Современная математика. Фундаментальные направления. Том 60 (2016). С. 5–22

УДК 517.988.63

НЕЛИНЕЙНЫЕ ИНТЕГРАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ С ЯДРАМИ ТИПА ПОТЕНЦИАЛА НА ОТРЕЗКЕ

© 2016 г. **С. Н. АСХАБОВ**

Аннотация. Методом монотонных операторов в вещественных пространствах Лебега $L_p(a,b)$ доказываются глобальные теоремы о существовании, единственности, оценках и способах нахождения решения для различных классов нелинейных уравнений, содержащих оператор типа потенциала (риссов потенциал). Приведены следствия, иллюстрирующие полученные результаты.

СОДЕРЖАНИЕ

1. Введение

Линейные интегральные уравнения второго рода с ядрами типа потенциала (или, что то же самое, с полярными ядрами, с ядрами, имеющими слабую особенность) в настоящее время достаточно хорошо изучены, и для них справедлива классическая теория Фредгольма (см., например, [9, с. 57], [13, с. 475]). Что касается теории нелинейных интегральных уравнений с ядрами типа потенциала, то она находится в стадии становления, и в этой области опубликовано не так много работ (см., например, работы [1, 2, 11] и приведенную в них библиографию). Интерес к нелинейным интегральным уравнениям вызван не только их многочисленными и разнообразными приложениями (например, при решении задач математической физики, теории упругости и др.), но и тем, что методы и результаты теории линейных интегральных уравнений, как правило, не распространяются на соответствующие им нелинейные уравнения, т. е. имеются принципиальные различия как по методам исследования, так и по характеру получаемых результатов. Как известно, локальные свойства линейных операторов фактически полностью определяют их свойства во всем пространстве, в котором они определены, и в случае линейных уравнений основные результаты имеют место сразу для целой серии классических пространств L_p, M, C, C_0, $C_u, \ldots$ (подробнее см. [9, с. 280]). Нелинейные операторы и уравнения такими свойствами не обладают. Так, например, из непрерывности нелинейного оператора в одной точке пространства не следует его непрерывность во всем этом пространстве и, кроме того, из непрерывности нелинейного оператора на ограниченном замкнутом множестве не следует его равномерная непрерывность на этом множестве (см. [6, с. 215]). Более того, для нелинейных операторов свойства непрерывности и компактности никак не связаны между собой: нелинейный оператор может не обладать свойством непрерывности и при этом быть компактным или же быть непрерывным и не обладать свойством компактности [9, с. 371]. Поэтому в случае нелинейных уравнений картина принципиально меняется и зависит не только от выбора рассматриваемого пространства, но и от характера допускаемой нелинейности.

В работах [1–3, 5], используя метод монотонных по Браудеру—Минти операторов, для различных классов нелинейных интегральных уравнений с ядрами типа потенциала специального вида доказаны глобальные теоремы о существовании, единственности и оценках решений в пространствах $L_p(\Gamma)$, где Γ есть вся действительная ось $\mathbb{R}$ или некоторая ее часть, либо только при $p \in (1,2]$, либо только при $p \in [2,\infty)$, в зависимости от рассматриваемого класса уравнений.

В данной работе при достаточно легко обозримых ограничениях на нелинейность для трех различных классов нелинейных интегральных уравнений, содержащих оператор типа потенциала (риссов потенциал) $(I^\alpha u)(x) = \int\limits_a^b \frac{u(s)\,ds}{|x-s|^{1-\alpha}}$, $0<\alpha<1$, методом монотонных операторов установлены теоремы о существовании, единственности и оценках решений в вещественных пространствах Лебега $L_p(a,b)$ при любых значениях $p \in (1,\infty)$, независимо от рассматриваемого класса уравнений. Приведены новые примеры и следствия, иллюстрирующие полученные результаты. Изучен также вопрос о приближенном решении рассмотренных уравнений при любых, не обязательно малых (ср. [9, с. 59], [13, с. 479]), значениях параметра λ, фигурирующего перед нелинейной частью рассматриваемых уравнений. Показано, что в случае монотонных (не степенных) нелинейностей решения могут быть найдены методом последовательных приближений пикаровского типа в пространстве $L_2(a,b)$, а в случае нечетностепенных нелинейностей вида u^{p-1} решения могут быть найдены методом наискорейшего спуска в пространствах $L_p(a,b)$, где p есть любое четное число, большее двух. В рамках пространства $L_2(a,b)$ доказанные теоремы охватывают и случай линейных интегральных уравнений с ядрами типа потенциала.

Для удобства ссылок приведем основные определения и вспомогательные утверждения, используемые в данной работе, придерживаясь терминологии и обозначений, принятых в монографии [8].

Пусть X — вещественное банахово пространство и X^* — сопряженное с ним пространство. Обозначим через $\langle y,x\rangle$ значение линейного непрерывного функционала $y \in X^*$ на элементе $x \in X$, а через $\|\cdot\|$ и $\|\cdot\|_*$ нормы в X и X^*, соответственно.

Определение 1.1. Пусть $u,v \in X$ — произвольные элементы. Оператор $A : X \to X^*$ (т. е. действующий из X в X^*) называется:

- *монотонным*, если $\langle Au - Av, u-v\rangle \geqslant 0$;
- *строго монотонным*, если $\langle Au - Av, u-v\rangle > 0$ при $u \neq v$;
- *сильно монотонным*, если $\langle Au - Av, u-v\rangle \geqslant m \cdot \|u-v\|^2$, $m>0$;
- *равномерно монотонным*, если $\langle Au - Av, u-v\rangle \geqslant \beta(\|u-v\|)$, где β — возрастающая на $[0,\infty)$ функция такая, что $\beta(0)=0$;
- *коэрцитивным*, если $\langle Au, u\rangle \geqslant \gamma(\|u\|)\cdot\|u\|$, где $\gamma(s)$ — вещественная функция неотрицательного аргумента такая, что $\gamma(s)\to\infty$ при $s\to\infty$;
- *Липшиц-непрерывным*, если $\|Au - Av\|_* \leqslant M\cdot\|u-v\|$, $M>0$;
- *ограниченно Липшиц-непрерывным*, если $\|Au-Av\|_* \leqslant \mu(r)\cdot\|u-v\|$, где μ — неотрицательная возрастающая на $[0,\infty)$ функция, а $r = \max(\|u\|,\|v\|)$;
- *хеминепрерывным*, если вещественная функция $s \to \langle A(u+s\cdot v), w\rangle$ непрерывна на $[0,1]$ при любых фиксированных $u,v,w\in X$.

Если A — *линейный* оператор, то определение монотонного, строго монотонного и сильно монотонного оператора совпадает, соответственно, с определением *положительного, строго положительного* и *сильно положительного* (*положительно определенного*) оператора [8].

Пусть $f : X \to \mathbb{R}$ — произвольный (не обязательно линейный) функционал.

Определение 1.2. Функционал $f : X\to\mathbb{R}$ называется *дифференцируемым по Гато*, если существует оператор $A : X \to X^*$ такой, что для всех $u,v\in X$ выполняется равенство $\lim\limits_{t\to 0}\frac{f(u+t\cdot v)-f(u)}{t}=\langle Au, v\rangle$. При этом оператор A называют *градиентом* функционала f и пишут $A = \operatorname{grad} f$.

Определение 1.3. Оператор $A : X\to X^*$ называется *потенциальным*, если существует функционал $f : X\to\mathbb{R}$ такой, что оператор A является его градиентом. При этом функционал f называют *потенциалом* оператора A.

Пример 1.1 (см. [2, с. 14]). Пусть X — вещественное рефлексивное банахово пространство и $A : X \to X^*$ — линейный ограниченный симметрический оператор, т. е. $\langle Au, v\rangle = \langle u, Av\rangle$ $\forall u, v \in X$. Тогда A является потенциальным оператором и его потенциал $f(u) = \dfrac{1}{2}\langle Au, u\rangle$.

2. О положительности оператора типа потенциала

Известно [15, с. 176], какую важную основополагающую роль играют положительно определенные (по Бохнеру) функции при построении гармонического анализа и в теории локально компактных групп. С понятием положительно определенной функции тесно связано определение положительного оператора, играющего центральную роль при решении многих задач математической физики, дифференциальных и интегральных уравнений, и других (см., например, [12, 18]). В этом пункте, обобщая известные для пространства $L_2(a, b)$ результаты, мы докажем положительность оператора типа потенциала в пространствах $L_p(a, b)$, $p > 1$, что позволит нам применить к исследованию различных классов нелинейных интегральных уравнений с ядрами типа потенциала метод монотонных (по Браудеру—Минти) операторов.

Рассмотрим оператор типа потенциала (риссов потенциал) $(I^\alpha u)(x) = \int\limits_a^b \dfrac{u(s)\,ds}{|x-s|^{1-\alpha}}$, $0 < \alpha < 1$, в вещественных пространствах Лебега $L_p(a, b)$, $1 < p < \infty$, с нормой $\|u\|_p = \left(\int\limits_a^b |u(x)|^p dx\right)^{1/p}$.

Далее нам понадобится хорошо известная (см., например, [14]) теорема Харди—Литтлвуда с предельным показателем и непосредственное следствие из нее.

Теорема 2.1 (Харди—Литтлвуд). *Если $0 < \alpha < 1$, $1 < p < 1/\alpha$, то оператор I^α действует ограниченно из $L_p(a, b)$ в $L_q(a, b)$, где $q = p/(1 - \alpha \cdot p)$.*

Следствие 2.1. *Если $0 < \alpha < 1$, то оператор I^α действует ограниченно из пространства $L_{2/(1+\alpha)}(a, b)$ в сопряженное с ним пространство $L_{2/(1-\alpha)}(a, b)$, причем*

$$\|I^\alpha u\|_{2/(1-\alpha)} \leqslant n(\alpha) \cdot \|u\|_{2/(1+\alpha)} \quad \forall u(x) \in L_{2/(1+\alpha)}(a, b). \tag{2.1}$$

где $n(\alpha)$ есть норма оператора I^α.

В связи с теоремой 2.1 (Харди—Литтлвуда) отметим, что далее нам понадобится также простой факт (а именно — оценка (2.2), используемая в пункте 4) о том, что оператор I^α действует непрерывно из $L_p(a, b)$ в $L_p(a, b)$ при любом $p \in [1, \infty)$. Докажем это для полноты изложения. Известно (см., например, [14, с. 53]), что оператор левостороннего дробного интегрирования $\left(I^\alpha_{a+} u\right)(x) = \int\limits_a^x \dfrac{u(s)\,ds}{(x-s)^{1-\alpha}}$, $x > a$, и правостороннего дробного интегрирования $\left(I^\alpha_{b-} u\right)(x) = \int\limits_x^b \dfrac{u(s)\,ds}{(s-x)^{1-\alpha}}$, $x < b$, ограничены в $L_p(a, b)$ при любых $p \in [1, \infty)$ и $\alpha \in (0, 1)$, причем для любого $u(x) \in L_p(a, b)$ выполняются неравенства:

$$\|I^\alpha_{a+} u\|_p \leqslant (b-a)^\alpha \alpha^{-1} \|u\|_p, \qquad \|I^\alpha_{b-} u\|_p \leqslant (b-a)^\alpha \alpha^{-1} \|u\|_p.$$

Поскольку $(I^\alpha u)(x) = (I^\alpha_{a+} u)(x) + (I^\alpha_{b-} u)(x)$, то, применяя неравенство Минковского и используя последние два неравенства, непосредственно получаем:

$$\|I^\alpha u\|_p \leqslant 2(b-a)^\alpha \cdot \alpha^{-1} \cdot \|u\|_p \qquad \forall u(x) \in L_p(a, b), \quad p \geqslant 1, \tag{2.2}$$

что и требовалось.

В связи с приложениями метода монотонных операторов к нелинейным интегральным уравнениям с ядрами типа потенциала нас интересуют условия, при которых оператор I^α действует непрерывно из пространства $L_p(a, b)$, $p \in (1, \infty)$, в сопряженное с ним пространство $L_{p'}(a, b)$, $p' = p/(p-1)$, и положителен. Строгая положительность этого оператора в пространстве $L_2(a, b)$ доказана различными методами, представляющими самостоятельный интерес, в монографиях [12, с. 38] и [18, с. 175]. В специальных частных случаях строгая положительность оператора I^α в пространстве $L_2(a,b)$ ранее была установлена С. Геллерстедтом и Ф. Трикоми (см., например, [12, с. 38, 41], [14, с. 235]). Случаи пространств $L_p(a,b)$, $L_p(-\infty,\infty)$ и $L_p(0,\infty)$ с показателями p специального вида рассмотрены в монографиях [1, с. 26], [2, с. 23].

В данном пункте мы докажем непрерывность, строгую положительность и потенциальность оператора I^α в пространствах $L_p(a,b)$ при любых $p \geqslant 2/(1+\alpha)$ и тем самым обобщим упомянутые выше результаты, приведенные в монографиях [1, 2, 12, 18]. Следующая лемма, существенно используемая в данной работе при исследовании нелинейных интегральных уравнений с ядрами типа потенциала, обобщает и дополняет утверждения следствия 2.1.

Лемма 2.1. *Если $0 < \alpha < 1$ и $p \geqslant 2/(1+\alpha)$, то оператор I^α действует непрерывно из пространства $L_p(a,b)$ в сопряженное с ним пространство $L_{p'}(a,b)$, $p' = p/(p-1)$, строго положителен и потенциален, причем*

$$\|I^\alpha u\|_{p'} \leqslant (b-a)^{[p(1+\alpha)-2]/p} \cdot n(\alpha) \cdot \|u\|_p \quad \forall u(x) \in L_p(a,b), \tag{2.3}$$

где $n(\alpha)$ есть норма оператора I^α, действующего ограниченно из $L_{2/(1+\alpha)}(a,b)$ в $L_{2/(1-\alpha)}(a,b)$.

Доказательство. При $p = 2/(1+\alpha)$ и $p' = 2/(1-\alpha)$ утверждения леммы 2.1 доказаны в [2, с. 23]. Поэтому считаем далее, что $p > 2/(1+\alpha)$. Тогда справедливы непрерывные плотные вложения:

$$L_p(a,b) \subset L_{2/(1+\alpha)}(a,b) \quad \text{и} \quad L_{2/(1-\alpha)}(a,b) \subset L_{p'}(a,b). \tag{2.4}$$

Докажем первое (очевидное) вложение из (2.4). Применяя интегральное неравенство Гельдера с показателями $p(1+\alpha)/2$ и $p(1+\alpha)/[p(1+\alpha)-2]$ для любого $u(x) \in L_p(a,b)$, имеем

$$\|u\|_{2/(1+\alpha)} \leqslant (b-a)^{[p(1+\alpha)-2]/(2p)} \|u\|_p, \tag{2.5}$$

т. е. справедливо первое вложение из (2.4).

Аналогично, применяя неравенство Гельдера с показателями $2/[(1-\alpha)p']$ и $2/[2-(1-\alpha)p']$ для любого $u(x) \in L_{2/(1-\alpha)}(a,b)$, получаем

$$\|u\|_{p'} \leqslant (b-a)^{[p(1+\alpha)-2]/(2p)} \|u\|_{2/(1-\alpha)} \tag{2.6}$$

(учли, что $[2-(1-\alpha)p']/(2p') = [p(1+\alpha)-2]/(2p)$), т. е. справедливо и второе вложение из (2.4).

Используя неравенства (2.1), (2.5), (2.6) и учитывая первое вложение из (2.4), имеем

$$\|I^\alpha u\|_{p'} \leqslant (b-a)^{[p(1+\alpha)-2]/(2p)} \|I^\alpha u\|_{2/(1-\alpha)} \leqslant (b-a)^{[p(1+\alpha)-2]/(2p)} n(\alpha) \cdot \|u\|_{2/(1+\alpha)} \leqslant$$
$$\leqslant (b-a)^{[p(1+\alpha)-2]/p} \cdot n(\alpha) \cdot \|u\|_p, \quad \forall u(x) \in L_p(a,b),$$

т. е. справедливо неравенство (2.3).

Таким образом, оператор I^α действует непрерывно из пространства $L_p(a,b)$ в сопряженное с ним пространство $L_{p'}(a,b)$ и ограничен. Значит, в силу интегрального неравенства Гельдера, для любого $u(x) \in L_p(a,b)$ существует и конечно выражение (число) $\langle I^\alpha u, u\rangle$. Далее, используя [12, формула (1.3.3)] и [2, теорема 3.2], получаем

$$\langle I^\alpha u, u\rangle = \int\limits_a^b \left(\int\limits_a^b \frac{u(s)\, ds}{|x-s|^{1-\alpha}} \right) \cdot u(x)\, dx \geqslant 0 \quad \forall u(x) \in L_p(a,b), \tag{2.7}$$

причем $\langle I^\alpha u, u\rangle > 0$, если $u(x) \neq 0$, т. е. оператор I^α строго положителен в пространстве $L_p(a,b)$ при $p \geqslant 2/(1+\alpha)$.

Наконец, поскольку оператор I^α, имеющий четное ядро, является симметрическим, то на основании примера 1.1 заключаем, что он является потенциальным. □

Следующая лемма является двойственной лемме 2.1 и понадобится при исследовании уравнения типа Гаммерштейна с ядром типа потенциала (см. ниже теорему 3.2). Для полноты изложения приведем ее с доказательством.

Лемма 2.2. *Если $0 < \alpha < 1$ и $1 < p \leqslant 2/(1-\alpha)$, то оператор I^α действует непрерывно из $L_{p'}(a,b)$, $p' = p/(p-1)$, в $L_p(a,b)$, строго положителен и потенциален, причем*

$$\|I^\alpha u\|_p \leqslant (b-a)^{[2-p(1-\alpha)]/p} \cdot n(\alpha) \cdot \|u\|_{p'} \quad \forall u(x) \in L_{p'}(a,b). \tag{2.8}$$

Доказательство. При $p = 2/(1-\alpha)$ имеем $p' = 2/(1+\alpha)$, и в этом случае утверждение леммы о том, что оператор I^α действует непрерывно из $L_{p'}(a,b)$ в $L_p(a,b)$, равносильно известному (см. выше) утверждению о том, что оператор I^α действует непрерывно из $L_{2/(1+\alpha)}(a,b)$ в $L_{2/(1-\alpha)}(a,b)$. Поэтому считаем далее $1 < p < 2/(1-\alpha)$. В этом случае справедливы непрерывные плотные вложения:

$$L_{p'}(a,b) \subset L_{2/(1+\alpha)}(a,b) \quad \text{и} \quad L_{2/(1-\alpha)}(a,b) \subset L_p(a,b). \tag{2.9}$$

Докажем первое вложение из (2.9). Для этого заметим, что неравенство $p < 2/(1-\alpha)$ равносильно неравенству $2/(1+\alpha) < p'$, поскольку $p' = p/(p-1)$. Применяя неравенство Гельдера с показателями $p'(1+\alpha)/2$ и $p'(1+\alpha)/[p'(1+\alpha)-2]$ для любого $u(x) \in L_{p'}(a,b)$, имеем

$$\|u\|_{2/(1+\alpha)} \leqslant (b-a)^{2-[p(1-\alpha)]/(2p)} \|u\|_{p'} \tag{2.10}$$

(здесь учли, что $p'(1+\alpha)-2]/(2p') = [2-p(1-\alpha)]/(2p)$). Следовательно, справедливо первое вложение из (2.9).

Аналогично, применяя неравенство Гельдера с показателями $2/[(1-\alpha)p]$ и $2/[2-(1-\alpha)p]$ для любого $u(x) \in L_{2/(1-\alpha)}(a,b)$, получаем

$$\|u\|_p \leqslant (b-a)^{[2-p(1-\alpha)]/(2p)} \|u\|_{2/(1-\alpha)}, \tag{2.11}$$

т. е. справедливо и второе вложение из (2.9).

Используя неравенства (2.1), (2.10), (2.11) и учитывая первое вложение из (2.9), имеем

$$\|I^\alpha u\|_p \leqslant (b-a)^{[2-p(1-\alpha)]/(2p)} \|I^\alpha u\|_{2/(1-\alpha)} \leqslant (b-a)^{[2-p(1-\alpha)]/(2p)} n(\alpha) \cdot \|u\|_{2/(1+\alpha)} \leqslant$$
$$\leqslant (b-a)^{[2-p(1-\alpha)]/p} \cdot n(\alpha) \cdot \|u\|_{p'} \quad \forall u(x) \in L_{p'}(a,b),$$

т. е. справедливо неравенство (2.8).

Наконец, используя [12, формула (1.3.3)] и [2, теорема 3.2], с учетом примера 1.1 получаем, что оператор I^α строго положителен и потенциален в пространстве $L_{p'}(a,b)$, поскольку $p' \geqslant 2/(1+\alpha)$ при $1 < p \leqslant 2/(1-\alpha)$ и поэтому применима лемма 2.1 с заменой p на p'. □

Заметим, что в леммах 2.1 и 2.2 показатель p может меняться от 1 до ∞, в зависимости от значений, принимаемых α.

3. Уравнения с ядрами типа потенциала и монотонными нелинейностями

При исследовании нелинейных интегральных уравнений методом монотонных операторов, как правило, предполагается [7, 10, 16, 17], что интегральный оператор, фигурирующий в этих уравнениях, заведомо является положительным. В данном пункте доказаны глобальные теоремы о существовании, единственности и оценках решений для трех различных классов нелинейных интегральных уравнений с ядрами типа потенциала без такого предположения, что важно и удобно для приложений.

Пусть вещественная функция $F(x,u)$ определена при $x \in [a,b]$, $u \in \mathbb{R}$ и удовлетворяет условиям Каратеодори: она измерима по x при каждом фиксированном u и непрерывна по u при почти всех x. Обозначим через F оператор Немыцкого $(Fu)(x) = F[x,u(x)]$, порожденный функцией $F(x,u)$, а через $L_p^+(a,b)$ — множество всех неотрицательных функций из $L_p(a,b)$.

Рассмотрим сначала наиболее простое для исследования методом монотонных операторов нелинейное уравнение с ядром типа потенциала.

Теорема 3.1. *Пусть $0 < \alpha < 1$ и $p \geqslant 2/(1+\alpha)$. Если для почти всех $x \in [a,b]$ и всех $u \in \mathbb{R}$ выполнены условия*:

3.1) $|F(x,u)| \leqslant c(x) + d_1 \cdot |u|^{p-1}$, *где* $c(x) \in L_{p'}^+(a,b)$, $d_1 > 0$;

3.2) $F(x,u)$ *не убывает по u при почти каждом фиксированном x*;

3.3) $F(x,u) \cdot u \geqslant d_2 \cdot |u|^p - D(x)$, *где* $D(x) \in L_1^+(a,b)$, $d_2 > 0$,

то при любых $\lambda > 0$ и $f(x) \in L_{p'}(a,b)$ уравнение

$$\lambda \cdot F[x,u(x)] + \int_a^b \frac{u(s)\,ds}{|x-s|^{1-\alpha}} = f(x) \tag{3.1}$$

имеет единственное решение $u^*(x) \in L_p(a,b)$. *Кроме того, если условие* 3.3) *выполнено при* $D(x) = 0$, *то* $\|u^*\|_p \leqslant \left(\lambda^{-1} \cdot d_2^{-1} \cdot \|f\|_{p'}\right)^{1/(p-1)}$.

Доказательство. Условия 3.1) и 3.2) необходимы и достаточны [7, с. 61–64], соответственно, для того чтобы оператор Немыцкого F, порожденный функцией $F(x,u)$, действовал непрерывно из $L_p(a,b)$ в $L_{p'}(a,b)$ и был монотонным, а условие 3.3) обеспечивает его коэрцитивность, поскольку

$$\langle Fu, u\rangle \geqslant d_2 \cdot \|u\|_p^p - \|D\|_1. \tag{3.2}$$

Запишем данное уравнение (3.1) в операторном виде: $Au = f$, где $Au = \lambda \cdot Fu + I^\alpha u$. В силу леммы 2.1 и условий 3.1)–3.3) получаем, что оператор A действует непрерывно из $L_p(a,b)$ в $L_{p'}(a,b)$ и является монотонным и коэрцитивным. При этом оператор A является строго монотонным, так как оператор I^α является строго положительным. Поэтому утверждения о существовании и единственности решения вытекают из основной теоремы теории монотонных операторов — теоремы Браудера—Минти (см., например, [2, теорема 1.1]). Наконец, используя условие 3.3) при $D(x) = 0$, т. е. неравенство (3.2) при $\|D\|_1 = 0$, положительность оператора I^α и равенство $Au^* = f$, имеем

$$\lambda \cdot d_2 \cdot \|u^*\|_p^p \leqslant \lambda \cdot \langle Fu^*, u^*\rangle \leqslant \lambda \cdot \langle Fu^*, u^*\rangle + \langle I^\alpha u^*, u^*\rangle =$$

$$= \langle Au^*, u^*\rangle = \langle f, u^*\rangle \leqslant \|f\|_{p'}\|u\|_p,$$

откуда непосредственно вытекает доказываемая оценка. □

Следствие 3.1. *Пусть* $p \geqslant 2$ — *любое четное число и* $f(x) \in L_{p'}(a,b)$. *Тогда уравнение*

$$u^{p-1}(x) + \int_a^b \frac{u(s)\,ds}{\sqrt{|x-s|}} = f(x)$$

имеет единственное решение $u^*(x) \in L_p(a,b)$, *причем* $\|u^*\|_p \leqslant \|f\|_{p'}^{1/(p-1)}$.

В связи со следствием 3.1 заметим, что поскольку $p \geqslant 2$ и $2/(1+\alpha) \in (1,2)$, то требование $p \geqslant 2/(1+\alpha)$ теоремы 3.1 заведомо выполнено, причем нечетностепенная функция $F(x,u) = u^{p-1}$ удовлетворяет условиям 3.1)–3.3) при $d_1 = d_2 = 1$ и $c(x) = D(x) = 0$.

Замечание 3.1. Теорема 3.1 усиливает некоторые результаты, приведенные в [2], а именно дополняет [2, теорема 6.1], которая не охватывает случай $2/(1+\alpha) \leqslant p < 2$, и [2, теорема 6.2], в которой $1 < p < 2$ и α имеет специальный вид.

Прежде чем рассмотреть другой класс нелинейных уравнений с ядрами типа потенциала, приведем один результат с поправками (см. ниже), установленный в работе [16], придерживаясь обозначений этой работы. Пусть Ω есть пространство с σ-конечной мерой, K — монотонный оператор и $(Fu)(x) = f(x, u(x))$ — оператор Немыцкого. Рассмотрим уравнение типа Гаммерштейна

$$u + KFu = g. \tag{3.3}$$

Справедлива следующая теорема Брезиса—Браудера (ср. [16, теорема 3]).

Теорема 3.2 (Брезис—Браудер). *Пусть* $p > 1$ *и* K — *монотонный, хеминепрерывный и ограниченный оператор из* $L_{p'}(\Omega)$ *в* $L_p(\Omega)$. *Предположим, что функция* $f(x,r) : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *непрерывна и не убывает по* r *для почти всех* $x \in \Omega$, *является измеримой по* x *для всех* $r \in \mathbb{R}$ *и удовлетворяет условию*

$$|f(x,r)| \leqslant c(x) + c_0 \cdot |r|^{p-1} \quad \text{для почти всех } x \in \Omega \text{ и всех } r \in \mathbb{R},$$

где $c \in L_{p'}(\Omega)$, $c_0 > 0$. *Тогда уравнение* (3.3) *имеет единственное решение* $u \in L_p(\Omega)$ *при любом* $g \in L_p(\Omega)$.

Следует отметить, что в формулировке теоремы 3.2, приведенной в [16, с. 570], допущены неточности, а именно функция $f(x,r)$ предполагается *невозрастающей* по r (что не согласуется с условием (3) из [16, с. 567]) и измеримой по x для всех $x \in \mathbb{R}$ (должно быть для всех $r \in \mathbb{R}$ — что очевидно). Кроме того, пропущены требования, что $p > 1$ и $c_0 > 0$. Покажем на простом примере, что если функция $f(x,r)$ является невозрастающей по r, то утверждение [16, теорема 3] о единственности решения неверно. Рассмотрим в пространстве $L_{4/3}(\Omega)$ уравнение

$$u(x) - w(x) \int\limits_{\Omega} w(s) \cdot u^{1/3}(s)\, ds = 0, \tag{3.4}$$

где $w(x) \neq 0$ почти всюду на Ω и $w(x) \in L_{4/3}(\Omega)$. В данном случае, в соответствии с [16, теорема 3], $p = 4/3$, $f(x,r) = -r^{1/3}$ есть невозрастающая по r функция и оператор K имеет вид: $(Ku)(x) = w(x) \int\limits_{\Omega} w(s)\, u(s)\, ds$. Покажем, что оператор K действует из $L_4(\Omega)$ в $L_{4/3}(\Omega)$ и ограничен. Для любого $u(x) \in L_4(\Omega)$ имеем

$$\|Ku\|_{4/3} = \left| \int\limits_{\Omega} w(s)\, u(s)\, ds \right| \cdot \left(\int\limits_{\Omega} |w(x)|^{4/3} dx \right)^{3/4} \leqslant$$

$$\leqslant \left(\int\limits_{\Omega} |w(s)|^{4/3} ds \right)^{3/4} \left(\int\limits_{\Omega} |u(s)|^{4} ds \right)^{1/4} \|w\|_{4/3} = \|w\|_{4/3}^2 \cdot \|u\|_4.$$

Значит, оператор K действует из пространства $L_4(\Omega)$ в сопряженное с ним пространство $L_{4/3}(\Omega)$ и ограничен. Поскольку K является линейным оператором, то он является также непрерывным и тем более хеминепрерывным оператором. Далее, для любого $u(x) \in L_4(\Omega)$ имеем

$$\langle Ku, u \rangle = \int\limits_{\Omega} \left(w(x) \int\limits_{\Omega} w(s)\, u(s)\, ds \right) u(x)\, dx = \left(\int\limits_{\Omega} w(s)\, u(s)\, ds \right)^2 \geqslant 0,$$

т. е. K — положительный, а значит, в силу своей линейности, и монотонный оператор. Таким образом, оператор K и функция $f(x,r) = -r^{1/3}$ удовлетворяют всем требованиям [16, теорема 3] при $g = 0$, $c(x) = 0$, $c_0 = 1$ и $p = 4/3$. Покажем, наконец, что уравнение (3.4) имеет два различных решения в пространстве $L_{4/3}(\Omega)$. Пусть $u(x) \in L_{4/3}(\Omega)$ есть любое решение уравнения (3.4). Положим $\int\limits_{\Omega} w(s)\, u^{1/3}(s)\, ds = C$. Тогда из (3.4) получаем:

$$u(x) = C \cdot w(x) \quad \text{или} \quad w(x) \cdot u^{1/3}(x) = C^{1/3} w^{4/3}(x). \tag{3.5}$$

Интегрируя последнее равенство, имеем

$$C = C^{1/3} \int\limits_{\Omega} w^{4/3}(x)\, dx \quad \text{или} \quad C = \left(\int\limits_{\Omega} w^{4/3}(x)\, dx \right)^{3/2}.$$

Подставляя найденное значение C в первое равенство из (3.5), окончательно получаем

$$u(x) = \left(\int\limits_{\Omega} w^{4/3}(s)\, ds \right)^{3/2} w(x). \tag{3.6}$$

Таким образом, уравнение (3.4) помимо тривиального решения $u(x) = 0$ имеет еще и нетривиальное решение (3.6) в пространстве $L_{4/3}(\Omega)$, что противоречит утверждению о единственности решения в формулировке, приведенной в [16, теорема 3].

Замечание 3.2. В работе [17, с. 126] доказан более общий, чем в теореме 3.2, результат, из которого, в частности, следует, что в формулировке [16, теорема 3] функция $f(x,r)$ должна не убывать по r.

Теорема 3.3. *Пусть* $0 < \alpha < 1$ *и* $1 < p \leqslant 2/(1-\alpha)$. *Если для почти всех* $x \in [a,b]$ *и всех* $u \in \mathbb{R}$ *выполнены условия* 3.1) *и* 3.2) *теоремы* 3.1, *то при любых* $\lambda \geqslant 0$ *и* $f(x) \in L_p(a,b)$ *уравнение*

$$u(x) + \lambda \cdot \int\limits_a^b \frac{F[s,u(s)]\,ds}{|x-s|^{1-\alpha}} = f(x) \tag{3.7}$$

имеет единственное решение $u^*(x) \in L_p(a,b)$. *Кроме того, если условия* 3.1) *и* 3.3) *теоремы* 3.1 *выполнены при* $c(x) = D(x) = 0$, *то* $\|u^*\|_p \leqslant d_1 \cdot d_2^{-1} \cdot \|f\|_p$.

Доказательство. При $\lambda = 0$ утверждения теоремы очевидны, поэтому считаем далее, что $\lambda > 0$. Запишем уравнение (3.7) в операторном виде: $u+\lambda\cdot I^\alpha F u = f$. Из условий 3.1) и 3.2) вытекает, что оператор F действует непрерывно из $L_p(a,b)$ в $L_{p'}(a,b)$ и является монотонным, а из леммы 2.2, вытекает, что оператор I^α действует непрерывно из $L_{p'}(a,b)$ обратно в $L_p(a,b)$ и положителен. Но тогда по теореме 3.2 данное уравнение имеет единственное решение $u^*(x) \in L_p(a,b)$.

Осталось доказать оценку нормы решения $u^*(x)$. Используя условия 3.1) и 3.3) теоремы 3.1 при $c(x) = D(x) = 0$, положительность оператора I^α и равенство $u^* + \lambda \cdot I^\alpha F u^* = f$, имеем

$$d_2\|u^*\|_p^p \leqslant \langle Fu^*, u^*\rangle \leqslant \langle u^*, Fu^*\rangle + \lambda\langle I^\alpha F u^*, Fu^*\rangle =$$
$$= \langle f, Fu^*\rangle \leqslant \|f\|_p \|Fu^*\|_{p'} \leqslant d_1\|f\|_p\|u^*\|_p^{p-1},$$

откуда непосредственно вытекает доказываемая оценка. □

Следствие 3.2. *Если* $f(x) \in L_4(a,b)$, *то уравнение*

$$u(x) + \int\limits_a^b \frac{u^3(s)\,ds}{\sqrt{|x-s|}} = f(x)$$

имеет единственное решение $u^*(x) \in L_4(a,b)$, *причем* $\|u^*\|_4 \leqslant \|f\|_4$.

Рассмотрим, наконец, третий класс нелинейных уравнений с ядрами типа потенциала, соответствующий случаю, когда оператор типа потенциала входит в уравнение нелинейно. В этом случае, в отличие от теорем 3.1 и 3.3, на нелинейность $F(x,u)$ вместо условий 3.1)–3.3) накладываются условия 3.4)–3.6), обеспечивающие существование хеминепрерывного, строго монотонного, коэрцитивного обратного оператора F^{-1} к оператору Немыцкого F, порожденному функцией $F(x,u)$.

Теорема 3.4. *Пусть* $0 < \alpha < 1$ *и* $p \geqslant 2/(1+\alpha)$. *Если для почти всех* $x \in [a,b]$ *и всех* $u \in \mathbb{R}$ *выполнены условия*:

3.4). $|F(x,u)| \leqslant g(x) + d_3 \cdot |u|^{1/(p-1)}$, *где* $g(x) \in L_p^+(a,b)$, $d_3 > 0$;

3.5). $F(x,u)$ *строго возрастает по* u *при почти каждом фиксированном* x;

3.6). $F(x,u) \cdot u \geqslant d_4 \cdot |u|^{p/(p-1)} - D(x)$, *где* $D(x) \in L_1^+(a,b)$, $d_4 > 0$,

то при любых $\lambda \geqslant 0$ *и* $f(x) \in L_p(a,b)$ *уравнение*

$$u(x) + \lambda \cdot F\left[x, \int\limits_a^b \frac{u(s)\,ds}{|x-s|^{1-\alpha}}\right] = f(x) \tag{3.8}$$

имеет единственное решение $u^*(x) \in L_p(a,b)$. *Кроме того, если условия* 3.4) *и* 3.6) *выполнены при* $g(x) = D(x) = 0$, *то*

$$\|u^* - f\|_p \leqslant \left(d_3^p \cdot d_4^{-1} \cdot n(\alpha) \cdot (b-a)^{[p(1+\alpha)-2]/p}\|f\|_p\right)^{1/(p-1)},$$

где $n(\alpha)$ *есть норма оператора* I^α, *действующего ограниченно из* $L_{2/(1+\alpha)}(a,b)$ *в* $L_{2/(1-\alpha)}(a,b)$.

Доказательство. При $\lambda = 0$ утверждения теоремы очевидны, поэтому считаем далее, что $\lambda > 0$. В силу леммы 2.1 оператор I^α действует из $L_p(a,b)$ в $L_{p'}(a,b)$, непрерывен и положителен. Из условий 3.4)–3.6) вытекает, что оператор F действует обратно из $L_{p'}(a,b)$ в $L_p(a,b)$, непрерывен, строго монотонен и коэрцитивен. Следовательно, в соответствии с [2, лемма 2.1], оператор Немыцкого F имеет обратный оператор F^{-1}, который действует из $L_p(a,b)$ в $L_{p'}(a,b)$, хеминепрерывен, строго монотонен и $\lim\limits_{\|v\|_p\to\infty}\langle F^{-1}v, v\rangle \cdot \|v\|_p^{-1} = \infty$. Запишем теперь уравнение (3.8) в операторном виде: $u+\lambda\cdot FI^\alpha u=f$. Полагая в нем $f-u=\lambda\cdot v$ и применяя затем к обеим частям получившегося уравнения обратный оператор F^{-1}, приходим к уравнению

$$\Phi v = I^\alpha f, \quad \text{где} \quad \Phi v = F^{-1}v + \lambda\cdot I^\alpha v. \tag{3.9}$$

В силу указанных свойств операторов F^{-1} и I^α оператор Φ действует из $L_p(a,b)$ в $L_{p'}(a,b)$, хеминепрерывен, строго монотонен и коэрцитивен, причем

$$\frac{\langle \Phi v, v\rangle}{\|v\|_p} \geqslant \frac{\langle F^{-1}v, v\rangle}{\|v\|_p} \to \infty \quad \text{при} \quad \|v\|_p \to \infty.$$

Значит, по теореме Браудера—Минти, уравнение (3.9) имеет единственное решение $v^*(x) \in L_p(a,b)$. Но тогда уравнение (3.8) имеет решение $u^* = f-\lambda\cdot v^* \in L_p(a,b)$. Покажем, что это решение u^* единственно. Предположим противное, т. е. что уравнение (3.8) имеет два различных решения $u_1, u_2 \in L_p(a,b)$. Тогда справедливы равенства:

$$u_1 + \lambda\cdot FI^\alpha u_1 = f \quad \text{и} \quad u_2 + \lambda\cdot FI^\alpha u_2 = f. \tag{3.10}$$

Из (3.10) путем вычитания первого равенства из второго имеем:

$$u_2 - u_1 + \lambda\cdot FI^\alpha u_2 - \lambda\cdot FI^\alpha u_1 = 0$$

и, значит,

$$\langle u_2 - u_1 + \lambda\cdot FI^\alpha u_2 - \lambda\cdot FI^\alpha u_1, I^\alpha u_2 - I^\alpha u_1\rangle = 0$$

или

$$\langle u_2 - u_1, I^\alpha u_2 - I^\alpha u_1\rangle + \lambda\cdot\langle FI^\alpha u_2 - FI^\alpha u_1, I^\alpha u_2 - I^\alpha u_1\rangle = 0.$$

Но последнее равенство невозможно, так как и первое слагаемое в левой части строго положительно, в силу строгой положительности оператора I^α, и второе слагаемое строго положительно, в силу строгой монотонности оператора F и того, что $I^\alpha u_1 \neq I^\alpha u_2$. В самом деле, если $I^\alpha u_1 = I^\alpha u_2$, то из (3.10) следует, что $u_1 + \lambda\cdot FI^\alpha u_2 = f$ и $u_2 + \lambda\cdot FI^\alpha u_2 = f$, откуда, путем вычитания левых и правых частей, получаем $u_1 - u_2 = 0$, что противоречит тому, что u_1 и u_2 различны.

Осталось доказать оценку нормы решения. Положим $\psi = F^{-1}v^*$. Тогда $F\psi = v^*$. Так как $F^{-1}v^* + \lambda\cdot I^\alpha v^* = I^\alpha f$, то с учетом леммы 2.1 и равенств $g(x) = D(x) = 0$, имеем

$$d_4\|\psi\|_{p'}^{p'} \leqslant \langle F\psi,\psi\rangle = \langle v^*, F^{-1}v^*\rangle \leqslant \langle v^*, F^{-1}v^*\rangle + \lambda\langle v^*, I^\alpha v^*\rangle = \langle v^*, I^\alpha f\rangle = \langle F\psi, I^\alpha f\rangle \leqslant$$

$$\leqslant \|F\psi\|_p\|I^\alpha f\|_{p'} \leqslant (b-a)^{[p(1+\alpha)-2]/p} n(\alpha)\|F\psi\|_p\|f\|_p \leqslant (b-a)^{[p(1+\alpha)-2]/p} n(\alpha) d_3\|\psi\|_{p'}^{p'-1}\|f\|_p.$$

Следовательно,

$$\|\psi\|_{p'} \leqslant d_3 d_4^{-1}(b-a)^{[p(1+\alpha)-2]/p}\cdot n(\alpha)\cdot\|f\|_p. \tag{3.11}$$

Так как $\|v^*\|_p = \|F\psi\|_p \leqslant d_3\|\psi\|_{p'}^{p'-1}$ и $v^* = \lambda^{-1}(f-u^*)$, то $\|f-u^*\|_p \leqslant \lambda d_3\|\psi\|_{p'}^{1/(p-1)}$, откуда с учетом неравенства (3.11) получаем доказываемую оценку нормы решения. □

Следствие 3.3. *Пусть $p \geqslant 2$ — любое четное число и $f(x) \in L_p(a,b)$. Тогда уравнение*

$$u(x) + \left(\int_a^b \frac{u(s)\,ds}{\sqrt{|x-s|}}\right)^{1/(p-1)} = f(x)$$

имеет единственное решение $u^*(x) \in L_p(a,b)$, причем справедлива оценка

$$\|u^* - f\|_p \leqslant \Big((b-a)^{[p(1+\alpha)-2]/p}\cdot n(1/2)\cdot\|f\|_p\Big)^{1/(p-1)},$$

где $n(1/2)$ есть норма оператора $I^{1/2}$, действующего ограниченно из $L_{4/3}(a,b)$ в $L_4(a,b)$.

Замечание 3.3. При $p=2$ теоремы 3.1, 3.3 и 3.4 охватывают и случай линейных интегральных уравнений с ядрами типа потенциала.

4. Приближенное решение в $L_2(a,b)$. Метод последовательных приближений

Полученные в разделе 3 теоремы существования и единственности решения для различных классов нелинейных интегральных уравнений с ядрами типа потенциала не содержат информации о том, как можно найти эти решения. В связи с этим рассмотрим вопрос о приближенном решении таких уравнений в гильбертовом пространстве $L_2(a,b)$. Особо отметим, что здесь, в отличие от [1, §9], где рассмотрены нелинейные сингулярные интегральные уравнения, существенно используется свойство потенциальности рассматриваемых операторов, что позволяет значительно улучшить соответствующие оценки скорости сходимости последовательных приближений. В этой связи заметим также, что основные теоремы теории монотонных операторов вначале были доказаны при дополнительном условии потенциальности рассматриваемых операторов (см., например, [10, с. 163]), которое затем во многих случаях было снято. Однако, использование свойства потенциальности операторов позволяет усилить некоторые результаты для уравнений с монотонными операторами, в частности, касающиеся приближенного решения таких уравнений (см. ниже теоремы 4.1 и 5.1).

Всюду в этом пункте предполагается, что $0<\alpha<1$, а нелинейность $F(x,u)$ при почти каждом фиксированном $x\in[a,b]$ и при любых $u_1,u_2\in\mathbb{R}$ удовлетворяет условиям:

4.1) $|F(x,u_1)-F(x,u_2)|\leqslant M\cdot|u_1-u_2|$, где $M>0$;

4.2) $\Big(F(x,u_1)-F(x,u_2)\Big)\cdot(u_1-u_2)\geqslant m\cdot|u_1-u_2|^2$, где $m>0$.

Простейшим примером нелинейности, удовлетворяющей условиям 4.1) и 4.2) может служить $F(x,u)\equiv(u+2\,u^3)/(1+u^2)$, для которой $m=1$, $M=17/8$.

Из неравенства (2.2), в частности, вытекает, что оператор типа потенциала I^α действует непрерывно из $L_2(a,b)$ в $L_2(a,b)$, причем справедливо неравенство

$$\|I^\alpha u\|_2\leqslant 2\,(b-a)^\alpha\alpha^{-1}\|u\|_2\qquad\forall u(x)\in L_2(a,b).\tag{4.1}$$

Обозначим через $\mathbb{N}$ множество всех натуральных чисел. Далее нам понадобится следующая теорема (см. [2, с. 16], где приведено ее доказательство), являющаяся непосредственным следствием более общих результатов, доказанных в монографии [8].

Теорема 4.1 (Браудер—Петришин). *Пусть H — вещественное гильбертово пространство со скалярным произведением $(\cdot,\cdot)$ и нормой $\|\cdot\|_H$, оператор A действует из H в H и является потенциальным. Если существуют постоянные $m>0$ и $M>0$ $(M>m)$ такие, что для любых $u,v\in H$ выполняются неравенства*

$$\|Au-Av\|_H\leqslant M\cdot\|u-v\|_H,\qquad (Au-Av,u-v)\geqslant m\cdot\|u-v\|_H^2,$$

то уравнение $Au=f$ имеет единственное решение $u^*\in H$ при любом $f\in H$. Это решение можно найти методом последовательных приближений по формуле $(n\in\mathbb{N})$

$$u_n=u_{n-1}-\frac{2}{M+m}(Au_{n-1}-f)\tag{4.2}$$

с оценкой погрешности

$$\|u_n-u^*\|_H\leqslant\frac{2}{M+m}\cdot\frac{\nu^n}{1-\nu}\|Au_0-f\|_H,\tag{4.3}$$

где $\nu=(M-m)/(M+m)$, $u_0\in H$ — начальное приближение.

Заметим, что оценка (4.3) обеспечивает более высокую скорость сходимости последовательных приближений по сравнению с [2, оценка (1.4)], полученной без предположения о потенциальности оператора A.

Приступим теперь к изложению основных результатов данного пункта. Наиболее простым для применения теоремы 4.1 является уравнение (3.1). Справедлива следующая

Теорема 4.2. *Пусть $0<\alpha<1$ и нелинейность $F(x,u)$ при почти каждом фиксированном $x\in[0,1]$ и при любых $u_1,u_2\in\mathbb{R}$ удовлетворяет условиям* 4.1) *и* 4.2)*. Тогда при любых $\lambda>0$*

и $f(x) \in L_2(a,b)$ *уравнение* (3.1) *имеет единственное решение* $u^*(x) \in L_2(a,b)$. *Это решение можно найти методом итераций по схеме*

$$u_n = u_{n-1} - \mu_1 \cdot (\lambda \cdot F u_{n-1} + I^\alpha u_{n-1} - f) \tag{4.4}$$

с оценкой погрешности

$$\|u_n - u^*\|_2 \leqslant \mu_1 \cdot \frac{\alpha_1^n}{1-\alpha_1} \cdot \|\lambda \cdot F u_0 + I^\alpha u_0 - f\|_2, \tag{4.5}$$

где $n \in \mathbb{N}$, $\mu_1 = 2/(M + m + 2(b-a)^\alpha \alpha^{-1})$, $\alpha_1 = (M - m + 2(b-a)^\alpha \alpha^{-1})/(M + m + 2(b-a)^\alpha \alpha^{-1})$, $u_0(x) \in L_2(a,b)$ — *начальное приближение.*

Доказательство. Из условия 4.1) вытекает, что оператор Немыцкого F действует непрерывно из $L_2(a,b)$ в $L_2(a,b)$ и удовлетворяет условию Липшица:

$$\|Fu - Fv\|_2 \leqslant M \cdot \|u - v\|_2 \qquad \forall u, v \in L_2(a,b), \tag{4.6}$$

а из условия 4.2) вытекает, что он является сильно монотонным:

$$(Fu - Fv, u - v) \geqslant m \cdot \|u - v\|_2^2 \qquad \forall u, v \in L_2(a,b), \tag{4.7}$$

где $(\cdot,\cdot)$ означает скалярное произведение в $L_2(a,b)$.

Кроме того, при выполнении условия 4.1) оператор Немыцкого F является потенциальным и его потенциал g вычисляется по формуле (см. [6, с. 90] или [7, с. 62]):

$$g(u) = g_0 + \int\limits_0^1 \left[\int\limits_0^{u(x)} F(x,v)\, dv \right] dx,$$

где $g_0 = \mathrm{const}$.

Пусть $u, v \in L_2(a,b)$ — любые функции. Запишем данное уравнение (3.1) в операторном виде: $Au = f$, где $A = \lambda \cdot F + I^\alpha$. Заметим, что, в силу неравенств (4.1) и (4.6), оператор A действует непрерывно из $L_2(a,b)$ в $L_2(a,b)$ и является потенциальным (как сумма двух потенциальных операторов $\lambda \cdot F$ и I^α). Далее, используя сначала неравенство Минковского, а затем неравенства (4.1) и (4.6), с одной стороны имеем $\|Au - Av\|_2 \leqslant \bigl(\lambda \cdot M + 2(b-a)^\alpha \alpha^{-1}\bigr) \cdot \|u - v\|_2$, а с другой стороны, используя неравенства (2.7) и (4.7), получаем $(Au - Av, u - v) \geqslant \lambda \cdot m \cdot \|u - v\|_2^2$. Следовательно, по теореме 4.1 уравнение $Au = f$ имеет единственное решение $u^* \in L_2(a,b)$ и это решение можно найти по схеме (4.4), получающейся из формулы (4.2), с оценкой погрешности (4.5), вытекающей из неравенства (4.3). □

Более трудными для исследования методом потенциальных монотонных операторов являются нелинейные уравнения (3.7) и (3.8), поскольку к ним, в отличие от уравнения (3.1), непосредственно применить теорему 4.1 нельзя. Для таких классов уравнений последовательные приближения удается построить лишь в терминах обратного оператора F^{-1}.

Теорема 4.3. *Пусть* $0 < \alpha < 1$ *и нелинейность* $F(x,u)$ *удовлетворяет условиям* 4.1) *и* 4.2). *Тогда при любых* $\lambda > 0$ *и* $f(x) \in L_2(a,b)$ *нелинейное уравнение* (3.7) *имеет единственное решение* $u^*(x) \in L_2(a,b)$. *Это решение можно найти методом итераций по схеме*

$$u_n = F^{-1} v_n, \quad v_n = v_{n-1} - \mu_2 \cdot (F^{-1} v_{n-1} + \lambda \cdot I^\alpha v_{n-1} - f) \tag{4.8}$$

с оценкой погрешности

$$\|u_n - u^*\|_2 \leqslant \frac{\mu_2}{m} \cdot \frac{\alpha_2^n}{1-\alpha_2} \cdot \|u_0 + \lambda \cdot I^\alpha F u_0 - f\|_2, \tag{4.9}$$

где $n \in \mathbb{N}$, $\mu_2 = 2/(m^{-1} + m\,M^{-2} + 2\,\lambda \cdot (b-a)^\alpha \alpha^{-1})$, $\alpha_2 = (m^{-1} - m\,M^{-2} + 2\,\lambda \cdot (b-a)^\alpha \alpha^{-1})/(m^{-1} + m\,M^{-2} + 2\,\lambda \cdot (b-a)^\alpha \alpha^{-1})$, F^{-1} — *оператор, обратный к* F, $v_0 = F u_0$, $u_0(x) \in L_2(a,b)$ — *начальное приближение.*

Доказательство. Так как оператор F удовлетворяет неравенствам (4.6) и (4.7), то согласно [2, теорема 1.3] существует обратный оператор F^{-1} такой, что

$$\|F^{-1}u - F^{-1}v\|_2 \leqslant \frac{1}{m} \|u - v\|_2 \qquad \forall u, v \in L_2(a,b), \tag{4.10}$$

$$(F^{-1}u - F^{-1}v, u - v) \geqslant \frac{m}{M^2}\|u-v\|_2^2 \qquad \forall u, v \in L_2(a,b). \tag{4.11}$$

Заметим [8, с. 137], что оператор F^{-1} является потенциальным, как оператор, обратный монотонному потенциальному оператору F. Запишем уравнение (3.7) в операторном виде:

$$u + \lambda \cdot I^\alpha F u = f. \tag{4.12}$$

Непосредственно проверяется, что если v^* является решением уравнения

$$Bv \equiv F^{-1}v + \lambda \cdot I^\alpha v = f, \tag{4.13}$$

то $u^* = F^{-1}v^*$ является решением уравнения (4.12).

Докажем, что уравнение (4.13) имеет единственное решение $v^* \in L_2(a,b)$. Используя неравенства (4.1), (2.7), (4.10) и (4.11), имеем

$$\|Bu - Bv\|_2 \leqslant (m^{-1} + 2\,\lambda \cdot (b-a)^\alpha \alpha^{-1})\,\|u-v\|_2, \quad (Bu - Bv, u - v) \geqslant \frac{m}{M^2}\|u-v\|_2^2.$$

Кроме того, оператор B является потенциальным как сумма двух потенциальных операторов F^{-1} и $\lambda \cdot I^\alpha$. Значит, по теореме 4.1 уравнение $Bv = f$ имеет единственное решение $v^* \in L_2(a,b)$ и это решение можно найти по схеме

$$v_n = v_{n-1} - \mu_2 \cdot (Bv_{n-1} - f) \tag{4.14}$$

с оценкой погрешности

$$\|v_n - v^*\|_2 \leqslant \mu_2 \cdot \frac{\alpha_2^n}{1-\alpha_2}\|Bv_0 - f\|_2, \tag{4.15}$$

где μ_2 и α_2 определены выше (в формулировке теоремы 4.3). Но тогда уравнение (4.12) имеет единственное решение $u^* = F^{-1}v^* \in L_2$ и это решение можно найти по схеме (4.8), получающейся из (4.14), с оценкой погрешности (4.9), получающейся из (4.15), с учетом равенства $Bv = F^{-1}v + \lambda \cdot I^\alpha v$ и оценки: $\|u_n - u^*\|_2 = \|F^{-1}v_n - F^{-1}v^*\|_2 \leqslant m^{-1}\|v_n - v^*\|_2$. □

Теорема 4.4. *Пусть* $0 < \alpha < 1$ *и нелинейность* $F(x,u)$ *удовлетворяет условиям* 4.1) *и* 4.2). *Тогда при любых* $\lambda > 0$ *и* $f(x) \in L_2(a,b)$ *нелинейное уравнение* (3.8) *имеет единственное решение* $u^*(x) \in L_2(a,b)$. *Это решение можно найти методом итераций по схеме*

$$u_n = u_{n-1} + \lambda \cdot \mu_2 \cdot \left(F^{-1}\left(\lambda^{-1}(f - u_{n-1})\right) - I^\alpha u_{n-1}\right) \tag{4.16}$$

с оценкой погрешности

$$\|u_n - u^*\|_2 \leqslant \lambda \cdot \mu_2 \cdot \frac{\alpha_2^n}{1-\alpha_2} \cdot \|F^{-1}\left(\lambda^{-1}(f-u_0)\right) - I^\alpha u_0\|_2, \tag{4.17}$$

где $n \in \mathbb{N}$, μ_2 *и* α_2 *определены в формулировке теоремы* 4.3, F^{-1} — *оператор, обратный к* F, $u_0(x) \in L_2(a,b)$ — *начальное приближение.*

Доказательство. Запишем уравнение (3.8) в операторном виде:

$$u + \lambda \cdot F I^\alpha u = f. \tag{4.18}$$

Положим $f - u = \lambda \cdot v$. Тогда уравнение (4.18) примет вид: $FI^\alpha(f - \lambda \cdot v) = v$. Применив к обеим частям последнего уравнения оператор F^{-1}, существование которого доказано в теореме 4.3, приходим к уравнению:

$$Bv \equiv F^{-1}v + \lambda \cdot I^\alpha v = I^\alpha f. \tag{4.19}$$

Непосредственно проверяется, что если v^* является решением уравнения (4.19), то $u^* = f - \lambda \cdot v^*$ является решением уравнения (4.18).

Так как уравнение (4.19) имеет такой же вид, что и уравнение (4.13), то, повторяя рассуждения, приведенные в теореме 4.3, убеждаемся, что уравнение (4.19) имеет единственное решение $v^* \in L_2(a,b)$ и его можно найти по схеме вида (4.14):

$$v_n = v_{n-1} - \mu_2(Bv_{n-1} - I^\alpha f) \tag{4.20}$$

с оценкой погрешности вида (4.15):

$$\|v_n - v^*\| \leqslant \mu_2 \cdot \frac{\alpha_2^n}{1-\alpha_2}\|Bv_0 - I^\alpha f\|_2. \tag{4.21}$$

Из (4.20) и (4.21), учитывая, что $v = \lambda^{-1}(f-u)$, непосредственно получаем, соответственно, итерационную схему (4.16) и оценку погрешности (4.17). □

Заметим, что теоремы 4.2–4.4 охватывают, в частности, линейные интегральные уравнения с ядрами типа потенциала, и при этом не требуется, чтобы параметр λ был достаточно малым (ср. [9, с. 59], [13, с. 479]).

5. Приближенное решение в $L_p(a,b)$. Метод наискорейшего спуска

Результаты, полученные в разделе 4 по приближенному решению уравнений (3.1), (3.7) и (3.8), не охватывают степенные нелинейности, и использованные в нем методы непригодны в случае пространств $L_p(a,b)$ при $p \neq 2$. Цель данного раздела — доказать, что в случае пространства $L_p(a,b)$ и нечетностепенной нелинейности применим градиентный метод (или метод наискорейшего спуска). Для этого нам понадобятся следующие две простые леммы.

Лемма 5.1. *Пусть $q > 1$ — нечетное число. Тогда для любых чисел $t, s \in \mathbb{R}$ справедливо неравенство*

$$|t^q - s^q| \leqslant \frac{q}{2} \cdot |t-s| \cdot (t^{q-1} + s^{q-1}). \tag{5.1}$$

Доказательство. Так как при $s = 0$ неравенство (5.1) очевидно, то считаем далее $s \neq 0$. Разделим обе части (5.1) на $|s|^q = |s| \cdot s^{q-1}$ и положим затем $t/s = x$. Тогда (5.1) примет вид:

$$|x^q - 1| \leqslant \frac{q}{2}\, |x-1|\, (x^{q-1}+1). \tag{5.2}$$

Итак, достаточно доказать неравенство (5.2) для всех нечетных $q > 1$ и любого $x \in \mathbb{R}$. Рассмотрим два случая.

1. Пусть $x \in (-\infty, 1]$. Тогда неравенство (5.2) принимает вид $1 - x^q \leqslant q^{-2}(1-x)\,(x^{q-1}+1) = q^{-2}(x^{q-1} + 1 - x^q - x)$ или

$$\frac{q-2}{2}\, x^q - \frac{q}{2}\, x^{q-1} + \frac{q}{2}\, x - \frac{q-2}{2} \leqslant 0. \tag{5.3}$$

Обозначим левую часть (5.3) через $\varphi(x)$. Нужно доказать, что $\varphi(x) \leqslant 0$ $\forall x \in (-\infty, 1]$. Ясно, что

$$\varphi(1) = 0 \quad \text{и} \quad \varphi'(x) = \frac{(q-2)\,q}{2}\, x^{q-1} - \frac{q\,(q-1)}{2}\, x^{q-2} + \frac{q}{2}.$$

Так как $\varphi'(1) = 0$ и

$$\varphi''(x) = \frac{q\,(q-1)\,(q-2)}{2}\, x^{q-3}(x-1) \leqslant 0 \qquad \forall x \leqslant 1,$$

то $\varphi'(x)$ убывает на $(-\infty, 1]$ и поэтому $\varphi'(x) \geqslant \varphi'(1) = 0$ $\forall x \leqslant 1$, т. е. $\varphi(x)$ возрастает на $(-\infty, 1]$. Но тогда $\varphi(x) \leqslant \varphi(1) = 0$ $\forall x \in (-\infty, 1]$.

2. Пусть, наконец, $x \in [1, \infty)$. Тогда неравенство (5.2) принимает вид:

$$x^q - 1 \leqslant \frac{q}{2}\,(x-1)\,(x^{q-1}+1) = \frac{q}{2}\,(x^q + x - x^{q-1} - 1)$$

или

$$\frac{q-2}{2}\, x^q - \frac{q}{2}\, x^{q-1} + \frac{q}{2}\, x - \frac{q-2}{2} \geqslant 0. \tag{5.4}$$

Обозначим левую часть (5.4) через $\psi(x)$. Нужно доказать, что $\psi(x) \geqslant 0$. Так как (см. пункт 1) $\psi''(x) = 2^{-1} q\,(q-1)\,(q-2)\, x^{q-3}(x-1) \geqslant 0$ $\forall x \geqslant 1$, то $\psi'(x)$ возрастает на $[1,\infty)$ и поэтому $\psi'(x) \geqslant \psi'(1) = 0$ $\forall x \geqslant 1$, т. е. и $\psi(x)$ возрастает на $[1,\infty)$. Значит, $\psi(x) \geqslant \psi(1) = 0$ $\forall x \in [1,\infty)$. □

Интересно отметить, что при $q = 3$ неравенство (5.1) сводится к очевидному неравенству $(t-s)^2 \geqslant 0$.

Лемма 5.2. *Пусть $q > 1$ — нечетное число. Тогда для любых чисел $t, s \in \mathbb{R}$ справедливо неравенство*

$$|t-s|^q \leqslant 2^{q-1}\, |t^q - s^q|. \tag{5.5}$$

Доказательство. Так как при $s = 0$ неравенство (5.5) очевидно, то считаем далее $s \neq 0$. Разделим обе части (5.5) на $|s|^q$ и положим затем $t/s = x$. Тогда (5.5) примет вид:

$$|x-1|^q \leqslant 2^{q-1}\,|x^q - 1|. \tag{5.6}$$

Итак, достаточно доказать неравенство (5.6) для любого нечетного $q > 1$ и любого $x \in \mathbb{R}$. Обозначим разность левой и правой части (5.6) через $r(x)$. Нужно доказать, что $r(x) \leqslant 0$. Рассмотрим два случая.

1. Пусть $x \in (-\infty, 1]$. Тогда $r(x) = (1-x)^q - 2^{q-1}\,(1-x^q)$.

Если $x \in (-\infty, -1]$, то $r'(x) = q\,x^{q-1}\,[2^{q-1} - (1-1/x)^{q-1}] \geqslant 0$ и, значит, $r(x) \leqslant r(-1) = 0$ — что и требовалось.

Если $x \in [-1, 1]$, то $r'(x) = q\,[(2\,x)^{q-1} - (1-x)^{q-1}]$ и $r'(x) = 0$ лишь при $x = 1/3$. Так как $r'(0) = -q < 0$ и $r'(1/2) = q\,[1 - (1/2)^{q-1}] > 0$, то $x = 1/3$ есть точка минимума функции $r(x)$, причем это единственная ее точка экстремума на отрезке $[-1, 1]$. Поскольку $r(\mp 1) = 0$ и $r(1/3) = (2/3)^q\,[1 - (3^q - 1)/2] < 0$, то $r(x) \leqslant 0$.

2. Пусть, наконец, $x \in [1, \infty)$. Тогда $r(x) = (x-1)^q - 2^{q-1}(x^q - 1)$. Ясно, что $r(1) = 0$ и $r'(x) = q\,x^{q-1}\,[(1-1/x)^{q-1} - 2^{q-1}] < 0$6 так как $q - 1 \geqslant 2$ — четное число. Значит, $r(x) \leqslant 0$ $\forall x \in [1, \infty)$. □

Следствие 5.1. *Пусть $q > 1$ — нечетное число. Тогда для любых чисел $t, s \in \mathbb{R}$ справедливо неравенство*

$$(t^q - s^q)\,(t-s) \geqslant 2^{1-q}|t-s|^{q+1}. \tag{5.7}$$

Доказательство. Так как при нечетном $q > 1$ функция $y = x^q$ возрастает, то $(t^q - s^q)\,(t-s) \geqslant 0$ $\forall t, s \in \mathbb{R}$. Значит (5.7) равносильно неравенству $|(t^q - s^q)\,(t-s)| \geqslant 2^{1-q}|t-s|^{q+1}$ или $|t^q - s^q| \geqslant 2^{1-q}|t-s|^q$, которое, в свою очередь, равносильно доказанному неравенству (5.5). □

Интересно отметить, что при $s = -t$ неравенство (5.5) обращается в равенство, а при $q = 3$ неравенство (5.5) сводится к очевидному неравенству $0 \leqslant (t-s)^2$.

Прежде чем приступить к изложению основных результатов данного пункта, приведем необходимые определения и вспомогательные утверждения.

Определение 5.1. Банахово пространство X называется *строго выпуклым*, если $\forall u, v \in X$ из того, что $u \neq v$, $\|u\| \leqslant 1$, $\|v\| \leqslant 1$ следует, что $\|u + v\| < 2$.

Определение 5.2. Оператор $J : X \to X^*$, где X^* строго выпуклое пространство, называется *дуализующим отображением*, если для любого $u \in X$ выполняются равенства $\langle Ju, u\rangle = \|u\|^2 = \|Ju\|_*^2$.

Заметим, что условие строгой выпуклости сопряженного пространства X^* в определении 5.2 обеспечивает (см. [8, с. 312-313]) единственность дуализующего отображения $J : X \to X^*$, причем [6, с. 115] J является потенциальным оператором с потенциалом $f(u) = \dfrac{1}{2}\,\|u\|^2$.

Далее нам понадобится следующая теорема, являющаяся непосредственным следствием более общего результата, доказанного в [8, теорема 4.2].

Теорема 5.1. *Пусть X — вещественное рефлексивное банахово пространство и $A : X \to X^*$ — хеминепрерывный равномерно монотонный коэрцитивный оператор. Тогда уравнение $Au = f$ имеет единственное решение $u^* \in X$ при любом $f \in X^*$. Кроме того, если X и X^* — строго выпуклые пространства, а оператор A является потенциальным ограниченно Липшиц-непрерывным, то последовательность $u_{n+1} = u_n - \delta_n \cdot J^*(Au_n - f)$, где $\delta_n = \min\{1, 2/[\varepsilon + \mu(\|u_n\| + \|Au_n - f\|_*)]\}$, $n = 0, 1, 2, 3, \ldots$, $J^* : X^* \to X$ — дуализующее отображение для X^*, $\varepsilon > 0$ — произвольное число, сходится к u^* по норме пространства X.*

Доказательство. Существование и единственность решения u^* вытекают из теоремы Браудера—Минти, а сильная сходимость последовательности $\{u_n\}$ к u^* по указанной схеме — из [8, теорема 4.2, с. 122] и [8, замечание 4.13, с. 125], поскольку всякий равномерно монотонный оператор является строго монотонным оператором и обладает (S)-свойством [8, с. 80-81]. □

Указанный в теореме 5.1 способ нахождения решения u^* известен [8] как метод *наискорейшего* спуска (или *градиентный* метод, так как $J^*v = \|v\|_* \mathrm{grad}\,\|v\|_*\ \forall v \in X^*$).

Сформулируем и докажем теперь основной результат данного пункта.

Теорема 5.2. *Пусть $p \geqslant 4$ — четное число и $0 < \alpha < 1$. Тогда при любом $f(x) \in L_{p'}(a,b)$ уравнение*

$$u^{p-1}(x) + \int_a^b \frac{u(s)}{|s-x|^{1-\alpha}}\,ds = f(x) \tag{5.8}$$

имеет единственное решение $u^*(x) \in L_p(a,b)$. Это решение можно найти методом последовательных приближений по формуле

$$u_{n+1} = u_n - \delta_n \,\|Au_n - f\|_{p'}^{2-p'}\,|Au_n - f|^{p'-2}[Au_n - f], \tag{5.9}$$

где $n = 0,1,2,3,\ldots,\ \ u_0(x) \in L_p(a,b)$ — любая функция, $Au = \rho \cdot u^{p-1} + I^\alpha u$,

$$\delta_n = \min\left\{1,\ \frac{2}{\varepsilon + (p-1)\,\left(\|u_n\|_p + \|Au_n - f\|_{p'}\right)^p + n(\alpha)\,(b-a)^{[p(1+\alpha)-2]/p}}\right\},$$

$\varepsilon > 0$ — произвольное число.

Доказательство. Запишем уравнение (5.8) в операторном виде:

$$Au = f, \qquad \text{где} \quad Au = u^{p-1} + I^\alpha u.$$

Поскольку $\forall u(x) \in L_p(a,b)$ имеем, что $u^{p-1}(x) \in L_{p'}(a,b)$, то в силу леммы 2.1 оператор A действует из $L_p(a,b)$ в сопряженное с ним пространство $L_{p'}(a,b)$. Так как p — четное число и оператор I^α строго положителен, то оператор A является строго монотонным и коэрцитивным. Значит, по теореме Браудера—Минти уравнение (5.8) имеет единственное решение $u^*(x) \in L_p(a,b)$. Покажем, что это решение можно найти по формуле (5.9). Для этого заметим, что пространства $L_p(a,b)$ при $1 < p < \infty$ являются строго выпуклыми и дуализующее отображение J^* для пространства $L_{p'}(a,b)$ имеет вид:

$$(J^*w)(x) = \|w\|_{p'}^{2-p'}\,|w(x)|^{p'-2}\,w(x). \tag{5.10}$$

Далее в силу интегрального неравенства Минковского $\forall u(x), v(x) \in L_p(a,b)$ имеем

$$\|Au - Av\|_{p'} \leqslant \|u^{p-1} - v^{p-1}\|_{p'} + \|I^\alpha(u-v)\|_{p'} = I_1 + I_2.$$

Оценим I_1. Так как в силу леммы 5.1 $|t^{p-1} - s^{p-1}| \leqslant \dfrac{p-1}{2}\,|t-s|\,(t^{p-2} + s^{p-2})$ для любых $t, s \in \mathbb{R}$, то

$$I_1 \leqslant \frac{p-1}{2}\,\left(\int_a^b |u(x) - v(x)|^{p'} |u^{p-2}(x) + v^{p-2}(x)|^{p'} dx\right)^{1/p'} \leqslant$$

(применяем сначала неравенство Гельдера с показателями p/p' и $p/(p-p')$, а затем ко второму сомножителю применяем неравенство Минковского)

$$\leqslant \frac{p-1}{2}\,\|u-v\|_p\,\left(\|u\|_p^{p-2} + \|v\|_p^{p-2}\right) \leqslant (p-1)\,R^{p-2}\,\|u-v\|_p,$$

где $R = \max\,(\|u\|_p, \|v\|_p)$. Оценка I_2 содержится в лемме 2.1.

Таким образом, с учетом леммы 2.1 имеем

$$\|Au - Av\|_{p'} \leqslant \mu(R) \cdot \|u-v\|_p,$$

где $\mu(R) = (p-1)\,R^{p-2} + n(\alpha)\,(b-a)^{[p(1+\alpha)-2]/p}$ — возрастающая на $[0,\infty)$ функция. Значит, A — ограниченно Липшиц-непрерывный оператор.

Далее, используя положительность оператора I^α и неравенство (5.7) при $q = p-1$, имеем

$$\langle Au - Av, u - v\rangle \geqslant \int_a^b \left[u^{p-1}(x) - v^{p-1}(x)\right]\,\left[u(x) - v(x)\right] dx \geqslant$$

$$\geqslant 2^{2-p} \int\limits_a^b |u(x) - v(x)|^p dx = \beta\ (\|u - v\|_p)\,,$$

где $\beta(s) = 2^{2-p}s^p$ — строго возрастающая на $[0, \infty)$ функция такая, что $\beta(0) = 0$, т. е. A — равномерно монотонный оператор.

Наконец, поскольку $Fu = u^{p-1}$ и I^α — потенциальные операторы, то оператор A также является потенциальным. Значит, на основании теоремы 5.1 последовательность (5.9) сходится к $u^*(x)$ по норме пространства $L_p(a, b)$, что и требовалось доказать. $\square$

В заключение отметим, что дискретные аналоги уравнений (3.1), (3.7), (3.8) и (5.8) рассмотрены в статье [4].

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 13-01-00422).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Асхабов С. Н.* Сингулярные интегральные уравнения и уравнения типа свертки с монотонной нелинейностью. — Майкоп: Майкопский гос. технол. ун-т, 2004.
2. *Асхабов С. Н.* Нелинейные уравнения типа свертки. — М.: Физматлит, 2009.
3. *Асхабов С. Н.* Нелинейные уравнения с весовыми операторами типа потенциала в пространствах Лебега// Вестн. Самарского гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. — 2011. — № 4 (25). — С. 160–164.
4. *Асхабов С. Н.* Приближенное решение нелинейных дискретных уравнений типа свертки// Соврем. мат. Фундам. направл. — 2012. — *45*. — С. 18–31.
5. *Асхабов С. Н.* Нелинейные интегральные уравнения с ядрами типа потенциала на полуоси// Владикавказ. мат. ж. — 2013. — *15*, № 4. — С. 3–11.
6. *Вайнберг М. М.* Вариационные методы исследования нелинейных операторов. — М.: ГИТТЛ, 1956.
7. *Вайнберг М. М.* Вариационный метод и метод монотонных операторов в теории нелинейных уравнений. — М.: Наука, 1972.
8. *Гаевский Х., Грегер К., Захариас К.* Нелинейные операторные уравнения и операторные дифференциальные уравнения. — М.: Мир, 1978.
9. *Забрейко П. П., Кошелев А. И. и др.* Интегральные уравнения. — М.: Наука, 1968.
10. *Качуровский Р. И.* Нелинейные монотонные операторы в банаховых пространствах// Усп. мат. наук. — 1968. — *23*, № 2. — С. 121–168.
11. *Мороз В. Б.* Уравнения Гаммерштейна с ядрами типа потенциала Рисса// Труды межд. конф. «Краевые задачи, специальные функции и дробное исчисление». — Минск, Беларусь, 16–20 февр. 1996. — С. 249–254.
12. *Нахушев А. М.* Дробное исчисление и его применение. — М.: Физматлит, 2003.
13. *Полянин А. Д., Манжиров А. В.* Справочник по интегральным уравнениям. — М.: Наука, 1978.
14. *Самко С. Г., Килбас А. А., Маричев О. И.* Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения. — Минск: Наука и техника, 1987.
15. *Эдвардс Р.* Ряды Фурье в современном изложении. Т. 1. — М.: Мир, 1985.
16. *Brezis H., Browder F. E.* Some new results about Hammerstein equations// Bull. Am. Math. Soc. (N.S.) — 1974. — *80* (*3*). — С. 567–572.
17. *Brezis H., Browder F. E.* Nonlinear integral equations and systems of Hammerstein type// Adv. Math. — 1975. — *18*. — С. 115–147.
18. *Porter D., Stirling D.* Integral equations. A practical treatment, from spectral theory to applications. — Cambridge: Cambr. Univ. Press, 1990.

Султан Нажмудинович Асхабов
Чеченский государственный университет
364907, г. Грозный, ул. Шерипова, д. 32
E-mail: askhabov@yandex.ru

UDC 517.988.63

Nonlinear Integral Equations with Kernels of Potential Type on a Segment

© 2016 **S. N. Askhabov**

Abstract. We study various classes of nonlinear equations containing an operator of potential type (Riesz potential). By the monotone operators method in the Lebesgue spaces of real-valued functions $L_p(a,b)$ we prove global theorems on existence, uniqueness, estimates, and methods of obtaining of their solutions. We consider corollaries as applications of our results.

REFERENCES

1. S. N. Askhabov, *Singulyarnye integral'nye uravneniya i uravneniya tipa svertki s monotonnoy nelineynost'yu* [Singular Integral Equations and Equations of Convolution Type with Monotone Nonlinearity], Maykopskiy gos. tekhnol. univ. [Maykop State Techn. Univ.], Maykop, 2004 (in Russian).
2. S. N. Askhabov, *Nelineynye uravneniya tipa svertki* [Nonlinear Equations Convolution of Type], Fizmatlit, Moscow, 2009 (in Russian).
3. Askhabov S. N., "Nelineynye uravneniya s vesovymi operatorami tipa potentsiala v prostranstvakh Lebega" [Nonlinear equations with weight operators of potential type in Lebesgue spaces], *Vestn. Samarskogo gos. tekhn. un-ta. Ser. Fiz.-mat. nauki* [Bull. Samara State Techn. Univ. Phys.-Math. Sci.], 2011, No. 4 (25), 160–164 (in Russian).
4. Askhabov S. N., "Priblizhennoe reshenie nelineynykh diskretnykh uravneniy tipa svertki" [Approximate solution of nonlinear discrete equations of convolution type], *Sovrem. mat. Fundam. napravl.* [Contemp. Math. Fundam. Directions], 2012, **45**, 18–31 (in Russian).
5. Askhabov S. N., "Nelineynye integral'nye uravneniya s yadrami tipa potentsiala na poluosi" [Nonlinear integral equations with kernels of convolution type on a semiaxis], *Vladikavkaz. mat. zh.* [Vladikavkaz Math. J.], 2013, **15**, No. 4, 3–11 (in Russian).
6. M. M. Vaynberg, *Variatsionnye metody issledovaniya nelineynykh operatorov* [Variational Methods of Investigation of Nonlinear Operators], GITTL, Moscow, 1956 (in Russian).
7. M. M. Vaynberg, *Variatsionnyy metod i metod monotonnykh operatorov v teorii nelineynykh uravneniy* [Variational Method and Monotone Operators Method in Theory of Nonlinear Equations], Nauka, Moscow, 1972 (in Russian).
8. Kh. Gaevskiy, K. Greger, and K. Zakharias, *Nelineynye operatornye uravneniya i operatornye differentsial'nye uravneniya* [Nonlinear Operator Equations and Operator Differential Equations], Mir, Moscow, 1978 (in Russian).
9. P. P. Zabreyko, A. I. Koshelev, etc., *Integral'nye uravneniya* [Integral Equations], Nauka, Moscow, 1968 (in Russian).
10. R. I. Kachurovskiy, "Nelineynye monotonnye operatory v banakhovykh prostranstvakh" [Nonlinear monotone operators in Banach spaces], *Usp. mat. nauk* [Progress Math. Sci.], 1968, **23**, No. 2, 121–168 (in Russian).
11. V. B. Moroz, "Uravneniya Gammershteyna s yadrami tipa potentsiala Rissa" [Hammerstein Equations with kernels of Riesz potential type], Abstr. Int. Conf. "Kraevye zadachi, spetsial'nye funktsii i drobnoe ischislenie" [Boundary-value problems, special functions, and fractional calculus], Minsk, Belarus, 16–20 Feb. 1996, 249–254 (in Russian).
12. A. M. Nakhushev, *Drobnoe ischislenie i ego primenenie* [Fractional Calculus and Its Applications], Fizmatlit, Moscow, 2003 (in Russian).
13. A. D. Polyanin and A. V. Manzhirov, *Spravochnik po integral'nym uravneniyam* [Handbook on Integral Equations], Nauka, Moscow, 1978 (in Russian).
14. S. G. Samko, A. A. Kilbas, and O. I. Marichev, *Integraly i proizvodnye drobnogo poryadka i nekotorye ikh prilozheniya* [Integrals and Derivatives of Fractional Order and Some Their Applications], Nauka i tekhnika, Minsk, 1987 (in Russian).
15. R. Edvards, *Ryady Fur'e v sovremennom izlozhenii. T.* 1 [Fourier Series in Contemporary Exposition. Vol. 1], Mir, Moscow, 1985 (in Russian).

16. H. Brezis and F. E. Browder, “Some new results about Hammerstein equations,” *Bull. Am. Math. Soc. (N.S.)*, 1974, **80** (**3**), 567–572.
17. H. Brezis and F. E. Browder, “Nonlinear integral equations and systems of Hammerstein type,” *Adv. Math.*, 1975, **18**, 115–147.
18. D. Porter and D. Stirling, *Integral Equations. A Practical Treatment, from Spectral Theory to Applications*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1990.

S. N. Askhabov
Chechen State University, Grozny, Russia
E-mail: askhabov@yandex.ru