partial_x\widehat{u} = -\frac{1}{2}\frac{w_e^{1/2}}{v_e^{1/2}}\partial_t\widehat{v},$$

$$\partial_t\widehat{w} - \partial_x\widehat{w} = -\frac{1}{2}\frac{u_e^{1/2}}{v_e^{1/2}}\partial_t\widehat{v}.$$

В образах Фурье:

$$\frac{d}{dt}u_k + iku_k = -\frac{1}{2}\frac{w_e^{1/2}}{v_e^{1/2}}\frac{d}{dt}v_k, \tag{3.5}$$

$$\frac{d}{dt}w_k - ikw_k = -\frac{1}{2}\frac{u_e^{1/2}}{v_e^{1/2}}\frac{d}{dt}v_k.$$

Отсюда

$$u_k = (u_k^0 + \frac{1}{2}\frac{w_e^{1/2}}{v_e^{1/2}}v_k^0)e^{-ikt} - \frac{1}{2}\frac{w_e^{1/2}}{v_e^{1/2}}v_k + ik\frac{1}{2}\frac{w_e^{1/2}}{v_e^{1/2}}\int\limits_0^t e^{ik(s-t)}v_k ds, \tag{3.6}$$

$$w_k = (w_k^0 + \frac{1}{2}\frac{u_e^{1/2}}{v_e^{1/2}}v_k^0)e^{ikt} - \frac{1}{2}\frac{u_e^{1/2}}{v_e^{1/2}}v_k - ik\frac{1}{2}\frac{u_e^{1/2}}{v_e^{1/2}}\int\limits_0^t e^{-ik(s-t)}v_k ds.$$

Для $k = 0$ имеем

$$u_0 = (u_0^0 + \frac{1}{2}w_e^{1/2}v_0^0) - \frac{1}{2}\frac{w_e^{1/2}}{v_e^{1/2}}v_0,$$

$$w_0 = (w_0^0 + \frac{1}{2}u_e^{1/2}v_0^0) - \frac{1}{2}\frac{u_e^{1/2}}{v_e^{1/2}}v_0.$$

Потребуем, чтобы выполнялось

Условие 3.1.

$$u_0^0 = w_0^0 = v_0^0 = 0.$$

Тогда

$$u_0(t) = -\frac{1}{2}\frac{w_e^{1/2}}{v_e^{1/2}}v_0(t), \quad w_0(t) = -\frac{1}{2}\frac{u_e^{1/2}}{v_e^{1/2}}v_0(t).$$

Далее

$$\frac{d}{dt}v_k + \frac{2}{\varepsilon}\Big(2v_e\widehat{v} - v_e^{1/2}u_e^{1/2}\widehat{w} - v_e^{1/2}w_e^{1/2}\widehat{u}_e\Big) = -2\varepsilon v_e^{1/2}\Big(\widehat{v}^2 - \widehat{u}\widehat{w}\Big)_k.$$

Заметим, что

$$2v_e\widehat{v} - v_e^{1/2}u_e^{1/2}\widehat{w} - v_e^{1/2}w_e^{1/2}\widehat{u}_e = \frac{1}{2}(4v_e - u_e - w_e)v_k - (v_e^{1/2}u_e^{1/2}w_k^0 + \frac{1}{2}u_e v_k^0)e^{ikt} -$$

$$- (v_e^{1/2}w_e^{1/2}u_k^0 + \frac{1}{2}w_e v_k^0)e^{-ikt} - ik\frac{1}{2}\int\limits_0^t \Big(u_e e^{-ik(s-t)} - w_e e^{ik(s-t)}\Big)v_k ds.$$

Таким образом,

$$\frac{d}{dt}v_k + \frac{1}{\varepsilon}L_e\ v_k - \frac{1}{\varepsilon}ik\int\limits_0^t \Big(u_e e^{-ik(s-t)} - w_e e^{ik(s-t)}\Big)v_k ds = \tag{3.7}$$

$$= 2\frac{1}{\varepsilon}v_e^{1/2}u_e^{1/2}(w_k^0 + \frac{1}{2}\frac{u_e^{1/2}}{v_e^{1/2}}v_k^0)e^{ikt} + 2\frac{1}{\varepsilon}v_e^{1/2}w_e^{1/2}(u_k^0 + \frac{1}{2}\frac{w_e^{1/2}}{v_e^{1/2}}v_k^0)e^{-ikt} - 2\varepsilon v_e^{1/2}\Big(\widehat{v}^2 - \widehat{u}\widehat{w}\Big)_k,$$

$$v_k|_{t=0} = v_k^0,$$

где $L_e = 4v_e + u_e + w_e > 0$, таким образом, выполнено условие диссипации $L_e > 0$.

3.2. Комплексификация. Для упрощения Фурье-анализа решений задачи Коши (3.7) удобно перейти к комплексификации (3.7):

$$\frac{d}{dt}v_k + \frac{1}{\varepsilon}L_e\ v_k - \frac{1}{\varepsilon}ik\int\limits_0^t \Big(u_e e^{-ik(s-t)} - w_e e^{ik(s-t)}\Big)v_k ds = \tag{3.8}$$

$$= 2\frac{1}{\varepsilon}v_e^{1/2}u_e^{1/2}(w_k^0 + \frac{1}{2}\frac{u_e^{1/2}}{v_e^{1/2}}v_k^0)e^{ikt} + 2\frac{1}{\varepsilon}v_e^{1/2}w_e^{1/2}(u_k^0 + \frac{1}{2}\frac{w_e^{1/2}}{v_e^{1/2}}v_k^0)e^{-ikt} - \varepsilon v_e^{1/2}\Big(2\widehat{v}\overline{\widehat{v}} - \widehat{u}\overline{\widehat{w}} - \widehat{w}\overline{\widehat{u}}\Big)_k,$$

$$v_k|_{t=0} = v_k^0.$$

Очевидно, что вещественные решения этой системы являются решениями системы (3.7). Доказательство этого утверждения мы приводим в пункте 2.8.

Здесь для нулевой моды $k = 0$ имеем уравнение Риккати

$$\frac{d}{dt}v_0 + \frac{1}{\varepsilon}L_e\ v_0 = -\varepsilon v_e^{1/2}\Big(\frac{3}{2}v_0\overline{v_0} - d_0 + L_0(v) + B_0(v,v)\Big)\Big), \tag{3.9}$$

$$v_0|_{t=0} = 0,$$

где

$$d_0 = \sum_{k_1+k_2=0, k_1,k_2\neq 0}\Big((u_{k_1}^0 + \frac{1}{2}w_e^{1/2}v_{k_1}^0)(\overline{w_{k_2}^0} + \frac{1}{2}\frac{u_e^{1/2}}{v_e^{1/2}}\overline{v_{k_2}^0}) +$$

$$+ (w_{k_2}^0 + \frac{1}{2}\frac{u_e^{1/2}}{v_e^{1/2}}v_{k_2}^0)(\overline{u_{k_1}^0} + \frac{1}{2}\frac{w_e^{1/2}}{v_e^{1/2}}\overline{v_{k_1}^0})\Big),$$

$$L_0(v) = -\sum_{k_1+k_2=0,k_1,k_2\neq 0}\Big\{(u^0_{k_1}+\frac{1}{2}\frac{w_e^{1/2}}{v_e^{1/2}}v^0_{k_1})e^{-ik_1t}(-\frac{1}{2}\frac{u_e^{1/2}}{v_e^{1/2}}\overline{v_{k_2}}+ik_2\frac{1}{2}\frac{u_e^{1/2}}{v_e^{1/2}}\int\limits_0^t e^{ik_2(s-t)}\overline{v_{k_2}}ds)+$$
$$+\Big(-\frac{1}{2}\frac{w_e^{1/2}}{v_e^{1/2}}v_{k_1}+ik_1\frac{1}{2}\frac{w_e^{1/2}}{v_e^{1/2}}\int\limits_0^t e^{ik_1(s-t)}v_{k_1}ds\Big)(\overline{w^0_{k_2}}+\frac{1}{2}\frac{u_e^{1/2}}{v_e^{1/2}}\overline{v^0_{k_2}})e^{-ik_2t}+$$
$$+((w^0_{k_2}+\frac{1}{2}\frac{u_e^{1/2}}{v_e^{1/2}}v^0_{k_2})e^{ik_2t}\Big(-\frac{1}{2}\frac{w_e^{1/2}}{v_e^{1/2}}\overline{v_{k_1}}-ik_1\frac{1}{2}\frac{w_e^{1/2}}{v_e^{1/2}}\int\limits_0^t e^{-ik_1(s-t)}\overline{v_{k_1}}ds\Big)+$$
$$+\Big(-\frac{1}{2}\frac{u_e^{1/2}}{v_e^{1/2}}v_{k_2}-ik_2\frac{1}{2}\frac{u_e^{1/2}}{v_e^{1/2}}\int\limits_0^t e^{-ik_2(s-t)}v_{k_2}ds\Big)(\overline{u^0_{k_1}}+\frac{1}{2}\frac{w_e^{1/2}}{v_e^{1/2}}\overline{v^0_{k_1}})e^{ik_1t}\Big\},$$
$$B_0(v,v) = \sum_{k_1+k_2=0,k_1,k_2\neq 0}\Big\{v_{k_1}\overline{v_{k_2}}+v_{k_2}\overline{v_{k_1}}-$$
$$-(-\frac{1}{2}\frac{w_e^{1/2}}{v_e^{1/2}}v_{k_1}+ik_1\frac{1}{2}\frac{w_e^{1/2}}{v_e^{1/2}}\int\limits_0^t e^{ik_1(s-t)}v_{k_1}ds)(-\frac{1}{2}\frac{u_e^{1/2}}{v_e^{1/2}}\overline{v_{k_2}}+ik_2\frac{1}{2}\frac{u_e^{1/2}}{v_e^{1/2}}\int\limits_0^t e^{ik_2(s-t)}\overline{v_{k_2}}ds)-$$
$$-(-\frac{1}{2}\frac{u_e^{1/2}}{v_e^{1/2}}v_{k_2}-ik_2\frac{1}{2}\frac{u_e^{1/2}}{v_e^{1/2}}\int\limits_0^t e^{-ik_2(s-t)}v_{k_2}ds)(-\frac{1}{2}\frac{w_e^{1/2}}{v_e^{1/2}}\overline{v_{k_1}}-ik_1\frac{1}{2}\frac{w_e^{1/2}}{v_e^{1/2}}\int\limits_0^t e^{-ik_1(s-t)}\overline{v_{k_1}}ds)\Big\}.$$

Очевидно, что правая часть — вещественная функция. Положим

$$v_k = v^0_k e^{-\frac{1}{\varepsilon}L_e t}+y_k,\quad k\in\mathbb{Z}_0,$$

где, как мы покажем ниже, существует $\gamma = O(\varepsilon) > 0$, такое что $y_k(t)\in L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+)$. Здесь

$$\|y\|^2_{L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+)} = \int\limits_0^\infty e^{2\gamma t}|y|^2dt.$$

Тогда

$$\frac{d}{dt}y_0+\frac{1}{\varepsilon}L_e\ y_0 = -\varepsilon v_e^{1/2}\Big(\frac{3}{2}y_0\overline{y_0}-D_0+\mathcal{L}_0(y)+B_0(y,y)\Big)+f_0(t)e^{-\frac{1}{\varepsilon}L_e t},\tag{3.10}$$
$$v_0|_{t=0}=0,$$

где

$$L_0(v^0e^{-\frac{1}{\varepsilon}L_e t})+B_0(v^0e^{-\frac{1}{\varepsilon}L_e t},v^0e^{-\frac{1}{\varepsilon}L_e t})\Big) = d^{(1)}_0+f_0(t)e^{-\frac{1}{\varepsilon}L_e t},$$
$$d^{(1)}_0 = \sum_{k_1+k_2=0,k_1,k_2\in\mathbb{Z}_0}\Big\{(u^0_{k_1}+\frac{1}{2}\frac{w_e^{1/2}}{v_e^{1/2}}v^0_{k_1})\frac{ik_2}{(ik_2-\frac{1}{\varepsilon}L_e)}\frac{1}{2}\frac{u_e^{1/2}}{v_e^{1/2}}\overline{v^0_{k_2}}+$$
$$+\frac{ik_1}{(ik_1-\frac{1}{\varepsilon}L_e)}\frac{1}{2}\frac{w_e^{1/2}}{v_e^{1/2}}v^0_{k_1}(\overline{w^0_{k_2}}+\frac{1}{2}\frac{u_e^{1/2}}{v_e^{1/2}}\overline{v^0_{k_2}})+$$
$$+(w^0_{k_2}+\frac{1}{2}\frac{u_e^{1/2}}{v_e^{1/2}}v^0_{k_2})\frac{ik_1}{(ik_1+\frac{1}{\varepsilon}L_e)}\frac{1}{2}\frac{w_e^{1/2}}{v_e^{1/2}}\overline{v^0_{k_1}}+\frac{ik_2}{(ik_2+\frac{1}{\varepsilon}L_e)}\frac{1}{2}\frac{u_e^{1/2}}{v_e^{1/2}}v^0_{k_2}(\overline{u^0_{k_1}}+\frac{1}{2}\frac{w_e^{1/2}}{v_e^{1/2}}\overline{v^0_{k_1}})\Big\},$$
$$D_0 = d_0-d^{(1)}_0 =$$
$$= \sum_{k_1+k_2=0,k_1,k_2\in\mathbb{Z}_0}\Big\{\Big(\Big(u^0_{k_1}-\frac{1}{2}\frac{w_e^{1/2}}{v_e^{1/2}}\frac{\frac{1}{\varepsilon}L_e}{(ik_1-\frac{1}{\varepsilon}L_e)}v^0_{k_1}\Big)(\overline{w^0_{k_2}}-\frac{1}{2}\frac{u_e^{1/2}}{v_e^{1/2}}\frac{\frac{1}{\varepsilon}L_e}{(ik_2-\frac{1}{\varepsilon}L_e)}\overline{v^0_{k_2}}\Big)+$$
$$+\Big(w^0_{k_2}-\frac{1}{2}\frac{u_e^{1/2}}{v_e^{1/2}}\frac{\frac{1}{\varepsilon}L_e}{(ik_2+\frac{1}{\varepsilon}L_e)}v^0_{k_2}\Big)\Big(\overline{u^0_{k_1}}-\frac{1}{2}\frac{w_e^{1/2}}{v_e^{1/2}}\frac{\frac{1}{\varepsilon}L_e}{(ik_1+\frac{1}{\varepsilon}L_e)}\overline{v^0_{k_1}}\Big)\Big\},$$
$$\mathcal{L}_0(y) = L_0(y)+B_0(v^0e^{-\frac{1}{\varepsilon}L_e t},y)+B_0(y,v^0e^{-\frac{1}{\varepsilon}L_e t}),$$

$$f_0(t)e^{-\frac{1}{\varepsilon}L_e t} = -\varepsilon v_e^{1/2}\Big(\mathcal{L}_0(v^0 e^{-\frac{1}{\varepsilon}L_e t}) + B_0(v^0 e^{-\frac{1}{\varepsilon}L_e t}, y) + B_0(y, v^0 e^{-\frac{1}{\varepsilon}L_e t})\Big).$$

Невозмущенное уравнение

$$\frac{d}{dt}v_0 = -\varepsilon v_e^{1/2}\frac{3}{2}\Big(v_0(v_0 + \frac{1}{\varepsilon^2}\frac{2L_e}{3v_e^{1/2}}) - \frac{2}{3}D_0\Big) = \varepsilon v_e^{1/2}\frac{3}{2}(v_0^+ - v_0)(v_0 - v_0^-).$$

Стационарные точки

$$(v_0)^2 + \frac{1}{\varepsilon^2}\frac{2L_e}{3v_e^{1/2}}v_0 - \frac{2}{3}D_0 = 0,$$

$$v_0^{\pm} = \frac{1}{2}\Big(-\frac{1}{\varepsilon^2}\frac{2L_e}{3v_e^{1/2}} \pm \sqrt{(\frac{1}{\varepsilon^2}\frac{2L_e}{3v_e^{1/2}})^2 + \frac{8}{3}D_0}\Big).$$

Невозмущенное уравнение имеет ограниченное сепаратрисное решение

$$v_0^- < v_0^{sp}(t) < v_0^+,$$

если выполняется

Условие 3.2.

$$(\frac{2L_e}{3v_e^{1/2}})^2 + \varepsilon^4\frac{8}{3}D_0 > 0.$$

Отсюда следует, что задача Коши

$$\frac{d}{dt}v_0 = -\varepsilon v_e^{1/2}\frac{3}{2}\Big(v_0(v_0 + \frac{1}{\varepsilon^2}\frac{2L_e}{3v_e^{1/2}}) - \frac{2}{3}D_0\Big), \qquad (3.11)$$

$$v_0|_{t=0} = 0$$

имеет ограниченное решение $v_0(t) = v_0^{sp}(t),\ t \geqslant 0$, если выполняется

Условие 3.3.

$$D_0 = \sum_{k_1+k_2=0, k_1,k_2\neq 0}\Big\{\Big(\Big(u_{k_1}^0 - \frac{1}{2}\frac{w_e^{1/2}}{v_e^{1/2}}\frac{\frac{1}{\varepsilon}L_e}{(ik_1 - \frac{1}{\varepsilon}L_e)}v_{k_1}^0\Big)(\overline{w_{k_2}^0} - \frac{1}{2}\frac{u_e^{1/2}}{v_e^{1/2}}\frac{\frac{1}{\varepsilon}L_e}{(ik_2 - \frac{1}{\varepsilon}L_e)}\overline{v_{k_2}^0}\Big) +$$

$$+ \Big(w_{k_2}^0 - \frac{1}{2}\frac{u_e^{1/2}}{v_e^{1/2}}\frac{\frac{1}{\varepsilon}L_e}{(ik_2 + \frac{1}{\varepsilon}L_e)}v_{k_2}^0\Big)\Big(\overline{u_{k_1}^0} - \frac{1}{2}\frac{w_e^{1/2}}{v_e^{1/2}}\frac{\frac{1}{\varepsilon}L_e}{(ik_1 + \frac{1}{\varepsilon}L_e)}\overline{v_{k_1}^0}\Big)\Big\} \geqslant 0.$$

Если $D_0 = 0$ имеем тривиальное решение $v_0(t) \equiv 0$.

3.3. ***k*-мода.** Так же, как выше для $k \in \mathbb{Z}_0$, имеем

$$\Big(2\widehat{v}\widehat{\overline{v}} - \widehat{u}\widehat{\overline{w}} - \widehat{w}\widehat{\overline{u}}\Big)_k = \frac{1}{2}(v_0\overline{v_k} + v_k\overline{v_0}) -$$

$$+ \frac{1}{2}\frac{w_e^{1/2}}{v_e^{1/2}}v_0((\overline{w_k^0} + \frac{1}{2}\frac{u_e^{1/2}}{v_e^{1/2}}\overline{v_k^0})e^{-ikt} + ik\frac{1}{2}\frac{u_e^{1/2}}{v_e^{1/2}}\int\limits_0^t e^{ik(s-t)}\overline{v_k}ds) +$$

$$+ ((w_k^0 + \frac{1}{2}\frac{u_e^{1/2}}{v_e^{1/2}}v_k^0)e^{ikt} - ik\frac{1}{2}\frac{u_e^{1/2}}{v_e^{1/2}}\int\limits_0^t e^{-ik(s-t)}v_k ds)\frac{1}{2}\frac{w_e^{1/2}}{v_e^{1/2}}\overline{v_0} +$$

$$+ ((u_k^0 + \frac{1}{2}\frac{w_e^{1/2}}{v_e^{1/2}}v_k^0)e^{-ikt} + ik\frac{1}{2}\frac{w_e^{1/2}}{v_e^{1/2}}\int\limits_0^t e^{ik(s-t)}v_k ds)\frac{1}{2}\frac{u_e^{1/2}}{v_e^{1/2}}\overline{v_0} +$$

$$+ \frac{1}{2}\frac{u_e^{1/2}}{v_e^{1/2}}v_0((\overline{u_k^0} + \frac{1}{2}\frac{w_e^{1/2}}{v_e^{1/2}}\overline{v_k^0})e^{ikt} - ik\frac{1}{2}\frac{w_e^{1/2}}{v_e^{1/2}}\int\limits_0^t e^{-ik(s-t)}\overline{v_k}ds) +$$

$$+ \sum_{k_1+k_2=k, k_1,k_2\neq 0}\Big\{v_{k_1}\overline{v_{k_2}} + v_{k_2}\overline{v_{k_1}} -$$

$$-\Big((u^0_{k_1}+\frac{1}{2}\frac{w_e^{1/2}}{v_e^{1/2}}v^0_{k_1})e^{-ik_1t}-\frac{1}{2}\frac{w_e^{1/2}}{v_e^{1/2}}v_{k_1}+ik_1\frac{1}{2}\frac{w_e^{1/2}}{v_e^{1/2}}\int\limits_0^t e^{ik_1(s-t)}v_{k_1}ds\Big)\times$$

$$\times\Big((\overline{w^0_{k_2}}+\frac{1}{2}\frac{u_e^{1/2}}{v_e^{1/2}}\overline{v^0_{k_2}})e^{-ik_2t}-\frac{1}{2}\frac{u_e^{1/2}}{v_e^{1/2}}\overline{v_{k_2}}+ik_2\frac{1}{2}\frac{u_e^{1/2}}{v_e^{1/2}}\int\limits_0^t e^{ik_2(s-t)}\overline{v_{k_2}}ds\Big)+$$

$$-\Big((w^0_{k_2}+\frac{1}{2}\frac{u_e^{1/2}}{v_e^{1/2}}v^0_{k_2})e^{ik_2t}-\frac{1}{2}\frac{u_e^{1/2}}{v_e^{1/2}}v_{k_2}-ik_2\frac{1}{2}\frac{u_e^{1/2}}{v_e^{1/2}}\int\limits_0^t e^{-ik_2(s-t)}v_{k_2}ds\Big)(\overline{u^0_{k_1}}+\frac{1}{2}\frac{w_e^{1/2}}{v_e^{1/2}}\overline{v^0_{k_1}})e^{ik_1t}-$$

$$-\Big((w^0_{k_2}+\frac{1}{2}\frac{u_e^{1/2}}{v_e^{1/2}}v^0_{k_2})e^{ik_2t}-\frac{1}{2}\frac{u_e^{1/2}}{v_e^{1/2}}v_{k_2}-ik_2\frac{1}{2}\frac{u_e^{1/2}}{v_e^{1/2}}\int\limits_0^t e^{-ik_2(s-t)}v_{k_2}ds\Big)\times$$

$$\times\Big(-\frac{1}{2}\frac{w_e^{1/2}}{v_e^{1/2}}\overline{v_{k_1}}-ik_1\frac{1}{2}\frac{w_e^{1/2}}{v_e^{1/2}}\int\limits_0^t e^{-ik_1(s-t)}\overline{v_{k_1}}ds\Big)\Big\}.$$

Отсюда

$$\frac{d}{dt}v_k+\frac{1}{\varepsilon}L_e\ v_k-\frac{1}{\varepsilon}ik\int\limits_0^t\Big(u_e e^{-ik(s-t)}-w_e e^{ik(s-t)}\Big)v_k ds= \tag{3.12}$$

$$=2\frac{1}{\varepsilon}v_e^{1/2}D^+_k e^{ikt}+2\frac{1}{\varepsilon}v_e^{1/2}D^-_k e^{-ikt}-\varepsilon v_e^{1/2}T^{add}_k(v)-$$

$$-\varepsilon v_e^{1/2}\Big(L_k(v)+B_k(v,v)\Big)$$

$$v_k|_{t=0}=v^0_k,$$

$$D^+_k=u_e^{1/2}(w^0_k+\frac{1}{2}\frac{u_e^{1/2}}{v_e^{1/2}}v^0_k)+\frac{1}{2}\varepsilon^2\sum_{k_1+k_2=k,k_1,k_2\neq0}(w^0_{k_2}+\frac{1}{2}\frac{u_e^{1/2}}{v_e^{1/2}}v^0_{k_2})\overline{(u^0_{k_1}+\frac{1}{2}\frac{w_e^{1/2}}{v_e^{1/2}}v^0_{k_1})},$$

$$D^-_k=w_e^{1/2}(u^0_k+\frac{1}{2}\frac{w_e^{1/2}}{v_e^{1/2}}v^0_k)+\frac{1}{2}\varepsilon^2\sum_{k_1+k_2=k,k_1,k_2\neq0}(u^0_{k_1}+\frac{1}{2}\frac{w_e^{1/2}}{v_e^{1/2}}v^0_{k_1})\overline{(w^0_{k_2}+\frac{1}{2}\frac{u_e^{1/2}}{v_e^{1/2}}v^0_{k_2})},$$

$$L_k(v)=-\frac{1}{2}\sum_{k_1+k_2=k,k_1,k_2\neq0}\Big\{\Big(-\frac{w_e^{1/2}}{v_e^{1/2}}v_{k_1}+ik_1\frac{w_e^{1/2}}{v_e^{1/2}}\int\limits_0^t e^{ik_1(s-t)}v_{k_1}ds\Big)\overline{(w^0_{k_2}+\frac{1}{2}\frac{u_e^{1/2}}{v_e^{1/2}}v^0_{k_2})}e^{-ik_2t}+$$

$$+(u^0_{k_1}+\frac{1}{2}\frac{w_e^{1/2}}{v_e^{1/2}}v^0_{k_1})e^{-ik_1t}\overline{\Big(-\frac{u_e^{1/2}}{v_e^{1/2}}v_{k_2}-ik_2\frac{u_e^{1/2}}{v_e^{1/2}}\int\limits_0^t e^{-ik_2(s-t)}v_{k_2}ds\Big)}+$$

$$+\Big(-\frac{u_e^{1/2}}{v_e^{1/2}}v_{k_2}-ik_2\frac{u_e^{1/2}}{v_e^{1/2}}\int\limits_0^t e^{-ik_2(s-t)}v_{k_2}ds\Big)\overline{(u^0_{k_1}+\frac{1}{2}\frac{w_e^{1/2}}{v_e^{1/2}}v^0_{k_1})}e^{ik_1t}+$$

$$+(w^0_{k_2}+\frac{1}{2}\frac{u_e^{1/2}}{v_e^{1/2}}v^0_{k_2})e^{ik_2t}\overline{\Big(-\frac{w_e^{1/2}}{v_e^{1/2}}v_{k_1}+ik_1\frac{w_e^{1/2}}{v_e^{1/2}}\int\limits_0^t e^{ik_1(s-t)}v_{k_1}ds\Big)}\Big\},$$

$$B_k(v,v)=\sum_{k_1+k_2=k,k_1,k_2\neq0}\Big(v_{k_1}\overline{v_{k_2}}+v_{k_2}\overline{v_{k_1}}-$$

$$-\frac{1}{4}\Big(-\frac{w_e^{1/2}}{v_e^{1/2}}v_{k_1}+ik_1\frac{w_e^{1/2}}{v_e^{1/2}}\int\limits_0^t e^{ik_1(s-t)}v_{k_1}ds\Big)\overline{\Big(-\frac{u_e^{1/2}}{v_e^{1/2}}v_{k_2}-ik_2\frac{u_e^{1/2}}{v_e^{1/2}}\int\limits_0^t e^{-ik_2(s-t)}v_{k_2}ds\Big)}+$$

$$
-\frac{1}{4}\Big(-\frac{u_e^{1/2}}{v_e^{1/2}}v_{k_2}-ik_2\frac{u_e^{1/2}}{v_e^{1/2}}\int\limits_0^t e^{-ik_2(s-t)}v_{k_2}ds\Big)\overline{\Big(-\frac{w_e^{1/2}}{v_e^{1/2}}v_{k_1}+ik_1\frac{w_e^{1/2}}{v_e^{1/2}}\int\limits_0^t e^{ik_1(s-t)}v_{k_1}ds\Big)}\Big\},
$$

$$
T_k^{add}(v)=\frac{1}{2}(v_0\overline{v_k}+v_k\overline{v_0})-
$$

$$
+\frac{1}{2}\frac{w_e^{1/2}}{v_e^{1/2}}v_0((\overline{w_k^0}+\frac{1}{2}\frac{u_e^{1/2}}{v_e^{1/2}}\overline{v_k^0})e^{-ikt}+ik\frac{1}{2}\frac{u_e^{1/2}}{v_e^{1/2}}\int\limits_0^t e^{ik(s-t)}\overline{v_k}ds)+
$$

$$
+((w_k^0+\frac{1}{2}\frac{u_e^{1/2}}{v_e^{1/2}}v_k^0)e^{ikt}-ik\frac{1}{2}\frac{u_e^{1/2}}{v_e^{1/2}}\int\limits_0^t e^{-ik(s-t)}v_kds)\frac{1}{2}\frac{w_e^{1/2}}{v_e^{1/2}}\overline{v_0}+
$$

$$
+((u_k^0+\frac{1}{2}\frac{w_e^{1/2}}{v_e^{1/2}}v_k^0)e^{-ikt}+ik\frac{1}{2}\frac{w_e^{1/2}}{v_e^{1/2}}\int\limits_0^t e^{ik(s-t)}v_kds)\frac{1}{2}\frac{u_e^{1/2}}{v_e^{1/2}}\overline{v_0}+
$$

$$
+\frac{1}{2}\frac{u_e^{1/2}}{v_e^{1/2}}v_0((\overline{u_k^0}+\frac{1}{2}\frac{w_e^{1/2}}{v_e^{1/2}}\overline{v_k^0})e^{ikt}-ik\frac{1}{2}\frac{w_e^{1/2}}{v_e^{1/2}}\int\limits_0^t e^{-ik(s-t)}\overline{v_k}ds).
$$

Определение. *Фурье-решением* задачи Коши для системы (3.3) будем называть систему абсолютно непрерывных коэффициентов Фурье $U_k=(u_k,v_k,w_k),\ k\in\mathbb{Z}$, удовлетворяющих системе (3.12), (3.6), (3.8) для почти всех $t\in\mathbb{R}_+$.

Теорема 3.1. *Пусть* $\sigma>1$, $u|_{t=0},v|_{t=0},w|_{t=0}\in H^\sigma(0,2\pi)$ *и средние значения* $u_0^0=v_0^0=w_0^0=0$. *Пусть* $m\in\mathbb{N}$ *фиксировано. Тогда существует* $T^*>0$, *возможно зависящее от* m, *такое что усечение системы* (3.12), (3.8)

$$
\frac{d}{dt}v_k^{(m)}+\frac{1}{\varepsilon}L_e\ v_k^{(m)}-\frac{1}{\varepsilon}ik\int\limits_0^t\Big(u_ee^{-ik(s-t)}-w_ee^{ik(s-t)}\Big)v_k^{(m)}ds= \tag{3.13}
$$

$$
=2\frac{1}{\varepsilon}v_e^{1/2}D_{k,m}^+e^{ikt}+2\frac{1}{\varepsilon}v_e^{1/2}D_{k,m}^-e^{-ikt}-\varepsilon v_e^{1/2}T_k^{add}(v^{(m)})-
$$

$$
-\varepsilon v_e^{1/2}\Big(L_k^{(m)}(v^{(m)})+B_k^{(m)}(v^{(m)},v^{(m)})\Big)
$$

$$
v_k^{(m)}|_{t=0}=v_k^0,\quad |k|=1,\dots,m,
$$

$$
\frac{d}{dt}v_0^{(m)}+\frac{1}{\varepsilon}L_e\ v_0^{(m)}=-\varepsilon v_e^{1/2}\Big(\frac{3}{2}v_0^{(m)}\overline{v_0^{(m)}}-d_0^{(m)}+ \tag{3.14}
$$

$$
+L_0^{(m)}(v^{(m)})+B_0^{(m)}(v^{(m)},v^{(m)}))\Big),\quad v_0|_{t=0}=0
$$

имеет единственное решение на интервале $[0,T^*]$. *Как мы покажем ниже, решение* $U^{(m)}=\{v_k^{(m)}(t),\ |k|=0,1\dots,m\}$, *при дополнительных так называемых условиях несекулярности может быть продолжено на максимальный интервал* $[0,T_{max}^*)$, *такой что* $T_{max}^*=+\infty$, *если сумма норм* $\|u|_{t=0}\|_{H^\sigma(0,2\pi)}+\|v|_{t=0}\|_{H^\sigma(0,2\pi)}+\|w|_{t=0}\|_{H^\sigma(0,2\pi)}$ *достаточно мала.*

Здесь

$$
d_0^{(m)}=\sum_{k_1+k_2=0,|k_1|,|k_2|=1,\dots,m}\Big((u_{k_1}^0+\frac{1}{2}w_e^{1/2}v_{k_1}^0)(\overline{w_{k_2}^0}+\frac{1}{2}\frac{u_e^{1/2}}{v_e^{1/2}}\overline{v_{k_2}^0})+
$$

$$
+(w_{k_2}^0+\frac{1}{2}\frac{u_e^{1/2}}{v_e^{1/2}}v_{k_2}^0)(\overline{u_{k_1}^0}+\frac{1}{2}\frac{w_e^{1/2}}{v_e^{1/2}}\overline{v_{k_1}^0})\Big).
$$

Величины $L_0^{(m)}(v^{(m)}),B_0^{(m)}(v^{(m)},v^{(m)}),\ D_{k,m}^\pm,L_k^{(m)}(v^{(m)}),B_k^{(m)}(v^{(m)},v^{(m)})$ определяются аналогично.

Следствие 3.1. *Пусть* $u|_{t=0}, v|_{t=0}, w|_{t=0} \in H^\sigma(0,2\pi)$, $\sigma > 1$. *Тогда при выполнении условий теоремы* 3.1 *существует глобальное Фурье-решение задачи Коши для системы* (3.3).

3.4. Однородные данные Коши.

Положим

$$v_k = v_k^0 e^{-\frac{1}{\varepsilon}L_e t} + y_k, \quad k \in \mathbb{Z}_0.$$

Тогда

$$\frac{d}{dt}y_k + \frac{1}{\varepsilon}L_e\, y_k - \frac{1}{\varepsilon}ik\int\limits_0^t \Big(u_e e^{-ik(s-t)} - w_e e^{ik(s-t)}\Big)y_k ds = \tag{3.15}$$

$$= 2\frac{1}{\varepsilon}v_e^{1/2}\mathcal{D}_k^+ e^{ikt} + 2\frac{1}{\varepsilon}v_e^{1/2}\mathcal{D}_k^- e^{-ikt} + e^{-\frac{1}{\varepsilon}L_e t}(f_k^L(t) + f_k^B(t)) -$$

$$- \varepsilon v_e^{1/2} T_k^{add}(v) - \varepsilon v_e^{1/2}\Big(\mathcal{L}_k(y) + B_k(y,y)\Big),$$

$$y_k|_{t=0} = 0.$$

Здесь

$$-\frac{1}{\varepsilon}ik\int\limits_0^t \Big(u_e e^{-ik(s-t)} - w_e e^{ik(s-t)}\Big)v_k^0 e^{-\frac{1}{\varepsilon}L_e s}ds =$$

$$= -\frac{1}{\varepsilon}v_k^0[-u_e\frac{ik}{(ik+\frac{1}{\varepsilon}L_e)}(e^{-\frac{1}{\varepsilon}L_e t} - e^{ikt}) - w_e\frac{ik}{(ik-\frac{1}{\varepsilon}L_e)}(e^{-\frac{1}{\varepsilon}L_e t} - e^{-ikt}) =$$

$$= \frac{1}{\varepsilon}v_k^0 e^{-\frac{1}{\varepsilon}L_e t}\Big(u_e\frac{ik}{(ik+\frac{1}{\varepsilon}L_e)} + w_e\frac{ik}{(ik-\frac{1}{\varepsilon}L_e)}\Big) -$$

$$- \frac{1}{\varepsilon}v_k^0 u_e\frac{ik}{(ik+\frac{1}{\varepsilon}L_e)}e^{ikt} - \frac{1}{\varepsilon}v_k^0 w_e\frac{ik}{(ik-\frac{1}{\varepsilon}L_e)}e^{-ikt},$$

$$\mathcal{L}_k(y) = L_k(y) + B_k(v^0 e^{-\frac{1}{\varepsilon}L_e t}, y) + B_k(y, v^0 e^{-\frac{1}{\varepsilon}L_e t}),$$

$$L_k(v_k^0 e^{-\frac{1}{\varepsilon}L_e t}) = -\frac{1}{2}\sum_{k_1+k_2=k, k_1,k_2\neq 0}\Big\{ - e^{-\frac{1}{\varepsilon}L_e t}\Big(\frac{w_e^{1/2}}{v_e^{1/2}}v_{k_1}^0(\overline{w_{k_2}^0} + \frac{1}{2}\frac{u_e^{1/2}}{v_e^{1/2}}\overline{v_{k_2}^0})e^{-ik_2 t} +$$

$$+ (u_{k_1}^0 + \frac{1}{2}\frac{w_e^{1/2}}{v_e^{1/2}}v_{k_1}^0)e^{-ik_1 t}\frac{u_e^{1/2}}{v_e^{1/2}}\overline{v_{k_2}^0} + \frac{u_e^{1/2}}{v_e^{1/2}}v_{k_2}^0(\overline{u_{k_1}^0} + \frac{1}{2}\frac{w_e^{1/2}}{v_e^{1/2}}\overline{v_{k_1}^0})e^{ik_1 t} + (w_{k_2}^0 + \frac{1}{2}\frac{u_e^{1/2}}{v_e^{1/2}}v_{k_2}^0)e^{ik_2 t}\frac{w_e^{1/2}}{v_e^{1/2}}\overline{v_{k_1}^0}\Big) +$$

$$+ v_{k_1}^0\frac{ik_1}{(ik_1 - \frac{1}{\varepsilon}L_e)}\frac{w_e^{1/2}}{v_e^{1/2}}(e^{-\frac{1}{\varepsilon}L_e t} - e^{-ik_1 t})(\overline{w_{k_2}^0} + \frac{1}{2}\frac{u_e^{1/2}}{v_e^{1/2}}\overline{v_{k_2}^0})e^{-ik_2 t} +$$

$$+ (u_{k_1}^0 + \frac{1}{2}\frac{w_e^{1/2}}{v_e^{1/2}}v_{k_1}^0)e^{-ik_1 t}\overline{\Big(v_{k_2}^0\frac{ik_2}{(ik_2+\frac{1}{\varepsilon}L_e)}\frac{u_e^{1/2}}{v_e^{1/2}}(e^{-\frac{1}{\varepsilon}L_e t} - e^{ik_2 t})} +$$

$$+ v_{k_2}^0\frac{ik_2}{(ik_2+\frac{1}{\varepsilon}L_e)}\frac{u_e^{1/2}}{v_e^{1/2}}(e^{-\frac{1}{\varepsilon}L_e t} - e^{ik_2})(\overline{u_{k_1}^0} + \frac{1}{2}\frac{w_e^{1/2}}{v_e^{1/2}}\overline{v_{k_1}^0})e^{ik_1 t} +$$

$$+ (w_{k_2}^0 + \frac{1}{2}\frac{u_e^{1/2}}{v_e^{1/2}}v_{k_2}^0)e^{ik_2 t}\,\overline{v_{k_1}^0\frac{ik_1}{(ik_1-\frac{1}{\varepsilon}L_e)}\frac{w_e^{1/2}}{v_e^{1/2}}(e^{-\frac{1}{\varepsilon}L_e t} - e^{-ik_1 t})}\Big\} =$$

$$= f_k^L(t)e^{-\frac{1}{\varepsilon}L_e t} +$$

$$+ \frac{1}{2}\sum_{k_1+k_2=k, k_1,k_2\neq 0}\Big(v_{k_1}^0\frac{ik_1}{(ik_1-\frac{1}{\varepsilon}L_e)}\frac{w_e^{1/2}}{v_e^{1/2}}(\overline{w_{k_2}^0} + \frac{1}{2}\frac{u_e^{1/2}}{v_e^{1/2}}\overline{v_{k_2}^0}) +$$

$$+ (u_{k_1}^0 + \frac{1}{2}\frac{w_e^{1/2}}{v_e^{1/2}}v_{k_1}^0)\overline{v_{k_2}^0}\frac{ik_2}{(ik_2-\frac{1}{\varepsilon}L_e)}\frac{u_e^{1/2}}{v_e^{1/2}})\Big)e^{-ikt} +$$

$$+ \frac{1}{2}\sum_{k_1+k_2=k, k_1,k_2\neq 0}\Big(v_{k_2}^0\frac{ik_2}{(ik_2+\frac{1}{\varepsilon}L_e)}\frac{u_e^{1/2}}{v_e^{1/2}}(\overline{u_{k_1}^0} + \frac{1}{2}\frac{w_e^{1/2}}{v_e^{1/2}}\overline{v_{k_1}^0}) +$$

$$+\,(w^0_{k_2}+\frac{1}{2}\frac{u_e^{1/2}}{v_e^{1/2}}v^0_{k_2})\ \overline{v^0_{k_1}\frac{ik_1}{(ik_1+\frac{1}{\varepsilon}L_e)}\frac{w_e^{1/2}}{v_e^{1/2}}}\Big)e^{ikt}.$$

Также получим

$$B_k(v^0e^{-\frac{1}{\varepsilon}L_et},v^0e^{-\frac{1}{\varepsilon}L_et}) == f^B_k(t)e^{-\frac{1}{\varepsilon}L_et}-$$
$$-\frac{1}{4}\sum_{k_1+k_2=k,k_1,k_2\neq0}\Big(v^0_{k_1}\frac{ik_1}{(ik_1-\frac{1}{\varepsilon}L_e)}\frac{ik_2}{(ik_2-\frac{1}{\varepsilon}L_e)}\overline{v^0_{k_2}}\Big)e^{-ikt}-$$
$$-\frac{1}{4}\sum_{k_1+k_2=k,k_1,k_2\neq0}\Big(v^0_{k_2}\frac{ik_2}{(ik_2+\frac{1}{\varepsilon}L_e)}\overline{v^0_{k_1}}\frac{ik_1}{(ik_1+\frac{1}{\varepsilon}L_e)}\Big)e^{ikt}.$$

Теперь положим

$$2v_e^{1/2}\frac{1}{\varepsilon}\mathcal{D}^+_k=2v_e^{1/2}u_e^{1/2}\frac{1}{\varepsilon}(w^0_k-\frac{1}{2}\frac{\frac{1}{\varepsilon}L_e}{(ik+\frac{1}{\varepsilon}L_e)}\frac{u_e^{1/2}}{v_e^{1/2}}v^0_k)+$$
$$+\,\varepsilon v_e^{1/2}\sum_{k_1+k_2=k,k_1,k_2\neq0}(w^0_{k_2}-\frac{1}{2}\frac{\frac{1}{\varepsilon}L_e}{(ik_2+\frac{1}{\varepsilon}L_e)}\frac{u_e^{1/2}}{v_e^{1/2}}v^0_{k_1})\overline{(u^0_{k_1}+\frac{1}{2}\frac{w_e^{1/2}}{v_e^{1/2}}\frac{\frac{1}{\varepsilon}L_e}{(ik_1-\frac{1}{\varepsilon}L_e)}v^0_{k_1})}.$$

3.5. Конечномерная аппроксимация. Перейдем к конечномерной аппроксимации

$$\frac{d}{dt}y^{(m)}_k+\frac{1}{\varepsilon}L_e\ y^{(m)}_k-\frac{1}{\varepsilon}ik\int\limits_0^t\Big(u_ee^{-ik(s-t)}-w_ee^{ik(s-t)}\Big)y^{(m)}_kds= \tag{3.16}$$
$$=2\frac{1}{\varepsilon}v_e^{1/2}\mathcal{D}^+_{k,m}e^{ikt}+2\frac{1}{\varepsilon}v_e^{1/2}\mathcal{D}^-_{k,m}e^{-ikt}+e^{-\frac{1}{\varepsilon}L_et}(f^{(m)}_{k,L}(t)+f^{(m)}_{k,B}(t))-$$
$$-\,\varepsilon v_e^{1/2}T^{add}_k(y^{(m)})-\varepsilon v_e^{1/2}\Big(\mathcal{L}^{(m)}_k(y^{(m)})+B^{(m)}_k(y^{(m)},y^{(m)})\Big),$$
$$y^{(m)}_k|_{t=0}=0,\ |k|=1,\dots,m$$

$$2v_e^{1/2}\frac{1}{\varepsilon}\mathcal{D}^-_{k,m}=2v_e^{1/2}w_e^{1/2}\frac{1}{\varepsilon}(u^0_k-\frac{1}{2}\frac{w_e^{1/2}}{v_e^{1/2}}\frac{\frac{1}{\varepsilon}L_e}{(ik-\frac{1}{\varepsilon}L_e)}v^0_k)+ \tag{3.17}$$
$$+\,\varepsilon v_e^{1/2}\sum_{k_1+k_2=k,|k_1|,|k_2|=1,\dots,m}\overline{\Big(w^0_{k_2}+\frac{1}{2}\frac{u_e^{1/2}}{v_e^{1/2}}\frac{\frac{1}{\varepsilon}L_e}{(ik_2+\frac{1}{\varepsilon}L_e)}v^0_{k_2}\Big)}\Big(u^0_{k_1}-\frac{1}{2}\frac{\frac{1}{\varepsilon}L_e}{(ik_1-\frac{1}{\varepsilon}L_e)}\frac{w_e^{1/2}}{v_e^{1/2}}v^0_{k_1}\Big),$$

$$2v_e^{1/2}\frac{1}{\varepsilon}\mathcal{D}^+_{k,m}=2v_e^{1/2}u_e^{1/2}\frac{1}{\varepsilon}(w^0_k-\frac{1}{2}\frac{\frac{1}{\varepsilon}L_e}{(ik+\frac{1}{\varepsilon}L_e)}\frac{u_e^{1/2}}{v_e^{1/2}}v^0_k)+ \tag{3.18}$$
$$+\,\varepsilon v_e^{1/2}\sum_{k_1+k_2=k,|k_1|,|k_2|=1,\dots,m}(w^0_k-\frac{1}{2}\frac{\frac{1}{\varepsilon}L_e}{(ik+\frac{1}{\varepsilon}L_e)}\frac{u_e^{1/2}}{v_e^{1/2}}v^0_k)\overline{(u^0_{k_1}+\frac{1}{2}\frac{w_e^{1/2}}{v_e^{1/2}}\frac{\frac{1}{\varepsilon}L_e}{(ik_1-\frac{1}{\varepsilon}L_e)}v^0_{k_1})},$$

$$B^{(m)}_k(y^{(m)},y^{(m)})=\sum_{k_1+k_2=k,|k_1|,|k_2|=1,\dots,m}\Big(y^{(m)}_{k_1}\overline{y^{(m)}_{k_2}}+y^{(m)}_{k_2}\overline{y^{(m)}_{k_1}}-$$
$$-\frac{1}{4}\Big(-\frac{w_e^{1/2}}{v_e^{1/2}}y^{(m)}_{k_1}+ik_1\frac{w_e^{1/2}}{v_e^{1/2}}\int\limits_0^te^{ik_1(s-t)}y^{(m)}_{k_1}ds\Big)\overline{\Big(-\frac{u_e^{1/2}}{v_e^{1/2}}y^{(m)}_{k_2}-ik_2\frac{u_e^{1/2}}{v_e^{1/2}}\int\limits_0^te^{-ik_2(s-t)}y^{(m)}_{k_2}ds\Big)}+$$
$$-\frac{1}{4}\Big(-\frac{u_e^{1/2}}{v_e^{1/2}}y^{(m)}_{k_2}-ik_2\frac{u_e^{1/2}}{v_e^{1/2}}\int\limits_0^te^{-ik_2(s-t)}y^{(m)}_{k_2}ds\Big)\overline{\Big(-\frac{w_e^{1/2}}{v_e^{1/2}}y^{(m)}_{k_1}+ik_1\frac{w_e^{1/2}}{v_e^{1/2}}\int\limits_0^te^{ik_1(s-t)}y^{(m)}_{k_1}ds\Big)}\Big\},$$
$$\mathcal{L}^{(m)}_k(y^{(m)})=L^{(m)}_k(y^{(m)})+B^{(m)}_k(v^0_ke^{-\frac{1}{\varepsilon}L_et},y^{(m)})+B^{(m)}_k(y^{(m)},v^0_ke^{-\frac{1}{\varepsilon}L_et}),$$
$$L^{(m)}_k(y^{(m)})=$$

$$= -\frac{1}{2}\sum_{k_1+k_2=k, |k_1|,|k_2|=1,\dots,m}\Big(-\frac{w_e^{1/2}}{v_e^{1/2}}y_{k_1}^{(m)} + ik_1\frac{w_e^{1/2}}{v_e^{1/2}}\int\limits_0^t e^{ik_1(s-t)}y_{k_1}^{(m)}ds\Big)(\overline{w_{k_2}^0} + \frac{1}{2}\frac{u_e^{1/2}}{v_e^{1/2}}\overline{v_{k_2}^0})e^{-ik_2t} +$$

$$+ (u_{k_1}^0 + \frac{1}{2}\frac{w_e^{1/2}}{v_e^{1/2}}v_{k_1}^0)e^{-ik_1t}\overline{\Big(-\frac{u_e^{1/2}}{v_e^{1/2}}y_{k_2}^{(m)} - ik_2\frac{u_e^{1/2}}{v_e^{1/2}}\int\limits_0^t e^{-ik_2(s-t)}y_{k_2}^{(m)}ds\Big)} +$$

$$+ \Big(-\frac{u_e^{1/2}}{v_e^{1/2}}y_{k_2}^{(m)} - ik_2\frac{u_e^{1/2}}{v_e^{1/2}}\int\limits_0^t e^{-ik_2(s-t)}y_{k_2}^{(m)}ds\Big)(\overline{u_{k_1}^0} + \frac{1}{2}\frac{w_e^{1/2}}{v_e^{1/2}}\overline{v_{k_1}^0})e^{ik_1t} +$$

$$+ (w_{k_2}^0 + \frac{1}{2}\frac{u_e^{1/2}}{v_e^{1/2}}v_{k_2}^0)e^{ik_2t}\overline{\Big(-\frac{w_e^{1/2}}{v_e^{1/2}}y_{k_1}^{(m)} + ik_1\frac{w_e^{1/2}}{v_e^{1/2}}\int\limits_0^t e^{ik_1(s-t)}y_{k_1}^{(m)}ds\Big)}\Big\},$$

$$T_k^{add}(y^{(m)}) = \frac{1}{2}(v_0\overline{(v_k^0e^{-\frac{1}{\varepsilon}L_et} + y_k^{(m)})} + (v_k^0e^{-\frac{1}{\varepsilon}L_et} + y_k^{(m)})\overline{v_0}) -$$

$$+ \frac{1}{2}\frac{w_e^{1/2}}{v_e^{1/2}}v_0((\overline{w_k^0} + \frac{1}{2}\frac{u_e^{1/2}}{v_e^{1/2}}\overline{v_k^0})e^{-ikt} + ik\frac{1}{2}\frac{u_e^{1/2}}{v_e^{1/2}}\int\limits_0^t e^{ik(s-t)}\overline{(v_k^0e^{-\frac{1}{\varepsilon}L_et} + y_k^{(m)})}ds) +$$

$$+ ((w_k^0 + \frac{1}{2}\frac{u_e^{1/2}}{v_e^{1/2}}v_k^0)e^{ikt} - ik\frac{1}{2}\frac{u_e^{1/2}}{v_e^{1/2}}\int\limits_0^t e^{-ik(s-t)}(v_k^0e^{-\frac{1}{\varepsilon}L_es} + y_k^{(m)})ds)\frac{1}{2}\frac{w_e^{1/2}}{v_e^{1/2}}\overline{v_0} +$$

$$+ ((u_k^0 + \frac{1}{2}\frac{w_e^{1/2}}{v_e^{1/2}}v_k^0)e^{-ikt} + ik\frac{1}{2}\frac{w_e^{1/2}}{v_e^{1/2}}\int\limits_0^t e^{ik(s-t)}(v_k^0e^{-\frac{1}{\varepsilon}L_es} + y_k^{(m)})ds)\frac{1}{2}\frac{u_e^{1/2}}{v_e^{1/2}}\overline{v_0} +$$

$$+ \frac{1}{2}\frac{u_e^{1/2}}{v_e^{1/2}}v_0((\overline{u_k^0} + \frac{1}{2}\frac{w_e^{1/2}}{v_e^{1/2}}\overline{v_k^0})e^{ikt} - ik\frac{1}{2}\frac{w_e^{1/2}}{v_e^{1/2}}\int\limits_0^t e^{-ik(s-t)}\overline{(v_k^0e^{-\frac{1}{\varepsilon}L_es} + y_k^{(m)})}ds).$$

3.6. Невозмущенная задача. Начнем с доказательства существования решения невозмущенной задачи

$$T_k(y_k^{(m)}) = \frac{d}{dt}y_k^{(m)} + \frac{1}{\varepsilon}L_e\ y_k^{(m)} - \frac{1}{\varepsilon}ik\int\limits_0^t\Big(u_ee^{-ik(s-t)} - w_ee^{ik(s-t)}\Big)y_k^{(m)}ds = \tag{3.19}$$
$$= 2\frac{1}{\varepsilon}v_e^{1/2}\mathcal{D}_{k,m}^+e^{ikt} + 2\frac{1}{\varepsilon}v_e^{1/2}\mathcal{D}_{k,m}^-e^{-ikt} + e^{-\frac{1}{\varepsilon}L_et}(f_{k,L}^{(m)}(t) + f_{k,B}^{(m)}(t)) -$$
$$-\varepsilon v_e^{1/2}\Big(\mathcal{L}_k^{(m)}(y^{(m)}) + B_k^{(m)}(y^{(m)}, y^{(m)})\Big),$$
$$y_k^{(m)}|_{t=0} = 0,\ |k| = 1, \dots, m.$$

Положим

$$y_k = Q_k^+T_k^{-1}(e^{ikt}) + Q_k^-T_k^{-1}(e^{-ikt}) + T_k^{-1}(z_k), \quad k \in \mathbb{Z}_0. \tag{3.20}$$

Если подставить $y_k = Q_k^+T_k^{-1}(e^{ikt}) + Q_k^-T_k^{-1}(e^{-ikt}) + T_k^{-1}(z_k), \quad k \in \mathbb{Z}_0$ в $\mathcal{L}_k(y), B_k(y, y)$ и сделать соответствующие преобразования, выделяющие секулярные члены, то можно найти секулярное уравнение для невозмущенной задачи.

А именно,

$$-ik\int\limits_0^t e^{-ik(s-t)}(Q_k^+T_k^{-1}(e^{iks}) + Q_k^-T_k^{-1}(e^{-iks}))ds = -ik\int\limits_0^t e^{-ik(s-t)}Q_k^+T_k^{-1}(e^{iks})ds -$$

$$- ik\int\limits_0^t e^{-ik(s-t)}Q_k^- T_k^{-1}(e^{-iks})ds$$

Здесь $\int\limits_0^t e^{-ik(s-t)}Q_k^- T_k^{-1}(e^{-iks})ds$ стремится к нулю при $t\to\infty$, в то время как

$$-ik\int\limits_0^t e^{-ik(s-t)}Q_k^+ T_k^{-1}(e^{iks})ds = \,?$$

Надо выделять секулярный член, используя T_k.

Также

$$ik\int\limits_0^t e^{ik(s-t)}(Q_k^+ T_k^{-1}(e^{iks}) + Q_k^- T_k^{-1}(e^{-iks}))ds = ik\int\limits_0^t e^{ik(s-t)}Q_k^+ T_k^{-1}(e^{iks}ds +$$

$$+ ik\int\limits_0^t e^{ik(s-t)}Q_k^- T_k^{-1}(e^{-iks}))ds,$$

где $ik\int\limits_0^t e^{ik(s-t)}Q_k^+ T_k^{-1}(e^{iks}))ds$ стремится к нулю при $t\to\infty$, в то время как

$$ik\int\limits_0^t e^{ik(s-t)}Q_k^- T_k^{-1}(e^{-iks})ds = \,?$$

Надо выделять секулярный член, используя T_k. Опять делаем трюк:

$$-ik\int\limits_0^t e^{ik(s-t)}Q_k^- T_k^{-1}(e^{-iks})ds = \frac{\varepsilon}{w_e}\Big(Q_k^- e^{-ikt} - \frac{d}{dt}Q_k^- T_k^{-1}(e^{-ikt}) - \tag{3.21}$$

$$- \frac{1}{\varepsilon}L_e\ Q_k^- T_k^{-1}(e^{-ikt}) - \frac{1}{\varepsilon}ik\int\limits_0^t u_e e^{-ik(s-t)}Q_k^- T_k^{-1}(e^{-iks})ds\Big),$$

$$ik\int\limits_0^t e^{-ik(s-t)}Q_k^+ T_k^{-1}(e^{iks})ds = \frac{\varepsilon}{u_e}\Big(Q_k^+ e^{ikt} - \frac{d}{dt}Q_k^+ T_k^{-1}(e^{ikt}) - \tag{3.22}$$

$$- \frac{1}{\varepsilon}L_e\ Q_k^+ T_k^{-1}(e^{ikt}) + \frac{1}{\varepsilon}ik\int\limits_0^t w_e e^{ik(s-t)}Q_k^+ T_k^{-1}(e^{iks})ds\Big).$$

Отсюда

$$B_k^{(m)}(Q_k^+ T_k^{-1}(e^{ikt}) + Q_k^- T_k^{-1}(e^{-ikt}), Q_k^+ T_k^{-1}(e^{ikt}) + Q_k^- T_k^{-1}(e^{-ikt})) = G_{k,B}^{(m)}(t) -$$

$$- \frac{1}{4}\sum_{k_1+k_2=k,|k_1|,|k_2|=1,\ldots,m}\Big\{ik_1\int\limits_0^t e^{ik_1(s-t)}Q_{k_1}^- T_{k_1}^{-1}(e^{-ik_1 s})ds \times$$

$$\times\overline{\Big(-ik_2\int\limits_0^t e^{-ik_2(s-t)}Q_{k_2}^+ T_{k_2}^{-1}(e^{ik_2 s})ds -}$$

$$-ik_2\int\limits_0^t e^{-ik_2(s-t)}(Q_{k_2}^+ T_{k_2}^{-1}(e^{ik_2 s})\overline{\Big(ik_1\int\limits_0^t e^{ik_1(s-t)}Q_{k_1}^- T_{k_1}^{-1}(e^{-ik_1 s})ds\Big)}\Big\} =$$

$$= G^{(m)}_{k,B}(t) \in L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+).$$

Теперь опять воспользуемся (3.22), (3.21)

$$-\frac{1}{4}\sum_{k_1+k_2=k,|k_1|,|k_2|=1,\dots,m}\Big\{\Big(-ik_1\int\limits_0^t e^{ik_1(s-t)}Q^-_{k_1}T^{-1}_{k_1}(e^{-ik_1s})ds\Big)\times$$

$$\times\overline{\Big(ik_2\int\limits_0^t e^{-ik_2(s-t)}Q^+_{k_2}T^{-1}_{k_2}(e^{ik_2s})ds+}$$

$$+ik_2\int\limits_0^t e^{-ik_2(s-t)}(Q^+_{k_2}T^{-1}_{k_2}(e^{ik_2s})\overline{\Big(-ik_1\int\limits_0^t e^{ik_1(s-t)}Q^-_{k_1}T^{-1}_{k_1}(e^{-ik_1s})ds\Big)}\Big\}=$$

$$=-\frac{1}{4}\frac{\varepsilon}{w_e}\frac{\varepsilon}{u_e}\sum_{k_1+k_2=k,|k_1|,|k_2|=1,\dots,m}\Big(Q^-_{k_1}\overline{Q^+_{k_2}}e^{-ikt}+Q^+_{k_2}\overline{Q^-_{k_1}}e^{ikt}\Big).$$

Далее имеем

$$\mathcal{L}^{(m)}_k(Q^+_kT^{-1}_k(e^{ikt})+Q^-_kT^{-1}_k(e^{-ikt})=$$

$$=L^{(m)}_k(Q^+_kT^{-1}_k(e^{ikt})+Q^-_kT^{-1}_k(e^{-ikt}))+B^{(m)}_k(v^0_ke^{-\frac{1}{\varepsilon}L_et},(Q^+_kT^{-1}_k(e^{ikt})+Q^-_kT^{-1}_k(e^{-ikt}))+$$
$$+B^{(m)}_k((Q^+_kT^{-1}_k(e^{ikt})+Q^-_kT^{-1}_k(e^{-ikt}),v^0_ke^{-\frac{1}{\varepsilon}L_et}),$$

где

$$L^{(m)}_k(Q^+_kT^{-1}_k(e^{ikt})+Q^-_kT^{-1}_k(e^{-ikt}))=h^L_k(t)-$$

$$-\frac{1}{2}\sum_{k_1+k_2=k,k_1,k_2\neq0}\Big\{(\overline{w^0_{k_2}}+\frac{1}{2}\frac{u_e^{1/2}}{v_e^{1/2}}\overline{v^0_{k_2}})e^{-ik_2t}ik_1\frac{w_e^{1/2}}{v_e^{1/2}}\int\limits_0^t e^{ik_1(s-t)}Q^-_{k_1}T^{-1}_{k_1}(e^{-ik_1t})ds+$$

$$+(u^0_{k_1}+\frac{1}{2}\frac{w_e^{1/2}}{v_e^{1/2}}v^0_{k_1})e^{-ik_1t}\overline{\Big(-ik_2\frac{u_e^{1/2}}{v_e^{1/2}}\int\limits_0^t e^{-ik_2(s-t)}Q^+_{k_2}T^{-1}_{k_2}(e^{ik_2s})ds\Big)}+$$

$$+(\overline{u^0_{k_1}}+\frac{1}{2}\frac{w_e^{1/2}}{v_e^{1/2}}\overline{v^0_{k_1}})e^{ik_1t}\Big(-ik_2\frac{u_e^{1/2}}{v_e^{1/2}}\int\limits_0^t e^{-ik_2(s-t)}Q^+_{k_2}T^{-1}_{k_2}(e^{ik_2s})ds\Big)+$$

$$+(w^0_{k_2}+\frac{1}{2}\frac{u_e^{1/2}}{v_e^{1/2}}v^0_{k_2})e^{ik_2t}\overline{\Big(ik_1\frac{w_e^{1/2}}{v_e^{1/2}}\int\limits_0^t e^{ik_1(s-t)}Q^-_{k_1}T^{-1}_{k_1}(e^{-ik_1s})ds\Big)}\Big\}.$$

В силу (3.22), (3.21) получим

$$(\overline{w^0_{k_2}}+\frac{1}{2}\frac{u_e^{1/2}}{v_e^{1/2}}\overline{v^0_{k_2}})e^{-ik_2t}ik_1\frac{w_e^{1/2}}{v_e^{1/2}}\int\limits_0^t e^{ik_1(s-t)}Q^-_{k_1}T^{-1}_{k_1}(e^{-ik_1t})ds+$$

$$+(u^0_{k_1}+\frac{1}{2}\frac{w_e^{1/2}}{v_e^{1/2}}v^0_{k_1})e^{-ik_1t}\overline{\Big(-ik_2\frac{u_e^{1/2}}{v_e^{1/2}}\int\limits_0^t e^{-ik_2(s-t)}Q^+_{k_2}T^{-1}_{k_2}(e^{ik_2s})ds\Big)}+$$

$$+(\overline{u^0_{k_1}}+\frac{1}{2}\frac{w_e^{1/2}}{v_e^{1/2}}\overline{v^0_{k_1}})e^{ik_1t}\Big(-ik_2\frac{u_e^{1/2}}{v_e^{1/2}}\int\limits_0^t e^{-ik_2(s-t)}Q^+_{k_2}T^{-1}_{k_2}(e^{ik_2s})ds\Big)+$$

$$+(w^0_{k_2}+\frac{1}{2}\frac{u_e^{1/2}}{v_e^{1/2}}v^0_{k_2})e^{ik_2t}\overline{\Big(ik_1\frac{w_e^{1/2}}{v_e^{1/2}}\int\limits_0^t e^{ik_1(s-t)}Q^-_{k_1}T^{-1}_{k_1}(e^{-ik_1s})ds\Big)}=$$

$$= -\Big((\overline{w^0_{k_2}} + \frac{1}{2}\frac{u_e^{1/2}}{v_e^{1/2}}\overline{v^0_{k_2}})\frac{w_e^{1/2}}{v_e^{1/2}}\frac{\varepsilon}{w_e}Q^-_{k_1} + (u^0_{k_1} + \frac{1}{2}\frac{w_e^{1/2}}{v_e^{1/2}}v^0_{k_1})\frac{\varepsilon}{u_e}\overline{Q^+_{k_2}}\Big)e^{-ikt} +$$
$$-\Big((\overline{u^0_{k_1}} + \frac{1}{2}\frac{w_e^{1/2}}{v_e^{1/2}}\overline{v^0_{k_1}})\frac{\varepsilon}{u_e}Q^+_k + (w^0_{k_2} + \frac{1}{2}\frac{u_e^{1/2}}{v_e^{1/2}}v^0_{k_2})\frac{\varepsilon}{w_e}\frac{w_e^{1/2}}{v_e^{1/2}}\overline{Q^-_{k_1}}\Big)e^{ikt}.$$

Отсюда

$$L^{(m)}_k(Q^+_kT^{-1}_k(e^{ikt}) + Q^-_kT^{-1}_k(e^{-ikt})) = H^L_k(t) +$$
$$+\frac{1}{2}\sum_{k_1+k_2=k,k_1,k_2\neq 0}\Big((\overline{w^0_{k_2}} + \frac{1}{2}\frac{u_e^{1/2}}{v_e^{1/2}}\overline{v^0_{k_2}})\frac{w_e^{1/2}}{v_e^{1/2}}\frac{\varepsilon}{w_e}Q^-_{k_1} + (u^0_{k_1} + \frac{1}{2}\frac{w_e^{1/2}}{v_e^{1/2}}v^0_{k_1})\frac{\varepsilon}{u_e}\overline{Q^+_{k_2}}\Big)e^{-ikt} +$$
$$+\frac{1}{2}\sum_{k_1+k_2=k,k_1,k_2\neq 0}\Big((\overline{u^0_{k_1}} + \frac{1}{2}\frac{w_e^{1/2}}{v_e^{1/2}}\overline{v^0_{k_1}})\frac{\varepsilon}{u_e}Q^+_k + (w^0_{k_2} + \frac{1}{2}\frac{u_e^{1/2}}{v_e^{1/2}}v^0_{k_2})\frac{\varepsilon}{w_e}\frac{w_e^{1/2}}{v_e^{1/2}}\overline{Q^-_{k_1}}\Big)e^{ikt}.$$

Далее

$$B^{(m)}_k(v^0_ke^{-\frac{1}{\varepsilon}L_et}, (Q^+_kT^{-1}_k(e^{ikt}) + Q^-_kT^{-1}_k(e^{-ikt})) = F^{B,2}_k(t)e^{-\frac{1}{\varepsilon}L_et} + H^{B,2}_k(t) -$$
$$-\frac{1}{4}\sum_{k_1+k_2=k,k_1,k_2\neq 0}\Big\{\frac{ik_1}{(ik_1-\frac{1}{\varepsilon}L_e)}v^0_{k_1}\frac{\varepsilon}{u_e}\overline{Q^+_{k_2}}e^{-ikt} + \Big(\frac{\varepsilon}{u_e}Q^+_{k_2}\Big)\frac{ik_1}{(ik_1+\frac{1}{\varepsilon}L_e)}\overline{v^0_{k_1}}e^{ikt}\Big\}.$$

Так же получим

$$B^{(m)}_k((Q^+_kT^{-1}_k(e^{ikt}) + Q^-_kT^{-1}_k(e^{-ikt}), v^0_ke^{-\frac{1}{\varepsilon}L_et}) = F^{B,1}_k(t)e^{-\frac{1}{\varepsilon}L_et} + H^{B,1}_k(t) -$$
$$-\frac{1}{4}\sum_{k_1+k_2=k,k_1,k_2\neq 0}\Big\{\Big(\frac{\varepsilon}{w_e}Q^-_{k_1}\frac{ik_2}{(ik_2-\frac{1}{\varepsilon}L_e)}\overline{v^0_{k_2}}e^{-ikt} + (\frac{ik_2}{(ik_2+\frac{1}{\varepsilon}L_e)}v^0_{k_2}\frac{\varepsilon}{w_e}\overline{Q^-_{k_1}}e^{ik}\Big\}.$$

Положим

$$S^+(Q^-,Q^+)e^{ikt} + S^-(Q^-,Q^+)e^{-ikt} =$$
$$= \frac{1}{2}\sum_{k_1+k_2=k,k_1,k_2\neq 0}\Big\{\Big((\overline{w^0_{k_2}} + \frac{1}{2}\frac{u_e^{1/2}}{v_e^{1/2}}\overline{v^0_{k_2}})\frac{w_e^{1/2}}{v_e^{1/2}}\frac{\varepsilon}{w_e}Q^-_{k_1} + (u^0_{k_1} + \frac{1}{2}\frac{w_e^{1/2}}{v_e^{1/2}}v^0_{k_1})\frac{\varepsilon}{u_e}\overline{Q^+_{k_2}}\Big)e^{-ikt} +$$
$$+\Big((\overline{u^0_{k_1}} + \frac{1}{2}\frac{w_e^{1/2}}{v_e^{1/2}}\overline{v^0_{k_1}})\frac{\varepsilon}{u_e}Q^+_k + (w^0_{k_2} + \frac{1}{2}\frac{u_e^{1/2}}{v_e^{1/2}}v^0_{k_2})\frac{\varepsilon}{w_e}\frac{w_e^{1/2}}{v_e^{1/2}}\overline{Q^-_{k_1}}\Big)e^{ikt} -$$
$$-\frac{1}{2}\Big(\frac{ik_1}{(ik_1-\frac{1}{\varepsilon}L_e)}v^0_{k_1}\frac{\varepsilon}{u_e}\overline{Q^+_{k_2}} + \frac{\varepsilon}{w_e}Q^-_{k_1}\frac{ik_2}{(ik_2-\frac{1}{\varepsilon}L_e)}\overline{v^0_{k_2}}\Big)e^{-ikt} -$$
$$-\frac{1}{2}\Big(\frac{ik_2}{(ik_2+\frac{1}{\varepsilon}L_e)}v^0_{k_2}\frac{\varepsilon}{w_e}\overline{Q^-_{k_1}} + \frac{\varepsilon}{u_e}Q^+_{k_2}\Big)\frac{ik_1}{(ik_1+\frac{1}{\varepsilon}L_e)}\overline{v^0_{k_1}}\Big)e^{ikt}\Big\}.$$

Суммируя, получим сведение задачи Коши (3.19) к интегральному уравнению в гильбертовом пространстве $L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+)$ вида

$$z^{(m)}_k + Q^+_k\ e^{ikt} + Q^-_k\ e^{-ikt} = S^+(Q^-,Q^+)e^{ikt} + S^-(Q^-,Q^+)e^{-ikt} + \tag{3.23}$$
$$+2\frac{1}{\varepsilon}v_e^{1/2}\mathcal{D}^+_{k,m}e^{ikt} + 2\frac{1}{\varepsilon}v_e^{1/2}\mathcal{D}^-_{k,m}e^{-ikt} +$$
$$+e^{-\frac{1}{\varepsilon}L_et}(F^{(m)}_{k,L}(t) + F^{(m)}_{k,B}(t)) + H^{(m)}_{k,B}(t) + H^{(m)}_{k,B}(t) -$$
$$-\varepsilon v_e^{1/2}\Big(\mathcal{U}^{(m)}_k(T^{-1}_k(z^{(m)})) + B^{(m)}_k(T^{-1}_k(z^{(m)}), T^{-1}_k(z^{(m)}))\Big),$$

где

$$\mathcal{U}^{(m)}_k(T^{-1}_k(z^{(m)})) = \mathcal{L}^{(m)}_k(T^{-1}_k(z^{(m)}) + B^{(m)}_k(Q^+_kT^{-1}_k(e^{ikt}) + Q^-_kT^{-1}_k(e^{-ikt}), T^{-1}_k(z^{(m)})) +$$
$$+B^{(m)}_k(T^{-1}_k(z^{(m)}), Q^+_kT^{-1}_k(e^{ikt}) + Q^-_kT^{-1}_k(e^{-ikt})),$$

функции $F^{(m)}_{k,L}(t), F^{(m)}_{k,B}(t)$ ограничены, а $H^{(m)}_{k,L}(t), H^{(m)}_{k,B}(t) \in L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+)$.

Чтобы свести задачу Коши (3.19) к интегральному уравнению в гильбертовом пространстве $L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+)$, мы должны аннулировать секулярные члены, потребовав, чтобы

$$Q^+_k\ e^{+ikt} + Q^-_k\ e^{-ikt} = S^+(Q^-,Q^+)e^{ikt} + S^-(Q^-,Q^+)e^{-ikt} +$$

$$+ 2\frac{1}{\varepsilon}v_e^{1/2}\mathcal{D}^+_{k,m}e^{ikt} + 2\frac{1}{\varepsilon}v_e^{1/2}\mathcal{D}^-_{k,m}e^{-ikt}, \quad |k| = 1, \dots, m.$$

Тогда окончательно получим

$$z_k^{(m)} = e^{-\frac{1}{\varepsilon}L_e t}(F^{(m)}_{k,L}(t) + F^{(m)}_{k,B}(t)) + H^{(m)}_{k,B}(t) + H^{(m)}_{k,B}(t) - \tag{3.24}$$
$$- \varepsilon v_e^{1/2}\Big(\mathcal{U}_k^{(m)}(T_k^{-1}(z^{(m)})) + B_k^{(m)}(T_k^{-1}(z^{(m)}), T_k^{-1}(z^{(m)}))\Big).$$

Условие на секулярные члены можно переписать как алгебраическую систему для (Q_k^+, Q_k^-):

$$Q_k^+ = 2\frac{1}{\varepsilon}v_e^{1/2}\mathcal{D}^+_{k,m} + S^+(Q^-, Q^+), \tag{3.25}$$
$$Q_k^- = 2\frac{1}{\varepsilon}v_e^{1/2}\mathcal{D}^-_{k,m} + S^-(Q^-, Q^+), \quad |k| = 1, \dots, m.$$

Нулевая мода. Теперь сделаем подстановку

$$y_k = Q_k^+T_k^{-1}(e^{ikt}) + Q_k^-T_k^{-1}(e^{-ikt}) + T_k^{-1}(z_k), \quad k \in \mathbb{Z}_0$$

в уравнении (3.8) нулевой моды. Тогда получим

$$\frac{d}{dt}v_0 + \frac{1}{\varepsilon}L_e\ v_0 = -\varepsilon v_e^{1/2}\Big(\frac{3}{2}v_0\overline{v_0} - \mathcal{D}_0\Big) - \tag{3.26}$$
$$- \varepsilon v_e^{1/2}\Big(\mathcal{L}_0^{(1)}(T^{-1}(z)) + B_0(T^{-1}(z), T^{-1}(z)) + f_0(t)e^{-\frac{1}{\varepsilon}L_e t} + h_0(t)$$
$$v_0|_{t=0} = 0$$

где

$$\mathcal{L}_0^{(1)}(T^{-1}(z)) = B_0(Q_k^+T_k^{-1}(e^{ikt}) + Q_k^-T_k^{-1}(e^{-ikt}), T_k^{-1}(z_k)) +$$
$$+ B_0(T_k^{-1}(z_k), Q_k^+T_k^{-1}(e^{ikt}) + Q_k^-T_k^{-1}(e^{-ikt})) + \mathcal{L}_0(T_k^{-1}(z_k)),$$
$$\mathcal{L}_0(Q_k^+T_k^{-1}(e^{ikt}) + Q_k^-T_k^{-1}(e^{-ikt}) +$$
$$+ B_0(Q_k^+T_k^{-1}(e^{ikt}) + Q_k^-T_k^{-1}(e^{-ikt}, Q_k^+T_k^{-1}(e^{ikt}) + Q_k^-T_k^{-1}(e^{-ikt}) = h_0(t) + D_0^{(1)},$$
$$\mathcal{D}_0(Q^+, Q^-) = D_0 - D_0^{(1)},$$
$$D_0^{(1)} = \frac{1}{2}\sum_{k_1+k_2=0, k_1,k_2\neq 0}\Big\{(u^0_{k_1} - \frac{1}{2}\frac{w_e^{1/2}}{v_e^{1/2}}\frac{\frac{1}{\varepsilon}L_e}{(ik_1 - \frac{1}{\varepsilon}L_e)}v^0_{k_1})\frac{\varepsilon}{u_e}\frac{u_e^{1/2}}{v_e^{1/2}}\overline{Q_k^+} +$$
$$+ \frac{u_e^{1/2}}{v_e^{1/2}}\frac{\varepsilon}{u_e}Q_k^+\overline{(u^0_{k_1} - \frac{1}{2}\frac{w_e^{1/2}}{v_e^{1/2}}\frac{\frac{1}{\varepsilon}L_e}{(ik_1 - \frac{1}{\varepsilon}L_e)}v^0_{k_1})} + \frac{w_e^{1/2}}{v_e^{1/2}}\frac{\varepsilon}{w_e}Q^-_{k_1}\overline{(w^0_{k_2} - \frac{1}{2}\frac{u_e^{1/2}}{v_e^{1/2}}\frac{\frac{1}{\varepsilon}L_e}{(ik_2 + \frac{1}{\varepsilon}L_e)}v^0_{k_2})} +$$
$$+ (w^0_{k_2} - \frac{1}{2}\frac{u_e^{1/2}}{v_e^{1/2}}\frac{\frac{1}{\varepsilon}L_e}{(ik_2 + \frac{1}{\varepsilon}L_e)}v^0_{k_2})\frac{w_e^{1/2}}{v_e^{1/2}}\overline{\frac{\varepsilon}{w_e}Q_k^-} - \frac{1}{2}\frac{\varepsilon^2}{w_e u_e}\sum_{k_1+k_2=0, k_1\in\mathbb{Z}_0}\Big(Q^-_{k_1}\overline{Q^+_{k_2}}) + Q^+_{k_2}\overline{Q^-_{k_1}}\Big)\Big\}.$$

Здесь

$$L_0(Q_k^+T_k^{-1}(e^{ikt}) + Q_k^-T_k^{-1}(e^{-ikt}) = h_0^L(t) +$$
$$+ \frac{1}{2}\sum_{k_1+k_2=0, k_1,k_2\neq 0}\Big\{(u^0_{k_1} + \frac{1}{2}\frac{w_e^{1/2}}{v_e^{1/2}}v^0_{k_1})\frac{\varepsilon}{u_e}\frac{u_e^{1/2}}{v_e^{1/2}}\overline{Q_k^+} + \frac{w_e^{1/2}}{v_e^{1/2}}\frac{\varepsilon}{w_e}Q^-_{k_1}\overline{(w^0_{k_2} + \frac{1}{2}\frac{u_e^{1/2}}{v_e^{1/2}}v^0_{k_2})} +$$
$$+ (w^0_{k_2} + \frac{1}{2}\frac{u_e^{1/2}}{v_e^{1/2}}v^0_{k_2})\frac{w_e^{1/2}}{v_e^{1/2}}\overline{\frac{\varepsilon}{w_e}Q_k^-} + \frac{u_e^{1/2}}{v_e^{1/2}}\frac{\varepsilon}{u_e}Q_k^+\overline{(u^0_{k_1} + \frac{1}{2}\frac{w_e^{1/2}}{v_e^{1/2}}v^0_{k_1})}\Big\},$$
$$B_0((Q^+_{k_1}T^{-1}_{k_1}(e^{ik_1t}) + Q^-_{k_1}T^{-1}_{k_1}(e^{-ik_1t}), v_k^0e^{-\frac{1}{\varepsilon}L_e t}) = f_0^{B,1}(t)e^{-\frac{1}{\varepsilon}L_e t} + h_0^{B,1}(t) -$$
$$- \frac{1}{4}\sum_{k_1+k_2=0, k_1,k_2\neq 0}\Big\{ik_1\frac{\varepsilon}{w_e}Q^-_{k_1}\overline{v^0_{k_2}\frac{ik_2}{(ik_2 + \frac{1}{\varepsilon}L_e)}} + v^0_{k_2}\frac{ik_2}{(ik_2 + \frac{1}{\varepsilon}L_e)}\frac{\varepsilon}{w_e}\overline{Q^-_{k_1}}\Big\},$$
$$B_0(v_k^0e^{-\frac{1}{\varepsilon}L_e t}, (Q^+_{k_1}T^{-1}_{k_1}(e^{ik_1t}) + Q^-_{k_1}T^{-1}_{k_1}(e^{-ik_1t})) = f_0^{B,2}(t)e^{-\frac{1}{\varepsilon}L_e t} + h_0^{B,2}(t) -$$
$$- \frac{1}{4}\sum_{k_1+k_2=0, k_1,k_2\neq 0}\Big\{\frac{ik_1}{(ik_1 - \frac{1}{\varepsilon}L_e)}v^0_{k_1}\frac{\varepsilon}{u_e}\ \overline{Q^+_{k_2}} + \frac{\varepsilon}{u_e}Q^+_{k_2}\overline{\frac{ik_1}{(ik_1 - \frac{1}{\varepsilon}L_e)}v^0_{k_1}}\Big\}.$$

В то же время имеем

$$B_0((Q_k^+T_k^{-1}(e^{ikt})+Q_k^-T_k^{-1}(e^{-ikt}),(Q_k^+T_k^{-1}(e^{ikt})+Q_k^-T_k^{-1}(e^{-ikt}))=h_0^B(t)-$$
$$-\frac{1}{4}\frac{\varepsilon^2}{w_eu_e}\sum_{k_1+k_2=0,k_1\in\mathbb{Z}_0}\Big(Q_{k_1}^-\overline{Q_{k_2}^+})+Q_{k_2}^+\overline{Q_{k_1}^-}\Big).$$

Суммируя, получим

$$L_0(Q_k^+T_k^{-1}(e^{ikt})+Q_k^-T_k^{-1}(e^{-ikt})+B_0(v_k^0e^{-\frac{1}{\varepsilon}L_et},(Q_{k_1}^+T_{k_1}^{-1}(e^{ik_1t})+Q_{k_1}^-T_{k_1}^{-1}(e^{-ik_1t}))+$$
$$+B_0((Q_k^+T_k^{-1}(e^{ikt})+Q_k^-T_k^{-1}(e^{-ikt}),(Q_k^+T_k^{-1}(e^{ikt})+Q_k^-T_k^{-1}(e^{-ikt}))=$$
$$=h_0^L(t)+f_0^{B,1}(t)e^{-\frac{1}{\varepsilon}L_et}+h_0^{B,1}(t)+f_0^{B,2}(t)e^{-\frac{1}{\varepsilon}L_et}+h_0^{B,2}(t)+h_0^B(t)+$$
$$+\frac{1}{2}\sum_{k_1+k_2=0,k_1,k_2\neq 0}\Big\{(u_{k_1}^0-\frac{1}{2}\frac{w_e^{1/2}}{v_e^{1/2}}\frac{\frac{1}{\varepsilon}L_e}{(ik_1-\frac{1}{\varepsilon}L_e)}v_{k_1}^0)\frac{\varepsilon}{u_e}\frac{u_e^{1/2}}{v_e^{1/2}}\overline{Q_k^+}+$$
$$+\frac{u_e^{1/2}}{v_e^{1/2}}\frac{\varepsilon}{u_e}Q_k^+\overline{(u_{k_1}^0-\frac{1}{2}\frac{w_e^{1/2}}{v_e^{1/2}}\frac{\frac{1}{\varepsilon}L_e}{(ik_1-\frac{1}{\varepsilon}L_e)}v_{k_1}^0)}+\frac{w_e^{1/2}}{v_e^{1/2}}\frac{\varepsilon}{w_e}Q_{k_1}^-\overline{(w_{k_2}^0-\frac{1}{2}\frac{u_e^{1/2}}{v_e^{1/2}}\frac{\frac{1}{\varepsilon}L_e}{(ik_2+\frac{1}{\varepsilon}L_e)}v_{k_2}^0)}+$$
$$+(w_{k_2}^0-\frac{1}{2}\frac{u_e^{1/2}}{v_e^{1/2}}\frac{\frac{1}{\varepsilon}L_e}{(ik_2+\frac{1}{\varepsilon}L_e)}v_{k_2}^0)\frac{w_e^{1/2}}{v_e^{1/2}}\overline{\frac{\varepsilon}{w_e}Q_k^-}-\frac{1}{2}\frac{\varepsilon^2}{w_eu_e}\sum_{k_1+k_2=0,k_1\in\mathbb{Z}_0}\Big(Q_{k_1}^-\overline{Q_{k_2}^+})+Q_{k_2}^+\overline{Q_{k_1}^-}\Big)\Big\}.$$

Чтобы завершить сведение задачи Коши (3.16) к интегральному уравнению в гильбертовом пространстве $L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+)$, мы должны дополнительно аннулировать секулярные члены нулевой моды, потребовав, чтобы

$$\mathcal{D}_0(Q^+,Q^-)=0. \tag{3.27}$$

Тогда, положив $v_0=z_0$ в последнем уравнении системы интегральных уравнений в гильбертовом пространстве, получим $L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+)$:

$$z_0=-\frac{3}{2}\varepsilon v_e^{1/2}\int\limits_0^t e^{\frac{1}{\varepsilon}L_e(s-t)}\Big[z_0\overline{z_0}-$$
$$+\frac{2}{3}\Big(\mathcal{L}_0^{(1)}(T^{-1}(z))+B_0(T^{-1}(z),T^{-1}(z)\Big)+f_0(s)e^{-\frac{1}{\varepsilon}L_es}+h_0(s)\Big]ds.$$

Невозмущенное уравнение Риккати

$$\frac{d}{dt}z_0=-\frac{3}{2}\varepsilon v_e^{1/2}z_0\Big(\overline{z_0}+\frac{2}{3}\frac{1}{\varepsilon^2}\frac{L_e}{v_e^{1/2}}\Big)$$

имеет единственное тривиальное решение $y_0\equiv 0$, отвечающее начальному условию $z_0|_{t=0}=0$.

Лемма 3.1. *Для любой экспоненциально стремящейся к нулю при $t\to 0$ вещественной функции $f\in L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+;\mathcal{H}_\sigma)$ существует единственное решение $z_0\in H^1_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+;\mathcal{H}_\sigma)$ задачи Коши* (3.19).

Таким образом, суммарно мы получили систему секулярных уравнений

$$Q_k^+=2\frac{1}{\varepsilon}v_e^{1/2}\mathcal{D}_{k,m}^++S^+(Q^-,Q^+), \tag{3.28}$$
$$Q_k^-=2\frac{1}{\varepsilon}v_e^{1/2}\mathcal{D}_{k,m}^-+S^-(Q^-,Q^+),\quad |k|=1,\dots,m,$$
$$\mathcal{D}_0(Q^+,Q^-)=0,$$

решение которой сводит задачу (3.23), (3.26) к системе уравнений

$$z_k^{(m)} = e^{-\frac{1}{\varepsilon}L_e t}(F_{k,L}^{(m)}(t) + F_{k,B}^{(m)}(t)) + H_{k,B}^{(m)}(t) + H_{k,B}^{(m)}(t) - \tag{3.29}$$
$$- \varepsilon v_e^{1/2}\Big(\mathcal{U}_k^{(m)}(T_k^{-1}(z^{(m)})) + B_k^{(m)}(T_k^{-1}(z^{(m)}), T_k^{-1}(z^{(m)}))\Big),$$
$$z_0^{(m)} = -\frac{3}{2}\varepsilon v_e^{1/2}\int\limits_0^t e^{\frac{1}{\varepsilon}L_e(s-t)}\Big[z_0^{(m)}\overline{z_0^{(m)}} -$$
$$+ \frac{2}{3}\Big(\mathcal{L}_0^{(1)}(T^{-1}(z^{(m)})) + B_0(T^{-1}(z^{(m)}), T^{-1}(z^{(m)})\Big) + f_0(s)e^{-\frac{1}{\varepsilon}L_e s} + h_0(s)\Big]ds$$

в гильбертовом пространстве $(L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+; \mathcal{H}_{\sigma,m}))^{2m}$.

Так же как при исследовании уравнения Карлемана, покажем, что ее единственное решение

$$Q_{k,m}^+ = 2v_e^{1/2}u_e^{1/2}\frac{1}{\varepsilon}(w_k^0 - \frac{1}{2}\frac{\frac{1}{\varepsilon}L_e}{(ik + \frac{1}{\varepsilon}L_e)}\frac{u_e^{1/2}}{v_e^{1/2}}v_k^0),$$

$$Q_k^- = 2v_e^{1/2}w_e^{1/2}\frac{1}{\varepsilon}(u_k^0 - \frac{1}{2}\frac{w_e^{1/2}}{v_e^{1/2}}\frac{\frac{1}{\varepsilon}L_e}{(ik - \frac{1}{\varepsilon}L_e)}v_k^0), \quad |k| = 1, \ldots, m,$$

определяется локальным равновесием.

3.7. Локальное равновесие. Выше мы получили представление коэффициентов Фурье скоростей $\widehat{u}$ и $\widehat{w}$:

$$u_k = \Big(u_k^0 - \frac{1}{2}\frac{w_e^{1/2}}{v_e^{1/2}}\frac{\frac{1}{\varepsilon}L_e}{ik - \frac{1}{\varepsilon}L_e}v_k^0\Big)e^{-ikt} - v_k^0\frac{1}{2}\frac{w_e^{1/2}}{v_e^{1/2}}\frac{\frac{1}{\varepsilon}L_e}{ik - \frac{1}{\varepsilon}L_e}e^{-\frac{1}{\varepsilon}L_e t} -$$
$$- \frac{1}{2}\frac{w_e^{1/2}}{v_e^{1/2}}y_k + ik\frac{1}{2}\frac{w_e^{1/2}}{v_e^{1/2}}\int\limits_0^t e^{ik(s-t)}y_k ds, \tag{3.30}$$
$$w_k = \Big(w_k^0 - \frac{1}{2}\frac{u_e^{1/2}}{v_e^{1/2}}\frac{\frac{1}{\varepsilon}L_e}{(ik + \frac{1}{\varepsilon}L_e)}v_k^0\Big)e^{ikt} + \frac{1}{2}\frac{u_e^{1/2}}{v_e^{1/2}}v_k^0\frac{\frac{1}{\varepsilon}L_e}{ik + \frac{1}{\varepsilon}L_e}e^{-\frac{1}{\varepsilon}L_e t} -$$
$$- \frac{1}{2}\frac{u_e^{1/2}}{v_e^{1/2}}y_k - ik\frac{1}{2}\frac{u_e^{1/2}}{v_e^{1/2}}\int\limits_0^t e^{-ik(s-t)}y_k ds$$

Если подставить $y_k = Q_k^+T_k^{-1}(e^{ikt}) + Q_k^-T_k^{-1}(e^{-ikt}) + T_k^{-1}(z_k)$, $k \in \mathbb{Z}_0$ и сделать соответствующие преобразования, выделяющие секулярные члены, то можно найти решение секулярного уравнения для невозмущенной задачи.

А именно:

$$-ik\int\limits_0^t e^{-ik(s-t)}(Q_k^+T_k^{-1}(e^{iks}) + Q_k^-T_k^{-1}(e^{-iks}))ds = -ik\int\limits_0^t e^{-ik(s-t)}Q_k^+T_k^{-1}(e^{iks})ds -$$
$$- ik\int\limits_0^t e^{-ik(s-t)}Q_k^-T_k^{-1}(e^{-iks})ds.$$

Здесь $\int\limits_0^t e^{-ik(s-t)}Q_k^-T_k^{-1}(e^{-iks})ds$ стремится к нулю при $t \to \infty$, в то время как

$$-ik\int\limits_0^t e^{-ik(s-t)}Q_k^+T_k^{-1}(e^{iks})ds = ?$$

Надо выделять секулярный член, используя T_k.

Также

$$ik\int\limits_0^t e^{ik(s-t)}(Q_k^+T_k^{-1}(e^{iks})+Q_k^-T_k^{-1}(e^{-iks}))ds = ik\int\limits_0^t e^{ik(s-t)}Q_k^+T_k^{-1}(e^{iks}ds+$$

$$+ik\int\limits_0^t e^{ik(s-t)}Q_k^-T_k^{-1}(e^{-iks}))ds,$$

$ik\int\limits_0^t e^{ik(s-t)}Q_k^+T_k^{-1}(e^{iks}))ds$ стремится к нулю при $t\to\infty$, в то время как

$$ik\int\limits_0^t e^{ik(s-t)}Q_k^-T_k^{-1}(e^{-iks})ds = ?$$

Надо выделять секулярный член, используя T_k. Опять делаем трюк:

$$-ik\int\limits_0^t e^{-ik(s-t)}Q_k^+T_k^{-1}(e^{iks})ds = \frac{\varepsilon}{u_e}Q_k^+e^{+ikt}-$$

$$-\frac{\varepsilon}{u_e}\Big(\frac{d}{dt}Q_k^+T_k^{-1}(e^{ikt})+\frac{1}{\varepsilon}L_e\ Q_k^+T_k^{-1}(e^{ikt})+\frac{1}{\varepsilon}ikw_e\int\limits_0^t e^{ik(s-t)}Q_k^+T_k^{-1}(e^{iks})ds\Big).$$

Так же получим

$$ik\int\limits_0^t e^{ik(s-t)}Q_k^-T_k^{-1}(e^{-iks})ds = \frac{\varepsilon}{w_e}Q_k^-e^{-ikt}-$$

$$-\frac{\varepsilon}{w_e}\Big(\frac{d}{dt}Q_k^-T_k^{-1}(e^{-ikt})+\frac{1}{\varepsilon}L_e\ Q_k^-T_k^{-1}(e^{-ikt})-\frac{1}{\varepsilon}iku_e\int\limits_0^t e^{-ik(s-t)}Q_k^-T_k^{-1}(e^{-iks})ds\Big).$$

Отсюда

$$u_k=\Big(u_k^0-\frac{1}{2}\frac{w_e^{1/2}}{v_e^{1/2}}\frac{\frac{1}{\varepsilon}L_e}{ik-\frac{1}{\varepsilon}L_e}v_k^0-\frac{1}{2}\frac{\varepsilon}{w_e^{1/2}v_e^{1/2}}Q_k^-\Big)e^{-ikt}- \tag{3.31}$$

$$-v_k^0\frac{1}{2}\frac{w_e^{1/2}}{v_e^{1/2}}\frac{\frac{1}{\varepsilon}L_e}{ik-\frac{1}{\varepsilon}L_e}e^{-\frac{1}{\varepsilon}L_et}-\frac{1}{2}\frac{w_e^{1/2}}{v_e^{1/2}}(Q_k^-T_k^{-1}(e^{-ikt})+Q_k^+T_k^{-1}(e^{ikt})+T_k^{-1}(z_k))+$$

$$+ik\frac{1}{2}\frac{w_e^{1/2}}{v_e^{1/2}}\int\limits_0^t e^{ik(s-t)}(Q_k^+T_k^{-1}(e^{iks})+z_k)ds+$$

$$+\frac{1}{2}\frac{\varepsilon}{w_e^{1/2}v_e^{1/2}}\Big(\frac{d}{dt}Q_k^-T_k^{-1}(e^{-ikt})+\frac{1}{\varepsilon}L_e\ Q_k^-T_k^{-1}(e^{-ikt})-\frac{1}{\varepsilon}iku_e\int\limits_0^t e^{-ik(s-t)}Q_k^-T_k^{-1}(e^{-iks})ds\Big),$$

$$w_k = \Big(w_k^0 - \frac{1}{2}\frac{u_e^{1/2}}{v_e^{1/2}}\frac{\frac{1}{\varepsilon}L_e}{(ik+\frac{1}{\varepsilon}L_e)}v_k^0 - \frac{1}{2}\frac{\varepsilon}{u_e^{1/2}v_e^{1/2}}Q_k^+\Big)e^{ikt} - \tag{3.32}$$
$$-\frac{1}{2}\frac{u_e^{1/2}}{v_e^{1/2}}v_k^0\frac{\frac{1}{\varepsilon}L_e}{ik+\frac{1}{\varepsilon}L_e}e^{-\frac{1}{\varepsilon}L_e t} - \frac{1}{2}\frac{u_e^{1/2}}{v_e^{1/2}}(Q_k^+T_k^{-1}(e^{ikt}) + Q_k^-T_k^{-1}(e^{-ikt}) + T_k^{-1}(z_k)) -$$
$$-ik\frac{1}{2}\frac{u_e^{1/2}}{v_e^{1/2}}\int\limits_0^t e^{-ik(s-t)}(Q_k^-T_k^{-1}(e^{-ikt}) + T_k^{-1}(z_k))ds -$$
$$+\frac{1}{2}\frac{\varepsilon}{u_e^{1/2}v_e^{1/2}}\Big(\frac{d}{dt}Q_k^+T_k^{-1}(e^{ikt}) + \frac{1}{\varepsilon}L_e\; Q_k^+T_k^{-1}(e^{ikt}) + \frac{1}{\varepsilon}ikw_e\int\limits_0^t e^{ik(s-t)}Q_k^+T_k^{-1}(e^{iks})ds\Big).$$

Из условия локального равновесия следует, что должны быть выполнены равенства

$$u_k^0 - \frac{1}{2}\frac{w_e^{1/2}}{v_e^{1/2}}\frac{\frac{1}{\varepsilon}L_e}{ik-\frac{1}{\varepsilon}L_e}v_k^0 - \frac{1}{2}\frac{\varepsilon}{w_e^{1/2}v_e^{1/2}}Q_k^- = 0, \tag{3.33}$$
$$w_k^0 - \frac{1}{2}\frac{u_e^{1/2}}{v_e^{1/2}}\frac{\frac{1}{\varepsilon}L_e}{(ik+\frac{1}{\varepsilon}L_e)}v_k^0 - \frac{1}{2}\frac{\varepsilon}{u_e^{1/2}v_e^{1/2}}Q_k^+ = 0,$$

определяющие решение условия секулярности невозмущенной задачи:

$$Q_k^- = 2\frac{w_e^{1/2}v_e^{1/2}}{\varepsilon}\Big(u_k^0 - \frac{1}{2}\frac{w_e^{1/2}}{v_e^{1/2}}\frac{\frac{1}{\varepsilon}L_e}{ik-\frac{1}{\varepsilon}L_e}v_k^0\Big), \tag{3.34}$$
$$Q_k^+ = 2\frac{u_e^{1/2}v_e^{1/2}}{\varepsilon}\Big(w_k^0 - \frac{1}{2}\frac{u_e^{1/2}}{v_e^{1/2}}\frac{\frac{1}{\varepsilon}L_e}{(ik+\frac{1}{\varepsilon}L_e)}v_k^0\Big).$$

Таким образом, если справедлив принцип локального равновесия (стабилизации решений задачи для возмущений к нулю при $t \to +\infty$), то соотношения (3.34) должны определять решения условия секулярности (3.25). Проверим это предположение в следующем пункте.

3.8. Редукция секулярных членов. Приведенные исследования двух моделей дискретных кинетических уравнений показывают универсальность предлагаемых методов для исследования моделей типа Броудела. Позднее мы опубликуем исследование еще двух моделей: двумерной модели Броудела и трехмерной модели Годунова—Султангазина [3].

Чтобы понять основные трудности проверки принципа локального равновесия, еще раз проанализируем вывод секулярной системы (3.25).

I. *Секулярные члены k-моды перехода к однородным данным Коши.*

$$L_k(v^0e^{-\frac{1}{\varepsilon}L_e t}) = f_k^L(t)e^{-\frac{1}{\varepsilon}L_e t} -$$
$$-\frac{1}{2}\sum_{k_1+k_2=k, k_1,k_2\neq 0}\Big\{\Big(ik_1\frac{w_e^{1/2}}{v_e^{1/2}}\int\limits_0^t e^{ik_1(s-t)}v_{k_1}^0e^{-\frac{1}{\varepsilon}L_e s}ds\Big)(\overline{w_{k_2}^0} + \frac{1}{2}\frac{u_e^{1/2}}{v_e^{1/2}}\overline{v_{k_2}^0})e^{-ik_2t} +$$
$$+(u_{k_1}^0 + \frac{1}{2}\frac{w_e^{1/2}}{v_e^{1/2}}v_{k_1}^0)e^{-ik_1t}\overline{\Big(-ik_2\frac{u_e^{1/2}}{v_e^{1/2}}\int\limits_0^t e^{-ik_2(s-t)}v_{k_2}^0e^{-\frac{1}{\varepsilon}L_e s}ds\Big)} +$$
$$+\Big(-ik_2\frac{u_e^{1/2}}{v_e^{1/2}}\int\limits_0^t e^{-ik_2(s-t)}v_{k_2}^0e^{-\frac{1}{\varepsilon}L_e s}ds\Big)(\overline{u_{k_1}^0} + \frac{1}{2}\frac{w_e^{1/2}}{v_e^{1/2}}\overline{v_{k_1}^0})e^{ik_1t} +$$
$$+(w_{k_2}^0 + \frac{1}{2}\frac{u_e^{1/2}}{v_e^{1/2}}v_{k_2}^0)e^{ik_2t}\overline{\Big(ik_1\frac{w_e^{1/2}}{v_e^{1/2}}\int\limits_0^t e^{ik_1(s-t)}v_{k_1}^0e^{-\frac{1}{\varepsilon}L_e s}ds\Big)}\Big\} =$$

$$
= f_k^L(t)e^{-\frac{1}{\varepsilon}L_e t} + \frac{1}{2}\sum_{k_1+k_2=k,k_1,k_2\neq 0}\Big\{\Big[\frac{ik_1}{(ik_1-\frac{1}{\varepsilon}L_e)}\frac{w_e^{1/2}}{v_e^{1/2}}v^0_{k_1}\overline{(w^0_{k_2}+\frac{1}{2}\frac{u_e^{1/2}}{v_e^{1/2}}v^0_{k_2})} +
$$

$$
+ (u^0_{k_1}+\frac{1}{2}\frac{w_e^{1/2}}{v_e^{1/2}}v^0_{k_1})\overline{\Big(\frac{ik_2}{(ik_2+\frac{1}{\varepsilon}L_e)}\frac{u_e^{1/2}}{v_e^{1/2}}v^0_{k_2}\Big)}\Big]e^{-ikt} +
$$

$$
+ \Big(\frac{ik_2}{(ik_2+\frac{1}{\varepsilon}L_e)}\frac{u_e^{1/2}}{v_e^{1/2}}v^0_{k_2}\overline{(u^0_{k_1}+\frac{1}{2}\frac{w_e^{1/2}}{v_e^{1/2}}v^0_{k_1})} +
$$

$$
+ (w^0_{k_2}+\frac{1}{2}\frac{u_e^{1/2}}{v_e^{1/2}}v^0_{k_2})\overline{\Big(\frac{ik_1}{(ik_1-\frac{1}{\varepsilon}L_e)}\frac{w_e^{1/2}}{v_e^{1/2}}v^0_{k_1}\Big)}\Big]e^{ikt}\Big\},
$$

$$
B_k^{(m)}(v^0e^{-\frac{1}{\varepsilon}L_e t}, v^0e^{-\frac{1}{\varepsilon}L_e t}) = f_k^B(t)e^{-\frac{1}{\varepsilon}L_e t} -
$$

$$
-\frac{1}{4}\sum_{k_1+k_2=k,|k_1|,|k_2|=1,\ldots,m}\Big(ik_1\frac{w_e^{1/2}}{v_e^{1/2}}\int\limits_0^t e^{ik_1(s-t)}v^0_{k_1}e^{-\frac{1}{\varepsilon}L_e s}ds\Big)\times
$$

$$
\times\overline{\Big(-ik_2\frac{u_e^{1/2}}{v_e^{1/2}}\int\limits_0^t e^{-ik_2(s-t)}v^0_{k_2}e^{-\frac{1}{\varepsilon}L_e s}ds\Big)} +
$$

$$
+\Big(-ik_2\frac{u_e^{1/2}}{v_e^{1/2}}\int\limits_0^t e^{-ik_2(s-t)}v^0_{k_2}e^{-\frac{1}{\varepsilon}L_e s}ds\Big)\overline{\Big(ik_1\frac{w_e^{1/2}}{v_e^{1/2}}\int\limits_0^t e^{ik_1(s-t)}v^0_{k_1}e^{-\frac{1}{\varepsilon}L_e s}ds\Big)}\Big\} =
$$

$$
= F_k^B(t)e^{-\frac{1}{\varepsilon}L_e t} - \frac{1}{4}\sum_{k_1+k_2=k,|k_1|,|k_2|=1,\ldots,m}\Big\{\Big(\frac{ik_1}{(ik_1-\frac{1}{\varepsilon}L_e)}v^0_{k_1}\Big)\overline{\Big(\frac{ik_2}{(ik_2+\frac{1}{\varepsilon}L_e)}v^0_{k_2}\Big)}e^{-ikt} +
$$

$$
+\Big(\frac{ik_2}{(ik_2+\frac{1}{\varepsilon}L_e)}v^0_{k_2}\Big)\overline{\Big(v^0_{k_1}\frac{ik_1}{(ik_1-\frac{1}{\varepsilon}L_e)}\Big)}e^{ikt}\Big\}.
$$

Отсюда

$$
L_k(v^0e^{-\frac{1}{\varepsilon}L_e t}) + B_k^{(m)}(v^0e^{-\frac{1}{\varepsilon}L_e t}, v^0e^{-\frac{1}{\varepsilon}L_e t}) = f_k^B(t)e^{-\frac{1}{\varepsilon}L_e t} + f_k^L(t)e^{-\frac{1}{\varepsilon}L_e t} +
$$

$$
+\frac{1}{2}\sum_{k_1+k_2=k,k_1,k_2\neq 0}\Big\{\Big[\frac{ik_1}{(ik_1-\frac{1}{\varepsilon}L_e)}\frac{w_e^{1/2}}{v_e^{1/2}}v^0_{k_1}\overline{(w^0_{k_2}+\frac{1}{2}\frac{u_e^{1/2}}{v_e^{1/2}}v^0_{k_2})} +
$$

$$
+\Big(u^0_{k_1}-\frac{1}{2}\frac{\frac{1}{\varepsilon}L_e}{(ik_1-\frac{1}{\varepsilon}L_e)}\frac{w_e^{1/2}}{v_e^{1/2}}v^0_{k_1}\Big)\overline{\Big(\frac{ik_2}{(ik_2+\frac{1}{\varepsilon}L_e)}\frac{u_e^{1/2}}{v_e^{1/2}}v^0_{k_2}\Big)}\Big]e^{-ikt} +
$$

$$
+\Big[\Big(\frac{ik_2}{(ik_2+\frac{1}{\varepsilon}L_e)}\frac{u_e^{1/2}}{v_e^{1/2}}v^0_{k_2}\overline{(u^0_{k_1}+\frac{1}{2}\frac{w_e^{1/2}}{v_e^{1/2}}v^0_{k_1})} +
$$

$$
+\Big(w^0_{k_2}-\frac{1}{2}\frac{u_e^{1/2}}{v_e^{1/2}}\frac{\frac{1}{\varepsilon}L_e}{(ik_2+\frac{1}{\varepsilon}L_e)}v^0_{k_2}\Big)\overline{\Big(\frac{ik_1}{(ik_1-\frac{1}{\varepsilon}L_e)}\frac{w_e^{1/2}}{v_e^{1/2}}v^0_{k_1}\Big)}\Big]e^{ikt}\Big\}.
$$

Если добавить нелинейную часть $2\frac{1}{\varepsilon}v_e^{1/2}\mathcal{D}^+_{k,m}e^{ikt} + 2\frac{1}{\varepsilon}v_e^{1/2}\mathcal{D}^-_{k,m}e^{-ikt}$,

$$
I_k^{(m)} = -\sum_{k_1+k_2=k,|k_1|,|k_2|=1,\ldots,m}(w^0_{k_2}+\frac{1}{2}\frac{u_e^{1/2}}{v_e^{1/2}}v^0_{k_2})(\overline{u^0_{k_1}}+\frac{1}{2}\frac{w_e^{1/2}}{v_e^{1/2}}\overline{v^0_{k_1}})e^{ikt} +
$$

$$
-\sum_{k_1+k_2=k,|k_1|,|k_2|=1,\ldots,m}(u^0_{k_1}+\frac{1}{2}\frac{w_e^{1/2}}{v_e^{1/2}}v^0_{k_1})(\overline{w^0_{k_2}}+\frac{1}{2}\frac{u_e^{1/2}}{v_e^{1/2}}\overline{v^0_{k_2}})e^{-ikt},
$$

получим

$$
I_k^{(m)} + L_k(v^0e^{-\frac{1}{\varepsilon}L_e t}) + B_k^{(m)}(v^0e^{-\frac{1}{\varepsilon}L_e t}, v^0e^{-\frac{1}{\varepsilon}L_e t}) = f_k^B(t)e^{-\frac{1}{\varepsilon}L_e t} + f_k^L(t)e^{-\frac{1}{\varepsilon}L_e t} + J_k^{(m)},
$$

$$J_k^{(m)} = -\sum_{k_1+k_2=k, k_1,k_2\neq 0} \Big\{ \Big(u_{k_1}^0 - \frac{1}{2}\frac{\frac{1}{\varepsilon}L_e}{(ik_1 - \frac{1}{\varepsilon}L_e)}\frac{w_e^{1/2}}{v_e^{1/2}}v_{k_1}^0\Big)\overline{\Big(w_{k_2}^0 - \frac{1}{2}\frac{u_e^{1/2}}{v_e^{1/2}}\frac{\frac{1}{\varepsilon}L_e}{(ik_2 + \frac{1}{\varepsilon}L_e)}v_{k_2}^0\Big)}e^{-ikt} +$$

$$+ \Big(w_{k_2}^0 - \frac{\frac{1}{\varepsilon}L_e}{(ik_2 + \frac{1}{\varepsilon}L_e)}\frac{u_e^{1/2}}{v_e^{1/2}}v_{k_2}^0\Big)\overline{\Big(u_{k_1}^0 - \frac{\frac{1}{\varepsilon}L_e}{(ik_1 - \frac{1}{\varepsilon}L_e)}\frac{w_e^{1/2}}{v_e^{1/2}}v_{k_1}^0\Big)}e^{ikt}\Big\}.$$

II. *Секулярные члены k-моды перехода к интегральному уравнению в гильбертовом пространстве $L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+)$.* Секулярные члены перехода к интегральному уравнению в гильбертовом пространстве $L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+)$ возникают из следующих членов:

$$B_k^{(m)}((Q_k^+T_k^{-1}(e^{ikt}) + Q_k^-T_k^{-1}(e^{-ikt}), (Q_k^+T_k^{-1}(e^{ikt}) + Q_k^-T_k^{-1}(e^{-ikt})) = h_k^B(t) +$$

$$-\frac{1}{4}\sum_{k_1+k_2=k, k_1,k_2\neq 0} \Big\{ \Big(ik_1\frac{w_e^{1/2}}{v_e^{1/2}}\int\limits_0^t e^{ik_1(s-t)}Q_{k_1}^-T_{k_1}^{-1}(e^{-ik_1 s})ds\Big) \times$$

$$\times \overline{\Big(-ik_2\frac{u_e^{1/2}}{v_e^{1/2}}\int\limits_0^t e^{-ik_2(s-t)}Q_{k_2}^+T_{k_2}^{-1}(e^{ik_2 s}ds\Big)} +$$

$$+ \Big(-ik_2\frac{u_e^{1/2}}{v_e^{1/2}}\int\limits_0^t e^{-ik_2(s-t)}Q_{k_2}^+T_{k_2}^{-1}(e^{ik_2 s})ds\Big)\overline{\Big(ik_1\frac{w_e^{1/2}}{v_e^{1/2}}\int\limits_0^t e^{ik_1(s-t)}Q_{k_1}^-T_{k_1}^{-1}(e^{-ik_1 s})ds\Big)}\Big\} =$$

$$= H_k^B(t) - \frac{1}{4}\frac{\varepsilon^2}{v_e^2}\sum_{k_1+k_2=k, k_1,k_2\neq 0}\Big(Q_{k_1}^-\overline{Q_{k_2}^+}e^{-ikt} + \overline{Q_{k_1}^-}Q_{k_2}^+e^{ikt}\Big)$$

в силу соотношений

$$-ik\int\limits_0^t e^{ik(s-t)}Q_k^-T_k^{-1}(e^{-iks})ds = \frac{\varepsilon}{w_e}Q_k^-e^{-ikt} -$$

$$-\frac{\varepsilon}{w_e}\Big(\frac{d}{dt}Q_k^-T_k^{-1}(e^{-ikt}) + \frac{1}{\varepsilon}L_e\ Q_k^-T_k^{-1}(e^{-ikt}) - \frac{1}{\varepsilon}iku_e\int\limits_0^t e^{-ik(s-t)}Q_k^-T_k^{-1}(e^{-iks})ds\Big),$$

$$ik\int\limits_0^t e^{-ik(s-t)}Q_k^+T_k^{-1}(e^{iks})ds = \frac{\varepsilon}{u_e}Q_k^+e^{+ikt} -$$

$$-\frac{\varepsilon}{u_e}\Big(\frac{d}{dt}Q_k^+T_k^{-1}(e^{ikt}) + \frac{1}{\varepsilon}L_e\ Q_k^+T_k^{-1}(e^{ikt}) + \frac{1}{\varepsilon}ikw_e\int\limits_0^t e^{ik(s-t)}Q_k^+T_k^{-1}(e^{iks})ds\Big).$$

Здесь $h_k^B(t), H_k^B(t) \in L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+)$.

Далее

$$L_k^{(m)}(Q_k^+T_k^{-1}(e^{ikt}) + Q_k^-T_k^{-1}(e^{-ikt}) = h_k^L(t) -$$

$$-\frac{1}{2}\sum_{k_1+k_2=k, k_1,k_2\neq 0}\Big\{\frac{w_e^{1/2}}{v_e^{1/2}}\Big(ik_1\int\limits_0^t e^{ik_1(s-t)}Q_{k_1}^-T_{k_1}^{-1}(e^{-ik_1 s})ds\Big)(\overline{w_{k_2}^0} + \frac{1}{2}\frac{u_e^{1/2}}{v_e^{1/2}}\overline{v_{k_2}^0})e^{-ik_2 t} +$$

$$+\frac{u_e^{1/2}}{v_e^{1/2}}(u_{k_1}^0 + \frac{1}{2}\frac{w_e^{1/2}}{v_e^{1/2}}v_{k_1}^0)e^{-ik_1 t}\overline{\Big(-ik_2\int\limits_0^t e^{-ik_2(s-t)}Q_{k_2}^+T_{k_2}^{-1}(e^{ik_2 s})ds\Big)} +$$

$$+\frac{u_e^{1/2}}{v_e^{1/2}}\Big(-ik_2\int\limits_0^t e^{-ik_2(s-t)}Q_{k_2}^+T_{k_2}^{-1}(e^{ik_2 s})ds\Big)(\overline{u_{k_1}^0} + \frac{1}{2}\frac{w_e^{1/2}}{v_e^{1/2}}\overline{v_{k_1}^0})e^{ik_1 t} +$$

$$+ \frac{w_e^{1/2}}{v_e^{1/2}}(w^0_{k_2} + \frac{1}{2} \frac{u_e^{1/2}}{v_e^{1/2}} v^0_{k_2}) e^{ik_2 t} \overline{\Big(ik_1 \int\limits_0^t e^{ik_1(s-t)} Q^-_{k_1} T^{-1}_{k_1}(e^{-ik_1 s}) ds\Big)} \Big\} = H^L_k(t) +$$

$$+ \frac{1}{2} \sum_{k_1+k_2=k, k_1,k_2\neq 0} \Big\{ \Big[\frac{w_e^{1/2}}{v_e^{1/2}} \frac{\varepsilon}{w_e} Q^-_{k_1} (\overline{w^0_{k_2}} + \frac{1}{2} \frac{u_e^{1/2}}{v_e^{1/2}} \overline{v^0_{k_2}}) + \frac{u_e^{1/2}}{v_e^{1/2}} (u^0_{k_1} + \frac{1}{2} \frac{w_e^{1/2}}{v_e^{1/2}} v^0_{k_1}) \overline{\Big(\frac{\varepsilon}{u_e} Q^+_{k_2}\Big)} \Big] e^{-ikt} +$$

$$+ \Big[\frac{u_e^{1/2}}{v_e^{1/2}} \frac{\varepsilon}{u_e} Q^+_{k_2} (\overline{u^0_{k_1}} + \frac{1}{2} \frac{w_e^{1/2}}{v_e^{1/2}} \overline{v^0_{k_1}}) + \frac{w_e^{1/2}}{v_e^{1/2}} (w^0_{k_2} + \frac{1}{2} \frac{u_e^{1/2}}{v_e^{1/2}} v^0_{k_2}) \overline{\Big(\frac{\varepsilon}{w_e} Q^-_{k_1}\Big)} \Big] \ e^{ikt} \Big\}.$$

Если воспользоваться соотношениями локального равновесия

$$Q^+_{k,m} = 2 v_e^{1/2} u_e^{1/2} \frac{1}{\varepsilon} (w^0_k - \frac{1}{2} \frac{\frac{1}{\varepsilon} L_e}{(ik + \frac{1}{\varepsilon} L_e)} \frac{u_e^{1/2}}{v_e^{1/2}} v^0_k),$$

$$Q^-_k = 2 v_e^{1/2} w_e^{1/2} \frac{1}{\varepsilon} (u^0_k - \frac{1}{2} \frac{w_e^{1/2}}{v_e^{1/2}} \frac{\frac{1}{\varepsilon} L_e}{(ik - \frac{1}{\varepsilon} L_e)} v^0_k),$$

получим

$$S^-_{k,m} = \frac{1}{2} \sum_{k_1+k_2=k, k_1,k_2\neq 0} \Big[\frac{w_e^{1/2}}{v_e^{1/2}} \frac{\varepsilon}{w_e} Q^-_{k_1} (\overline{w^0_{k_2}} + \frac{1}{2} \frac{u_e^{1/2}}{v_e^{1/2}} \overline{v^0_{k_2}}) + \frac{u_e^{1/2}}{v_e^{1/2}} (u^0_{k_1} + \frac{1}{2} \frac{w_e^{1/2}}{v_e^{1/2}} v^0_{k_1}) \overline{\Big(\frac{\varepsilon}{u_e} Q^+_{k_2}\Big)} \Big] =$$

$$= \sum_{k_1+k_2=k, k_1,k_2\neq 0} \Big[(u^0_{k_1} - \frac{1}{2} \frac{w_e^{1/2}}{v_e^{1/2}} \frac{\frac{1}{\varepsilon} L_e}{(ik - \frac{1}{\varepsilon} L_e)} v^0_{k_1}) (\overline{w^0_{k_2}} + \frac{1}{2} \frac{u_e^{1/2}}{v_e^{1/2}} \overline{v^0_{k_2}}) +$$

$$+ (u^0_{k_1} + \frac{1}{2} \frac{w_e^{1/2}}{v_e^{1/2}} v^0_{k_1}) \overline{(w^0_{k_2} - \frac{1}{2} \frac{\frac{1}{\varepsilon} L_e}{(ik + \frac{1}{\varepsilon} L_e)} \frac{u_e^{1/2}}{v_e^{1/2}} v^0_{k_2})} \Big].$$

Далее

$$B^{(m)}_k (v^0 e^{-\frac{1}{\varepsilon} L_2 t}, (Q^+_k T^{-1}_k (e^{ikt}) + Q^-_k T^{-1}_k (e^{-ikt})) = f^{B,1}_k (t) e^{-\frac{1}{\varepsilon} L_2 t} + h^{B,1}_k (t) -$$

$$- \frac{1}{4} \sum_{k_1+k_2=k, |k_1|, |k_2| = 1,\ldots,m} \Big\{ \Big(- \frac{ik_1}{(ik_1 - \frac{1}{\varepsilon} L_e)} \frac{w_e^{1/2}}{v_e^{1/2}} v^0_{k_1} e^{-ik_1 t} \Big) \times$$

$$\times \overline{\Big(- ik_2 \frac{u_e^{1/2}}{v_e^{1/2}} \int\limits_0^t e^{-ik_2(s-t)} Q^+_{k_2} T^{-1}_{k_2} (e^{ik_2 s}) ds \Big)} +$$

$$+ \Big(- ik_2 \frac{u_e^{1/2}}{v_e^{1/2}} \int\limits_0^t e^{-ik_2(s-t)} Q^+_{k_2} T^{-1}_{k_2} (e^{ik_2 s}) ds \Big) \times$$

$$\times \overline{\Big(- \frac{ik_1}{(ik_1 - \frac{1}{\varepsilon} L_e)} \frac{w_e^{1/2}}{v_e^{1/2}} v^0_{k_1} e^{-ik_1 t} \Big)} \Big\} =$$

$$= F^{B,1}_k (t) e^{-\frac{1}{\varepsilon} L_2 t} + H^{B,1}_k (t) -$$

$$- \frac{1}{4} \sum_{k_1+k_2=k, |k_1|, |k_2| = 1,\ldots,m} \Big\{ \Big(\frac{ik_1}{(ik_1 - \frac{1}{\varepsilon} L_e)} v^0_{k_1} \Big) \overline{\Big(\frac{\varepsilon}{u_e} Q^+_{k_2} \Big)} \ e^{-ikt} +$$

$$+ \Big(\frac{\varepsilon}{u_e} Q^+_{k_2} \Big) \overline{\Big(\frac{ik_1}{(ik_1 - \frac{1}{\varepsilon} L_e)} v^0_{k_1} \Big)} \ e^{+ikt} \Big\}.$$

Так же получим

$$B^{(m)}_k ((Q^+_k T^{-1}_k (e^{ikt}) + Q^-_k T^{-1}_k (e^{-ikt}), v^0 e^{-\frac{1}{\varepsilon} L_2 t}) = F^{B,2}_k (t) e^{-\frac{1}{\varepsilon} L_2 t} + H^{B,2}_k (t) -$$

$$- \frac{1}{4} \sum_{k_1+k_2=k, |k_1|, |k_2| = 1,\ldots,m} \Big\{ \Big(\frac{\varepsilon}{w_e} Q^-_{k_1} \Big) \overline{\Big(\frac{ik_2}{(ik_2 + \frac{1}{\varepsilon} L_2)} v^0_{k_2} \Big)} \ e^{-ikt} +$$

$$+\Big(\frac{ik_2}{(ik_2+\frac{1}{\varepsilon}L_e)}v^0_{k_2}\Big)\overline{\Big(\frac{\varepsilon}{w_e}Q^-_{k_1}\Big)}\; e^{ikt}\Big\}.$$

Отсюда

$$B^{(m)}_k(v^0e^{-\frac{1}{\varepsilon}L_2t},(Q^+_kT^{-1}_k(e^{ikt})+Q^-_kT^{-1}_k(e^{-ikt}))+B^{(m)}_k((Q^+_kT^{-1}_k(e^{ikt})+Q^-_kT^{-1}_k(e^{-ikt}),v^0e^{-\frac{1}{\varepsilon}L_2t})=$$
$$=F^{B,1}_k(t)e^{-\frac{1}{\varepsilon}L_2t}+H^{B,1}_k(t)+F^{B,2}_k(t)e^{-\frac{1}{\varepsilon}L_2t}+H^{B,2}_k(t)-$$
$$-\frac{1}{4}\sum_{k_1+k_2=k,|k_1|,|k_2|=1,\dots,m}\Big\{\Big[\Big(\frac{ik_2}{(ik_2+\frac{1}{\varepsilon}L_e)}v^0_{k_2}\Big)\overline{\Big(\frac{\varepsilon}{w_e}Q^-_{k_1}\Big)}+\Big(\frac{\varepsilon}{u_e}Q^+_{k_2}\Big)\overline{\Big(\frac{ik_1}{(ik_1-\frac{1}{\varepsilon}L_e)}v^0_{k_1}\Big)}\Big]\;e^{+ikt}+$$
$$+\Big[\Big(\frac{\varepsilon}{w_e}Q^-_{k_1}\Big)\overline{\Big(\frac{ik_2}{(ik_2+\frac{1}{\varepsilon}L_2)}v^0_{k_2}\Big)}+\Big(\frac{ik_1}{(ik_1-\frac{1}{\varepsilon}L_e)}v^0_{k_1}\Big)\overline{\Big(\frac{\varepsilon}{u_e}Q^+_{k_2}\Big)}\Big]\;e^{-ikt}\Big\}.$$

Если

$$Q^+_{k,m}=2v_e^{1/2}u_e^{1/2}\frac{1}{\varepsilon}(w^0_k-\frac{1}{2}\frac{\frac{1}{\varepsilon}L_e}{(ik+\frac{1}{\varepsilon}L_e)}\frac{u_e^{1/2}}{v_e^{1/2}}v^0_k),$$
$$Q^-_k=2v_e^{1/2}w_e^{1/2}\frac{1}{\varepsilon}(u^0_k-\frac{1}{2}\frac{w_e^{1/2}}{v_e^{1/2}}\frac{\frac{1}{\varepsilon}L_e}{(ik-\frac{1}{\varepsilon}L_e)}v^0_k),$$

$$R^+_{k,m}=-\frac{1}{4}\sum_{k_1+k_2=k,|k_1|,|k_2|=1,\dots,m}\Big\{\Big(\frac{ik_2}{(ik_2+\frac{1}{\varepsilon}L_e)}v^0_{k_2}\Big)\overline{\Big(\frac{\varepsilon}{w_e}Q^-_{k_1}\Big)}+\Big(\frac{\varepsilon}{u_e}Q^+_{k_2}\Big)\overline{\Big(\frac{ik_1}{(ik_1-\frac{1}{\varepsilon}L_e)}v^0_{k_1}\Big)}\Big\}=$$
$$=-\sum_{k_1+k_2=k,|k_1|,|k_2|=1,\dots,m}\Big\{\Big(\frac{1}{2}\frac{u_e^{1/2}}{v_e^{1/2}}\frac{ik_2}{(ik_2+\frac{1}{\varepsilon}L_e)}v^0_{k_2}\Big)\overline{\Big(u^0_{k_1}-\frac{1}{2}\frac{w_e^{1/2}}{v_e^{1/2}}\frac{\frac{1}{\varepsilon}L_e}{(ik-\frac{1}{\varepsilon}L_e)}v^0_{k_1}\Big)}+$$
$$+\Big(w^0_{k_2}-\frac{1}{2}\frac{\frac{1}{\varepsilon}L_e}{(ik+\frac{1}{\varepsilon}L_e)}\frac{u_e^{1/2}}{v_e^{1/2}}v^0_{k_2}\Big)\overline{\Big(\frac{1}{2}\frac{w_e^{1/2}}{v_e^{1/2}}\frac{ik_1}{(ik_1-\frac{1}{\varepsilon}L_e)}v^0_{k_1}\Big)}\Big\}.$$

Положим

$$R^-_{k,m}=-\sum_{k_1+k_2=k,|k_1|,|k_2|=1,\dots,m}\Big\{\Big((u^0_{k_1}-\frac{1}{2}\frac{w_e^{1/2}}{v_e^{1/2}}\frac{\frac{1}{\varepsilon}L_e}{(ik-\frac{1}{\varepsilon}L_e)}v^0_{k_1})\Big)\overline{\frac{1}{2}\frac{u_e^{1/2}}{v_e^{1/2}}\Big(\frac{ik_2}{(ik_2+\frac{1}{\varepsilon}L_2)}v^0_{k_2}\Big)}+$$
$$+\Big(\frac{1}{2}\frac{w_e^{1/2}}{v_e^{1/2}}\frac{ik_1}{(ik_1-\frac{1}{\varepsilon}L_e)}v^0_{k_1}\Big)\overline{\Big((w^0_{k_2}-\frac{1}{2}\frac{\frac{1}{\varepsilon}L_e}{(ik+\frac{1}{\varepsilon}L_e)}\frac{u_e^{1/2}}{v_e^{1/2}}v^0_{k_2})\Big)}\Big\}.$$

Отсюда

$$S^-_{k,m}+R^-_{k,m}=$$
$$=\sum_{k_1+k_2=k,k_1,k_2\neq0}\Big\{(u^0_{k_1}-\frac{1}{2}\frac{w_e^{1/2}}{v_e^{1/2}}\frac{\frac{1}{\varepsilon}L_e}{(ik-\frac{1}{\varepsilon}L_e)}v^0_{k_1})(\overline{w^0_{k_2}}+\frac{1}{2}\frac{u_e^{1/2}}{v_e^{1/2}}\overline{v^0_{k_2}})+$$
$$+(u^0_{k_1}+\frac{1}{2}\frac{w_e^{1/2}}{v_e^{1/2}}v^0_{k_1})\overline{(w^0_{k_2}-\frac{1}{2}\frac{\frac{1}{\varepsilon}L_e}{(ik+\frac{1}{\varepsilon}L_e)}\frac{u_e^{1/2}}{v_e^{1/2}}v^0_{k_2})}-$$
$$-\Big((u^0_{k_1}-\frac{1}{2}\frac{w_e^{1/2}}{v_e^{1/2}}\frac{\frac{1}{\varepsilon}L_e}{(ik-\frac{1}{\varepsilon}L_e)}v^0_{k_1})\Big)\overline{\frac{1}{2}\frac{u_e^{1/2}}{v_e^{1/2}}\Big(\frac{ik_2}{(ik_2+\frac{1}{\varepsilon}L_2)}v^0_{k_2}\Big)}+$$
$$-\Big(\frac{1}{2}\frac{w_e^{1/2}}{v_e^{1/2}}\frac{ik_1}{(ik_1-\frac{1}{\varepsilon}L_e)}v^0_{k_1}\Big)\overline{\Big((w^0_{k_2}-\frac{1}{2}\frac{\frac{1}{\varepsilon}L_e}{(ik+\frac{1}{\varepsilon}L_e)}\frac{u_e^{1/2}}{v_e^{1/2}}v^0_{k_2})\Big)}\Big\}=$$
$$=2\sum_{k_1+k_2=k,k_1,k_2\neq0}\Big(u^0_{k_1}-\frac{1}{2}\frac{w_e^{1/2}}{v_e^{1/2}}\frac{\frac{1}{\varepsilon}L_e}{(ik-\frac{1}{\varepsilon}L_e)}v^0_{k_1}\Big)\overline{\Big(w^0_{k_2}-\frac{1}{2}\frac{u_e^{1/2}}{v_e^{1/2}}\frac{\frac{1}{\varepsilon}L_2}{(ik_2+\frac{1}{\varepsilon}L_2)}v^0_{k_2}\Big)}.$$

Отсюда следует, что

$$J^-_{k,m}+S^-_{k,m}+R^-_{k,m}=0,\quad J^+_{k,m}+S^+_{k,m}+R^+_{k,m}=0,\quad |k|=1,\dots,m,$$

что соответствует выполнению уравнения секулярности (3.25) невозмущенной задачи для

$$Q_k^- = 2\frac{w_e^{1/2}v_e^{1/2}}{\varepsilon}\Big(u_k^0 - \frac{1}{2}\frac{w_e^{1/2}}{v_e^{1/2}}\frac{\frac{1}{\varepsilon}L_e}{ik - \frac{1}{\varepsilon}L_e}v_k^0\Big), \tag{3.35}$$

$$Q_k^+ = 2\frac{u_e^{1/2}v_e^{1/2}}{\varepsilon}\Big(w_k^0 - \frac{1}{2}\frac{u_e^{1/2}}{v_e^{1/2}}\frac{\frac{1}{\varepsilon}L_e}{(ik + \frac{1}{\varepsilon}L_e)}v_k^0\Big).$$

III. *Секулярные члены нулевой моды перехода к однородным данным Коши.* Чтобы закончить проверку принципа локального равновесия, проанализируем вывод секулярного уравнения нулевой моды (3.28). Так же, как выше, получим

$$L_0(v^0e^{-\frac{1}{\varepsilon}L_et}) + B_0(v^0e^{-\frac{1}{\varepsilon}L_et}, v^0e^{-\frac{1}{\varepsilon}L_et})\Big) = d_0^{(1)} + f_0(t)e^{-\frac{1}{\varepsilon}L_et},$$

где

$$d_0^{(1)} = \sum_{k_1+k_2=0,k_1,k_2\in\mathbb{Z}_0}\Big\{(u_{k_1}^0 + \frac{1}{2}\frac{w_e^{1/2}}{v_e^{1/2}}v_{k_1}^0)\frac{ik_2}{(ik_2 - \frac{1}{\varepsilon}L_e)}\frac{1}{2}\frac{u_e^{1/2}}{v_e^{1/2}}\overline{v_{k_2}^0} +$$

$$+ \frac{ik_1}{(ik_1 - \frac{1}{\varepsilon}L_e)}\frac{1}{2}\frac{w_e^{1/2}}{v_e^{1/2}}v_{k_1}^0(\overline{w_{k_2}^0} + \frac{1}{2}\frac{u_e^{1/2}}{v_e^{1/2}}\overline{v_{k_2}^0}) +$$

$$+ (w_{k_2}^0 + \frac{1}{2}\frac{u_e^{1/2}}{v_e^{1/2}}v_{k_2}^0)\frac{ik_1}{(ik_1 + \frac{1}{\varepsilon}L_e)}\frac{1}{2}\frac{w_e^{1/2}}{v_e^{1/2}}\overline{v_{k_1}^0} + \frac{ik_2}{(ik_2 + \frac{1}{\varepsilon}L_e)}\frac{1}{2}\frac{u_e^{1/2}}{v_e^{1/2}}v_{k_2}^0(\overline{u_{k_1}^0} + \frac{1}{2}\frac{w_e^{1/2}}{v_e^{1/2}}\overline{v_{k_1}^0})\Big\}.$$

Тогда секулярный член уравнения нулевой моды (3.28)

$$D_0 = d_0 - d_0^{(1)} =$$

$$= \sum_{k_1+k_2=0,k_1,k_2\in\mathbb{Z}_0}\Big\{\Big(\Big(u_{k_1}^0 - \frac{1}{2}\frac{w_e^{1/2}}{v_e^{1/2}}\frac{\frac{1}{\varepsilon}L_e}{(ik_1 - \frac{1}{\varepsilon}L_e)}v_{k_1}^0\Big)(\overline{w_{k_2}^0} - \frac{1}{2}\frac{u_e^{1/2}}{v_e^{1/2}}\frac{\frac{1}{\varepsilon}L_e}{(ik_2 - \frac{1}{\varepsilon}L_e)}\overline{v_{k_2}^0}\Big) +$$

$$+ \Big(w_{k_2}^0 - \frac{1}{2}\frac{u_e^{1/2}}{v_e^{1/2}}\frac{\frac{1}{\varepsilon}L_e}{(ik_2 + \frac{1}{\varepsilon}L_e)}v_{k_2}^0\Big)\Big(\overline{u_{k_1}^0} - \frac{1}{2}\frac{w_e^{1/2}}{v_e^{1/2}}\frac{\frac{1}{\varepsilon}L_e}{(ik_1 + \frac{1}{\varepsilon}L_e)}\overline{v_{k_1}^0}\Big)\Big\}.$$

IV. *Секулярные члены нулевой моды перехода к интегральному уравнению в гильбертовом пространстве $L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+)$.* Секулярные члены нулевой моды перехода к интегральному уравнению в гильбертовом пространстве $L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+)$ возникают из следующих членов:

$$\mathcal{L}_0(Q_k^+T_k^{-1}(e^{ikt}) + Q_k^-T_k^{-1}(e^{-ikt}) +$$

$$+ B_0(Q_k^+T_k^{-1}(e^{ikt}) + Q_k^-T_k^{-1}(e^{-ikt}, Q_k^+T_k^{-1}(e^{ikt}) + Q_k^-T_k^{-1}(e^{-ikt}) = h_0(t) + D_0^{(1)},$$

$$\mathcal{D}_0(Q^+, Q^-) = D_0 - D_0^{(1)},$$

$$D_0^{(1)} = \frac{1}{2}\sum_{k_1+k_2=0,k_1,k_2\neq 0}\Big\{(u_{k_1}^0 - \frac{1}{2}\frac{w_e^{1/2}}{v_e^{1/2}}\frac{\frac{1}{\varepsilon}L_e}{(ik_1 - \frac{1}{\varepsilon}L_e)}v_{k_1}^0)\frac{\varepsilon}{u_e}\frac{u_e^{1/2}}{v_e^{1/2}}\overline{Q_k^+} +$$

$$+ \frac{u_e^{1/2}}{v_e^{1/2}}\frac{\varepsilon}{u_e}Q_k^+\overline{(u_{k_1}^0 - \frac{1}{2}\frac{w_e^{1/2}}{v_e^{1/2}}\frac{\frac{1}{\varepsilon}L_e}{(ik_1 - \frac{1}{\varepsilon}L_e)}v_{k_1}^0)} + \frac{w_e^{1/2}}{v_e^{1/2}}\frac{\varepsilon}{w_e}Q_{k_1}^-\overline{(w_{k_2}^0 - \frac{1}{2}\frac{u_e^{1/2}}{v_e^{1/2}}\frac{\frac{1}{\varepsilon}L_e}{(ik_2 + \frac{1}{\varepsilon}L_e)}v_{k_2}^0)} +$$

$$+ (w_{k_2}^0 - \frac{1}{2}\frac{u_e^{1/2}}{v_e^{1/2}}\frac{\frac{1}{\varepsilon}L_e}{(ik_2 + \frac{1}{\varepsilon}L_e)}v_{k_2}^0)\frac{w_e^{1/2}}{v_e^{1/2}}\overline{\frac{\varepsilon}{w_e}Q_k^-} - \frac{1}{2}\frac{\varepsilon^2}{w_eu_e}\sum_{k_1+k_2=0,k_1\in\mathbb{Z}_0}\Big(Q_{k_1}^-\overline{Q_{k_2}^+}) + Q_{k_2}^+\overline{Q_{k_1}^-}\Big)\Big\}.$$

Здесь

$$L_0(Q_k^+T_k^{-1}(e^{ikt}) + Q_k^-T_k^{-1}(e^{-ikt}) = h_0^L(t) +$$

$$+ \frac{1}{2}\sum_{k_1+k_2=0,k_1,k_2\neq 0}\Big\{(u_{k_1}^0 + \frac{1}{2}\frac{w_e^{1/2}}{v_e^{1/2}}v_{k_1}^0)\frac{\varepsilon}{u_e}\frac{u_e^{1/2}}{v_e^{1/2}}\overline{Q_k^+} + \frac{w_e^{1/2}}{v_e^{1/2}}\frac{\varepsilon}{w_e}Q_{k_1}^-\overline{(w_{k_2}^0 + \frac{1}{2}\frac{u_e^{1/2}}{v_e^{1/2}}v_{k_2}^0)} +$$

$$+ (w_{k_2}^0 + \frac{1}{2}\frac{u_e^{1/2}}{v_e^{1/2}}v_{k_2}^0)\frac{w_e^{1/2}}{v_e^{1/2}}\overline{\frac{\varepsilon}{w_e}Q_k^-} + \frac{u_e^{1/2}}{v_e^{1/2}}\frac{\varepsilon}{u_e}Q_k^+\overline{(u_{k_1}^0 + \frac{1}{2}\frac{w_e^{1/2}}{v_e^{1/2}}v_{k_1}^0)}\Big\},$$

$$B_0((Q^+_{k_1}T^{-1}_{k_1}(e^{ik_1t})+Q^-_{k_1}T^{-1}_{k_1}(e^{-ik_1t}),v^0_k e^{-\frac{1}{\varepsilon}L_e t})=f^{B,1}_0(t)e^{-\frac{1}{\varepsilon}L_e t}+h^{B,1}_0(t)-$$
$$-\frac{1}{4}\sum_{k_1+k_2=0,k_1,k_2\neq 0}\Big\{ik_1\frac{\varepsilon}{w_e}Q^-_{k_1}\overline{v^0_{k_2}\frac{ik_2}{(ik_2+\frac{1}{\varepsilon}L_e)}}+v^0_{k_2}\frac{ik_2}{(ik_2+\frac{1}{\varepsilon}L_e)}\frac{\varepsilon}{w_e}\overline{Q^-_{k_1}}\Big\},$$
$$B_0(v^0_k e^{-\frac{1}{\varepsilon}L_e t},(Q^+_{k_1}T^{-1}_{k_1}(e^{ik_1t})+Q^-_{k_1}T^{-1}_{k_1}(e^{-ik_1t}))=f^{B,2}_0(t)e^{-\frac{1}{\varepsilon}L_e t}+h^{B,2}_0(t)-$$
$$-\frac{1}{4}\sum_{k_1+k_2=0,k_1,k_2\neq 0}\Big\{\frac{ik_1}{(ik_1-\frac{1}{\varepsilon}L_e)}v^0_{k_1}\frac{\varepsilon}{u_e}\ \overline{Q^+_{k_2}}+\frac{\varepsilon}{u_e}Q^+_{k_2}\overline{\frac{ik_1}{(ik_1-\frac{1}{\varepsilon}L_e)}v^0_{k_1}}\Big\}.$$

В то же время имеем

$$B_0((Q^+_kT^{-1}_k(e^{ikt})+Q^-_kT^{-1}_k(e^{-ikt}),(Q^+_kT^{-1}_k(e^{ikt})+Q^-_kT^{-1}_k(e^{-ikt}))=h^B_0(t)-$$
$$-\frac{1}{4}\frac{\varepsilon^2}{w_eu_e}\sum_{k_1+k_2=0,k_1\in\mathbb{Z}_0}\Big(Q^-_{k_1}\overline{Q^+_{k_2}})+Q^+_{k_2}\overline{Q^-_{k_1}}\Big).$$

Суммируя, получим

$$L_0(Q^+_kT^{-1}_k(e^{ikt})+Q^-_kT^{-1}_k(e^{-ikt})+B_0(v^0_k e^{-\frac{1}{\varepsilon}L_e t},(Q^+_{k_1}T^{-1}_{k_1}(e^{ik_1t})+Q^-_{k_1}T^{-1}_{k_1}(e^{-ik_1t}))+$$
$$+B_0((Q^+_kT^{-1}_k(e^{ikt})+Q^-_kT^{-1}_k(e^{-ikt}),(Q^+_kT^{-1}_k(e^{ikt})+Q^-_kT^{-1}_k(e^{-ikt}))=$$
$$=h^L_0(t)+f^{B,1}_0(t)e^{-\frac{1}{\varepsilon}L_e t}+h^{B,1}_0(t)+f^{B,2}_0(t)e^{-\frac{1}{\varepsilon}L_e t}+h^{B,2}_0(t)+h^B_0(t)+$$
$$+\frac{1}{2}\sum_{k_1+k_2=0,k_1,k_2\neq 0}\Big\{(u^0_{k_1}-\frac{1}{2}\frac{w_e^{1/2}}{v_e^{1/2}}\frac{\frac{1}{\varepsilon}L_e}{(ik_1-\frac{1}{\varepsilon}L_e)}v^0_{k_1})\frac{\varepsilon}{u_e}\frac{u_e^{1/2}}{v_e^{1/2}}\overline{Q^+_{k_2}}+$$
$$+\frac{u_e^{1/2}}{v_e^{1/2}}\frac{\varepsilon}{u_e}Q^+_{k_2}\overline{(u^0_{k_1}-\frac{1}{2}\frac{w_e^{1/2}}{v_e^{1/2}}\frac{\frac{1}{\varepsilon}L_e}{(ik_1-\frac{1}{\varepsilon}L_e)}v^0_{k_1})}+\frac{w_e^{1/2}}{v_e^{1/2}}\frac{\varepsilon}{w_e}Q^-_{k_1}\overline{(w^0_{k_2}-\frac{1}{2}\frac{u_e^{1/2}}{v_e^{1/2}}\frac{\frac{1}{\varepsilon}L_e}{(ik_2+\frac{1}{\varepsilon}L_e)}v^0_{k_2})}+$$
$$+(w^0_{k_2}-\frac{1}{2}\frac{u_e^{1/2}}{v_e^{1/2}}\frac{\frac{1}{\varepsilon}L_e}{(ik_2+\frac{1}{\varepsilon}L_e)}v^0_{k_2})\frac{w_e^{1/2}}{v_e^{1/2}}\overline{\frac{\varepsilon}{w_e}Q^-_{k_1}}-\frac{1}{2}\frac{\varepsilon^2}{w_eu_e}\sum_{k_1+k_2=0,k_1\in\mathbb{Z}_0}\Big(Q^-_{k_1}\overline{Q^+_{k_2}})+Q^+_{k_2}\overline{Q^-_{k_1}}\Big)\Big\}.$$

Для значений (Q^+_k,Q^-k), определяемых локальным равновесием k-мод

$$Q^+_{k,m}=2v_e^{1/2}u_e^{1/2}\frac{1}{\varepsilon}(w^0_k-\frac{1}{2}\frac{\frac{1}{\varepsilon}L_e}{(ik+\frac{1}{\varepsilon}L_e)}\frac{u_e^{1/2}}{v_e^{1/2}}v^0_k),\tag{3.36}$$
$$Q^-_k=2v_e^{1/2}w_e^{1/2}\frac{1}{\varepsilon}(u^0_k-\frac{1}{2}\frac{w_e^{1/2}}{v_e^{1/2}}\frac{\frac{1}{\varepsilon}L_e}{(ik-\frac{1}{\varepsilon}L_e)}v^0_k).$$

Получим

$$S_0(Q^+,Q^-)=\frac{1}{2}\sum_{k_1+k_2=0,k_1,k_2\neq 0}\Big\{(u^0_{k_1}-\frac{1}{2}\frac{w_e^{1/2}}{v_e^{1/2}}\frac{\frac{1}{\varepsilon}L_e}{(ik_1-\frac{1}{\varepsilon}L_e)}v^0_{k_1})\frac{\varepsilon}{u_e}\frac{u_e^{1/2}}{v_e^{1/2}}\overline{Q^+_{k_2}}+$$
$$+\frac{u_e^{1/2}}{v_e^{1/2}}\frac{\varepsilon}{u_e}Q^+_{k_2}\overline{(u^0_{k_1}-\frac{1}{2}\frac{w_e^{1/2}}{v_e^{1/2}}\frac{\frac{1}{\varepsilon}L_e}{(ik_1-\frac{1}{\varepsilon}L_e)}v^0_{k_1})}+\frac{w_e^{1/2}}{v_e^{1/2}}\frac{\varepsilon}{w_e}Q^-_{k_1}\overline{(w^0_{k_2}-\frac{1}{2}\frac{u_e^{1/2}}{v_e^{1/2}}\frac{\frac{1}{\varepsilon}L_e}{(ik_2+\frac{1}{\varepsilon}L_e)}v^0_{k_2})}+$$
$$+(w^0_{k_2}-\frac{1}{2}\frac{u_e^{1/2}}{v_e^{1/2}}\frac{\frac{1}{\varepsilon}L_e}{(ik_2+\frac{1}{\varepsilon}L_e)}v^0_{k_2})\frac{w_e^{1/2}}{v_e^{1/2}}\overline{\frac{\varepsilon}{w_e}Q^-_{k_1}}-\frac{1}{2}\frac{\varepsilon^2}{w_eu_e}\sum_{k_1+k_2=0,k_1\in\mathbb{Z}_0}\Big(Q^-_{k_1}\overline{Q^+_{k_2}}+Q^+_{k_2}\overline{Q^-_{k_1}}\Big)\Big\}=$$
$$=\sum_{k_1+k_2=0,k_1,k_2\neq 0}\Big\{(u^0_{k_1}-\frac{1}{2}\frac{w_e^{1/2}}{v_e^{1/2}}\frac{\frac{1}{\varepsilon}L_e}{(ik_1-\frac{1}{\varepsilon}L_e)}v^0_{k_1})\overline{(w^0_{k_2}-\frac{1}{2}\frac{\frac{1}{\varepsilon}L_e}{(ik+\frac{1}{\varepsilon}L_e)}\frac{u_e^{1/2}}{v_e^{1/2}}v^0_{k_2})}+$$
$$+(w^0_{k_2}-\frac{1}{2}\frac{\frac{1}{\varepsilon}L_e}{(ik+\frac{1}{\varepsilon}L_e)}\frac{u_e^{1/2}}{v_e^{1/2}}v^0_{k_2})\overline{(u^0_{k_1}-\frac{1}{2}\frac{w_e^{1/2}}{v_e^{1/2}}\frac{\frac{1}{\varepsilon}L_e}{(ik_1-\frac{1}{\varepsilon}L_e)}v^0_{k_1})}\Big\}.$$

Отсюда

$$\mathcal{D}_0=D_0-S_0(Q^+,Q^-)=0.$$

Таким образом, пара (3.36) есть решение последнего уравнения (3.28) (секулярного уравнения нулевой моды). Это завершает сведение задачи Коши (3.8), (3.16) к интегральному уравнению в гильбертовом пространстве $L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+)$

$$z_k = e^{-\frac{1}{\varepsilon}L_e t}(F_{k,L}^{(m)}(t) + F_{k,B}^{(m)}(t)) + H_{k,B}^{(m)}(t) + H_{k,B}^{(m)}(t) - \tag{3.37}$$

$$- \varepsilon v_e^{1/2}\Big(\mathcal{U}_k^{(m)}(T_k^{-1}(z^{(m)})) + B_k^{(m)}(T_k^{-1}(z^{(m)}), T_k^{-1}(z^{(m)}))\Big),\ |k| = 1, \ldots, m,$$

$$z_0 = -\frac{3}{2}\varepsilon v_e^{1/2}\int_0^t e^{\frac{1}{\varepsilon}L_e(s-t)}\Big[z_0\overline{z_0} -$$

$$+ \frac{2}{3}\Big(\mathcal{L}_0^{(1)}(T^{-1}(z)) + B_0(T^{-1}(z), T^{-1}(z)\Big) + f_0(s)e^{-\frac{1}{\varepsilon}L_e s} + h_0(s)\Big]ds.$$

3.9. Возмущенная задача. Возмущение задачи (3.8), (3.16) определяется $T_k^{add}(v)$, где $|k| = 1, \ldots, m$. Для $v_k = y_k^{(m)} + v_k^0 e^{-\frac{1}{\varepsilon}t}$, $y_k^{(m)} = T_k^{-1}(Q_{k,m}^+ e^{ikt}) + T_k^{-1}(Q_{k,m}^- e^{-ikt}) + T_k^{-1}(z_k^{(m)})$ имеем

$$T_k^{add}(v^{(m)}) = v_0\overline{\mathcal{T}_{k,m}^{add}} + \overline{v_0}\mathcal{T}_{k,m}^{add}, \tag{3.38}$$

$$\mathcal{T}_{k.m}^{add} = \frac{1}{2}(v_k^0 e^{-\frac{1}{\varepsilon}L_e t} + y_k^{(m)}) +$$

$$+ \frac{1}{2}\frac{w_e^{1/2}}{v_e^{1/2}}\Big((w_k^0 - \frac{1}{2}\frac{u_e^{1/2}}{v_e^{1/2}}\frac{\frac{1}{\varepsilon}L_e}{(ik + \frac{1}{\varepsilon}L_e)}v_k^0)e^{ikt} + \frac{ik}{(ik + \frac{1}{\varepsilon}L_e)}\frac{1}{2}\frac{u_e^{1/2}}{v_e^{1/2}}v_k^0 e^{-\frac{1}{\varepsilon}L_e t} -$$

$$- ik\frac{1}{2}\frac{u_e^{1/2}}{v_e^{1/2}}\int_0^t e^{-ik(s-t)}y_k^{(m)}ds\Big) +$$

$$+ \frac{1}{2}\frac{u_e^{1/2}}{v_e^{1/2}}\Big((u_k^0 + \frac{1}{2}\frac{w_e^{1/2}}{v_e^{1/2}}v_k^0)e^{-ikt} + ik\frac{1}{2}\frac{w_e^{1/2}}{v_e^{1/2}}\int_0^t e^{ik(s-t)}v_k^0 e^{-\frac{1}{\varepsilon}L_e s}ds +$$

$$+ ik\frac{1}{2}\frac{w_e^{1/2}}{v_e^{1/2}}\int_0^t e^{ik(s-t)}y_k^{(m)}ds\Big).$$

3.10. Нелинейное уравнение в $L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+)$. Приемы и методы доказательства существования глобального решения нелинейного уравнения в пространстве $(L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+; \mathcal{H}_{\sigma,m}))^{2m}$ пунктов раздела об уравнении Карлемана переносятся на уравнение (3.29). Рассмотрим итерации

$$X_k^{(j)} - X_k^{(0)} = \tag{3.39}$$

$$= -\varepsilon v_e^{1/2}\Big(\mathcal{U}_k^{(m)}(T_k^{-1}(X_k^{(j-1)})) + B_k^{(m)}(T_k^{-1}(X_k^{(j-1)}), T_k^{-1}(X_k^{(j-1)}))\Big),$$

$$X_0^{(j)} = -\frac{3}{2}\varepsilon v_e^{1/2}\int_0^t e^{\frac{1}{\varepsilon}L_e(s-t)}\Big[X_0^{(j-1)}\overline{X_0^{(j-1)}} -$$

$$+ \frac{2}{3}\Big(\mathcal{L}_0^{(1)}(T^{-1}(X^{(j-1)})) + B_0(T^{-1}(X^{(j-1)}), T^{-1}(X^{(j-1)})\Big) + f_0(s)e^{-\frac{1}{\varepsilon}L_e s} + h_0(s)\Big]ds,$$

$$X_k^{(0)} = e^{-\frac{1}{\varepsilon}L_e t}(F_{k,L}^{(m)}(t) + F_{k,B}^{(m)}(t)) + H_{k,B}^{(m)}(t) + H_{k,B}^{(m)}(t).$$

Сформулируем результаты:

Теорема 3.2. *Пусть $\sigma > 1$, и существует $q \in (0, 1)$, не зависящие от m, σ, ε, такое, что*

$$E_*^{(m)} = \frac{\varepsilon}{\sqrt{\gamma}}c_\sigma\ \Big(|||u^0|||_{\mathcal{H}_{\sigma,m}} + |||w^0|||_{\mathcal{H}_{\sigma,m}} + |||v^0|||_{\mathcal{H}_{\sigma,m}} + \tag{3.40}$$

$$|||Q_+^{(m)}|||_{\mathcal{H}_{\sigma,m}} + |||Q_-^{(m)}|||_{\mathcal{H}_{\sigma,m}} + 2\|X^{(0)}\|_{L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+;\mathcal{H}_{\sigma,m})}\Big) \leqslant q, \quad q \in (0, 1).$$

Тогда для любого $j \geqslant 1$ справедлива оценка

$$\|(X^{(j)} - X^{(0)})(t)\|_{L_{2\gamma}(\mathbb{R}_+;\mathcal{H}_{\sigma,m}} \leqslant \frac{\varepsilon}{\sqrt{\gamma}} \frac{2c_\sigma}{1-q} E_*^{(m)} \|X^{(0)}\|_{L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+;\mathcal{H}_{\sigma,m})}. \tag{3.41}$$

Теорема 3.3. *В условиях теоремы* 3.2 *последовательность $X^{(j)}$ фундаментальна в пространстве $L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+;\mathcal{H}_{\sigma,m})$, если*

$$\mathcal{E}_*^{(m)} \leqslant q_1, \quad q_1 \in (0,1).$$

где

$$\mathcal{E}_*^{(m)} = \frac{\varepsilon}{\sqrt{\gamma}} c_\sigma \Big(|||u^0|||_{\mathcal{H}_{\sigma,m}} + |||v^0|||_{\mathcal{H}_{\sigma,m}} + |||w^0|||_{\mathcal{H}_{\sigma,m}} + |||Q_+^{(m)}|||_{\mathcal{H}_{\sigma,m}} + |||Q_-^{(m)}|||_{\mathcal{H}_{\sigma,m}} +$$

$$+\|X^{(j-1)}\|_{L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+;\mathcal{H}_{\sigma,m})} + \|X^{(l-1)}\|_{L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+;\mathcal{H}_{\sigma,m})} + 2\|X^{(j-1)} - X^{(l-1)}\|_{L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+;\mathcal{H}_{\sigma,m})}\Big).$$

Таким образом, справедлива

Теорема 3.4. *Пусть $\sigma > 1$. В условиях теоремы* 3.2 *существует единственное решение $Z_m \in L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+;\mathcal{H}_{m,\sigma})$ нелинейного уравнения* (3.29)*, если*

$$\frac{\varepsilon}{\sqrt{\gamma}} c_\sigma \Big\{ |||u^0|||_{\mathcal{H}_{\sigma,m}} + |||v^0|||_{\mathcal{H}_{\sigma,m}} + |||w^0|||_{\mathcal{H}_{\sigma,m}} + |||Q_+^{(m)}|||_{\mathcal{H}_{\sigma,m}} + |||Q_-^{(m)}|||_{\mathcal{H}_{\sigma,m}} + \tag{3.42}$$

$$+ 6\Big(1 + \frac{\varepsilon}{\sqrt{\gamma}} \frac{2c_\sigma}{1-q} E_*^{(m)}\Big) \|X^{(0)}\|_{L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+;\mathcal{H}_{\sigma,m})}\Big\} \leqslant q_1 < 1.$$

Теорема 3.5. *Построенное в теореме* 3.4 *решение нелинейного уравнения* (3.29) *определяет аппроксимацию*

$$(u^{(m)}(x,t), v^{(m)}(x,t), w^{(m)}(x,t)) \in W^1_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+;\mathcal{H}_{\sigma,m})$$

решения задачи Коши (3.3)*, в том смысле, что в $W^1_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+;\mathcal{H}_\sigma)$*

$$(u^{(m)}(x,t), v^{(m)}(x,t), w^{(m)}(x,t)) \to (u(x,t), v(x,t), w(x,t)) \in W^1_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+;\mathcal{H}_\sigma),$$

где $(u(x,t), v(x,t), w(x,t))$ — решение задачи Коши (3.3).

3.11. Интегродифференциальный оператор. Теперь исследуем задачу Коши для линеаризованного оператора

$$T_k(z_k) = \frac{d}{dt} z_k + \frac{1}{\varepsilon} L_e\, z_k - \frac{1}{\varepsilon} ik \int_0^t \Big(u_e e^{-ik(s-t)} - w_e e^{ik(s-t)}\Big) z_k ds = f_k(t), \tag{3.43}$$

$$z_k|_{t=0} = 0$$

для $f_k^{\pm} = e^{\pm ikt}$ и $f_k \in L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+)$.

Сделав преобразование Лапласа, получим

$$\sigma(p,k) L(z_k)(p) = L(f_k)(p) \Longrightarrow L(z_k)(p) = \frac{L(f_k)(p)}{\sigma(p,k)},$$

$$\sigma(p,k) = p + \frac{1}{\varepsilon} L_e - \frac{1}{\varepsilon} ik \Big(u_e \frac{1}{p - ik} - w_e \frac{1}{p+ik} \Big) =$$

$$= \frac{p(p^2+k^2) + \frac{1}{\varepsilon} L_e (p^2+k^2) + \frac{1}{\varepsilon} ik \Big(u_e(p+ik) - w_e(p-ik)\Big)}{(p+ik)(p-ik)} = \frac{P_3(p,k)}{p^2+k^2},$$

$$P_3 = p^3 + \frac{1}{\varepsilon} L_e p^2 + k^2 p + \frac{1}{\varepsilon} 4 v_e k^2 - \frac{1}{\varepsilon} ik(u_e - w_e) p.$$

Нам нужны оценки символа $\sigma(p,k;\varepsilon)$ снизу. Ниже мы приведем результаты, касающиеся свойств символа $\sigma(p;\varepsilon,k)$ оператора T_k и прежде всего условий его строгой устойчивости, когда корни $\sigma(p) = 0$ находятся в левой полуплоскости $\mathrm{Re}\, p < -\mu_0 \varepsilon 0$ параметра $p \in \mathbb{C}$ для некоторого $\mu_0 \in (0,1)$.

Лемма 3.2. *Существует достаточно малое $\mu_* > 0$, не зависящее от ε и $k \in \mathbb{Z}_0$, такое, что функция $1/\sigma(p,k)$ аналитична по p в полуплоскости $\mathrm{Re}\, p \geqslant -\varepsilon\mu_*\ \forall k \in \mathbb{Z}_0$.*

1. Полином P_3 для $p = iy,\ y \in \mathbb{R}$,

$$P_3(iy) = -iy^3 + ik^2y - \frac{1}{\varepsilon}L_e y^2 + \frac{1}{\varepsilon}4v_e k^2 - \frac{1}{\varepsilon}k(u_e - w_e)y = 0,$$

$$-\frac{1}{L_e}\operatorname{Re} P_3(iy) = y^2 + \frac{1}{L_e}k(u_e - w_e)y - \frac{4v_e}{L_e}k^2 = 0, \quad \operatorname{Im} P_3(iy) = -y(y^2 - k^2) = 0.$$

а). Если $y = \pm|k|$,

$$-\operatorname{Re} P_3(iy) = k^2\Big(u_e + w_e \pm (u_e - w_e)\Big) \neq 0, \quad k \in \mathbb{Z}_0.$$

б). Если $y = 0$,

$$P_3(0) = \frac{1}{\varepsilon}4v_e k^2 \neq 0 \quad k \in \mathbb{Z}_0.$$

Таким образом, $P_3 \neq 0$ на мнимой оси ($\operatorname{Re} p = 0$).

2. В то же время,

$$\frac{\sigma(p,k)}{p} = 1 + \frac{1}{\varepsilon}L_e\frac{1}{p} + \frac{1}{\varepsilon}ik\Big(u_e\frac{1}{p(p-ik)} - w_e\frac{1}{p(p+ik)}\Big) =$$

$$= 1 + \frac{1}{\varepsilon}L_e\frac{1}{p} + \frac{1}{\varepsilon}\Big(u_e(\frac{1}{(p-ik)} - \frac{1}{p}) + w_e(\frac{1}{(p+ik)} - \frac{1}{p})\Big) =$$

$$= 1 + \frac{1}{\varepsilon}(L_e - u_e - w_e)\frac{1}{p} + \frac{1}{\varepsilon}\Big(u_e\frac{1}{(p+ik)} + w_e\frac{1}{(p-ik)}\Big),$$

где

$$L_e - u_e - w_e = 4v_e > 0,$$

тогда

$$\operatorname{Re}\Big(\frac{\sigma(p,k)}{p}\Big) = 1 + \frac{1}{\varepsilon}\operatorname{Re} p\Big((L_e - u_e - w_e)\frac{1}{|p|^2} + u_e\frac{1}{|p+ik|^2} + w_e\frac{1}{|p-ik|^2}\Big) \geqslant 1,$$

если $\operatorname{Re} p \geqslant 0$.

Отсюда следует, что

$$\sigma(p,k) \neq 0, \quad \operatorname{Re} p \geqslant 0 \quad \forall k \in \mathbb{Z}_0$$

3. $p = x + iy,\ y \in \mathbb{R},,\ x = -\varepsilon\mu,\ \mu = O(1) > 0 \Longrightarrow x^3 + \frac{1}{\varepsilon}L_e x^2 = O(\varepsilon)$

$$\operatorname{Re} P_3 = x^3 + \frac{1}{\varepsilon}L_e x^2 - (\frac{1}{\varepsilon}L_e + 3x)y^2 + (\frac{1}{\varepsilon}4v_e + x)k^2 - \frac{1}{\varepsilon}k(u_e - w_e)y =$$

$$= -(\frac{1}{\varepsilon}L_e + 3x)\Big(y^2 - \frac{(4v_e + \varepsilon x)}{(L_e + 3\varepsilon x)}k^2 + \frac{(u_e - w_e)}{(L_e + 3\varepsilon x)}ky - \frac{(\varepsilon x + L_e)x^2}{(L_e + 3\varepsilon x)}\Big),$$

$$\operatorname{Im} P_3 = -\Big(y^2 - (k^2 + 3x^2 + \frac{1}{\varepsilon}2L_e x)\Big)y + \frac{1}{\varepsilon}k(u_e - w_e)x.$$

Положим $y = kz,\ |k| \geqslant 1$. Тогда

$$\operatorname{Re} P_3 = -k^3(\frac{1}{\varepsilon}L_e + 3x)\Big(z^2 + \frac{(u_e - w_e)}{(L_e + 3\varepsilon x)}z - \frac{(4v_e + \varepsilon x)}{(L_e + 3\varepsilon x)} - \frac{(\varepsilon x + L_e)x^2}{k^2(L_e + 3\varepsilon x)}\Big) = 0,$$

$$\operatorname{Im} P_3 = -k^2\Big(z^3 - (1 + \frac{(3x^2 + \frac{1}{\varepsilon}2L_e)x}{k^2})z + \frac{1}{\varepsilon}x\frac{(u_e - w_e)}{k^2}\Big) = 0,$$

если

$$Q_2(z,\varepsilon) = z^2 + \frac{(u_e - w_e)}{(L_e + 3\varepsilon x)}z - \frac{(4v_e + \varepsilon x)}{(L_e + 3\varepsilon x)} - \frac{(\varepsilon x + L_e)x^2}{k^2(L_e + 3\varepsilon x)} = 0,$$

$$Q_3(z,\varepsilon) = z^3 - (1 + \frac{(3x^2 + \frac{1}{\varepsilon}2L_e)x}{k^2})z + \frac{1}{\varepsilon}x\frac{(u_e - w_e)}{k^2} = 0,$$

где $x = -\varepsilon\mu$. Невозмущенные по ε

$$Q_2(z,0) = z^2 + \frac{(u_e - w_e)}{L_e}z - \frac{4v_e}{L_e} = 0, \quad Q_3(z,0) = z^3 - (1 - \frac{2\mu L_e}{k^2})z - \frac{\mu(u_e - w_e)}{k^2} = 0.$$

Невозмущенные по μ корни $Q_3(z,0)$:

$$z^0_{\pm} = \pm 1, \quad z^0 = 0,$$

где

$$Q_2(0) = -\frac{4v_e}{L_e},\ Q_2(1) = \frac{1}{L_e}(L_e + (u_e - w_e) - 4v_e) = \frac{2u_e}{L_e} \neq 0,$$

$$Q_2(-1) = \frac{1}{L_e}(L_e - (u_e - w_e) - 4v_e) = \frac{2w_e}{L_e} \neq 0.$$

Отсюда следует существование достаточно малого $\mu_* > 0$, не зависящего от ε, такого, что

$$|P_3(x+iy)| \geqslant c_* > 0 \quad \forall y \in \mathbb{R},\ x \in [-\varepsilon\mu_0, 0]$$

что влечет аналитичность $1/\sigma(p,k)$ в полуплоскости $\mathrm{Re}\, p \geqslant -\varepsilon\mu_*$.

Теперь уточним полученную выше оценку.

Лемма 3.3. *Существуют положительные* $\mu_0 \in (0,1), c_0 > 0$ *такие, что равномерно по* $k \in \mathbb{Z}_0$

$$\sup_{\mathrm{Re}\, p \geqslant -\mu_0\varepsilon,\ k\in\mathbb{Z}_0} \Big|\frac{p}{\sigma(p,k)}\Big| \leqslant c_0, \tag{3.44}$$

Доказательство. Для этого оценим снизу модуль функцию $Z_k(p) = \sigma(p,k)/p$.

1. Как мы показали выше,

$$\varepsilon\, \mathrm{Re}\ Z_k(p) = \varepsilon + \mathrm{Re}\, p\Big((u_e + w_e)\frac{1}{(\mathrm{Re}\, p)^2 + (\mathrm{Im}\, p + k)^2} +$$

$$+ (v_e + u_e)\frac{1}{(\mathrm{Re}\, p)^2 + (\mathrm{Im}\, p - k)^2} + 4v_e\frac{1}{(\mathrm{Re}\, p)^2 + (\mathrm{Im}\, p)^2}\Big).$$

Откуда следует, что

$$\mathrm{Re}\ Z_k(p) \geqslant 1, \quad \mathrm{Re}\, p \geqslant 0.$$

2. Теперь посмотрим на поведение $|Z_k(p)|$ вне окрестности мнимой оси.

а). Вне полюсов $p = 0, \pm k$ функции $|Z_k(p)|$, для $\mu_1 \in (0, \frac{1}{2})$, если $|\,\mathrm{Im}\, p| \geqslant \mu_1$, $|\,\mathrm{Im}\, p - k| \geqslant \mu_1$, $|\,\mathrm{Im}\, p + k| \geqslant \mu_1$, $k \geqslant 1$, имеем

$$|\varepsilon\, \mathrm{Re}\ Z_k(p)| \geqslant \varepsilon - \frac{1}{\mu_1^2}|\,\mathrm{Re}\, p|(\mu_1^2(10v_e + w_e) + (v_e + u_e) \geqslant \varepsilon - \frac{1}{\mu_1^2}|\,\mathrm{Re}\, p|(11v_e + u_e + w_e) > \frac{1}{2}\varepsilon$$

при условии, что

$$|\,\mathrm{Re}\, p| \leqslant \frac{1}{2}\frac{1}{(11v_e + u_e + w_e)}\mu_1^2\varepsilon.$$

б). В случае $|\,\mathrm{Im}\, p - k| \leqslant \mu_1$, $|\,\mathrm{Re}\, p| \leqslant \mu_2\varepsilon$ имеем

$$\Big|\frac{p}{\sigma(p,k)}\Big| \leqslant |p||p^2 + k^2|\frac{1}{|P_3(p,k)|} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{(|\,\mathrm{Re}\, p|^2 + 4k^2 - \mu_1^3)^{1/2}(|\,\mathrm{Re}\, p|^2 + k^2 - \mu_1^3)^{1/2}}{c_0(|p|^2 + k^2}(|\,\mathrm{Re}\, p|^2 + \mu_1^2)^{1/2},$$

если в этой области $|P_3(p,k)| \geqslant c_0(|p|^2 + k^2)$, что есть следствие следующей леммы: □

Лемма 3.4. *Существуют* $\mu_1,\ 0 < \mu_1 < 0;\ c_0 > 0$ *такие, что равномерно по* $k \in \mathbb{Z}_0$ *имеем*

$$|P_3(p,k,\varepsilon)| \geqslant c_0(|p|^2 + k^2), \quad \mathrm{Re}\, p \geqslant -\mu_1\varepsilon. \tag{3.45}$$

Доказательство.

1. Начнем с области $\{\kappa_0\,\mathrm{Re}\, p > |\,\mathrm{Im}\, p|\}$. Здесь оценим главную часть символа $P_3(p,k,\varepsilon)$. Покажем, что в этой области $|p(p^2 + k^2)| \geqslant c_1(|p|^2 + k^2)$ при $|p| \geqslant c_0$ для достаточно большого $c_0 = c_0(\kappa_0) \gg 1$.

Положим $p = y(\pm i + \mu)$, $y \geqslant R_0$, $\mu \geqslant \kappa_0$. Рассмотрим три случая: $\min(|y - k|, |y + k|) \geqslant \delta k$, $|y - k| \leqslant \delta k$ и $|y + k| \leqslant \delta k$, где $0 < \delta < 1$, $k \geqslant 1$ (случай целых $k \leqslant -1$ исследуется так же).

В первом случае справедливы следующие неравенства

$$|p(p^2 + k^2)| = |y||i + \mu|(\mu^2 y^2 + \delta^2 k^2) \geqslant$$

$$\geqslant |y||i + \mu|\min(\delta^2, \frac{\mu^2}{1 + \mu^2})(|p|^2 + k^2) \geqslant R_0(1 + \mu^2)^{1/2}\min(\delta^2, \frac{\mu^2}{1 + \mu^2})(|p|^2 + k^2).$$

Во втором случае $|y| \geqslant (1-\delta)k$ имеем

$$|p(p^2+k^2)| \geqslant |y|(1+\mu^2)^{1/2}\mu|y|(\mu^2y^2+(2-\delta)^2k^2)^{1/2} \geqslant$$

$$\geqslant \frac{1}{2}R_0\mu(\min(\mu^2,(2-\delta)^2)^{1/2}\min((1+\mu^2)^{1/2},(1+\mu^2)^{1/2}(1-\delta))(|p|^2+k^2).$$

Теперь выберем $R_0 = R_0(\kappa_0)$ из условия

$$R_0 \min_{\mu\geqslant\kappa_0}\Big[\min\Big((1+\mu^2)^{1/2}\min(\delta^2,\frac{\mu^2}{1+\mu^2}),$$

$$\frac{1}{2}(\min(\mu^2,(2-\delta)^2)^{1/2}\min((1+\mu^2)^{1/2},(1+\mu^2)^{1/2}(1-\delta))\Big)\Big] \geqslant$$

$$\geqslant \frac{1}{\varepsilon}(4v_e+w_e+u_e)\max_{|p|^2+k^2=1}\Big|p^2+ik\frac{(u_e-w_e)}{(4v_e+w_e+u_e)}p+4k^2\frac{v_e}{(4v_e+w_e+u_e)}\Big|.$$

Третий случай рассматривается аналогично.

2. Теперь рассмотрим случай $|\operatorname{Im} p| \geqslant \kappa_0|\operatorname{Re} p|$, и $|\operatorname{Re} p| \leqslant \mu_1\varepsilon$. Напомним, что все оценки проводятся для $|k| \geqslant 1$.

а). Начнем со случая $\operatorname{Re} p = 0$. Тогда

$$\operatorname{Im}(P_3(p,k;\varepsilon))|_{\operatorname{Re} p=0} = \operatorname{Im} p(k^2-(\operatorname{Im} p)^2)^2,$$

$$\operatorname{Re}(P_3(p,k;\varepsilon))|_{\operatorname{Re} p=0} = \frac{1}{\varepsilon}\Big((4v_e+w_e+u_e)(\operatorname{Im} p)^2+k(u_e-w_e)\operatorname{Im} p-4k^2v_e\Big)$$

Пусть для определенности $k \geqslant 1$. Рассмотрим три случая, когда $\operatorname{Im} p - k \geqslant \delta k$, $k \geqslant (1-\delta)\operatorname{Im} p \geqslant 0$ или $|\operatorname{Im} p - k| \leqslant \delta k$.

В первом случае

$$|\operatorname{Im} p(k^2-(\operatorname{Im} p)^2)^2| \geqslant \frac{1}{2}[\frac{1}{2}\delta k|\operatorname{Im} p|\ (|\operatorname{Im} p|+(2+\delta)k)+\delta^2|\operatorname{Im} p|k^2] \geqslant \frac{1}{2}\min(\frac{1}{2}\delta,\delta^2)(|\operatorname{Im} p|^2+k^2)$$

Во втором случае используем тот факт, что при условии $|\operatorname{Im} p \pm k| \geqslant \delta|k|$, $0<\delta<1$ так же, как выше, имеем

$$|\operatorname{Im} p(k^2-(\operatorname{Im} p)^2)^2| \geqslant \delta^2|\operatorname{Im} p|\ k^2 \geqslant \frac{1}{2}\delta^2|\operatorname{Im} p|(1-\delta)^2(k^2+|\operatorname{Im} p|^2).$$

Отсюда следует, что для $|\operatorname{Im} p| \geqslant c_1$ справедливо неравенство

$$|\operatorname{Im} p(k^2-(\operatorname{Im} p)^2)^2| \geqslant \frac{1}{2}\delta^2c_1|(1-\delta)^2(k^2+|\operatorname{Im} p|^2).$$

В третьем случае $|\operatorname{Im} p| \geqslant (1-\delta)k$, $\operatorname{Im} p \leqslant (1+\delta)k$ и

$$|\operatorname{Re}(P_3(p,k;\varepsilon))||_{\operatorname{Re} p=0} \geqslant \frac{1}{\varepsilon}[2u_e-(4v_e+w_e+u_e)(2+\delta)\delta-|u_e-w_e|\delta)]k^2 \geqslant$$

$$\geqslant \frac{1}{\varepsilon}u_ek^2 \geqslant \frac{1}{2\varepsilon}u_e(k^2+(2+\delta)^{-2}|\operatorname{Im} p|^2) \geqslant \frac{1}{2\varepsilon}u_e(2+\delta)^{-2}(k^2+|\operatorname{Im} p|^2)$$

для достаточно малого δ.

В то же время для достаточно малого c_1 при $|\operatorname{Im} p| \leqslant c_1$

$$|\operatorname{Re}(P_3(p,k;\varepsilon))||_{\operatorname{Re} p=0} = \frac{1}{\varepsilon}|4v_e+w_e+u_e)(\operatorname{Im} p)^2+k(u_e-w_e)\operatorname{Im} p-4k^2v_e| \geqslant \frac{1}{\varepsilon}k^2v_e,\quad |k| \geqslant 1.$$

Следовательно,

$$|P_3(p,k;\varepsilon)||_{\operatorname{Re} p=0} \geqslant c_0(k^2+|\operatorname{Im} p|^2),\ |\operatorname{Im} p| \geqslant 0,\ |k| \geqslant 1.$$

Отсюда следует существование достаточно малого $\mu_1 > 0$ такого, что

$$|P_3(p,k;\varepsilon)| \geqslant c_0(\mu_1)(|p|^2+k^2)$$

для $|\operatorname{Im} p| \geqslant \kappa_0|\operatorname{Re} p|$, $|\operatorname{Re} p| \leqslant \mu_1\varepsilon$.

б). Теперь рассмотрим случай $|\operatorname{Im} p| > \kappa_0 \operatorname{Re} p$, $\operatorname{Re} p \geqslant \mu_1\varepsilon$. Заметим, что корни полинома

$$(4v_e+w_e+u_e)p^2+ik(u_e-w_e)p+4k^2v_e = (4v_e+w_e+u_e)(p-p^+)(p-p^-) = 0$$

чисто мнимые:

$$p^{\pm} = i\frac{k}{2(4v_e + w_e + u_e)}(-(u_e - w_e) \pm \sqrt{(u_e - w_e)^2 + 16v_e(4v_e + w_e + u_e)}) = ikh^{\pm}.$$

Положим $p = kz$, $B = \frac{1}{\varepsilon}(4v_e + w_e + u_e)$. Тогда

$$P_3(p, k, \varepsilon) = k^2\Big(k\ z(z + i)(z - i) + B(z - ih^+)(z - ih^-)\Big).$$

Рассмотрим случай $\Omega^+ = \{\operatorname{Im} p > \kappa_0 \operatorname{Re} p, \quad \operatorname{Re} p \geqslant \mu_1\varepsilon\}$ (случай $\operatorname{Im} p < -\kappa_0 \operatorname{Re} p, \quad \operatorname{Re} p \geqslant \mu_1\varepsilon$ рассматривается аналогично). В Ω^+ имеем

$$|z(z + i)(z - i)| \geqslant \mu_1\varepsilon|z|(|z|^2 + 1)^{1/2} \geqslant \frac{1}{\sqrt{2}}\mu_1^2\varepsilon^2(|z|^2 + 1).$$

Отсюда

$$|P_3(p, k, \varepsilon)| \geqslant k^2\Big(k\ \frac{1}{\sqrt{2}}\mu_1^2\varepsilon^2(|z|^2 + 1) - -B\max(1, |h^-|)(|z| + 1)^2\Big) \geqslant$$

$$\geqslant c_0k^2(|z|^2 + 1) = c_0(|p|^2 + k^2)$$

для достаточно большого $|k| \geqslant 2\sqrt{2}B\max(1, |h^-|)(\mu_1\varepsilon)^{-2}$.

Теперь рассмотрим случай $|\operatorname{Im} p| > \kappa_0 \operatorname{Re} p, \quad \operatorname{Re} p \geqslant \mu_1\varepsilon$ и $1 \leqslant |k| \leqslant k_0$. Тогда

$$|P_3(p, k, \varepsilon)| = k^3|(z + i)(z - i)|\ |z + \frac{1}{k}B\frac{(z - ih^+)(z - ih^-)}{(z + i)(z - i)}| \geqslant$$

$$\geqslant \frac{1}{\sqrt{2}}\mu_1\varepsilon(|z|^2 + 1)\ |z + \frac{1}{k}B\frac{(z - ih^+)(z - ih^-)}{(z + i)(z - i)}|$$

Очевидно, что в области Ω^+

$$\min_{z\in\Omega^+} |z + \frac{1}{k}B\frac{(z - ih^+)(z - ih^-)}{(z + i)(z - i)}| = c_1 > 0.$$

Отсюда

$$|P_3(p, k, \varepsilon)| \geqslant c_1\frac{1}{\sqrt{2}}\mu_1\varepsilon(|z|^2 + 1) \geqslant \frac{c_1}{k_0^2}\frac{1}{\sqrt{2}}\mu_1\varepsilon(|p|^2 + k^2).$$

Суммирование полученных оценок приводит к неравенству (3.45). □

3.12. Разрешимость интегродифференциального уравнения. Исследуем следующую задачу Коши:

$$\frac{d}{dt}y_k + \frac{1}{\varepsilon}L_e\,y_k - A(k, \varepsilon)y_k = f_k(t) + h_k(t), \qquad (3.46)$$

$$v_k|_{t=0} = 0,$$

$$A(k, \varepsilon)y_k = ik\frac{1}{\varepsilon}\int\limits_0^t [e^{ik(t-s)}u_e - e^{-ik(t-s)}w_e]y_k ds.$$

Здесь $f_k(t) \in L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+)$ для $\gamma = -\mu_0\varepsilon$, $0 < \mu_0 < 1$ и $h_k(t)$ линейная комбинация экспонент

$$h_k(t) = \eta_k e^{ikt} + \eta_{-k}e^{-ikt},$$

$\eta_{\pm k}$ — постоянные. Норму весового пространства $g(t) \in L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+)$ определим следующим образом

$$\|g(t)\|^2_{L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+)} = \int\limits_0^\infty\ e^{-2\gamma t}|g(t)|^2.dt$$

Теорема 3.6. *Пусть функция $f_k \in L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+)$ и $h_k = 0$. Тогда задача* (3.46) *однозначно разрешима в пространстве $W^1_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+)$ и для ее решения справедлива равномерная по k оценка*

$$\|y_k\|_{W^1_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+)} + \|A_k y_k\|_{L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+)} \leqslant d_0 \|f_k\|_{L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+)} \tag{3.47}$$

с постоянной d_0, не зависящей от k и f_k, к тому же $y_k|_{t=0} = 0$.

Если $f_k = 0$ и $h_k \neq 0$, тогда задача (3.46) *также однозначно разрешима в пространстве $W^1_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+)$, справедлива равномерная по k оценка*

$$\|y_k\|_{W^1_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+)} \leqslant d_0(|\eta_k|^2 + |\eta_{-k}|^2)^{1/2} \tag{3.48}$$

с постоянной d_0, не зависящей от k и η_k, η_{-k}. Также $y_k|_{t=0} = 0$.

Однако в этом случае $A_k y_k$ не принадлежит $L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+)$. Имеем $A_k y_k \in L_\infty(\mathbb{R}_+)$.

Сделав преобразование Лапласа по t, получим

$$[p + \frac{1}{\varepsilon}(4v_e + w_e + u_e) + \frac{ik\frac{1}{\varepsilon}}{p - ik}u_e - \frac{ik\frac{1}{\varepsilon}}{p + ik}w_e]\widetilde{y_k}(p) = \widetilde{f_k}(p) + \widetilde{h_k}(p).$$

Символ $\sigma(p) = P_3(p,k)/(p^2 + k^2)$. Формально преобразование Лапласа по t решения уравнения (3.46) можем записать в виде:

$$\widetilde{y_k}(p,k) = \frac{(p^2 + k^2)(\widetilde{f_k}(p))}{P_3(p,k)} + \frac{(p^2 + k^2)\widetilde{h_k}(p)}{P_3(p,k)}, \quad \operatorname{Re} p > 0. \tag{3.49}$$

Чтобы получить оценки этого решения в соболевских нормах, приведем сначала широко известные факты, которые мы будем использовать в дальнейшем.

Определение. Назовем *пространством Харди* $H_2(\operatorname{Re} p > \gamma, H)$ класс вектор-функций $\widetilde{f(p)}$ со значениями в сепарабельном гильбертовом пространстве H, голоморфных в полуплоскости $\{p \in \mathbb{C}: \operatorname{Re} p > -\gamma < \gamma > 0\}$, для которых

$$\sup_{x > -\gamma} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \|f\widetilde{(x + iy)}\|_H^2 dy < \infty, \quad p = x + iy.$$

Сформулируем теорему Пэли—Винера для пространств Харди.

Теорема 3.7 (Пэли—Винер).

1. *Пространство $H_2(\operatorname{Re} p > \gamma, H)$ совпадает с множеством вектор-функций* (*преобразований Лапласа*), *допускающих представление*

$$\widetilde{f(p)} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_0^\infty e^{pt} f(t) dt \tag{3.50}$$

для $f(t) \in L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+, H)$, $p \in \mathbb{C}$, $\operatorname{Re} p > -\gamma$.

2. *Для любой вектор-функции $\widetilde{f(p)} \in H_2(\operatorname{Re} p > -\gamma, H)$ существует единственное представление* (3.50)*, где вектор-функция $f(t) \in L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+, H)$, причем справедлива формула обращения*

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{(-\gamma + iy)t} f\widetilde{(-\gamma + iy)} dy, \quad t \in \mathbb{R}_+, \ \gamma > 0.$$

3. *Для вектор-функций $\widetilde{f(p)} \in H_2(\operatorname{Re} p > -\gamma, H)$ и $f(t) \in L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+, H)$, связанных соотношением* (3.50)*, справедливо равенство*

$$\|\widetilde{f}\|^2_{H_2(\operatorname{Re} p > \gamma, H)} \equiv \sup_{x > -\gamma} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \|f\widetilde{(x + iy)}\|_H^2 dy = \int\limits_0^\infty e^{-2\gamma t} \|f(t)\|_N^2 dt \equiv \|f\|^2_{L_2(\mathbb{R}_+; H)}.$$

Начнем с доказательства первой части теоремы 3.6. Если мы установим, что функция $\widetilde{y_k}$ в (3.49) такова, что $p\widetilde{y_k}$, $\widetilde{y_k}$ и $A_k\widetilde{y_k}$ принадлежат пространству Харди $\widetilde{f(p)} \in H_2(\operatorname{Re} p > \gamma)$ при некотором $\gamma \in \mathbb{R}$, то по теореме Пэли—Винера функции $\dfrac{d}{dt}y_k$ и $A_k y_k$ принадлежат пространству $L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+)$ и, следовательно, $y_k(t) \in W^1_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+)$. Отсюда следует разрешимость уравнения (3.46) в пространстве $W^1_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+)$. Здесь

$$\|y_k\|_{W^1_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+)} + \|A_k y_k\|_{L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+)} \leqslant d_0 \|T_k y_k\|_{L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+)}.$$

Вторая часть теоремы 3.6 связана со случаем, когда правая часть не принадлежит $L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+)$. Преобразование Лапласа

$$\widetilde{h_k}(p) = \frac{\eta_k^+}{p - ik} + \frac{\eta_k^-}{p + ik}$$

имеет чисто мнимые полюса $p = \pm k$. Однако, решение задачи (3.46) для $f_k = 0$

$$y_k(t) = \lim_{R \to +\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{\gamma - iR}^{\gamma + iR} \Sigma(p,k,\varepsilon)^{-1}[(p+ik)\eta_{-k} + (p-ik)\eta_k]\, e^{pt} dp$$

для $\gamma \geqslant -\mu_0\varepsilon$, поскольку $\Sigma(p,k,\varepsilon)^{-1}[(p+ik)\eta_{-k} + (p-ik)\eta_k]$ аналитично в полуплоскости $\operatorname{Re} p \geqslant -\mu_0\varepsilon,$, где

$$\|\Sigma(p,k,\varepsilon)^{-1}[(p+ik)\eta_{-k} + (p-ik)\eta_k]\|^2_{H_2(\operatorname{Re} p > \gamma, H)} =$$

$$= \sup_{x > \gamma} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} |\Sigma(p,k,\varepsilon)^{-1}[(p+ik)\eta_{-k} + (p-ik)\eta_k]|^2 dy \leqslant \infty.$$

Отсюда получаем, что для $-\mu\varepsilon < \gamma < 0$ имеем

$$\frac{d}{dt}y_k(t) = \lim_{R \to +\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{\gamma - iR}^{\gamma + iR} p\Sigma(p,k,\varepsilon)^{-1}[(p+ik)\eta_{-k} + (p-ik)\eta_k]\, e^{pt} dp,$$

поскольку в силу оценки (3.44) для $-\mu_0\varepsilon \leqslant \gamma$

$$\sup_{p = \operatorname{Re} p + ix,\ \operatorname{Re} p \geqslant \gamma} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \Big| p\Sigma(p,k,\varepsilon)^{-1}[(p+ik)\eta_{-k} + (p-ik)\eta_k]|^2 dx \leqslant c_0(|\eta_k|^2 + |\eta_{-k}|^2).$$

Отсюда следует, что равномерно по k

$$\|y_k\|^2_{W^1_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+)} \leqslant c_*(|\eta_k|^2 + |\eta_{-k}|^2), \tag{3.51}$$

более того, $y_k(0) = 0$ в силу оценки символа $\Sigma(p,k,\varepsilon)$. Имеем

$$\sup_{p = \operatorname{Re} p + ix,\ \operatorname{Re} p \geqslant \gamma} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \Big| p\Sigma(p,k,\varepsilon)^{-1}[(p+ik)\eta_k^- + (p-ik)\eta_k^+]|^2 dx \leqslant c_1(1 + |\operatorname{Re} p|^2)^{-1/2} \to 0$$

при $\operatorname{Re} p \to +\infty$.

Замечание 3.1. В чем проблема существования глобального решения усеченной системы (3.12)? Как в самой системе (3.12), так и при переходе к однородным данным Коши, к системе (3.16), в правой части k-моды возникают осцилляции $D_k^+ e^{ikt}$, $D_k^- e^{-ikt}$ и $\mathcal{D}_k^+ e^{ikt}$, $\mathcal{D}_k^- e^{-ikt}$ соответственно, которые определяют часть решения (3.20) задачи Коши

$$y_k^{(1)} = Q_k^+ T_k^{-1}(e^{ikt}) + Q_{-k}^- T_{-k}^{-1}(e^{-ikt}).$$

Теперь заметим, что

$$-ik\int_0^t e^{ik(s-t)}Q_k^-T_k^{-1}(e^{-iks})ds = \frac{\varepsilon}{w_e}Q_k^-e^{-ikt} + h_k^+(t), \tag{3.52}$$

$$ik\int_0^t e^{-ik(s-t)}Q_k^+T_k^{-1}(e^{iks})ds = \frac{\varepsilon}{u_e}Q_k^+e^{+ikt},$$

где в силу свойств оператора T_k^{-1} функции

$$h_k^+(t) = -\frac{\varepsilon}{w_e}\Big(\frac{d}{dt}Q_k^-T_k^{-1}(e^{-ikt}) + \frac{1}{\varepsilon}L_e\ Q_k^-T_k^{-1}(e^{-ikt}) -$$

$$-\frac{1}{\varepsilon}iku_e\int_0^t e^{-ik(s-t)}Q_k^-T_k^{-1}(e^{-iks})ds\Big) \in L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+),$$

$$h_k^-(t) = -\frac{\varepsilon}{u_e}\Big(\frac{d}{dt}Q_k^+T_k^{-1}(e^{ikt}) + \frac{1}{\varepsilon}L_e\ Q_k^+T_k^{-1}(e^{ikt}) +$$

$$+\frac{1}{\varepsilon}ikw_e\int_0^t e^{ik(s-t)}Q_k^+T_k^{-1}(e^{iks})ds\Big) \in L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+).$$

Но интегралы

$$ik\int_0^t e^{-ik(s-t)}y_k^{(1)}ds, \quad -ik\int_0^t e^{ik(s-t)}y_k^{(1)}ds$$

входят в нелинейную часть уравнения (3.16) и порождают также секулярные члены.

Последнее и приводит к условию секулярности (3.28) как условию сведения уравнения (3.16) к интегральному уравнению в весовом пространстве $L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+)$, т. е. аннулированию секулярных членов.

3.13. Существование. Суммируя полученные результаты, по аналогии с приведенными выше результатами для уравнения Карлемана, можно показать, что

Теорема 3.8. *Пусть равномерно по m выполнены условия теорем* 3.2–3.6 *на вещественнозначные начальные данные. Тогда существует глобальное вещественнозначное решение задачи Коши для системы* (3.3)

Действительно, как мы показали выше, для вещественных начальных данных из окрестности состояния равновесия существует Фурье-решение $u_k, v_k, w_k, k \in \mathbb{Z}$. Рассмотрим разность $u_k^\Delta = u_k - \overline{u_k}, v_k^\Delta = v_k - \overline{v_k}, w_k^\Delta = w_k - \overline{w_k}, k \in \mathbb{Z}$, которая удовлетворяет однородной задаче Коши для системы

$$\begin{gathered}
u_e^{1/2}(\frac{d}{dt}+ik)u_k^\Delta + \frac{1}{\varepsilon}(w_eu_e^{1/2}u_k^\Delta + u_ew_e^{1/2}w_k^\Delta - 2v_ev_e^{1/2}v_k^\Delta) = 0, \\
w_e^{1/2}(\frac{d}{dt}-ik)w_k^\Delta + \frac{1}{\varepsilon}(w_eu^{1/2}u_k^\Delta + u_ew_e^{1/2}w_k^\Delta - 2v_ev_e^{1/2}v_k^\Delta) = 0, \\
-\frac{1}{2}v_e^{1/2}\frac{d}{dt}v_k^\Delta + \frac{1}{\varepsilon}(w_eu_e^{1/2}u_k^\Delta + u_ew_e^{1/2}w_k^\Delta - 2v_ev^{1/2}v_k^\Delta) = 0, \\
u_k^\Delta(0) = v_k^\Delta(0) = w_k^\Delta(0) = 0.
\end{gathered} \tag{3.53}$$

Также как выше, сводим к системе уравнений для v_k^Δ. Для нулевой моды имеем

$$u_0^\Delta = -\frac{1}{2}\frac{v_e^{1/2}}{u_e^{1/2}}v_k^\Delta, \quad w_k^\Delta = -\frac{1}{2}\frac{v_e^{1/2}}{w_e^{1/2}}v_k^\Delta,$$

$$\frac{d}{dt}v_0^{\Delta} + \frac{1}{\varepsilon}L_e v_k^{\Delta} = 0, \qquad v_0^{\Delta}(0) = 0. \tag{3.54}$$

Отсюда следует, что $v_0^{\Delta} \equiv 0$.

Для старших мод

$$u_k^{\Delta} = -\frac{1}{2}\frac{v_e^{1/2}}{u_e^{1/2}}v_k^{\Delta} + ik\frac{1}{2}\frac{v_e^{1/2}}{u_e^{1/2}}\int\limits_0^t e^{-ik(t-s)}\frac{d}{dt}v_k^{\Delta}\,ds,$$

$$w_k^{\Delta} = -\frac{1}{2}\frac{v_e^{1/2}}{w_e^{1/2}}v_k^{\Delta} - ik\frac{1}{2}\frac{v_e^{1/2}}{w_e^{1/2}}\int\limits_0^t e^{ik(t-s)}v_k^{\Delta},$$

$$\frac{d}{dt}v_k^{\Delta} + \frac{1}{\varepsilon}L_e v_k^{\Delta} + T_k v_k^{\Delta} = 0, \qquad v_k^{\Delta}(0) = 0. \tag{3.55}$$

Из обратимости оператора T_k в классе $L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+)$ следует, что $v_k^{\Delta} \equiv 0$. Таким образом, решение задачи Коши для системы (3.16), (3.8) с вещественнозначными начальными условиями является вещественнозначным.

Как следствие этой теоремы получаем, что аппроксимационное решение

$$(u^{(m)}(x,t), v^{(m)}(x,t), w^{(m)}(x,t)) \to (u(x,t), v(x,t), w(x,t)) \in W^1_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+; \mathcal{H}_\sigma) \tag{3.56}$$

стремится к решению $(u(x,t), v(x,t), w(x,t))$ задачи Коши (3.3).

Следствие 3.2. *В условиях теоремы* 3.8 *существует глобальное вещественнозначное решение задачи Коши для системы* (3.1)*, стабилизирующееся экспоненциально быстро к состоянию равновесия.*

4. Выводы

Приведенные исследования принципа локального равновесия двух моделей дискретных кинетических уравнений показывают универсальность предлагаемых методов для исследования моделей типа Броудела. Позднее мы опубликуем исследование еще двух моделей: двумерной модели Броудела и трехмерной модели Годунова—Султангазина [3]. Для этих моделей справедлив принцип локального равновесия, когда на больших временах задачи Коши с ограниченной энергией распадаются на суперпозицию слабо взаимодействующих солитонов и убывающих дисперсионных волн [3]. Более того, мы имеем экспоненциальную стабилизацию к состоянию равновесия с показателем $\gamma = O(\varepsilon) > 0$. Переход от периодических начальных данных к L_2-теории на всей прямой будет опубликован позднее.

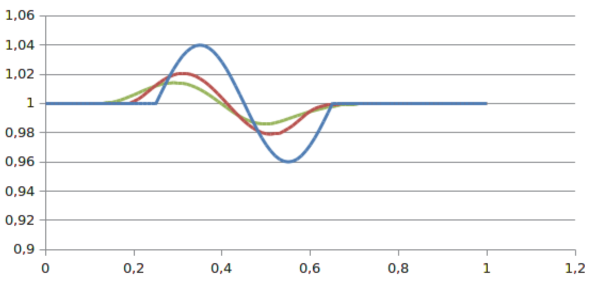

Рис. 1а

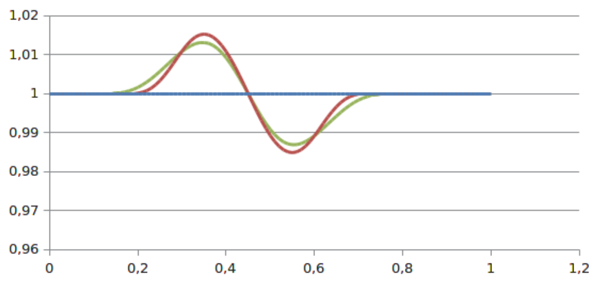

Рис. 1б

На рис. 1а слева направо графики $w(x,t) = 1 + \widehat{w}(x,t)$ для значений $t_1 = 0$ (синий), $t_2 = 0{,}05$ (красный), $t_3 = 0{,}1$ (зеленый), на рис. 1б соответственно справа налево графики $u(x,t) = 1 + \widehat{u}(x,t)$ для тех же значений t; здесь $\varepsilon = 0{,}1$;

На рис. 2а слева направо графики $v(x,t) = 1 + \widehat{v}(x,t)$ для значений $t_1 = 0$ (синий), $t_2 = 0{,}25$ (красный), $t_3 = 0{,}5$ (зеленый), на рис. 2б соответственно справа налево графики $u(x,t) = 0{,}5 + \widehat{u}(x,t)$ для тех же значений t;

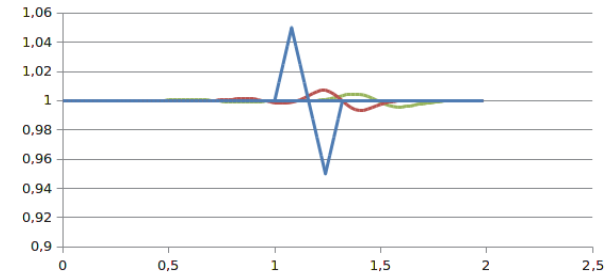

Рис. 2а

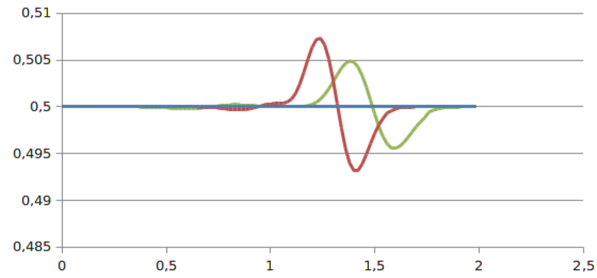

Рис. 2б

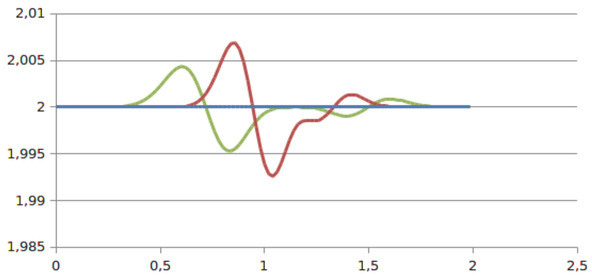

Рис. 2в

На рис. 2в соответственно справа налево графики $w(x,t) = 2 + \widehat{w}(x,t)$ для тех же значений t; здесь $\varepsilon = 0{,}02$.

Мы представили результаты численного счета решений задачи Коши для системы (1.1) с непериодическими начальными данными ограниченной энергии в $L_2(\mathbb{R})$: $u_0 \equiv 1$ и $w_0 = 1 + w(x)$, $\int\limits_{-\infty}^{\infty} w dx = 0$ (см. рис. 1).

Второй численный пример (см. рис. 2) касается задачи Коши для системы (1.2) с непериодическими начальными данными ограниченной энергии в $L_2(\mathbb{R})$: $u(0,x) \equiv \dfrac{1}{2}$, $w(0,x) \equiv 2$ и $v(0,x) = 1 + v^0(x)$, $\int\limits_{-\infty}^{\infty} v^0 dx = 0$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Больцман Л.* О методе Максвелла выведения уравнений гидродинамики из кинетической теории газа// В сб. «Сообщения Британской ассоциации (1894). Памяти Л. Больцмана». — М.: Наука, 1984. — С. 307–321.
2. *Васильева О. А., Духновский С. А., Радкевич Е. В.* О локальном равновесии уравнения Карлемана// Пробл. мат. анализа. — 2015. — *78*. — С. 165–190.
3. *Годунов С. К., Султангазин У. М.* О дискретных моделях кинетического уравнения Больцмана// Усп. мат. наук. — 1974. — *XXVI*, № 3 (159). — С. 3–51.
4. *Ильин О. В.* Изучение существования решений и устойчивости кинетической системы Карлемана// Журн. выч. мат. и мат. физ. — 2007. — *47*, № 12. — С. 2076–2087.
5. *Николис Г., Пригожин И.* Самоорганизация в неравновесных системах (от диссипативных структур к упорядоченности через флуктуации). — М.: Мир, 1979.
6. *Радкевич Е. В.* Математические вопросы неравновесных процессов. — Новосибирск: Изд-во Тамара Рожковская, 2007.
7. *Радкевич Е. В.* О поведении на больших временах решений задачи Коши для двумерного дискретного кинетического уравнения// Соврем. мат. Фундам. направл. — 2013. — *47*. — С. 108–139.
8. *Broadwell T. E.* Study of rarefied shear flow by the discrete velocity method// J. Fluid Mech. — 1964. — *19*, № 3. — С. 401–414.
9. *Komech A., Kopylova E.* Dispersion decay and scattering theory. — Naboken: John Willey and Sons, 2012.
10. *Kopylova E.* On long-time decay for magnetic Schrödinger and Klein—Gordon equations// Proc. Steklov Inst. Math. — 2012. — *278*. — С. 121–129.

О. А. Васильева
Московский государственный строительный университет

129337, г. Москва, Ярославское шоссе, д. 26
E-mail: vasiljeva.ovas@yandex.ru

С. А. Духновский
Московский государственный строительный университет
129337, г. Москва, Ярославское шоссе, д. 26
E-mail: sergeidukhnvskijj@rambler.ru

Е. В. Радкевич
Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова
119991, г. Москва, ул. Ленинские Горы, д. 1
E-mail: evrad07@gmail.com

UDC 517+517.9+536

On the Nature of Local Equilibrium in the Carleman and Godunov–Sultangazin Equations

© 2016 **O. A. Vasil'eva, S. A. Dukhnovskii, E. V. Radkevich**

Abstract. Considering one-dimensional Carleman and Godunov–Sultangazin equations, we obtain the local equilibrium conditions for solutions of the Cauchy problem with finite energy and periodic initial data. Moreover, we prove the exponential stabilization to the equilibrium state.

REFERENCES

1. L. Boltzmann, "O metode Maksvella vyvedeniya uravneniy gidrodinamiki iz kineticheskoy teorii gaza" [On the Maxwell method for derivation of equations of hydrodinamics from the kinetic gas theory, In: "Soobshcheniya Britanskoy assotsiatsii (1894). Pamyati L. Bol'tsmana" [Reports of Britain Association (1894). To the memory of L. Boltzmann], Nauka, Moscow, 1984, 307–321 (in Russian).
2. O. A. Vasil'eva, S. A. Dukhnovskiy, and E. V. Radkevich, "O lokal'nom ravnovesii uravneniya Karlemana" [On local equilibrium of the Carleman equation], *Probl. mat. analiza* [Probl. Math. Anal.], 2015, **78**, 165–190 (in Russian).
3. S. K. Godunov and U. M. Sultangazin, "O diskretnykh modelyakh kineticheskogo uravneniya Bol'tsmana" [On discrete models of the Boltzman kinetic equation], *Usp. mat. nauk* [Progress Math. Sci.], 1974, **XXVI**, No. 3 (159), 3–51 (in Russian).
4. O. V. Il'in, "Izuchenie sushchestvovaniya resheniy i ustoychivosti kineticheskoy sistemy Karlemana" [Study of existence and stability of solutions of the Carleman kinetic system], *Zhurn. vych. mat. i mat. fiz.* [J. Comput. Math. Math. Phys.], 2007, **47**, No. 12, 2076–2087 (in Russian).
5. G. Nikolis and I. Prigozhin, *Samoorganizatsiya v neravnovesnykh sistemakh* (*ot dissipativnykh struktur k uporyadochennosti cherez fluktuatsii*) [Self-Organization in Nonequilibrium Systems (from Dissipative Structures to Ordering via Fluctuations)], Mir, Moscow, 1979 (in Russian).
6. E. V. Radkevich, *Matematicheskie voprosy neravnovesnykh protsessov* [Mathematical Issues in Nonequilibrium Processes], Tamara Rozhkovskaya, Novosibirsk, 2007 (in Russian).
7. E. V. Radkevich, "O povedenii na bol'shikh vremenakh resheniy zadachi Koshi dlya dvumernogo diskretnogo kineticheskogo uravneniya" [On the behavior of solutions of the Cauchy problem for the two-dimensional discrete kinetic equation at large time scales], *Sovrem. mat. Fundam. napravl.* [Contemp. Math. Fundam. Directions], 2013, **47**, 108–139 (in Russian).
8. T. E. Broadwell, "Study of rarefied shear flow by the discrete velocity method," *J. Fluid Mech.*, 1964, **19**, No. 3, 401–414.
9. A. Komech and E. Kopylova, *Dispersion Decay and Scattering Theory*, John Willey and Sons, Naboken, 2012.
10. E. Kopylova, "On long-time decay for magnetic Schrödinger and Klein—Gordon equations," *Proc. Steklov Inst. Math.*, 2012, **278**, 121–129.

O. A. Vasil'eva
Moscow State University of Civil Engineering, Moscow, Russia
E-mail: vasiljeva.ovas@yandex.ru

S. A. Dukhnovskii
Moscow State University of Civil Engineering, Moscow, Russia
E-mail: sergeidukhnvskijj@rambler.ru

E. V. Radkevich
Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia
E-mail: evrad07@gmail.com