Современная математика. Фундаментальные направления. Том 59 (2016). С. 192–200

УДК 517.984.5

МАГНИТНЫЙ ОПЕРАТОР ШРЕДИНГЕРА С ТОЧКИ ЗРЕНИЯ НЕКОММУТАТИВНОЙ ГЕОМЕТРИИ

© 2016 г. **А. Г. СЕРГЕЕВ**

Аннотация. Мы приводим интерпретацию магнитного оператора Шредингера в терминах некоммутативной геометрии. В частности, спектральные свойства оператора переформулируются в терминах C^*-алгебры. Используя эту переформулировку, можно применять такую технику некоммутативной геометрии, как когомология Хохшильда, к изучению свойств магнитного оператора Шредингера. Показано, что эта идея может быть применена к целочисленному квантовому эффекту Холла.

СОДЕРЖАНИЕ

В этой статье мы даем интерпретацию магнитного оператора Шредингер в терминах некоммутативной геометрии (см., например, [3]). Другими словами, мы переформулируем некоторые основные свойства этого оператора в терминах C^*-алгебры линейных ограниченных операторов в гильбертовом пространстве. Данную переформулировку можно рассматривать как вариант некоммутативной теории Блоха. Попытки построить такое обобщение классической теории Блоха уже предпринимались (см., например, [4]). В нашем подходе мы в основном следуем Шубину и др. [6].

Используя эту переформулировку, можно применять такую технику некоммутативной геометрии, как когомология Хохшильда, к изучению свойств магнитного оператора Шредингера. В качестве приложения рассматривается целочисленный квантовый эффект Холла, демонстрирующий квантование проводимости Холла при очень низких температурах (около абсолютного нуля). В терминах некоммутативной геометрии квантование проводимости Холла означает целочисленность некоторого циклического коцикла Хохшильда.

Приведем краткое описание работы. В разделе 2 мы кратко опишем классическую теорию Блоха для периодического оператора Шредингера (см. более полное изложение в [2]). В разделе 3 мы вводим магнитный оператор Шредингера, инвариантный относительно магнитных сдвигов. Эти сдвиги порождают проективное представление дискретной группы симметрий. В разделе 4 дается интерпретация этого оператора в терминах C^*-алгебры наблюдаемых. В разделе 5 мы вводим цикличную когомологию Хохшильда и строим замкнутые коциклы Хохшильда на алгебре наблюдаемых. В заключительном разделе 6 мы показываем, как предложенная конструкция может быть применена к дискретному квантовому эффекту Холла.

Данная работа частично поддержана грантом РФФИ 13-01-00622, программой ведущих научных школ (НШ-2928.2012.1), а также научной программой Президиума РАН «Нелинейная динамика».

1. Кратко о некоммутативной геометрии

Основы некоммутативной геометрии лежат в коммутативных банаховых алгебрах и их связях с топологией, определенной Гельфандом, Наймарком, Шиловым, Мазуром и другими математиками в середине XX в. Центральной идеей их подхода была переформулировка основных топологических свойств компактов в терминах банаховых алгебр непрерывных функций над такими пространствами.

Более строго, предположим, что X — компактное хаусдорфово топологическое пространство и $A = C(X)$ — алгебра непрерывных функций над X с естественной топологией, задаваемой sup-нормой. Это коммутативная банахова алгебра, которая также является *алгеброй с единицей*, т. е. содержит единичный элемент. Более того, это C^**-алгебра*, что означает, что она является *алгеброй с инволюцией*, т. е. имеет инволюцию (задаваемую комплексным сопряжением) и удовлетворяет следующему свойству:

$$\|a^2\| = \|a^*a\|$$

для всех $a \in A$.

Обозначим через $M(A)$ *спектр* (множество *характеров*) алгебры A, т. е. гомоморфизмов алгебры $\mu : A \to \mathbb{C}$. Другими словами, любой характер μ — это ненулевой линейный функционал над A, удовлетворяющий свойству мультипликативности: $\mu(ab) = \mu(a)\mu(b)$ для любых $a, b \in A$ и переводящий единицу 1_A в $1 \in \mathbb{C}$.

Обычным примером характера над алгеброй $A = C(X)$ является отображение $\varepsilon_x : f \longmapsto f(x)$, где $f \in A$ и x — фиксированная точка в X.

Снабдим $M(A) \subset A^*$ слабой* топологией сопряженного пространства A^*, т. е. топологией поточечной сходимости на элементах A. В случае $A = C(X)$ пространство A^* состоит из комплексных мер над X со стандартной топологией. Из теоремы Банаха—Алаоглу следует, что во введенной топологии спектр $M(A)$ компактен.

Для любой банаховой алгебры A с единицей мы можем рассмотреть *преобразование Гельфанда*

$$\mathcal{G} : A \longrightarrow C(M(A)),$$

задаваемое формулой

$$A \ni a \longmapsto \hat{a} : M(A) \to \mathbb{C} \quad \text{где } \hat{a}(\mu) := \mu(a).$$

Это отображение непрерывно и *-гомоморфно, если алгебра A инволютивна. Последнее означает, что оно коммутирует с инволюциями в A и $C(M(A))$. Более того, теорема Гельфанда—Наймарка гарантирует, что это изометрический *-изоморфизм A на $C(M(A))$.

Непрерывное отображение $f : X \to Y$ компактных топологических пространств порождает гомоморфизм $Cf : C(Y) \to C(X)$ их алгебр непрерывных функций, действующий по формуле: $\varphi \mapsto \varphi \circ f$. Это унитальный (т. е. сохраняющий единицу) *-гомоморфизм, имеющий следующее функториальное свойство: если существует другое непрерывное отображение $g : Y \to Z$ компактных топологических пространств, то $C(g \circ f) = Cf \circ Cg$.

Соответствие

$$F : X \longmapsto C(X), \quad f \longmapsto Cf$$

определяет контравариантный функтор из категории компактных хаусдорфовых топологических пространств (с морфизмами, задаваемые непрерывными отображениями) в категорию коммутативных C^*-алгебр с единицей (с морфизмами, задаваемыми унитальными *-гомоморфизмами).

Обратный функтор Φ определяется следующим образом. Пусть $\varphi : A \to B$ — унитальный *-гомоморфизм коммутативных C^*-алгебр с единицей. Обозначим через $M\varphi : M(B) \to M(A)$ отображение, задаваемое формулой $\mu \mapsto \mu \circ \varphi$. Оно непрерывно и имеет функториальное свойство: если $\psi : B \to C$ — другой унитальный *-гомоморфизм коммутативных C^*-алгебр с единицей, то $M(\psi \circ \varphi) = M\varphi \circ M\psi$.

Другими словами, построенные функторы дают эквивалентность построенных категорий

$$\left\{\begin{matrix}\text{компактные топологические}\\ \text{пространства}\end{matrix}\right\} \longleftrightarrow \left\{\begin{matrix}\text{коммутативные } C^*\text{-алгебры}\\ \text{с единицей}\end{matrix}\right\}.$$

Более того, две коммутативные C^*-алгебры с единицей изоморфны тогда и только тогда, когда их спектры гомеоморфны. Отсюда следует, что группа автоморфизмов $\operatorname{Aut} A$ коммутативной C^*-алгебры с единицей A изоморфна группе $\operatorname{Homeo}(M(A))$ гомеоморфизмов ее спектра.

Построенная эквивалентность позволяет установить словарь соответствия топологических терминов алгебраическим:

топология	$\longleftrightarrow$	алгебра
гомеоморфизм	$\longleftrightarrow$	автоморфизм
компактность	$\longleftrightarrow$	унитальность
компактификация	$\longleftrightarrow$	добавление единицы
открытое подмножество	$\longleftrightarrow$	идеал
замкнутое подмножество	$\longleftrightarrow$	фактор-алгебра
метризуемость	$\longleftrightarrow$	сепарабельность
связность	$\longleftrightarrow$	отсутствие нетривиальных идемпотентов

Еще один пример, демонстрирующий, как топологические понятия преобразуются в алгебраические. Покажем алгебраическую интерпретацию комплексного векторного расслоения над компактным многообразием, задаваемое теоремой Серра—Суона.

Пусть $E \to M$ — комплексное векторное расслоение над компактным топологическим многообразием M. Тогда $\Gamma(M, E) \equiv \Gamma(E)$ — множество его непрерывных сечений, — является правым модулем над коммутативной банаховой алгеброй $C(M)$ с действием

$$(sa)(x) := s(x)a(x) \quad \text{при } s \in \Gamma(E),\ a \in C(M).$$

Это контравариантный функтор из категории комплексных векторных расслоений над M в категорию правых модулей над алгеброй $C(M)$. Действительно, каждому морфизму расслоения $\tau : E \to E'$ можно сопоставить гомоморфизм $C(M)$-модулей

$$\Gamma\tau : \Gamma(E) \longrightarrow \Gamma(E'),$$

определяемый по формуле $(\Gamma\tau)s = \tau \circ s$. Этот гомоморфизм линеен, т. е. $(\Gamma\tau)(sa) = (\Gamma\tau)(s)a$ при $a \in C(M)$. Более того, функтор Γ переводит операции сопряжения, прямой суммы и тензорного произведения на расслоениях в соответствующие операции на $C(M)$-модулях.

Опишем, какие модули соответствуют комплексным векторным расслоениям над M при этом соответствии.

Правый A-модуль $\mathcal{P}$ над алгеброй A называется *проективным,* если он является прямым слагаемым в свободном A-модуле. Покажем, что $C(M)$-модуль $\Gamma(M, E) \equiv \Gamma(E)$ — проективный. В самом деле, в силу хорошо известного результата из теории векторных расслоений (см., например, [5]), для заданного расслоения $E \to M$ можно найти дополнительное векторное расслоение $E' \to M$ со свойством $E \oplus E' \cong M \times \mathbb{C}^N$. Так как

$$\Gamma(E) \oplus \Gamma(E') = \Gamma(M \times \mathbb{C}^N) = C(M)^N,$$

то $C(M)$-модуль $\Gamma(E)$ является прямым слагаемым в свободном $C(M)$-модуле $C(M)^N$.

Из этого построения также очевидно, что $C(M)$-модуль $\Gamma(E)$ — конечно порожденный. В соответствии с теоремой Серра—Суона эти два свойства полностью определяют модули, соответствующие комплексным векторным расслоениям над M. Более точно, справедлива

Теорема 1.1 (Серр—Суон). *Функтор Γ устанавливает эквивалентность следующих категорий*:

$$\left\{\begin{matrix}\textit{комплексные векторные}\\ \textit{расслоения над компакт-}\\ \textit{ным многообразием } M\end{matrix}\right\} \longleftrightarrow \left\{\begin{matrix}\textit{конечно порожденные}\\ \textit{проективные модули}\\ \textit{над алгеброй } C(M)\end{matrix}\right\}.$$

Основная задача некоммутативной геометрии — обобщить описанное соответствие между топологией и коммутативными банаховыми алгебрами на анализ и дифференциальную геометрию. Другими словами, мы хотим перевести основные понятия топологии, анализа и дифференциальной геометрии на алгебраический язык. Однако, чтобы достичь этой цели, мы не можем, как раньше, ограничиться случаем коммутативных банаховых алгебр, — мы должны использовать некоммутативные банаховы алгебры, более точно, операторные C^*-алгебры.

Возникает естественный вопрос: зачем нам нужен такой перевод? Вот один из возможных ответов. Квантовая теория поля, и теория струн в частности, до сих пор остаются в значительной мере разделами физики без надежного математического основания. В отличие от квантовой механики, которая может рассматриваться (с небольшими оговорками) как строго математическая теория, многие результаты теории квантового поля и теории струн основываются только на «физическом уровне» строгости и не имеют корректного математического доказательства. Мы считаем, что это связано с отсутствием подходящего математического языка для описания задач, возникающих в этих теориях. В частности, этот язык должен служить рабочим аппаратом в дифференциальной геометрии гладких бесконечномерных многообразий. Классические понятия дифференциальной геометрии, такие как связность, кривизна и т. д., не переносятся на бесконечные размерности. Например, различные определения связности, которые эквивалентны в конечномерном случае, имеют различные значения для бесконечномерных многообразий. Это еще более заметно в случае кривизны, которая вообще не может быть корректно определена в бесконечномерных многообразиях по аналогии с конечномерным случаем.

В этой ситуации кажется естественным выбрать наиболее «грубый» язык для описания основных понятий анализа и дифференциальной геометрии, а именно алгебраический. Этот язык имеет наибольшую возможность выдержать перенос на конечномерный случай. Одной из целей некоммутативной геометрии является создание «словаря», переводящего основные понятия топологии, анализа и геометрии в алгебраические термины, используемые в конечномерном случае.

В этой работе мы пытаемся сделать это для оператора Шредингера, переводя его спектральные свойства на язык некоммутативной геометрии. В качестве примера применения такого перевода мы приводим интерпретацию целочисленного квантового эффекта Холла в терминах когомологии Хохшильда.

2. Классическая теория Блоха (периодический случай)

Физические корни теории Блоха лежат в теории кристаллов. Симметрии кристалла описываются его *решеткой Браве*, которая является решеткой Γ в пространстве $\mathbb{R}^d$ с $d = 3$. Математически Γ — это дискретная абелева группа, изоморфная $\mathbb{Z}^d$, действующая в $\mathbb{R}^d$ как группа переносов.

Поведение свободных электронов в кристалле описывается оператором Шредингера

$$H = -\Delta + V$$

с потенциалом V, задаваемым ограниченной функцией, инвариантной относительно Γ.

Операторы сдвига T_γ, $\gamma \in \Gamma$, определяют унитарное представление группы Γ в пространстве $L^2(\mathbb{R}^d)$, а оператор Шредингера H коммутирует со всеми операторами T_γ.

Обозначим через Γ' сопряженную поверхность в сопряженном пространстве $(\mathbb{R}^d)'$, а именно:

$$\Gamma' = \{k \in (\mathbb{R}^d)' : (k, \gamma) \in 2\pi\mathbb{Z} \quad \text{для некоторого } \gamma \in \Gamma\}.$$

Ее фундаментальная область называется *зоной Бриллюэна*.

Собственные функции Блоха оператора H — это функции вида

$$\psi_{jk}(x) = e^{i(k,x)}\varphi_{jk}(x),$$

где k принадлежат зоне Бриллюэна и φ_{jk} — собственные функции оператора H_k, определенного соотношением

$$H\left(e^{i(k,x)}\varphi(x)\right) = e^{i(k,x)}H_k\varphi(x).$$

Область определения оператора H_k совпадает с подпространством

$$D(H_k) = \left\{\varphi(x) = \sum_{\gamma' \in \Gamma'} c_{\gamma'} e^{i(\gamma', x)} : \sum_{\gamma' \in \Gamma'} (1 + |\gamma'|^2)|c_{\gamma'}|^2 < \infty\right\}.$$

Оператор H_k имеет дискретный спектр, а его собственные функции φ_{jk} образуют полную ортогональную систему в пространстве $\mathcal{H}_0 = L^2(\mathbb{R}^d/\Gamma)$.

Спектр оператора Шредингера H состоит из конечного числа непересекающихся интервалов

$$\sigma(H) = [c_1, d_1] \cup [c_2, d_2] \cup \ldots [c_l, d_l] \cup [c_{l+1}, +\infty),$$

и собственные функции Блоха образуют полную ортогональную систему обобщенных собственных функций оператора H.

3. Магнитная теория Блоха

Предположим, что задана вещественная замкнутая 2-форма B в $\mathbb{R}^d$, инвариантная относительно группы Γ. Эта форма будет играть роль магнитного поля. Тогда

$$B = dA$$

для некоторой вещественной 1-формы A, играющей роль электромагнитного векторного потенциала.

Магнитный оператор Шредингера — это оператор вида

$$H = -(d + iA)^*(d + iA) + V.$$

Как и в периодическом случае, мы можем построить операторы, называемые магнитными операторами сдвига, которые коммутируют с магнитным оператором Шредингера. А именно, т. к. магнитная форма B инвариантна относительно Γ, имеем:

$$0 = B - \gamma \cdot B = d(A - \gamma \cdot A)$$

для некоторого $\gamma \in \Gamma$. Иначе говоря, 1-форма $A - \gamma \cdot A$ замкнута, откуда следует, что она может быть представлена в виде

$$A - \gamma \cdot A = dh_\gamma,$$

где h_γ — гладкие вещественные функции, определенные с точностью до константы.

Магнитный оператор Шредингера H инвариантен относительно *магнитных сдвигов* вида

$$T_\gamma : f \longmapsto T_\gamma f = e^{ih_\gamma} \gamma \cdot f.$$

В отличие от периодического случая, магнитные сдвиги T_γ удовлетворяют соотношениям

$$T_{\gamma_1} T_{\gamma_2} = \sigma(\gamma_1, \gamma_2) T_{\gamma_1 \gamma_2}, \text{ где } \quad \sigma(\gamma_1, \gamma_2) \in \mathrm{U}(1).$$

Иначе говоря, они определяют унитарное проективное представление группы Γ в пространстве $L^2(\mathbb{R}^d)$. Если форма A периодична относительно Γ, то это проективное представление переходит в прямое представление.

4. C^*-алгебры наблюдаемых

При обычных предположениях о потенциале V (например, $V = |df|^2$, где f — функция Морса в $\mathbb{R}^d$, инвариантная относительно Γ) магнитный оператор Шредингера H является самосопряженным эллиптическим оператором второго порядка в $L^2(\mathbb{R}^d)$. Его спектральные проекторы — это ограниченные операторы в $L^2(\mathbb{R}^d)$, коммутирующие с магнитными сдвигами T_γ.

Это наблюдение мотивирует введение следующей операторной алгебры, связанной с H:

$$\mathcal{A}(\sigma) = \{A \text{ — ограниченный оператор в } L^2(\mathbb{R}^d), \text{ коммутирующий с } T_\gamma \text{ для любого } \gamma \in \Gamma\}.$$

Мы дадим интерпретацию этой алгебры, которая полностью определяет оператор H, в терминах группового кольца фон Неймана.

Имея проективное представление T группы Γ, можно построить естественное левое проективное представление T^L этой группы в пространстве $\ell^2(\Gamma)$, действующее по правилу:

$$T^L_\gamma f(\gamma') = f(\gamma^{-1}\gamma')\overline{\sigma}(\gamma, \gamma^{-1}\gamma'), \quad \gamma, \gamma' \in \Gamma.$$

Это представление порождает *правое групповое кольцо фон Неймана* $\mathfrak{a}^R(\sigma)$:

$$\mathfrak{a}^R(\sigma) = \{A \text{ — ограниченный оператор в } \ell^2(\Gamma), \text{ коммутирующий с } T^L_\gamma \text{ при всех } \gamma \in \Gamma\}.$$

Аналогичным образом можно построить *левое групповое кольцо фон Неймана* $\mathfrak{a}^L(\overline{\sigma})$, связанную с правым проективным представлением T^R группы Γ в пространстве $\ell^2(\Gamma)$. Это представление задается формулой

$$T^R_\gamma f(\gamma') = f(\gamma'\gamma)\sigma(\gamma, \gamma'\gamma), \quad \gamma, \gamma' \in \Gamma,$$

и *левое групповое кольцо фон Неймана*, определенное этим представлением, задается как

$$\mathfrak{a}^L(\overline{\sigma}) = \{A — \text{ограниченный оператор в } \ell^2(\Gamma), \text{ коммутирующий с } T^R_\gamma \text{ при всех } \gamma \in \Gamma\}.$$

Алгебра $\mathfrak{a}^R(\sigma)$ порождена операторами $\{T^R_\gamma : \gamma \in \Gamma\}$, а алгебра $\mathfrak{a}^L(\overline{\sigma})$ порождена операторами $\{T^L_\gamma : \gamma \in \Gamma\}$.

В пространстве $\ell^2(\Gamma)$ существует естественный ортонормальный базис $\{\delta_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$, задаваемый дельта-функцией Кронекера

$$\delta_\gamma(\gamma') = \begin{cases} 1 & \text{при } \gamma' = \gamma, \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Определим *след* на введенных групповых кольцах по формуле

$$\mathrm{tr}_{\mathfrak{a}} A := (A\delta_e, \delta_e),$$

где e — единичный элемент Γ.

Функции $\{\delta_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$ порождают *групповое кольцо* $\mathcal{C}_0(\sigma)$, состоящее из комплекснозначных финитных функций на Γ, снабженное операцией свертки в виде

$$(f * g)(\gamma) = \sum_{\gamma_1\gamma_2=\gamma} \sigma(\gamma_1, \gamma_2) f(\gamma_1) g(\gamma_2).$$

Отображения $\gamma \longmapsto T^L_\gamma$, $\gamma \longmapsto T^R_\gamma$ определяет представление групповых колец $\mathcal{C}_0(\overline{\sigma})$ и $\mathcal{C}_0(\sigma)$ соответственно в пространстве $\ell^2(\Gamma)$. Слабое пополнение образов этих отображений в пространстве $\mathcal{B}(\ell^2(\Gamma))$ ограниченных операторов в $\ell^2(\Gamma)$ совпадает соответственно с алгебрами фон Неймана $\mathfrak{a}^L(\overline{\sigma})$ и $\mathfrak{a}^R(\sigma)$, введенными выше. Пополнение этих образов в равномерной операторной топологии совпадает с C^*-алгебрами, обозначаемыми соответственно $\mathcal{C}(\overline{\sigma})$ и $\mathcal{C}(\sigma)$.

Можно также определить *групповые кольца фон Неймана с коэффициентами в произвольном комплексном гильбертовом пространстве* $\mathcal{H}$. Для этого мы просто продолжим проективные представления T^L and T^R, действующие в пространстве $\ell^2(\Gamma)$, до тензорного произведения $\ell^2(\Gamma) \otimes \mathcal{H}$, так что

$$\mathfrak{a}^L_{\mathcal{H}}(\overline{\sigma}) = \mathfrak{a}^L(\overline{\sigma}) \otimes \mathcal{B}(\mathcal{H}), \quad \mathfrak{a}^R_{\mathcal{H}}(\sigma) = \mathfrak{a}^R(\sigma) \otimes \mathcal{B}(\mathcal{H}).$$

Произвольный оператор $A \in \mathfrak{a}^L_{\mathcal{H}}(\overline{\sigma})$ представляется в виде (см. [6]):

$$A = \sum_{\gamma\in\Gamma} T^L_\gamma \otimes A(\gamma),$$

где $A(\gamma)$ — ограниченный оператор в $\mathcal{H}$ и ряд с правой стороны сходится в сильной операторной топологии.

Определим *след* на введенных алгебрах $\mathfrak{a}^L_{\mathcal{H}}(\overline{\sigma})$ и $\mathfrak{a}^R_{\mathcal{H}}(\sigma)$, положив

$$\mathrm{Tr}_{\mathcal{H}} := \mathrm{tr}_{\mathfrak{a}} \otimes \mathrm{Tr},$$

где Tr обозначает обычный след на алгебре $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ всех ограниченных операторов, принимающий конечные значения на ядерных операторах.

Мы готовы дать интерпретацию алгебры $\mathcal{A}(\sigma)$ ограниченных операторов в пространстве $L^2(\mathbb{R}^d)$, коммутирующих с магнитными сдвигами, в терминах групповых колец фон Неймана.

Для этого обозначим через F фундаментальную область группы Γ и рассмотрим гильбертово пространство

$$\mathcal{H} := L^2(F)$$

квадратично интегрируемых функций на этой области. Тогда отображение

$$W : f \longmapsto W(f) = \sum_{\gamma\in\Gamma} \delta_\gamma \otimes i^*(T_\gamma f),$$

где $i : F \hookrightarrow \mathbb{R}^d$ — естественное включение, определяет изометрию пространства $L^2(\mathbb{R}^d)$ на пространство $\ell^2(\Gamma) \otimes \mathcal{H}$. Эта изометрия порождает изоморфизм алгебры $\mathcal{A}(\sigma)$ с алгеброй $\mathfrak{a}^L_{\mathcal{H}}(\overline{\sigma})$.

Используя построенное отображение, мы можем перенести след $\mathrm{Tr}_{\mathcal{H}}$ из алгебры $\mathfrak{a}^L_{\mathcal{H}}(\overline{\sigma})$ в алгебру $\mathcal{A}(\sigma)$. При таком определении спектральные проекторы $E(\lambda)$ магнитного оператора Шредингера H будут иметь конечный след, а тогда *спектральная плотность*

$$N_H(\lambda) = \mathrm{Tr}_{\mathcal{H}} E(\lambda)$$

корректно определена. Спектр оператора Шредингера H состоит из точек роста этой функции.

Выберем в качестве *алгебры наблюдаемых* C^*-алгебру

$$\mathcal{C}(\overline{\sigma}) \otimes \mathcal{K}(\mathcal{H}),$$

где $\mathcal{K}(\mathcal{H})$ — алгебра всех компактных операторов, действующих в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$. Эта алгебра совпадает с пополнением по равномерной норме алгебраического тензорного произведения алгебры $\mathcal{C}_0(\overline{\sigma})$, определенной выше, и алгебры $\mathcal{K}(\mathcal{H})$. В частности, она содержит все операторы $A \in \mathfrak{a}^L_{\mathcal{H}}(\overline{\sigma})$ вида

$$A = \sum_{\gamma \in \Gamma} T^L_\gamma \otimes A(\gamma)$$

с коэффициентами $A(\gamma) \in \mathcal{K}(\mathcal{H})$, для которых ряд $\sum\limits_{\gamma} \|A(\gamma)\| < \infty$ сходится.

5. Когомология Хохшильда

Пространство $C^k(\mathfrak{a})$ — *цепной k-комплекс Хохшильда* алгебры $\mathfrak{a}$ — состоит из $(k+1)$-линейных функционалов на этой алгебре. Определим *кограничный оператор*

$$b_k : C^k(\mathfrak{a}) \longrightarrow C^{k+1}(\mathfrak{a})$$

формулой

$$b_k \phi(a_0, \ldots, a_{k+1}) = \sum_{i=0}^{k} (-1)^i \phi(a_0, \ldots, a_i a_{i+1}, \ldots, a_{k+1}) + (-1)^{k+1} \phi(a_{k+1} a_0, \ldots, a_k).$$

Коцепь Хохшильда $\phi \in C^k(\mathfrak{a})$ называется *циклической,* если

$$\phi(a_0, \ldots, a_k) = (-1)^k \phi(a_k, a_0, \ldots, a_{k-1}).$$

Когомологии Хохшильда алгебры $\mathfrak{a}$ определяются как

$$HH^k(\mathfrak{a}) = \mathrm{Ker}\, b_k / \mathrm{Im}\, b_{k-1}.$$

Приведем конструкцию циклических коциклов алгебры наблюдаемых. Эти коциклы могут быть построены из любого коцикла φ группы Γ, удовлетворяющего следующему условию нормализации: $\varphi(\gamma_1, \ldots, \gamma_k) = 0$, если хотя бы один элемент γ_i или произведение $\gamma_1 \ldots \gamma_k$ равны единице.

Из такого коцикла φ можно получить циклический коцикл τ_φ на алгебре $\mathcal{C}_0(\overline{\sigma})$, заданный на базисных функциях формулами

$$\tau_\varphi(\delta_{\gamma_0}, \ldots, \delta_{\gamma_k}) = \begin{cases} \varphi(\gamma_1, \ldots, \gamma_k) \mathrm{tr}_{\mathfrak{a}}(\delta_{\gamma_0} * \ldots * \delta_{\gamma_k}), & \text{если } \gamma_0 \gamma_1 \ldots \gamma_k = e, \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Построенный коцикл τ_φ может быть продолжен до циклического коцикла $\tau_\varphi \otimes \mathrm{Tr}$, определенного на гладкой подалгебре $\mathcal{C}_0(\overline{\sigma}) \otimes \mathcal{S}$ алгебры наблюдаемых $\mathcal{C}(\overline{\sigma}) \otimes \mathcal{K}(\mathcal{H})$ (см., например, [6]), полагая

$$\tau_\varphi \otimes \mathrm{Tr}(a_0, \ldots, a_k) = \sum_{\gamma_0 \cdot \ldots \cdot \gamma_k = e} \mathrm{Tr}\left(a_0(\gamma_0) \cdot \ldots \cdot a_k(\gamma_k)\right) \tau_\varphi(\delta_{\gamma_0}, \ldots, \delta_{\gamma_k}),$$

где $a_i = \sum\limits_{\gamma \in \Gamma} \delta_\gamma \otimes a_i(\gamma) \in \mathcal{C}_0(\overline{\sigma}) \otimes \mathcal{S}$, $i = 0, 1, \ldots, k$.

6. Интерпретация квантового эффекта Холла

Классический эффект Холла описывает следующее физическое явление. Поместим тонкую прямоугольную металлическую пластину (лежащую в плоскости (xy)) в постоянное однородное магнитное поле $\vec{B}$, направленное вдоль оси (z). Если пустить электрический ток J_x в направлении оси (x), то в направлении оси (y) возникнет разность потенциалов V_y в соответствии с выражением

$$V_y = \frac{J_x}{\sigma_H},$$

где величина

$$\sigma_H = \frac{ne\delta}{B}$$

называется *проводимостью Холла* (здесь n — плотность электронов, δ — толщина пластины).

Проводимость Холла обычно описывается следующим безразмерным выражением:

$$\nu = \frac{n\delta h}{eB},$$

называемым *степенью наполнения*, таким, что

$$\sigma_H = \frac{\nu}{R_H},$$

где $R_H = h/e^2$ — *сопротивление Холла*.

В соответствии с последней формулой график зависимости проводимости Холла σ_H в зависимости от степени наполнения ν — прямая. Однако в квантовом случае (который реализуется при очень низких температурах порядка $1^\circ K$) на этом графике наблюдаются горизонтальные «плато», соответствующие целым значениям σ_H (в единицах e^2/h), что означает, иными словами, что проводимость Холла «квантуется».

Начиная с первых теоретических работ по квантовому эффекту Холла [7, 8], стало ясно, что этот эффект имеет топологическую природу. Его объяснение в духе некоммутативной геометрии было предложено в работах Белиссара и др. [1] и Ксиа [9]. Основная идея заключалась в том, что при введении магнитного поля нужно заменить классическую теорию Блоха некоммутативным аналогом, который может быть исследован в некоммутативной геометрии.

Чтобы применить разработанные методы некоммутативной геометрии к математическому описанию квантового эффекта Холла, мы выбрали базис в пространстве $L^2(F)$, состоящий из собственных функций Блоха $\{\psi_j\}$, и зафиксировали унитарный изоморфизм $L^2(F) \to \ell^2(\mathbb{N})$, сопоставляя функциям ψ_j функции δ_j. С другой стороны, у нас есть унитарный изоморфизм $L^2(\mathbb{R}^2) \to \ell^2(\Gamma) \otimes L^2(F)$, построенный выше.

Композиция двух унитарных изоморфизмов дает унитарный изоморфизм

$$U : L^2(\mathbb{R}^2) \longrightarrow \ell^2(\Gamma) \otimes \ell^2(\mathbb{N}),$$

порождая изоморфизм алгебры $\mathcal{A}(\sigma)$ и алгебры $\mathfrak{a}^L_{\mathcal{H}}(\overline{\sigma})$, где $\mathcal{H} = \ell^2(\mathbb{N})$.

Обозначим через $\partial_1 = \partial_x$ (соответственно $\partial_2 = \partial_y$) оператор дифференцирования алгебры наблюдаемых $\mathcal{C}(\overline{\sigma}) \otimes \mathcal{K}(\mathcal{H})$. Тогда для произвольного оператора $T_0, T_1, T_2 \in \mathcal{C}(\overline{\sigma}) \otimes \mathcal{K}(\mathcal{H})$ мы можем определить следующий циклический 2-коцикл

$$c(T_0, T_1, T_2) = \mathrm{Tr}_{\mathcal{H}}(T_0[\partial_1 T_1, \partial_2 T_2]),$$

называемый *коциклом Холла*.

Он будет совпадать с циклическим коциклом $\tau_\varphi \otimes \mathrm{Tr}$, введенным ранее, если мы возьмем в качестве 2-коцикла $\varphi : \Gamma \times \Gamma \to \mathbb{R}$ на группе Γ коцикл

$$\varphi(\gamma_1, \gamma_2) = \text{площадь треугольника } \Delta(\gamma_1, \gamma_2) \text{ с вершинами в точках } O,\ \gamma_1 \cdot O,\ \gamma_2 \cdot O.$$

Чтобы из этой формулы получить выражение проводимости Холла, нужно заменить операторы дифференцирования ∂_j ковариантными производными $\partial_{A,j}$, и взять в качестве операторов $T_0 = T_1 = T_2 = P_F$ спектральный проектор на *уровень Ферми*. Тогда мы получим следующую *формулу Кубо—Черна* для проводимости Холла:

$$\sigma_H = \frac{e^2}{h}\frac{1}{2\pi i}\mathrm{Tr}_{\mathcal{H}}\left(P_F[\partial_{A,1}P_F, \partial_{A,2}P_F]\right),$$

где величина

$$\mathrm{Ch}(P_F) = \frac{1}{2\pi i}\mathrm{Tr}_{\mathcal{H}}\left(P_F[\partial_{A,1}P_F, \partial_{A,2}P_F]\right)$$

называется *характеристикой Черна* проектора P_F. Это целочисленный топологический инвариант, отвечающий за явление квантового эффекта Холла.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Bellissard J., van Elst A., Schulz-Baldes H.* The noncommutative geometry of the quantum Hall effect// J. Math. Phys. — 1994. — *35.* — C. 5373–5451.
2. *Berezin F. A., Shubin V. A.* The Schrödinger equation. — Boston: Kluwer, 1991.
3. *Connes A.* Noncommutative geometry. — San Diego: Academic Press, 1994.
4. *Gruber M.* Noncommutative Bloch theory// J. Math. Phys. — 2001. — *42.* — C. 2438–2465.
5. *Husemoller D.* Fibre bundles. — New York: Springer, 1994.
6. *Kordyukov Yu., Mathai V., Shubin M. A.* Equivalence of spectral properties in semiclassical limit and a vanishing theorem for higher traces in K-theory// J. Reine Angew. Math. — 2005. — *581.* — C. 193–236.
7. *Laughlin B.* Quantized Hall conductivity in two dimensions// Phys. Rev. — 1981. — *B23.* — C. 5232.
8. *Thouless D. J., Kohmono M., Nightingale M. P., den Nijs M.* Quantized Hall conductance in a two-dimensional periodic potential// Phys. Rev. Lett. — 1982. — *49.* — C. 405–408.
9. *Xia J.* Geometric invariants of the quantum Hall effect// Commun. Math. Phys. — 1988. — *119.* — C. 29–50.

А. Г. Сергеев
Математический институт им. В. А. Стеклова, Москва, Россия
E-mail: sergeev@mi.ras.ru

UDC 517.984.5

Magnetic Schrödinger Operator from the Point of View of Noncommutative Geometry

 A. G. Sergeev

Abstract. We give an interpretation of magnetic Schrödinger operator in terms of noncommutative geometry. In particular, spectral properties of this operator are reformulated in terms of C^*-algebras. Using this reformulation, one can employ the machinery of noncommutative geometry, such as Hochschild cohomology, to study the properties of magnetic Schrödinger operator. We show how this idea can be applied to the integer quantum Hall effect.

REFERENCES

1. J. Bellissard, A. van Elst, and H. Schulz-Baldes, "The noncommutative geometry of the quantum Hall effect," *J. Math. Phys.*, 1994, **35**, 5373–5451.
2. F. A. Berezin and V. A. Shubin, *The Schrödinger Equation*, Kluwer, Boston, 1991.
3. A. Connes, *Noncommutative Geometry*, Academic Press, San Diego, 1994.
4. M. Gruber, "Noncommutative Bloch theory," *J. Math. Phys.*, 2001, **42**, 2438–2465.
5. D. Husemoller, *Fibre Bundles*, Springer, New York, 1994.
6. Yu. Kordyukov, V. Mathai, and M. A. Shubin, "Equivalence of spectral properties in semiclassical limit and a vanishing theorem for higher traces in K-theory," *J. Reine Angew. Math.*, 2005, **581**, 193–236.
7. B. Laughlin, "Quantized Hall conductivity in two dimensions," *Phys. Rev.*, 1981, **B23**, 5232.
8. D. J. Thouless, M. Kohmono, M. P. Nightingale, and M. den Nijs, "Quantized Hall conductance in a two-dimensional periodic potential," *Phys. Rev. Lett.*, 1982, **49**, 405–408.
9. J. Xia, "Geometric invariants of the quantum Hall effect," *Commun. Math. Phys.*, 1988, **119**, 29–50.

A. G. Sergeev
Steklov Mathematical Institute, Moscow, Russia
E-mail: sergeev@mi.ras.ru