Современная математика. Фундаментальные направления. Том 59 (2016). С. 173–191

УДК 517.9

ЭЛЛИПТИЧЕСКИЕ G-ОПЕРАТОРЫ НА МНОГООБРАЗИЯХ С ИЗОЛИРОВАННЫМИ ОСОБЕННОСТЯМИ

© 2016 г. **А. Ю. САВИН, Б. Ю. СТЕРНИН**

Аннотация. В работе изучаются эллиптические операторы на многообразиях с особенностями в ситуации, когда на многообразии действует дискретная группа G. Как обычно в эллиптической теории, фредгольмовость оператора определяется главным символом. Мы показываем, что в данной ситуации символ является парой, состоящей из символа на основном страте (внутренний символ) и символа в конической точке (конормальный символ). Установлена фредгольмовость эллиптических элементов.

СОДЕРЖАНИЕ

Введение

Настоящая работа посвящена изучению эллиптических операторов на многообразиях с особенностями в ситуации, когда на многообразии задано действие дискретной группы G диффеоморфизмами. Более точно, рассматриваются операторы вида линейной комбинации произведений дифференциальных (псевдодифференциальных) операторов и операторов сдвига вдоль орбит действия группы. Такие операторы будем называть *G-операторами*, поскольку они ассоциированы с действием группы G. Отметим, что теория G-операторов на гладких многообразиях в настоящее время достаточно развита: исследованы фредгольмовость и родственные аналитические вопросы (см., например, [7, 8]), устанавливаются формулы индекса и решаются близкие топологические проблемы (см., например, [10, 13, 15]). В данной работе исследуются G-операторы на многообразиях с изолированными особенностями конического типа. Разумеется, все результаты работы могут быть перенесены и на случай операторов на многообразиях с более сложными особенностями: ребрами, углами и т.п. (см., например, [3, 9, 11]).

Как обычно, в эллиптической теории фредгольмовость оператора определяется свойствами его главного символа. Мы показываем, что главный символ G-оператора в данной ситуации является парой, состоящей из символа на основном страте (внутренний символ) и символа в конической точке (конормальный символ). При этом оказывается, что (в отличие от внутреннего символа) конормальный символ *не является* элементом скрещенного произведения, и поэтому для установления фредгольмовости стандартная техника, связанная со скрещенными произведениями (см. [7]), неприменима. Еще одной особенностью построения данной теории является то, что в качестве конормального символа в конической точке, которая по предположению является неподвижной точкой, мы получаем семейство операторов, экспоненциально зависящее от параметра (ср. с классической теорией семейств с параметром [1]). Наконец, отметим, что при доказательстве теоремы фредгольмовости мы систематически используем аппарат C^*-алгебр.

Опишем кратко содержание работы. Сначала мы даем постановку задачи (раздел 1), затем формулируем основной результат — теорему конечности. С этой целью мы вычисляем символ G-операторов, используя метод замораживания коэффициентов. При этом, поскольку мы имеем дело с нелокальными операторами (содержащими операторы сдвига), замораживать коэффициенты приходится не в точке, а сразу на целой орбите. Далее рассматриваются два примера: 1) $\mathbb{Z}$-операторы на сфере $\mathbb{S}^2$ и 2) $\mathbb{Z}^2$-операторы на полупрямой $\mathbb{R}_+$, в которых условия фредгольмовости выписываются явно. Затем (раздел 5) с помощью теории C^*-алгебр приводится доказательство фредгольмовости. В качестве важного вспомогательного инструмента строится теория G-операторов с параметром. Работу завершает дополнение, в котором дается прямое вычисление внутреннего символа G-оператора методом замораживания коэффициентов.

Ранее задачи подобного типа изучались в школе А. Б. Антоневича (см., например, [7] и цитированную там литературу), однако, все полученные результаты по данной тематике относились лишь к операторам в L^2-пространствах, в то время как мы будем рассматривать операторы в весовых пространствах Соболева $H^{s,\gamma}$ (см. [2]).

Работа была частично поддержана РФФИ (проекты 12-01-00577, 15-01-08392 и 16-01-00373), DAAD и фондом Саймонса. Мы благодарны профессору Э. Шроэ и Институту анализа Ганноверского университета им. Г. В. Лейбница за гостеприимство.

1. Постановка задачи

В этом параграфе формулируется основная задача этой работы, которая относится к эллиптическим операторам, ассоциированным с действием дискретной группы на многообразии с коническими особенностями. Подробное изложение эллиптической теории на многообразиях с коническими особенностями (без действия группы) читатель найдет в [2], а также, например, в [9].

G-многообразие с конической точкой. Пусть M — многообразие с конической точкой[1], обозначаемой через pt. Это означает, что дополнение $M \setminus pt$ — гладкое многообразие, и существует диффеоморфизм проколотой окрестности конической точки и декартова произведения

$$(0,1) \times \Omega \quad \text{с координатами } (r, \omega).$$

Здесь Ω — гладкое замкнутое многообразие (называемое базой конуса). При этом значение $r = 0$ отвечает конической точке, и при этом значении многообразие Ω стягивается в коническую точку.

Диффеоморфизмом $g : M \to M$ многообразия с конической точкой будем называть такое отображение, что выполнены следующие свойства:

1. $g : M \to M$ — гомеоморфизм, который сохраняет страты $M \setminus pt$ и pt и индуцирует диффеоморфизмы этих стратов;
2. в некоторой окрестности конической точки диффеоморфизм имеет вид
$$g(r, \omega) = (re^{\beta_g}, g(\omega)), \tag{1.1}$$
где диффеоморфизм базы конуса Ω также обозначается через g, а β_g — вещественное число.

Пусть теперь G — дискретная группа.

Определение 1.1. Многообразие M называется *G-многообразием*, если задано действие группы G на M диффеоморфизмами.

Далее для простоты обозначений элемент $g \in G$ будем отождествлять с соответствующим диффеоморфизмом $g : M \to M$.

Весовые пространства Соболева. Напомним определение весового пространства Соболева $H^{s,\gamma}(M)$ функций на многообразии с конической точкой. Элементы этого пространства вне окрестности конической точки представляют собой функции из пространства Соболева H^s, поэтому мы ниже определим норму только для функций с носителями в малой окрестности конической точки.

[1] Все результаты работы стандартным образом переносятся на случай многообразий с произвольным конечным числом конических точек.

Норма функции $u(r,\omega)$ определяется выражением

$$\|u\|^2_{s,\gamma} = \int\limits_{\Omega\times\mathbb{R}_+} \left|\left(1+\left(ir\frac{\partial}{\partial r}\right)^2+\Delta_\Omega\right)^s (r^\gamma u(r,\omega))\right|^2_{L^2(\Omega)} d\omega\frac{dr}{r}, \tag{1.2}$$

где Δ_Ω — неотрицательный оператор Лапласа на Ω, или, эквивалентно,

$$\|u\|^2_{s,\gamma} = \int\limits_{L_\gamma} \left\|\left(1-p^2+\Delta_\Omega\right)^s \widetilde{u}(p,\omega)\right\|^2_{L^2(\Omega)} dp, \tag{1.3}$$

где

$$\widetilde{u}(p,\omega) = \mathcal{M}_{r\to p}u = \frac{1}{\sqrt{2\pi i}}\int\limits_0^\infty r^p u(r,\omega)\frac{dr}{r} \tag{1.4}$$

— преобразование Меллина функции $u(\omega,r)$ по радиальной переменной r;

$$L_\gamma = \{\operatorname{Re} p = \gamma\}$$

— весовая прямая.

Замечание 1.1. Пространство $H^{0,\gamma}(M)$ обозначается также $L^2(M,\mu_\gamma)$ и представляет собой пространство L^2 относительно специальной меры

$$\mu_\gamma = r^{2\gamma}\mu\frac{dr}{r},$$

где μ — мера на Ω. Эквивалентность выражений (1.3) и (1.2) следует из свойств преобразования Меллина, в частности, из равенства Меллина—Парсеваля (см., например, [5]):

$$\int\limits_{\operatorname{Re} p=\gamma} |\widetilde{f}(p)|^2 dp = \int\limits_0^\infty r^{2\gamma}|f(r)|^2\frac{dr}{r}.$$

G-операторы на многообразии с коническими точками. Пусть задано G-многообразие. Действие группы на многообразии индуцирует представление группы в весовых пространствах операторами сдвига:

$$T_g : H^{s,\gamma}(M) \longrightarrow H^{s,\gamma}(M), \text{ где } (T_g u)(x) = u(g^{-1}x).$$

Определение 1.2. *Коническим G-оператором* на многообразии M называется оператор вида

$$D = \sum_{h\in G} D_h T_h : H^{s,\gamma}(M) \longrightarrow H^{s-m,\gamma+m}(M), \tag{1.5}$$

где

$$D_h = r^{-m} D_h\left(r, -r\frac{\partial}{\partial r}, \omega, -i\frac{\partial}{\partial\omega}\right)$$

— конический дифференциальный оператор на M порядка m и только конечное число операторов D_h отлично от нуля, так что сумма в (1.5) конечна.

Цель работы состоит в том, чтобы исследовать условия эллиптичности, при выполнении которых оператор (1.5) фредгольмов.

2. Основные результаты

Как обычно в эллиптической теории, условия, при выполнении которых устанавливается фредгольмовость, формулируются в терминах главного символа оператора. Главный символ будем называть для краткости просто «символом». В данном случае символ представляет собой пару: символ на основном страте (внутренний символ) и символ в конической точке (конормальный символ[1]). Дадим определения указанных символов.

[1]Иногда в литературе используется термин индексное семейство.

Внутренний символ. Чтобы построить символ, продолжим сначала действие группы на кокасательное расслоение многообразия.

Через T^*M обозначим кокасательное расслоение многообразия M (см., например, [9]).

Напомним определение кокасательного расслоения T^*M. Через $\overline{M} = (M \setminus pt) \cup \Omega$ обозначим раздутие многообразия M — многообразие с краем Ω, отвечающим $r = 0$. Через TM обозначим векторное расслоение над $\overline{M}$, сечения которого порождены как $C^\infty(\overline{M})$-модуль векторными полями единичной длины в конической метрике вида $dr^2 + r^2 d\omega^2$, т. е. полями вида

$$\frac{\partial}{\partial r}, \quad \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \omega}.$$

Через $T^*M \in \mathrm{Vect}(\overline{M})$ обозначено двойственное расслоение (относительно естественного спаривания векторов и ковекторов). Имеет место изоморфизм расслоений:

$$\begin{array}{rcl} T^*M|_{\partial \overline{M}} & \simeq & T^*\Omega \times \mathbb{R}, \\ adr + brd\omega & \mapsto & (bd\omega, a). \end{array} \tag{2.1}$$

Диффеоморфизм $g : M \to M$ основного многообразия индуцирует диффеоморфизм кокасательного расслоения

$$\partial g = ({}^t dg)^{-1} : T^*M \longrightarrow T^*M,$$

который называется *кодифференциалом* диффеоморфизма g. Здесь $dg : T_xM \to T_{g(x)}M$ — дифференциал, а ${}^t dg : T^*_{g(x)}M \to T^*_xM$ — двойственное отображение.

Определим символ оператора (1.5) в точке $(x_0, \xi) \in T^*_0 M$ кокасательного расслоения без нулевого сечения, используя метод замораживания коэффициентов. Отметим, что рассматриваемый оператор является существенно нелокальным. Более точно, соответствующее уравнение $Du = f$ связывает значения неизвестной функции u и ее производных не в одной точке $x_0 \in M$, а на *орбите* $Gx_0 \subset M$. По этой причине, в отличие от классического (неособого) случая, будем производить замораживание коэффициентов оператора сразу на всей орбите точки x_0. Производя такое замораживание коэффициентов оператора на орбите точки x_0 и применяя затем в каждой точке орбиты преобразование Фурье от x к ξ, можно определить символ как функцию на кокасательном расслоении без нулевого сечения, принимающую значения в операторах, действующих в пространстве функций на орбите. Прямое вычисление (которое мы для полноты изложения приводим в дополнении) дает следующее выражение для внутреннего символа (ср. [6]):

$$\sigma_0(D)(x_0, \xi) = \sum_{h \in G} \sigma(D_h)\Big(g^{-1}(x_0), \partial g^{-1}(\xi)\Big)\mathcal{T}_h : l^2(G, m_{s,\gamma}) \longrightarrow l^2(G, m_{s-m,\gamma+m}), \tag{2.2}$$

где

- символ действует на функциях на орбите Gx_0, которая отождествляется с группой G при помощи отображения $g \mapsto g^{-1}(x_0)$;
- $(\mathcal{T}_h w)(g) = w(gh)$ — оператор правого сдвига функций на группе;
- внутренний символ оператора D_h в точке (x, ξ) обозначается $\sigma_0(D_h)(x, \xi)$, а выражение $\sigma_0(D_h)(g^{-1}(x_0), \partial g^{-1}(\xi))$ действует как оператор умножения функций на группе;
- пространство $l^2(G, m_{s,\gamma})$ состоит из функций $w(g)$ квадратично суммируемых относительно весовой функции $m_{s,\gamma}$ на группе G, которая определяется выражением

$$m_{s,\gamma}(g) = \frac{\partial g^{-1*}\mu_\gamma}{\mu_\gamma}(x_0, \xi)\, |\partial g^{-1}\xi|^{2s}. \tag{2.3}$$

  Здесь и ниже мы для краткости обозначений опускаем зависимость весовой функции от (x_0, ξ).

Определение 2.1. Оператор (2.2) будем называть *внутренним символом* G-оператора D в точке $(x_0, \xi) \in T^*_0 M$.

Замечание 2.1. Выражение (2.2) имеет вполне естественный смысл. А именно, согласно этому выражению:

- символ оператора сдвига T_h является оператором правого сдвига $\mathcal{T}_h$ на группе;
- символ ПДО D_h является оператором умножения на значения символа $\sigma(D_h)$ в соответствующей точке орбиты;

- наконец, символ оператора $D = \sum D_h T_h$ является суммой произведений символов операторов D_h и T_h.

Замечание 2.2. В общем случае внутренний символ зависит от переменных x_0, ξ весьма сложным образом. Например, он часто не является даже непрерывным по переменным x_0, ξ. Это связано с тем, что структура орбиты действия группы может зависеть от начальной точки весьма сложным образом.

Предложение 2.1. *Для двух G-операторов D_1, D_2 имеет место равенство*

$$\sigma_0(D_1 D_2) = \sigma_0(D_1)\sigma_0(D_2).$$

Доказательство. Утверждение непосредственно следует из того, что символ был получен методом замораживания коэффициентов. Впрочем, искомая формула может быть получена и непосредственно, пользуясь выражением (2.2). □

Вычислим сужение $\sigma_0(D)|_{\partial T^*M}$ внутреннего символа на границу кокасательного расслоения, т. е. при $r = 0$. Напомним, что в окрестности конической точки мы используем координаты r, ω и двойственные координаты τ, η. Для оператора (1.5) при $(x, \xi) = (\omega, 0, \eta, \tau) \in \partial T^*M$ имеем

$$\sigma_0(D)(\omega, 0, \eta, \tau) = \sum_{h \in G} \sigma_0(D_h)\Big(g^{-1}(\omega), 0, \partial g^{-1}(\eta), \tau\Big)\mathcal{T}_h : l^2(G, m_{s,\gamma}) \longrightarrow l^2(G, m_{s-m,\gamma+m}), \quad (2.4)$$

причем весовая функция равна

$$m_{s,\gamma}(g) = e^{-2\beta_g \gamma} \, \frac{\partial g^{-1*}\mu}{\mu}(\omega) \left(\tau^2 + |\partial g^{-1}\eta|^2\right)^s, \quad \text{где } \mu \text{ — некоторая мера на } \Omega. \quad (2.5)$$

Здесь мы воспользовались выражением (1.1) для диффеоморфизма в окрестности конической точки. В частности, если диффеоморфизм $g : \Omega \to \Omega$ — изометрия, то из (2.5) получаем

$$m_{s,\gamma}(g) = e^{-2\beta_g \gamma}.$$

Конормальный символ. Чтобы получить символ оператора (1.5) в конической точке, заметим, что по предположению коническая точка является неподвижной точкой для действия группы на многообразии. Поэтому для получения символа достаточно заморозить коэффициенты оператора в этой точке, т. е. положить в коэффициентах $r = 0$. В полученном операторе

$$\sum_{h \in G} r^{-m} D_h \left(0, -r\frac{\partial}{\partial r}, \omega, -i\frac{\partial}{\partial \omega}\right) T_h : H^{s,\gamma}(\mathbb{R}_+ \times \Omega) \longrightarrow H^{s-m,\gamma-m}(\mathbb{R}_+ \times \Omega)$$

отбросим множитель r^{-m} и применим преобразование Меллина $\mathcal{M}_{r \to p}$ (см. (1.4)). В результате в координатах ω, p получаем семейство операторов

$$\sum_{h \in G} D_h \left(0, p, \omega, -i\frac{\partial}{\partial \omega}\right) T'_h e^{\beta_h p} : H^s(\Omega) \longrightarrow H^{s-m}(\Omega), \quad (2.6)$$

где $p \in L_\gamma$, а

$$T'_h : H^s(\Omega) \longrightarrow H^s(\Omega), \qquad (T'_h u)(\omega) = u(h^{-1}(\omega))$$

— оператор сдвига на базе конуса. При получении равенства (2.6) мы воспользовались тем, что при преобразовании Меллина оператор $-r\partial/\partial r$ переходит в оператор умножения на p, оператор растяжения $u(r) \mapsto u(re^{-\beta})$ переходит в оператор умножения на экспоненту $e^{\beta p}$, а пространство с нормой (1.3) переходит в пространство функций на прямой L_γ, принимающих значения в пространстве $H^s(\Omega)$.

Определение 2.2. Семейство операторов (2.6) называется *конормальным символом G-оператора D* и обозначается через $\sigma_c(D)$.

Предложение 2.2. *Пусть даны два G-оператора*

$$D_1 : H^{s,\gamma}(M) \longrightarrow H^{s-m_1,\gamma+m_1}(M), \qquad D_2 : H^{s-m_1,\gamma+m_1}(M) \longrightarrow H^{s-m_1-m_2,\gamma+m_1+m_2}(M)$$

порядков m_1, m_2, соответственно. Тогда их композиция является G-оператором и справедливо равенство

$$\sigma_c(D_2 D_1)(p) = \sigma_c(D_2)(p + m_1)\sigma_c(D_1)(p).$$

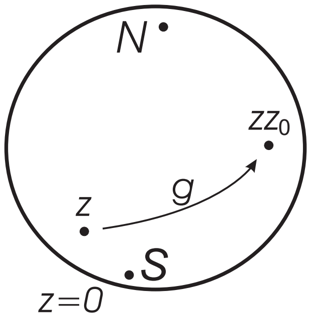

Рис. 1. Диффеоморфизм сферы $\mathbb{S}^2$.

Это утверждение доказывается непосредственно. Отметим только, что сдвиг аргумента конормального символа в последней формуле происходит из множителя r^{-m} в (1.5) (ср. с [9] в классической ситуации).

Эллиптичность и фредгольмовость.

Определение 2.3. G-оператор D на многообразии с коническими особенностями называется *эллиптическим*, если обратимы

1. внутренний символ $\sigma_0(D)(x,\xi)$ при всех $(x,\xi) \in T_0^*M$;
2. конормальный символ $\sigma_c(D)(p)$ для всех p на весовой прямой $L_\gamma = \{\operatorname{Re} p = \gamma\}$.

Теорема 2.1. *Если G-оператор*

$$D = \sum_{h\in G} D_h T_h : H^{s,\gamma}(M) \longrightarrow H^{s-m,\gamma+m}(M)$$

эллиптичен, то он фредгольмов.

Доказательство теоремы 2.1 существенно опирается на теорию C^*-алгебр и будет дано в параграфе 5.

Замечание 2.3. Конормальный символ $\sigma_c(D)(p)$ является семейством G-операторов на Ω, зависящим от параметра p. В параграфе 5 мы разовьем эллиптическую теорию таких семейств и покажем, что семейство $\sigma_c(D)(p)$ обратимо при больших $p \in L_\gamma$ при условии, что внутренний символ $\sigma_0(D)$ является эллиптическим для веса γ.

Замечание 2.4. Все результаты настоящего параграфа переносятся на случай псевдодифференциальных операторов (ПДО), т. е. ситуацию, когда операторы D_g, входящие в определение G-оператора, являются псевдодифференциальными операторами на M. По поводу ПДО на многообразиях с коническими точками см., например, монографию [9] и цитированную в ней литературу.

3. Пример: $\mathbb{Z}$-операторы на сфере

Сфера как $\mathbb{Z}$-многообразие. Рассмотрим сферу $\mathbb{S}^2$ как расширенную комплексную плоскость с координатой z. Точки сферы $z = 0$ и $z = \infty$ будем рассматривать как конические и обозначим их через S, N. На сфере рассмотрим действие группы $\mathbb{Z}$, состоящее из итераций диффеоморфизма

$$g(z) = zz_0, \text{ где число } z_0 = e^{\beta+i\varphi_0} \text{ фиксировано}$$

(см. рис. 1). Пусть для определенности $\beta > 0$, $\varphi_0 \in [0, 2\pi)$.

От комплексной координаты z перейдем к координатам t, φ при помощи замены $z = e^{-t+i\varphi}$, которая определяет диффеоморфизм (раздутие)

$$\mathbb{S}^2 \setminus \{N, S\} \simeq \mathbb{S}^1_\varphi \times \mathbb{R}_t \tag{3.1}$$

дополнения к коническим точкам и бесконечного цилиндра. При этом диффеоморфизме окрестности конических точек S, N соответствуют окрестностям значений $t = \pm\infty$, а диффеоморфизм g имеет вид

$$g(\varphi, t) = (\varphi + \varphi_0, t - \beta),$$

т. е. представляет винтовое движение цилиндра в (3.1).

Символы G-операторов. На сфере $\mathbb{S}^2$ рассмотрим конический $\mathbb{Z}$-оператор

$$D = \sum_{0\leqslant k\leqslant m,\, l\in\mathbb{Z}} D_{l,k}\left(-i\frac{\partial}{\partial\varphi}\right)\left(-r\frac{\partial}{\partial r}\right)^k T^l : H^{s,\gamma}(\mathbb{S}^2) \longrightarrow H^{s-m,\gamma}(\mathbb{S}^2)$$

с постоянными коэффициентами по переменным φ, r (здесь мы сразу отбросили множитель r^{-m}), а оператор сдвига равен

$$(Tu)(\varphi, r) = u(\varphi - \varphi_0, re^{-\beta}).$$

Оператор D действует в пространствах с весом $\gamma = (\gamma_+, \gamma_-)$, где вес γ_+ — в точке S а вес γ_- — в точке N. Отметим, что «коничность» оператора D при $r = \infty$ несложно проверить, пользуясь инверсией: $r' = 1/r$.

Вычислим внутренний и конормальный символы оператора D.

Внутренний символ равен

$$\sigma_0(D)(\eta,\tau) = \sum_{0\leqslant k\leqslant m,\, l\in\mathbb{Z}} D_{l,k}(\eta)(i\tau)^k \mathcal{T}^l : l^2(\mathbb{Z}, m_{s,\gamma}) \longrightarrow l^2(\mathbb{Z}, m_{s,\gamma}), \tag{3.2}$$

где $\eta^2 + \tau^2 \neq 0$ и $(\mathcal{T}w)(n) = w(n+1)$.

Конормальные символы при $r = 0$ и $r = \infty$ равны

$$\sigma_c(D)(p) = \sum_{0\leqslant k\leqslant m,\, l\in\mathbb{Z}} D_{l,k}\left(-i\frac{d}{d\varphi}\right)p^k T'^l e^{-\beta lp} : H^s(\mathbb{S}^1) \longrightarrow H^{s-m}(\mathbb{S}^1), \qquad \operatorname{Re} p = \gamma_\pm.$$

Согласно теореме 2.1 оператор D фредгольмов, если внутренний символ $\sigma_0(D)(\eta,\tau)$ обратим при $\eta^2+\tau^2 \neq 0$ и конормальный символ $\sigma_c(D)(p)$ обратим на весовых прямых $\operatorname{Re} p = \gamma_\pm$. Чтобы непосредственно проверять эти условия обратимости, вычислим весовую функцию $m_{s,\gamma}$ в (3.2).

Вычисление весовой функции. Вычисление показывает, что мера μ_γ имеет вид

$$\mu_\gamma = \begin{cases} r^{2\gamma_+} d\varphi \dfrac{dr}{r}, & \text{если } r < 1,\\[2mm] r^{2\gamma_-} d\varphi \dfrac{dr}{r}, & \text{если } r > 2. \end{cases}$$

Метрика на цилиндре равна $d\varphi^2 + r^{-2}dr^2$.

Предложение 3.1. *Весовая функция*

$$m_{s,\gamma}(n) = \left(\frac{\partial g^{-n*}(\mu_\gamma(\eta^2+\tau^2)^s)}{\mu_\gamma}\right)(t_0, \varphi_0, \eta, \tau) \tag{3.3}$$

(*см.* (2.3)) *с точностью до эквивалентности не зависит от* s *и равна*

1. *в точке, лежащей во внутренности* T_0^*M:

$$m_{s,\gamma}(n) \simeq \begin{cases} e^{2\gamma_-\beta n}, & \textit{если } n \geqslant 0,\\ e^{2\gamma_+\beta n}, & \textit{если } n < 0; \end{cases} \tag{3.4}$$

2. *в точке, лежащей на границе* $\partial T_0^*M = \{r = 0 \textit{ и } r = \infty\}$:

$$m_{s,\gamma}(n) \simeq \begin{cases} e^{2\gamma_+\beta n}, & \textit{если } r = 0,\\ e^{2\gamma_-\beta n}, & \textit{если } r = \infty. \end{cases}$$

Доказательство состоит в прямом вычислении, пользуясь формулой (3.3).

Числовые примеры. Рассмотрим оператор

$$D = -r\frac{\partial}{\partial r} + (a + bT)\left(-i\frac{\partial}{\partial\varphi}\right) + (c + dT) : H^{s,\gamma}(\mathbb{S}^2) \longrightarrow H^{s-1,\gamma}(\mathbb{S}^2). \tag{3.5}$$

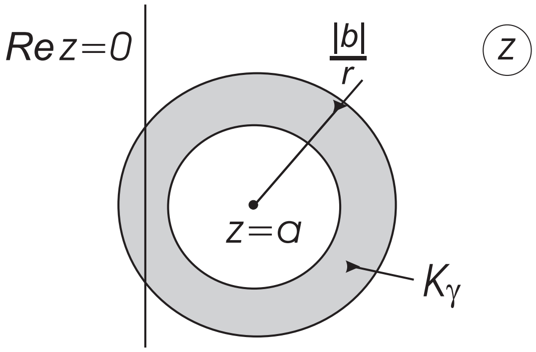

Рис. 2. Кольцо K_γ и прямая $\operatorname{Re} z = 0$

1. Внутренний символ оператора равен

$$\sigma_0(D)(\eta,\tau) = i\tau + (a + b\mathcal{T})\eta : l^2(\mathbb{Z}, m_{s,\gamma}) \longrightarrow l^2(\mathbb{Z}, m_{s-1,\gamma}), \qquad (\mathcal{T}w)(n) = w(n+1), \tag{3.6}$$

где вес $m_{s,\gamma}$ был определен в (3.4). Оператор (3.6) легко алгебраизовать. Сформулируем соответствующий результат.

Лемма 3.1 (ср. [4])**.** *При $\gamma_+ > \gamma_-$ преобразование Фурье*

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{F} : l^2(\mathbb{Z}, m_{s,\gamma}) & \longrightarrow & \mathcal{O}(K_\gamma) \\ \{w(n)\} & \longmapsto & \sum\limits_n w(n)\zeta^n \end{array} \tag{3.7}$$

переводит пространство l^2 с весом $m_{s,\gamma}$ в пространство голоморфных функций в кольце

$$K_\gamma = \{r < |\zeta| < R\}, \qquad r = e^{-\gamma_+ + \beta}, \quad R = e^{-\gamma_- - \beta}, \tag{3.8}$$

которые интегрируемы с квадратом на границе. Если же $\gamma_- > \gamma_+$, то образ преобразования Фурье состоит из пространства, двойственного к пространству голоморфных функций в кольце с внешним радиусом r и внутренним R.

Доказательство. Доказательство основано на том, что $w \in l^2(\mathbb{Z}, m_{s,\gamma})$ тогда и только тогда, когда

$$\sum_{n\geqslant 0} |w(n)|^2 e^{2\gamma_- \beta n} < \infty, \qquad \sum_{n\geqslant 0} |w(n)|^2 e^{2\gamma_+ \beta n} < \infty.$$

Эти условия означают, что преобразование Фурье этой функции, т. е. ряд Лорана

$$\sum_n w(n)\zeta^n$$

абсолютно сходится в указанном кольце. □

Применяя лемму 3.1, мы преобразуем символ в оператор умножения

$$\sigma_0(D)(\eta,\tau) = i\tau + (a + b\zeta^{-1})\eta : \mathcal{O}(K_\gamma) \longrightarrow \mathcal{O}(K_\gamma), \tag{3.9}$$

действующий в пространстве аналитических функций в кольце. Условие обратимости внутреннего символа состоит в требовании обратимости этой функции в кольце.

Лемма 3.2. *Условие обратимости внутреннего символа* (3.6) *имеет вид*

$$|\operatorname{Re} a| > \frac{|b|}{r}, \tag{3.10}$$

где $r = \min(e^{-\gamma_+ + \beta}, e^{-\gamma_- - \beta})$.

Доказательство. Символ обратим при всех $\eta, \tau \neq 0$ тогда и только тогда, когда

$$\operatorname{Re}(a + b\zeta^{-1}) \neq 0 \text{ при всех } \zeta \in K_\gamma.$$

Но числа $a + b\zeta^{-1}$ пробегают кольцо с внешним радиусом $|b|/r$ с центром в точке a (см. рис. 2). Условие пустоты пересечения этого кольца и прямой $\operatorname{Re} z = 0$ как раз имеет вид (3.10). □

В итоге получаем условие обратимости внутреннего символа в виде

$$\gamma_+, \gamma_- \leqslant \frac{\ln|\operatorname{Re} a| - \ln|b|}{\beta}.$$

2. Конормальный символ оператора (3.5) равен

$$\sigma_c(D)(p) = p + (a + be^{-\beta p}T')\left(-i\frac{d}{d\varphi}\right) + (c + de^{-\beta p}T') : H^s(\mathbb{S}^1) \longrightarrow H^{s-1}(\mathbb{S}^1),$$

где $(T'u)(\varphi) = u(\varphi - \varphi_0)$ — оператор сдвига на окружности. При больших значениях $p \in L_\gamma$ конормальный символ обратим (в предположении внутренней эллиптичности оператора).

Раскладывая функции на окружности в ряд Фурье, получаем условие эллиптичности конормального символа в виде требования: ни одно из уравнений

$$p + (a + be^{-\beta p - in\varphi_0})n + (c + de^{-\beta p - in\varphi_0}) = 0 \quad \text{при всех } n \in \mathbb{Z} \tag{3.11}$$

не имеет решений p таких, что $\operatorname{Re} p = \gamma_\pm$.

Решая трансцендентные уравнения (3.11), можно найти особые точки конормального символа, т. е. те значения весов, при которых задача перестает быть фредгольмовой.

Замечание 3.1. Отметим, что условие эллиптичности можно эффективно проверять численно: так как уравнение (3.11) в вертикальной полосе $|\operatorname{Re} p| < N$ не имеет решений при достаточно больших $|p|^2 + n^2$, то все решения, лежащие в этой полосе, отвечают только конечному числу номеров n и конечной области изменения параметра p.

4. Пример: $\mathbb{Z}^2$-операторы на прямой

Полупрямую $\mathbb{R}_+$ будем рассматривать как многообразие с двумя коническими точками и рассмотрим оператор

$$A = 1 + aT_\alpha + bT_\beta : H^{s,\gamma}(\mathbb{R}_+) \longrightarrow H^{s,\gamma}(\mathbb{R}_+), \qquad (T_\alpha u)(r) = u(re^\alpha), (T_\beta u)(r) = u(re^\beta). \tag{4.1}$$

Будем считать, что числа α, β *несоизмеримы* и заданы веса $\gamma = (\gamma_+, \gamma_-)$ при $r = 0$ и $r = \infty$ соответственно. Пусть для определенности $\alpha, \beta > 0$, $\gamma_+ > \gamma_-$.

Исследуем оператор (4.1). Для простоты положим $s = 0$ и применим к этому оператору преобразование Меллина (1.4). Получим оператор

$$\sigma_c(A)(p) = 1 + ae^{p\alpha} + be^{p\beta} : \mathcal{O}(S) \longrightarrow \mathcal{O}(S), \tag{4.2}$$

где $S = \{\gamma_- < \operatorname{Re} p < \gamma_+\}$ — вертикальная полоса в комплексной плоскости, а $\mathcal{O}(S)$ — образ пространства $L^{2,\gamma}(\mathbb{R}_+)$ при преобразовании Меллина — пространство голоморфных функций в этой полосе (см. [4]).

Можно показать, что оператор (4.2) обратим в пространстве $\mathcal{O}(S)$ тогда и только тогда, когда функция

$$1 + ae^{\gamma\alpha}e^{i\varphi} + be^{\gamma\beta}e^{i\psi} \tag{4.3}$$

отлична от нуля при всех $\gamma \in [\gamma_-, \gamma_+]$, $\varphi, \psi \in [0, 2\pi]$. Условие обратимости последней функции несложно получить: при фиксированном значении γ сумма первого и второго слагаемого пробегает точки окружности на комплексной плоскости с координатой z с центром в точке $z = 1$ и радиусом $|a|e^{\gamma\alpha}$, а третье слагаемое пробегает окружность с центром в точке $z = 0$ и радиусом $|b|e^{\gamma\beta}$. Ясно, что функция (4.3) обратима тогда и только тогда, когда указанные окружности не пересекаются. Наконец, наличие пересечения двух окружностей с заданными радиусами и расстоянием между их центрами описывается неравенствами треугольника, связывающими его стороны (см. рис. 3):

$$|a|e^{\alpha\gamma} \leqslant 1 + |b|e^{\beta\gamma}, \quad |b|e^{\beta\gamma} \leqslant 1 + |a|e^{\alpha\gamma}, \quad 1 \leqslant |a|e^{\alpha\gamma} + |b|e^{\beta\gamma} \tag{4.4}$$

(окружности пересекаются, если выполнены все три неравенства). Итак, оператор эллиптический, если при всех $\gamma \in [\gamma_-, \gamma_+]$ не выполнено хотя бы одно из указанных неравенств. При фиксированном значении γ область, в которой одно из неравенств не выполнено, обозначено на рис. 4 (области, в которых не выполнено первое, второе, третье неравенства, обозначены через I, II, III, соответственно). Далее, пересечение всех таких областей по всем $\gamma \in [\gamma_-, \gamma_+]$ изображено на рис. 5 (соответствующие элементарные вычисления опускаются).

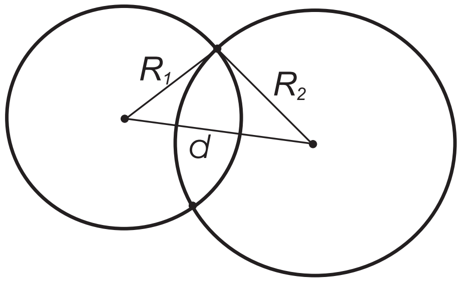

Рис. 3. Пересечение двух окружностей.

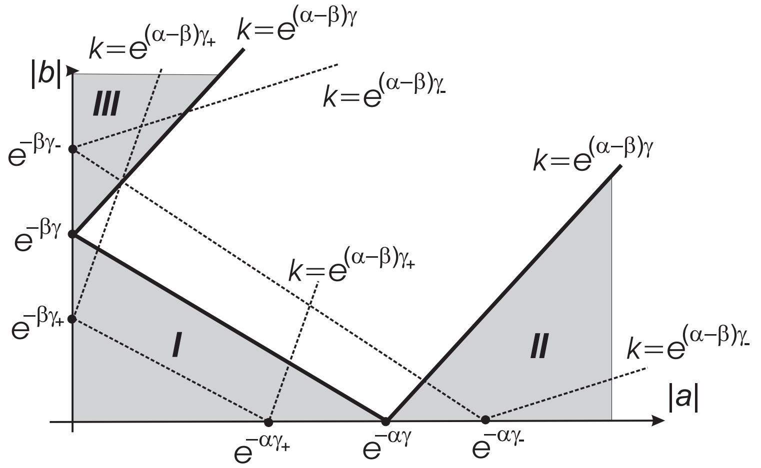

Рис. 4. Значения параметров a, b, для которых окружности $|z| = |b|e^{\beta\gamma}$ и $|z-1| = |a|e^{\alpha\gamma}$ не пересекаются.

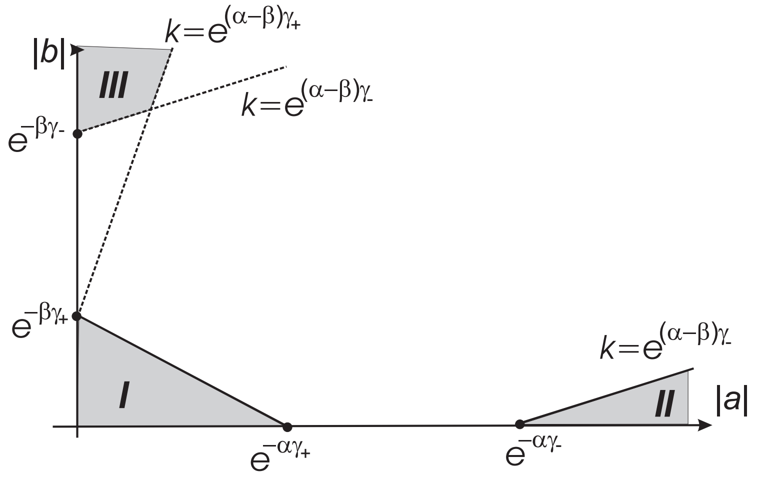

Рис. 5. Области значений параметров, при которых оператор (4.2) обратим.

Мы видим, что область значений параметров a, b, для которых оператор обратим, состоит из трех компонент. Смысл такого разбиения на три компоненты прост: оператор A, который состоит из трех слагаемых, обратим тогда и только тогда, когда одно из слагаемых является доминирующим (первое неравенство отвечает за доминирование единицы, второе — слагаемого aT_α, третье — слагаемого bT_β).

5. Доказательства основных результатов (C^*-теория)

Цель настоящего параграфа — доказать теорему 2.1, т. е. установить фредгольмовость эллиптических G-операторов. Как и обычно, фредгольмовость доказывается построением почти обратного оператора, т. е. обратного с точностью до компактных операторов. Ясно, что для G-оператора вида (1.5) (в котором сумма фактически является конечной) аналогичная сумма в случае регуляризатора, как правило, является бесконечной, и по этой причине необходимо работать с G-операторами вида бесконечных сумм. К сожалению, непосредственное рассмотрение таких сумм в общей ситуации представляется весьма сложным. Однако, есть общий подход, позволяющий обойти трудности, связанные с рассмотрением бесконечных рядов. Этот подход основан на систематическом использовании языка C^*-алгебр и их скрещенных произведений (см. [8]; ниже мы следуем изложению в [14]).

C^*-алгебра ПДО $\Psi(M)$. Сначала кратко напомним структуру C^*-алгебры

$$\Psi(M) \subset \mathcal{B}L^2(M),$$

составленной из ПДО нулевого порядка на многообразии M с коническими особенностями. Операторы действуют в пространстве $L^2(M) \equiv H^{0,0}(M)$, т. е. при $s=\gamma=0$.

Эту алгебру можно получить (см., например, [3]) замыканием по норме операторов нулевого порядка с гладкими внутренними символами и гладкими конормальными символами. Для этой алгебры имеется символьное отображение

$$\sigma = (\sigma_0, \sigma_c) : \Psi(M) \longrightarrow C(S^*M) \oplus \Psi_p(\Omega),$$

при котором ПДО D сопоставляются его внутренний символ $\sigma_0(D)$ (непрерывная функция на косферическом расслоении $S^*M = T_0^*M/\mathbb{R}_+$) и конормальный символ $\sigma_c(D)$ (семейство ПДО на базе конуса Ω, непрерывно зависящее от параметра $p \in L_\gamma$). При этом внутренний символ и конормальный символ согласованы: сужение внутреннего символа на границу ∂S^*M равно символу конормального символа, рассматриваемого как семейство с параметром. Таким образом, элементы алгебры $\Psi(M)$ можно рассматривать как ПДО на M с непрерывным внутренним символом.

G-операторы и скрещенное произведение. Действие группы G на многообразии M индуцирует унитарное представление этой группы в пространстве L^2:

$$\widetilde{T}_g : L^2(M) \longrightarrow L^2(M), \quad g \in G,$$

$$\widetilde{T}_g = \mu^{-1/2} T_g \mu^{1/2} \equiv \left(\frac{g^{-1*}\mu}{\mu}\right)^{1/2} T_g,$$

где $\mu = \mu_0$ — мера, входящая в определение пространства $L^2(M)$.

Группа G действует на алгебре $\Psi(M)$ слева по правилу

$$A \in \Psi(M), g \in G \longmapsto \widetilde{T}_g A \widetilde{T}_g^{-1} \in \Psi(M)$$

и определено максимальное C^*-скрещенное произведение $\Psi(M) \rtimes G$ (о теории скрещенных произведений см., например, [12]). Элементы этого произведения являются семействами $\{D_g\}$ ПДО на M, параметризованных группой. Семейство будем называть конечным, если в нем только конечное число элементов отлично от нуля. Множество конечных семейств обозначается через $\Psi(M) \rtimes_{alg} G$ и называется *алгебраическим* скрещенным произведением. Ниже будем использовать следующее универсальное свойство максимального скрещенного произведения $A \rtimes G$ алгебры A и группы G, действующей на A автоморфизмами: любое ковариантное представление, т. е. пара представлений

$$\rho_0 : A \to \mathcal{B}H, \rho_1 : G \to \mathcal{B}H \text{ таких, что } \rho_0 g(a) = \rho_1(g)\rho_0(a)\rho_1(g)^{-1},$$

(представление ρ_1 предполагается унитарным) индуцирует гомоморфизм скрещенного произведения:

$$\rho : A \rtimes G \longrightarrow \mathcal{B}H,$$

который на элементах алгебраического скрещенного произведения имеет вид

$$\rho\{a_h\} = \sum_{h \in G} \rho_0(a_h)\rho_1(h).$$

Тогда сопоставление конечному семейству $\{D_h\}$ соответствующего G-оператора

$$\sum_h D_h \widetilde{T}_h : L^2(M) \longrightarrow L^2(M)$$

продолжается до гомоморфизма C^*-алгебр:

$$\begin{array}{rcl} \pi : \Psi(M) \rtimes G & \longrightarrow & \mathcal{B}/\mathcal{K}, \\ \{D_h\} & \longmapsto & \sum\limits_h D_h \widetilde{T}_h. \end{array}$$

Здесь $\mathcal{B}$ ($\mathcal{K}$) — алгебра ограниченных (компактных) операторов в пространстве $L^2(M)$, и мы воспользовались универсальным свойством максимального скрещенного произведения.

Наша цель в этом параграфе — исследовать фредгольмовость G-операторов. Очевидно, фредгольмовость оператора со сдвигами эквивалента обратимости соответствующего элемента алгебры Калкина $\mathcal{B}/\mathcal{K}$, т. е. обратимости элемента $\pi(a)$ для $a \in \Psi(M) \rtimes G$. Для исследования проблемы обратимости мы введем понятие символа G-оператора и соответствующее квантование.

Так как конормальный символ G-оператора является семейством G-операторов с параметром (см. (2.6)), то опишем C^*-вариант этого понятия.

G-операторы с параметром. Группа G действует на косферическом расслоении $S^*M = T_0^*M/\mathbb{R}_+$, при этом граница расслоения, обозначаемая через ∂S^*M, является инвариантной относительно этого действия. Следовательно, определено скрещенное произведение $C(\partial S^*M) \rtimes G$. Так как окрестность конической точки диффеоморфна произведению $\Omega \times \mathbb{R}_+$, то имеет место диффеоморфизм $\partial S^*M \simeq S(T^*\Omega \times \mathbb{R}_p)$.

Через

$$\Psi_p(\Omega) \subset C(L, \mathcal{B}L^2(\Omega)), \qquad \text{где } L = \{\operatorname{Re} p = 0\},$$

обозначим замыкание по норме алгебры классических ПДО нулевого порядка на Ω с параметром $p \in L$ (см., например, [3]). Здесь $C(L, \mathcal{B}L^2(\Omega))$ — алгебра непрерывных ограниченных функций на весовой прямой L со значениями в ограниченных операторах в пространстве $L^2(\Omega)$.

Определение 5.1. *G-символом с параметром p* называется элемент

$$a \in C(S(T^*\Omega \times \mathbb{R}_p)) \rtimes G.$$

Определим отображение квантования G-символов с параметром формулой

$$Op(a) = \sum_h Op(a_h)(p) \widetilde{T}'_h e^{p\beta_h} : L^2(\Omega) \longrightarrow L^2(\Omega), \text{ где } a = \{a_g\}, \qquad p \in L, \tag{5.1}$$

а $\widetilde{T}'_h$ — унитарное представление группы G в пространстве $L^2(\Omega)$ операторами сдвига на Ω. Формула (5.1) определяет отображение квантования на алгебраическом скрещенном произведении. Оно продолжается в силу универсального свойства на C^*-скрещенное произведение до гомоморфизма C^*-алгебр:

$$Op : C(S(T^*M \times \mathbb{R}_p)) \rtimes G \longrightarrow C\bigl(L, \mathcal{B}\bigr)/C_0\bigl(L, \mathcal{K}\bigr).$$

Здесь $C_0\bigl(L, \mathcal{K}\bigr)$ — идеал непрерывных компактнозначных функций на прямой, стремящихся к нулю на бесконечности.

Определение 5.2. *Семейством G-операторов с параметром* называется семейство операторов

$$A(p) \in C\bigl(L, \mathcal{B}\bigr)$$

такое, что $A(p) - Op(a) \in C_0(L, \mathcal{B}/\mathcal{K})$ для некоторого символа $a \in C(S(T^*M \times \mathbb{R}_p)) \rtimes G$.

Элемент a будем называть *символом семейства с параметром* и обозначать через $\sigma(A(p))$.

Определение 5.3. Алгебра *семейств G-операторов с параметром p* определяется формулой

$$\Psi_p^G(\Omega) = \Bigl\{(a, A(p)) \in C(\partial S^*M) \rtimes G \oplus C(L, \mathcal{B}L^2(\Omega)) \mid Op(a) - A(p) \in C_0(L, \mathcal{K})\Bigr\}. \tag{5.2}$$

По построению имеет место короткая точная последовательность C^*-алгебр

$$\begin{array}{ccccc} 0 \longrightarrow C_0(L,\mathcal{K}) & \longrightarrow & \Psi_p^G(\Omega) & \longrightarrow & C(\partial S^*M) \rtimes G \longrightarrow 0 \\ A(p) & \longmapsto & (0, A(p)) & & \\ & & (a, A(p)) & \longmapsto & a. \end{array} \tag{5.3}$$

Из точности последовательности (5.3) стандартными методами получаем следствие.

Следствие 5.1. *Если семейство с параметром $A(p)$ является эллиптическим, т. е. символ $\sigma(A(p)) \in C(\partial S^*M) \rtimes G$ обратим, то это семейство фредгольмово при всех $p \in L$ и обратимо на бесконечности.*

Символ G-операторов на многообразии M. Рассмотрим G-оператор вида конечной суммы

$$D = \sum_h D_h \widetilde{T}_h : L^2(M) \longrightarrow L^2(M) \tag{5.4}$$

на M. Определим его символ $\sigma(D) = (\sigma_0(D), \sigma_c(D))$ как пару

$$\Big(\{\sigma_0(D_g)\}, \sum_h \sigma_c(D_h)\widetilde{T}'_h e^{p\beta_h}\Big) \in C(S^*M) \rtimes G \oplus \Psi_p^G(\Omega), \tag{5.5}$$

состоящую из внутреннего символа $\sigma_0(D)$ и конормального символа $\sigma_c(D)$.

Алгебру символов на G-многообразии M с конической точкой определим как подалгебру в прямой сумме алгебр

$$\Sigma \subset C(S^*M) \rtimes G \bigoplus \Psi_p^G(\Omega),$$

определяемую условием согласования:

$$\Sigma = \Big\{(a_0, a_c) \;\Big|\; a_0\big|_{\partial S^*M} = \sigma(a_c)\Big\}.$$

Здесь $a_0|_{\partial S^*M} \in C(\partial S^*M) \rtimes G$ — сужение внутреннего символа на границу, а $\sigma(a_c) \in C(\partial S^*M) \rtimes G$ — символ семейства с параметром (см. выше).

Теперь мы можем определить символ G-операторов на многообразии M как гомоморфизм алгебр:

$$\sigma : \Psi(M) \rtimes G \longrightarrow \Sigma,$$

продолжающий отображение (5.5). Символьное отображение корректно определено в силу универсального свойства скрещенного произведения.

Квантование символов. Построим отображение квантования

$$Op : \Sigma \longrightarrow \mathcal{B}/\mathcal{K}, \tag{5.6}$$

сопоставляющее символу некоторый оператор.

Чтобы построить отображение (5.6), рассмотрим элемент $a = (a_0, a_c) \in \Sigma$, первая компонента которого лежит в алгебраическом скрещенном произведении. Так как элементы $(a_0)_g$ отличны от нуля только для конечного числа диффеоморфизмов $g \in G$, то существуют такие окрестности U, V конической точки, что $g(U) \subset V$ и в U все такие диффеоморфизмы имеют вид (1.1). Пусть φ, ψ — такие гладкие функции на M, тождественно равные нулю вне окрестностей U и V соответственно и равные единице в несколько меньшей окрестности конической точки.

Квантование символа строится в два этапа.

Во-первых, определим оператор (здесь $\mathcal{M}_{r\to p}$ — преобразование Меллина)

$$\widehat{a}_c = \psi a_c\left(-r\frac{\partial}{\partial r}\right)\varphi \equiv \psi \mathcal{M}^{-1}_{p\to r} a_c(p) \mathcal{M}_{r\to p}\varphi,$$

конормальный символ которого равен a_c (что проверяется прямым вычислением).

Во-вторых, в силу условия согласования внутренний символ a_0 и внутренний символ $\sigma_0(\widehat{a}_c)$ оператора $\widehat{a}_c$ совпадают над ∂S^*M. Поэтому имеем:

$$a_0 - \sigma_0(\widehat{a}_c) \in C_0(S^*M \setminus \partial S^*M) \rtimes G, \tag{5.7}$$

т. е. эта разность является символом, обращающимся в нуль над ∂S^*M. Поэтому внутреннему символу (5.7) естественно сопоставить оператор над M, имеющий нулевой конормальный символ. Обозначим этот оператор через $Op\big(a_0 - \sigma_0\,(\widehat{a}_c)\big)$. Окончательно положим:

$$Op(a) = Op\big(a_0 - \sigma_0\,(\widehat{a}_c)\big) + \widehat{a}_c \in \mathcal{B}/\mathcal{K}. \tag{5.8}$$

Несложно проверить, что оператор $Op(a)$ с точностью до компактных слагаемых не зависит от выбора срезающих функций φ и ψ.

Основная теорема.

Теорема 5.1.

1. *Отображение* Op (*см.* (5.8)) *продолжается по непрерывности до гомоморфизма* C^**-алгебр, и имеет место коммутативная диаграмма* C^**-алгебр и их гомоморфизмов*

$$\begin{tikzcd} \Psi(M) \rtimes G \arrow[rr, "\pi"] \arrow[dr, "\sigma"'] & & \mathcal{B}/\mathcal{K} \\ & \Sigma \arrow[ur, "Op"'] & \end{tikzcd} \tag{5.9}$$

2. (*Фредгольмовость.*) *Пусть для элемента* $A = \{A_g\} \in \Psi(M) \rtimes G$ *символ* $\sigma(A) \in \Sigma$ *обратим. Тогда соответствующий* G*-оператор*

$$\sum_{h \in G} A_h \widetilde{T}_h : L^2(M) \to L^2(M)$$

фредгольмов.

Доказательство.

1. Сначала установим коммутативность диаграммы (5.9) в алгебраическом случае, т. е. для элемента $A = \{A_g\} \in \Psi(M) \rtimes_{alg} G$ с символом $\sigma(A)$ установим равенство $\pi(A) = Op(\sigma(A))$.

С одной стороны, имеем

$$\pi(A) = \sum_h A_h \widetilde{T}_h. \tag{5.10}$$

С другой стороны, символ имеет вид

$$\sigma(A) = \left(\{\sigma_0(A_h)\}, \sum_h \sigma_c(A_h)(p)\widetilde{T}'_h e^{p\beta_h}\right),$$

где $\sigma_0(A_g)$ и $\sigma_c(A_g)$ — внутренний и конормальный символы оператора A_g. Далее квантование этого символа дает оператор:

$$\begin{aligned} Op(\sigma(A)) &= \sum_h Op\left(\sigma_0(A_h) - \sigma_0\left(\psi\sigma_c(A_h)\left(-r\frac{\partial}{\partial r}\right)h^*\varphi\right)\right)\widetilde{T}_h + \sum_h \psi\sigma_c(A_h)\left(-r\frac{\partial}{\partial r}\right)\widetilde{T}_h\varphi = \\ &= \sum_h \left[Op\left(\sigma_0(A_h) - \sigma_0\left(\psi\sigma_c(A_h)\left(-r\frac{\partial}{\partial r}\right)h^*\varphi\right)\right) + \psi\sigma_c(A_h)\left(-r\frac{\partial}{\partial r}\right)h^*\varphi\right]\widetilde{T}_h = \\ &= \sum_h A_h\widetilde{T}_h. \end{aligned} \tag{5.11}$$

Здесь последнее равенство с точностью до компактных операторов следует из того, что оператор в квадратных скобках в (5.11) и оператор A_g имеют равные внутренний и конормальный символы (проверяется прямым вычислением) и, следовательно, совпадают с точностью до компактных операторов.

2. Теперь установим, что Op — гомоморфизм на подалгебре Σ_{alg}, состоящей из символов $a = (a_0, a_c)$, где a_0 лежит в алгебраическом скрещенном произведении. Пусть $a, b \in \Sigma_{alg}$. Так как символьное отображение σ сюръективно, то имеем $a = \sigma(A)$, $b = \sigma(B)$ для некоторых элементов $A, B \in \Psi(M) \rtimes_{alg} G$. Имеем

$$Op(ab) = Op(\sigma(A)\sigma(B)) = Op(\sigma(AB)) = \pi(AB) = \pi(A)\pi(B) = Op(a)Op(b).$$

Искомое свойство установлено.

3. Из раздела 2 следует, что отображение Op продолжается в силу универсального свойства скрещенного произведения с плотной подалгебры $\Sigma_{alg} \subset \Sigma$ на всю алгебру Σ. При этом продолжении диаграмма (5.9) корректно определена и является коммутативной.

4. Для доказательства фредгольмовости достаточно показать, что элемент $\pi(A)$ обратим. Утверждается, что обратный элемент равен $Op(\sigma(A)^{-1})$. В самом деле, имеем

$$\pi(A)\, Op(\sigma(A)^{-1}) = Op(\sigma(A))Op(\sigma(A)^{-1}) = Op(1) = 1.$$

Здесь первое равенство следует из коммутативности диаграммы (5.9), а второе вытекает из того факта, что отображение Op является гомоморфизмом алгебр.

Аналогично устанавливается равенство

$$Op(\sigma(A)^{-1})\, \pi(A) = 1.$$

Теорема доказана. □

Критерий обратимости символа. Согласно теореме 5.1 G-оператор фредгольмов, если его символ обратим как элемент специальной C^*-алгебры. Как проверять эту обратимость? В следующем предложении показывается, что условие обратимости символа из предыдущей теоремы может быть эквивалентно записано в явном виде как обратимость некоторых конкретных операторов. Чтобы выписать это условие, определим набор представлений скрещенного произведения. Зафиксируем точку $(x, \xi) \in S^*M$. Тогда определено представление

$$\begin{array}{rcl} \pi_{x,\xi} : C(S^*M) \rtimes G & \longrightarrow & \mathcal{B}l^2(G), \\ f & \longmapsto & \sum\limits_h f(g^{-1}(x), \partial g^{-1}(\xi), h)\mathcal{T}_h \end{array}$$

скрещенного произведения в алгебре ограниченных операторов, действующих в стандартном пространстве $l^2(G)$ на группе (ср. (2.2)). Смысл этого представления состоит в том, что элементу скрещенного произведения сопоставляется сужение этого элемента на орбиту точки (x, ξ).

Предложение 5.1. *Символ*

$$\sigma(A) = (\sigma_0(A), \sigma_c(A)) \in C(S^*M) \rtimes G \bigoplus \Psi_p^G(\Omega)$$

обратим тогда и только тогда, когда выполнены следующие два условия:

1. *сужение* $\pi_{x,\xi}(\sigma(A)) : l^2(G) \to l^2(G)$ *внутреннего символа на орбиту любой точки* $(x, \xi) \in S^*M$ *обратимо*;
2. *конормальный символ* $\sigma_c(A)(p) : L^2(\Omega) \to L^2(\Omega)$ *обратим при всех* $p \in L$.

Доказательство. Так как символ $\sigma(A)$ является парой, то достаточно установить обратимость каждой компоненты.

1. Внутренний символ $\sigma_0(A)$ является элементом скрещенного произведения. Хорошо известно [8], что элемент скрещенного произведения обратим тогда и только тогда, когда обратимы его сужения $\pi_{x,\xi}(\sigma(A))$ на орбиты всех точек $(x, \xi) \in S^*M$. Следовательно, при наших условиях внутренний символ обратим как элемент скрещенного произведения.

2. Установим обратимость конормального символа $\sigma_c(A) \in C(L, \mathcal{B}L^2(\Omega))$. По предположению этот символ обратим при каждом фиксированном значении p. Надо доказать, что норма обратного семейства равномерно ограничена (непрерывность обратного семейства очевидна). Эта ограниченность на произвольном конечном интервале значений параметра p следует по непрерывности, а при больших значениях параметра вытекает из того, что символ $\sigma(\sigma_c(A)) \in C(\partial S^*M) \rtimes G$ обратим, т. е. семейство с параметром $\sigma_c(A)(p)$ является эллиптическим, и в силу следствия 5.1 обратное семейство равномерно ограничено при больших p.

Предложение доказано. □

Доказательство теоремы 2.1 (фредгольмовость в весовых пространствах Соболева $H^{s,\gamma}$). Пусть

$$D : H^{s,\gamma}(M) \to H^{s-m,\gamma+m}(M)$$

— эллиптический G-оператор порядка m на многообразии M. Надо доказать, что этот оператор фредгольмов.

1. (Редукция к оператору в пространстве L^2.) Во-первых, сведем оператор D к некоторому оператору нулевого порядка, действующему в пространстве $L^2(M)$. Для этого рассмотрим композицию

$$L^2(M) \xrightarrow{D_1} H^{s,\gamma}(M) \xrightarrow{D} H^{s-m,\gamma+m}(M) \xrightarrow{D_2} L^2(M),$$

где через D_1, D_2 обозначены некоторые эллиптические псевдодифференциальные операторы на M, действующие в соответствующих весовых пространствах. Композицию этих операторов обозначим через

$$D' = D_2 D D_1.$$

Эта композиция является G-оператором. Так как ПДО $D_{1,2}$ — эллиптические и, в силу классической конической теории, фредгольмовы, то G-операторы D и D' — фредгольмовы или нефредгольмовы одновременно. Далее, из мультипликативного свойства символов

$$\sigma(D') = \sigma(D_2)\sigma(D)\sigma(D_1)$$

и эллиптичности операторов D_2 и D_1 следует также, что из эллиптичности G-оператора D следует эллиптичность G-оператора D'.

2. Покажем, что из эллиптичности оператора D' в смысле определения 2.3 следует обратимость его символа как элемента алгебры символов

$$\sigma(D') \in C(S^*M) \rtimes G \bigoplus C(L, \mathcal{B}L^2(\Omega)), \qquad L = \{\operatorname{Re} p = 0\}.$$

Действительно, критерий обратимости этого элемента был получен в предложении 5.1. Покажем, что условия этого предложения выполнены. В самом деле, конормальный символ $\sigma_c(D)(p)$ обратим по предположению при всех $p \in L$. Осталось установить обратимость сужения $\pi_{x,\xi}(\sigma(D))$ внутреннего символа на орбиту произвольной точки $(x,\xi) \in S^*M$. Заметим, что имеет место коммутативная диаграмма

$$\begin{array}{ccc} l^2(G, m_{x,\xi}) & \xrightarrow{\sigma(D')(x,\xi)} & l^2(G, m_{x,\xi}) \\ {\scriptstyle\sqrt{m_{x,\xi}}}\downarrow \simeq & & {\scriptstyle\sqrt{m_{x,\xi}}}\downarrow \simeq \\ l^2(G) & \xrightarrow[\pi_{x,\xi}(\sigma(D'))]{} & l^2(G), \end{array} \tag{5.12}$$

в которой вертикальные отображения — изоморфизмы, определяемые умножением на квадратный корень из весовой функции $m_{x,\xi}(g)$ из (2.3), отвечающей значениям $s = \gamma = 0$. Коммутативность диаграммы (5.12) устанавливается прямым вычислением, если оператор D' записывать в виде (5.4). Из эллиптичности оператора D' в смысле определения 2.3 следует, что в верхней строке диаграммы (5.12) находится изоморфизм. Из коммутативности диаграммы следует, что и в нижней строке тоже стоит изоморфизм, т. е. сужение $\pi_{x,\xi}(\sigma(D'))$ символа на орбиту точки x, ξ обратимо, что и требовалось доказать.

Теорема 2.1 доказана.

6. Дополнение. Вычисление внутреннего символа

Дадим детали вычисления символа (2.2) и веса (2.3) методом замораживания коэффициентов.

Сначала рассмотрим дифференциальный оператор D на M и точку $x_0 \in M \setminus pt$. Замораживая его коэффициенты в точках орбиты $Gx_0 \subset M$ и отбрасывая младшие члены, получим оператор с постоянными коэффициентами в пространстве функций на орбите[1]:

$$\bigoplus_{g\in G} \sigma_0(D)\left(g^{-1}(x_0), -i\frac{\partial}{\partial x_g}\right) : \bigoplus_g H^s\Big(T_{g^{-1}(x_0)}M, |\cdot|_{g^{-1}(x_0)}, \mu_\gamma(g^{-1}(x_0))\Big) \longrightarrow$$

$$\longrightarrow \bigoplus_g H^{s-m}\Big(T_{g^{-1}(x_0)}M, |\cdot|_{g^{-1}(x_0)}, \mu_{\gamma+m}(g^{-1}(x_0))\Big).$$

[1]Напомним, что норма в пространстве Соболева $H^s(V, |\cdot|, d\xi)$, где V — векторное пространство, определяется в терминах нормы $|\cdot|$ и меры $d\xi$ на V^* по формуле:

$$\|f\|_s^2 = \int_V (1+|\xi|^2)^s |\widetilde{f}(\xi)|^2 d\xi, \text{ где } \widetilde{f}(\xi) \text{ — преобразование Фурье функции } f(x).$$

Преобразованием Фурье $x_g \to \xi_g$ в каждой точке орбиты этот оператор переводится в изоморфный оператор[1]:

$$\bigoplus_{g\in G}\sigma_0(D)\left(g^{-1}(x_0),\xi_g\right):\bigoplus_g L^2\Big(T^*_{g^{-1}(x_0)}M,(1+|\xi_g|^2)^s\mu_\gamma(g^{-1}(x_0))\Big)\longrightarrow$$
$$\longrightarrow\bigoplus_g L^2\Big(T^*_{g^{-1}(x_0)}M,(1+|\xi_g|^2)^{s-m}\mu_{\gamma+m}(g^{-1}(x_0))\Big). \quad (6.1)$$

Как обычно в эллиптической теории, символ (6.1) надо рассматривать вне нулевого сечения, т. е. от оператора (6.1) мы перейдем к оператору

$$\bigoplus_{g\in G}\sigma_0(D)\left(g^{-1}(x_0),\xi_g\right):\bigoplus_g L^2\Big(T^*_{g^{-1}(x_0)}M,|\xi_g|^{2s}\mu_\gamma(g^{-1}(x_0))\Big)\longrightarrow$$
$$\longrightarrow\bigoplus_{g\in G} L^2\Big(T^*_{g^{-1}(x_0)}M,|\xi_g|^{2(s-m)}\mu_{\gamma+m}(g^{-1}(x_0))\Big). \quad (6.2)$$

Полученный оператор (6.2) действует в прямой сумме пространств, отвечающих разным точкам многообразия M. Это не вполне удобно с вычислительной точки зрения. Чтобы избавиться от этого неудобства, перепишем оператор (6.2) так, чтобы он действовал в пространстве функций, отвечающем точке x_0. С этой целью мы заметим, что для любого $g\in G$ кодифференциал соответствующего диффеоморфизма $g:M\to M$ определяет изоморфизм кокасательных пространств:

$$\partial g: T^*_{g^{-1}(x_0)}M\longrightarrow T^*_{x_0}M.$$

Следовательно, соответствующий оператор сдвига обратим и является изометрическим изоморфизмом L^2-пространств[2]:

$$T_{\partial g}^{-1}=(\partial g)^*: L^2\Big(T^*_{x_0}M,|\xi|^{2s}\mu_\gamma(x_0)m_{s,\gamma}(g)\Big)\longrightarrow L^2\Big(T^*_{g^{-1}(x_0)}M,|\xi_g|^{2s}\mu_\gamma(g^{-1}(x_0))\Big), \quad (6.3)$$

где весовая функция $m_{s,\gamma}(g)$ на пространстве $T^*_{x_0}M$ определяется соотношением

$$m_{s,\gamma}(g)=\frac{\Big(\partial g^{-1*}(\mu_\gamma|\xi|^{2s})\Big)(x_0,\xi)}{\mu_\gamma(x_0)|\xi|^{2s}},$$

которое совпадает с (2.3) с точностью до умножения на обратимую функцию $|\xi|^{2s}$. Пользуясь изометрическими изоморфизмами (6.3), пространства в (6.2) можно заменить на изоморфные пространства вида:

$$\begin{array}{ccc}\bigoplus_{g\in G}T_{\partial g}:\bigoplus_g L^2\Big(T^*_{g^{-1}(x_0)}M,|\xi|^{2s}\mu_\gamma(g^{-1}(x_0))\Big) & \xrightarrow{\simeq} & L^2\Big(T^*_{x_0}M,|\xi|^{2s}\mu_\gamma(x_0);l^2(G,m_{s,\gamma})\Big),\\ \{w(\xi_g)\} & \longmapsto & \{w(\partial g^{-1}(\xi))\},\end{array} \quad (6.4)$$

где в образе отображения находится пространство функций на $T^*_{x_0}M$ со значениями в пространстве $l^2(G,m_{s,\gamma})$ функций на группе.

Итак, с учетом формул (6.2) и (6.4) мы видим, что символ оператора D, получаемый замораживанием коэффициентов оператора на орбите и переходом к преобразованию Фурье, можно представлять как семейство операторов умножения

$$\begin{array}{rccc}\sigma_0(D)(x_0,\xi): & l^2(G,m_{s,\gamma}) & \longrightarrow & l^2(G,m_{s-m,\gamma-m}),\\ & w(g) & \longmapsto & \sigma_0(D)\big(g^{-1}(x_0),\partial g^{-1}(\xi)\big)w(g)\end{array} \quad (6.5)$$

на значения внутреннего символа оператора в соответствующих точках орбиты точки $(x_0,\xi)\in T^*_0M$.

---

[1]Здесь и ниже $L^2(X,\mu_X)$ — пространство L^2 функций на пространстве X, интегрируемых с квадратом относительно меры μ_X.

[2]Здесь мы пользуемся следующим простым утверждением: если $\varphi: X\to Y$ — диффеоморфизм, то отображение $\varphi^*: L^2(Y,\mu_Y)\to L^2(X,\mu_X)$ будет изометрическим изоморфизмом, если имеет место равенство мер $\mu_X=\varphi^*\mu_Y$.

Аналогичное вычисление (которое мы для краткости опустим) показывает, что символ оператора сдвига T_h равен оператору правого сдвига функций на группе:

$$\begin{aligned} \sigma_0(T_h)(x_0,\xi) = \mathcal{T}_h : \quad l^2(G, m_{s,\gamma}) &\longrightarrow l^2(G, m_{s,\gamma}), \\ w(g) &\longmapsto w(gh). \end{aligned} \tag{6.6}$$

Из формул (6.5) и (6.6) следует искомая формула для символа (2.2), а также формула (2.3) для веса.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Агранович М. С., Вишик М. И.* Эллиптические задачи с параметром и параболические задачи общего вида// Усп. мат. наук. — 1964. — *19*, № 3. — С. 53–161.
2. *Кондратьев В. А.* Краевые задачи для эллиптических уравнений в областях с коническими и угловыми точками// Тр. Моск. Мат. об-ва. — 1967. — *16*. — С. 209–292.
3. *Назайкинский В. Е., Савин А. Ю., Стернин Б. Ю.* Псевдодифференциальные операторы на стратифицированных многообразиях. II// Дифф. уравн. — 2007. — *43*, № 5. — С. 685–696.
4. *Стернин Б. Ю.* Квазиэллиптические операторы на бесконечном цилиндре. — М.: МИЭМ, 1972.
5. *Стернин Б. Ю.* Эллиптическая теория на компактных многообразиях с особенностями. — М.: МИЭМ, 1974.
6. *Савин А. Ю.* О символе нелокальных операторов в пространствах Соболева// Дифф. уравн. — 2011. — *47*, № 6. — С. 890–893.
7. *Antonevich A., Belousov M., Lebedev A.* Functional differential equations. II. C^*-applications. Ч. 1, 2. — Harlow: Longman, 1998.
8. *Antonevich A., Lebedev A.* Functional differential equations. I. C^*-theory. — Harlow: Longman, 1994.
9. *Nazaikinskii V. E., Savin A. Yu., Schulze B.-W., Sternin B. Yu.* Elliptic theory on singular manifolds. — Boca Raton: CRC-Press, 2005.
10. *Nazaikinskii V. E., Savin A. Yu., Sternin B. Yu.* Elliptic theory and noncommutative geometry. — Basel: Birkhäuser, 2008.
11. *Nazaikinskii V., Savin A., Sternin B.* Elliptic theory on manifolds with corners. I. Dual manifolds and pseudodifferential operators// В сб.: C^*-algebras and elliptic theory. II. — Basel: Birkhäuser, 2008. — С. 183–206.
12. *Pedersen G. K.* C^*-Algebras and their automorphism groups. — London—New York: Academic Press, 1979.
13. *Savin A. Yu., Sternin B. Yu.* Uniformization of nonlocal elliptic operators and KK-theory// Russ. J. Math. Phys. — 2013. — *20*, № 3. — С. 345–359.
14. *Savin A. Yu., Sternin B. Yu.* Elliptic theory for operators associated with diffeomorphisms of smooth manifolds// В сб.: Pseudo-differential operators, generalized functions and asymptotics. Selected papers of the 8th ISAAC congress, Moscow, Russia, August 22–27, 2011. — Basel: Birkhäuser, 2013. — С. 1–26.
15. *Savin A. Yu., Sternin B. Yu.* Index of elliptic operators for diffeomorphisms of manifolds// J. Noncommut. Geom. — 2014. — *8*, № 3. — С. 695–734.

А. Ю. Савин
Российский университет дружбы народов, кафедра прикладной математики
Ганноверский университет имени Готфрида Вильгельма Лейбница
E-mail: `antonsavin@mail.ru`

Б. Ю. Стернин
Российский университет дружбы народов, кафедра прикладной математики
Ганноверский университет имени Готфрида Вильгельма Лейбница
E-mail: `sternin@mail.ru`

UDC 517.9

Elliptic G-Operators on Manifolds with Isolated Singularities

© 2016 **A. Yu. Savin, B. Yu. Sternin**

Abstract. We study elliptic operators on manifolds with singularities such that a discrete group G acts on the manifold. Following the standard elliptic theory approach, we define the Fredholm property of an operator by its principal symbol. For this problem, we prove that the symbol is a pair consisting of the symbol on the principal stratum (the inner symbol) and the symbol at the conical point (the conormal symbol). We establish the Fredholm property of elliptic elements.

REFERENCES

1. M. S. Agranovich and M. I. Vishik, "Ellipticheskie zadachi s parametrom i parabolicheskie zadachi obshchego vida" [Elliptic problems with a parameter and parabolic problems of general type], *Usp. mat. nauk* [Progr. Math. Sci.], 1964, **19**, No. 3, 53–161 (in Russian).
2. V. A. Kondratiev, "Kraevye zadachi dlya ellipticheskikh uravneniy v oblastyakh s konicheskimi i uglovymi tochkami" [Boundary-value problems for elliptic equations in domains with conical and angle points], *Tr. Mosk. Mat. ob-va* [Proc. Moscow Math. Soc.], 1967, **16**, 209–292 (in Russian).
3. V. E. Nazaykinskiy, A. Yu. Savin, and B. Yu. Sternin, "Psevdodifferentsial'nye operatory na stratifitsirovannykh mnogoobraziyakh. II" [Pseudodifferential operators on stratified manifolds], *Diff. uravn.* [Differ. Equations], 2007, **43**, No. 5, 685–696 (in Russian).
4. B. Yu. Sternin, *Kvaziellipticheskie operatory na beskonechnom tsilindre* [Quasi-Elliptic Operators on an Infinite Cylinder], MIEM, Moscow, 1972 (in Russian).
5. B. Yu. Sternin, *Ellipticheskaya teoriya na kompaktnykh mnogoobraziyakh s osobennostyami* [Elliptic Theory on Compact Manifolds with Singularities], MIEM, Moscow, 1974 (in Russian).
6. A. Yu. Savin, "O simvole nelokal'nykh operatorov v prostranstvakh Soboleva" [On the symbol of nonlocal operators in Sobolev spaces], *Diff. uravn.* [Differ. Equations], 2011, **47**, No. 6, 890–893 (in Russian).
7. A. Antonevich, M. Belousov, and A. Lebedev, *Functional Differential Equations*. II. *C^*-Applications. Part* 1, 2, Longman, Harlow, 1998.
8. A. Antonevich and A. Lebedev, *Functional Differential Equations*. I. *C^*-Theory*, Longman, Harlow, 1994.
9. V. E. Nazaikinskii, A. Yu. Savin, B.-W. Schulze, and B. Yu. Sternin, *Elliptic Theory on Singular Manifolds*, CRC-Press, Boca Raton, 2005.
10. V. E. Nazaikinskii, A. Yu. Savin, and B. Yu. Sternin, *Elliptic Theory and Noncommutative Geometry*, Birkhäuser, Basel, 2008.
11. V. Nazaikinskii, A. Savin, and B. Sternin, "Elliptic theory on manifolds with corners. I. Dual manifolds and pseudodifferential operators," In: *C^*-Algebras and Elliptic Theory*. II, Birkhäuser, Basel, 2008, 183–206.
12. G. K. Pedersen, *C^*-Algebras and Their Automorphism Groups*, Academic Press, London–New York, 1979.
13. A. Yu. Savin and B. Yu. Sternin, "Uniformization of nonlocal elliptic operators and KK-theory," *Russ. J. Math. Phys.*, 2013, **20**, No. 3, 345–359.
14. A. Yu. Savin and B. Yu. Sternin, "Elliptic theory for operators associated with diffeomorphisms of smooth manifolds," In: *Pseudo-differential operators, generalized functions and asymptotics*, Selected papers of the 8th ISAAC congress, Moscow, Russia, August 22–27, 2011, Birkhäuser, Basel, 2013, 1–26.
15. A. Yu. Savin and B. Yu. Sternin, "Index of elliptic operators for diffeomorphisms of manifolds," *J. Noncommut. Geom.*, 2014, **8**, No. 3, 695–734.

A. Yu. Savin
Peoples' Friendship University of Russia, Moscow, Russia
Gottfried Wilhelm Leibniz Universität Hannover, Hannover, Germany
E-mail: antonsavin@mail.ru

B. Yu. Sternin
Peoples' Friendship University of Russia, Moscow, Russia
Gottfried Wilhelm Leibniz Universität Hannover, Hannover, Germany
E-mail: sternin@mail.ru