

КВАДРАТИЧНАЯ ОЦЕНКА ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ДЛЯ ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ ЗАКОНОВ СОХРАНЕНИЯ: ОБЗОР

© 2016 г. С. МОДЕНА

Аннотация. В совместной работе с С. Бьянкини [8] (см. также [6, 7]), нами доказана квадратичная оценка взаимодействия для системы законов сохранения

$$\begin{cases} u_t + f(u)_x = 0, \\ u(t=0) = u_0(x), \end{cases}$$

где $u : [0, \infty) \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$, $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ — строго гиперболическая, $\text{Tot.Var.}(u_0) \ll 1$. Для решения типа волнового фронта, в котором одновременно взаимодействуют только два фронта волны, эта оценка может быть записана в виде

$$\sum_{\text{время взаимодействия } t_j} \frac{|\sigma(\alpha_j) - \sigma(\alpha'_j)| |\alpha_j| |\alpha'_j|}{|\alpha_j| + |\alpha'_j|} \leq C(f) \text{Tot.Var.}(u_0)^2,$$

где α_j, α'_j — волновые фронты, взаимодействующие в момент времени t_j , $\sigma(\cdot)$ — их скорость, $|\cdot|$ обозначает их интенсивность, а $C(f)$ — константа, зависящая только от f (см. [8, теорема 1.1] или, в более общем виде, в теореме 3.1 в настоящей работе).

Целью этой работы является привести доказательство этой квадратичной оценки в упрощенной постановке, в которой, тем не менее

- присутствуют все основные идеи;
- отсутствуют все технические трудности, возникающие в общем случае в [8].

1. ВВЕДЕНИЕ

1.1. Системы законов сохранения. В одномерном случае система законов сохранения (см. [9]) является системой уравнений с частными производными вида

$$u_t + f(u)_x = 0, \tag{1.1}$$

где $u : [0, \infty) \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ — неизвестная функция, а $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ — заданное гладкое (C^3) отображение, называемое *поток*, которое удовлетворяет условию строгой гиперболичности, т. е. его матрица Якоби $Df(u)$ имеет n различных собственных чисел

$$\lambda_1(u) < \dots < \lambda_n(u)$$

в каждой точке $u \in \mathbb{R}^n$ своей области определения. Как принято, обозначим через $r_1(u), \dots, r_n(u)$ *правильные* собственные векторы (нормированные к 1), соответствующие $\lambda_1(u), \dots, \lambda_n(u)$:

$$Df(u)r_k(u) = \lambda_k(u)r_k(u) \quad \text{для всех } k = 1, \dots, n \text{ и всех } u \in \mathbb{R}^n.$$

Уравнение (1.1) обычно рассматривается вместе с начальным условием

$$u|_{t=0} = u_0, \tag{1.2}$$

где $u_0 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ — заданное отображение, полная вариация которого предполагается достаточно малой.

Системы законов сохранения очень важны для приложений. Например, они широко используются в механике сплошной среды для выражения фундаментальных законов равновесия (см. [11]), когда пренебрегают малой вязкостью или диссипацией. Так, уравнение Эйлера для сжимаемого безвязкостного газа в лагранжевых координатах принимает вид системы трех законов сохранения,

Автор благодарен профессору Стефано Бьянкини, который внимательно прочитал рукопись и сделал много полезных замечаний.

где неизвестными являются объем газа, его скорость и давление. Законы сохранения используются также во многих других областях, например, в биологии, а также для описания транспортных потоков. В последнем случае неизвестной $u(t, x) \in \mathbb{R}$ является плотность автомобилей в момент времени t в точке x , а отображение $f = f(u)$ представляет поток автомобилей как функцию их плотности u .

Хорошо известно, что классические (гладкие) решения задачи Коши (1.1)-(1.2) в общем случае не определены на всем интервале времени $[0, \infty)$ даже при гладких начальных данных, поскольку достигают точек разрыва за конечное время. С другой стороны, решение в смысле распределений не гарантирует единственности. Поэтому решение обычно понимается в следующем смысле.

Определение 1.1. Отображение $u : [0, \infty) \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$, принадлежащее L^1_{loc} , называется *слабым решением* задачи Коши (1.1)-(1.2), если

1. u удовлетворяет уравнению (1.1) в смысле распределений;
2. u непрерывно как отображение $[0, \infty) \rightarrow L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}; \mathbb{R}^n)$;
3. $u(0, x) = u_0(x)$ при $t = 0$;
4. u удовлетворяет дополнительным критериям допустимости, которые следуют из физических соображений либо из требования устойчивости и гарантируют единственность решения.

В литературе были предложены многие критерии допустимости, вот некоторые из них: условие ударов Лакса—Лю (см. [13, 15, 16]), условие энтропии (см. [14]), критерий исчезающей вязкости (см. [5]). Здесь мы не будем вдаваться в подробности.

Первый результат о существовании решения задачи Коши (1.1)-(1.2) был опубликован в известной работе Глимма [12] в 1965 году, где существование решения доказано при условии, что каждое характеристическое поле либо *истинно нелинейно*, т. е. $\nabla \lambda_k(u) \cdot r_k(u) \neq 0$ для всех u , либо *линейно вырождено*, т. е. $\nabla \lambda_k(u) \cdot r_k(u) = 0$ для всех u . В работе [12] для любого $\varepsilon > 0$ построено приближенное решение $u_\varepsilon(t, x)$, начинающееся с приближения $u_{0,\varepsilon}$ начального условия u_0 и используя итерационный процесс в каждый момент $t = i\varepsilon$, $i \in \mathbb{N}$. Предполагая, что $\text{Tot.Var.}(u_0)$ достаточно мало и используя убывающий функционал $t \mapsto Q^{\text{Glimm}}(t)$, Глимм доказывает, что отображение $t \mapsto \text{Tot.Var.}(u_\varepsilon(t))$ равномерно ограничено; как следствие, семейство $\{u_\varepsilon\}$ содержит сходящуюся подпоследовательность, которая (с вероятностью 1) является слабым решением (1.1)-(1.2).

Наиболее общий результат о существовании, единственности и L^1 устойчивости решений (1.1)-(1.2) без каких-либо предположений относительно f , за исключением строгой гиперболичности, получен Бьянкини и Брессини в 2005 г. в [5]. Ими доказано существование непрерывной по Липшицу полугруппы $\{S_t \mid t \geq 0\}$ *решений с исчезающей вязкостью* с малой полной вариацией, получающейся как (единственный) предел решений вязкостных параболических аппроксимаций

$$u_t + f(u)_x = \mu u_{xx}, \tag{1.3}$$

с убывающей вязкостью $\mu \rightarrow 0$.

1.2. Квадратичная оценка взаимодействия. Долгое время обсуждался вопрос скорости сходимости приближенных решений $\{u_\varepsilon\}$, построенных по схеме Глимма, к точному слабому решению u . Первый шаг в этом направлении был сделан Брессаном и Марсоном в 1998 г. в [10]. В предположении истинной нелинейности или линейной вырожденности было доказано, что L^1 -расстояние между приближенным решением $u_\varepsilon(t, \cdot)$, построенным по схеме Глимма, и точным слабым решением $u(t, \cdot)$ в любой момент времени t стремится к 0 быстрее, чем $|\ln \varepsilon| \sqrt{\varepsilon}$, т. е.

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\|u_\varepsilon(t, \cdot) - u(t, \cdot)\|_{L^1}}{|\ln \varepsilon| \sqrt{\varepsilon}} = 0,$$

если итерационная процедура в моменты времени $t = i\varepsilon$, $i \in \mathbb{N}$ выбрана подходящим образом.

Подход работы [10] может быть распространен на общий случай без дополнительных предположений относительно потока f , за исключением строгой гиперболичности, если удастся доказать,

что для любого приближенного решения u_ε выполняется следующая квадратичная оценка взаимодействия (см. [1]):

$$\sum_{\text{время взаимодействия } t_j} \frac{|\sigma(\alpha_j) - \sigma(\alpha'_j)| |\alpha_j| |\alpha'_j|}{|\alpha_j| + |\alpha'_j|} \leq C(f) \text{Tot.Var.}(u_0)^2, \quad (1.4)$$

где α_j, α'_j — волновые фронты, взаимодействующие в момент времени t_j , $\sigma(\cdot)$ — их скорость, $|\cdot|$ обозначает их интенсивность, а $C(f)$ — константа, зависящая от f , и не зависящая от ε . Термин *квадратичная* указывает на то, что в правой части (1.4) полная вариация u_0 стоит в степени 2. Оценка (1.4) для простоты написана в случае одновременного взаимодействия только двух волновых фронтов. Общая формулировка может быть найдена в [8, теорема 1.1] или в теореме 3.1 настоящей работы.

В случае истинной нелинейности или вырожденной линейности оценка (1.4) была доказана Лю в [17] с помощью квадратичного функционала взаимодействия Q^{Glimm} , введенного Глиммом в [12], и алгоритма разбиения волн, в котором каждый волновой фронт приближенного решения раскладывается на волны, чьи интенсивности и скорости могут быть трассированы.

К сожалению, функционал Глимма Q^{Glimm} не работает в общем случае, т. к. два волновых фронта, взаимодействующие в момент времени t_j , могут взаимодействовать и в момент времени $t_{j'} > t_j$ из-за разбиений в силу невыпуклости потока f .

В серии совместных работ с Бьянкини [6–8] мы доказали оценку (1.4). Целью настоящей статьи является формулировка результатов, полученных в этих трех работах, и доказательство (1.4) в упрощенной постановке, при которой

- присутствуют все основные идеи;
- отсутствуют технические трудности, возникающие в общем случае в [8].

Приведем краткий обзор работ [6–8].

1. В работе [6] рассмотрен скалярный случай, т. е. $n = 1$. В ней было доказано, что оценка (1.4) выполнена для приближенного решения скалярного закона сохранения, построенного как с помощью так называемого алгоритма *трассировки волнового фронта* (ТВФ) (см. [9]), так и при помощи схемы Глимма. Было решено начать анализ с наиболее простого случая: приближенных решений скалярного уравнения, полученных методом ТВФ, — чтобы избежать по возможности технических сложностей; затем доказательство было обобщено на приближенные решения скалярного уравнения, полученные по схеме Глимма, поскольку одно из применений оценки (1.4) связано со скоростью сходимости схемы Глимма.
2. В работе [7] рассмотрено первое обобщение скалярного случая: треугольная система

$$\begin{cases} u_t + \tilde{f}(u, v)_x = 0, \\ v_t - v_x = 0, \end{cases} \quad u, v : [0, \infty) \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad \tilde{f} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad \frac{\partial \tilde{f}}{\partial u}(0, 0) > -1, \quad (1.5)$$

где скалярное уравнение дополнено линейным. Здесь оценка (1.4) доказана для приближенного решения (1.5), полученного с помощью алгоритма ТВФ и безэнтропийного метода Римана, который «эквивалентен» энтропийному методу Римана. Это было сделано, чтобы избежать трудностей, возникающих в схеме Глимма при использовании энтропийного метода Римана.

3. В третьей работе [8] оценка (1.4) доказана для общей системы законов сохранения (1.1) без дополнительных предположений относительно f , за исключением строгой гиперболичности. В [8] рассмотрена только схема Глимма: во-первых, потому что, как было ранее сказано, одним из приложений оценки (1.4) является оценка скорости сходимости схемы Глимма; во-вторых, так как в этом случае оценка (1.4) и ее доказательство принимают простой вид, т. к. в каждом узле сетки $(i\varepsilon, m\varepsilon)$ возникает точное (не приближенное) решение задачи Римана, в то время как в методе ТВФ приходится иметь дело с несколькими различными приближениями Римана.

Во всех трех работах [6–8] доказательство оценки (1.4) основано на двух основных приемах:

- (а) новый алгоритм трассировки волн, расщепляющий каждый волновой фронт в приближенном решении на бесконечно малые волны (для приближений по Глимму) или на конечное число дискретных волн (для приближений методом ТВФ), см. пункт 2.3;

(b) новый функционал взаимодействия

$$t \mapsto \mathfrak{Q}(t) := \iint_{\{(s,s') \text{ волны}\}} \mathfrak{q}(t, s, s') ds ds', \quad (1.6)$$

где $\mathfrak{q}(t, s, s')$ — величина, называемая *весом пары волн* (s, s') в момент времени t . Основные свойства \mathfrak{Q} заключаются в том, что он имеет ограниченную вариацию и его убывание в каждый момент взаимодействия t_j связано с величиной

$$\frac{|\sigma(\alpha_j) - \sigma(\alpha'_j)| |\alpha_j| |\alpha'_j|}{|\alpha_j| + |\alpha'_j|}, \quad (1.7)$$

которая входит в сумму в левой части (1.4) (см. пункт 3.3).

Доказательства, изложенные в работах [6–8], не являются простыми последовательными обобщениями друг друга. Здесь следует сделать два замечания.

1. Во-первых, определения веса $\mathfrak{q}(t, s, s')$ различны во всех трех статьях:

- определение, использованное в [6] (см. [6, пункты 3.4.1 и 4.4.1]), дает более точную константу $C(f)$ в (1.4), но его обобщение на случай системы привело бы к большим техническим трудностям; поэтому в следующих работах [7, 8] использовалось более простое определение для \mathfrak{q} ;
- в [7, пункт 4.2] определение веса \mathfrak{q} используется только при нахождении волнового фронта решения треугольной системы (1.5) с использованием безэнтропийного метода Римана. Определение в [7] не может быть использовано в общем случае, т. к. веса \mathfrak{q} не ограничены равномерно: другими словами, при фиксированном t отображение $(s, s') \rightarrow \mathfrak{q}(t, s, s')$ принадлежит L^1 (и тогда \mathfrak{Q} в (1.6) однозначно определено), но не принадлежит L^∞ ;
- наконец, определение для \mathfrak{q} в [8, раздел 6.1] корректно в том смысле, что оно делает \mathfrak{q} отображением в L^∞ и оно применимо к системам в общем случае.

2. Вторым отличием работ [6–8] друг от друга является то, как убывание \mathfrak{Q} при взаимодействиях влияет на величину (1.7):

- в статье [6], рассматривающей одномерный случай, доказательство свойства убывания \mathfrak{Q} использует тот факт, что две волны s, s' , которые уже взаимодействовали и имеют различное положение в момент времени t , могут взаимодействовать снова, если только сильный удар, не взаимодействовавший ни с s , ни с s' , взаимодействует с одной из них и меняет ее скорость;
- в многомерном случае при $n > 1$ в решении представлены волновые фронты многих семейств (см. [7, 8]), поэтому свойство, описанное в предыдущем пункте, уже не будет верным. Действительно, две волны s, s' , которые уже взаимодействовали и имеют различные положения в момент времени t , могут взаимодействовать снова из-за волнового фронта другого семейства, взаимодействующего с s, s' и меняющего их скорости. Поэтому в общем случае приходится изменить доказательство свойства убывания \mathfrak{Q} , введя сложный анализ предыстории каждой пары волн (s, s') .

В настоящей работе мы представим доказательство оценки (1.4) при предположениях работы [7] (решение типа волнового фронта треугольной системы вида (1.5) и безэнтропийный методом Римана, см. пункт 2.2), но с использованием корректно определенных весов $\mathfrak{q}(t, s, s')$, т. е. применяя обозначения статьи [8], посвященной общему случаю. Цель настоящей работы — предъявить доказательство оценки (1.4) в достаточно общей постановке, чтобы читатель мог понять основные идеи, но избегая технических трудностей, которые можно найти в [8] для наиболее общих систем. В ходе доказательства для треугольной системы (1.5) мы будем указывать на трудности, возникающие в общем случае систем (1.1).

1.3. Обозначения. Введем обозначения, используемые в настоящей работе.

- Для непрерывного отображения $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ и $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$ определим *выпуклую оболочку* g на интервале $[a, b]$ как

$$\text{conv}_{[a,b]} g(u) := \sup \left\{ h(u) \mid h : [a, b] \rightarrow \mathbb{R} \text{ выпукла и } h \leq g \right\};$$

аналогично определяется *вогнутая оболочка* g на $[a, b]$, обозначаемая через $\text{conc}_{[a,b]} g$.

- Для упорядоченного множества (A, \preceq) и заданных $a \in A$, $B \subseteq A$, мы используем запись $a \prec B$, если для любого $b \in B$ выполнено $a \prec b$; аналогично вводится отношение $a \succ B$.

2. ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ

В этом разделе мы построим решение типа волнового фронта для задачи Коши для треугольной системы (1.5) и определим алгоритм трассировки волнового фронта для построения этого решения. Затем мы построим скалярную функцию потока \mathbf{f}^{eff} , т. н. *эффективную функцию потока*, которая получается из функции f удалением скачков ее первой производной, вызванных волнами первого семейства v . В завершении этого раздела мы напомним определение *трансверсального потенциала Глимма* и свойств его убывания.

2.1. Треугольные системы законов сохранения: модельный пример. Мы рассматриваем систему законов сохранения следующего вида:

$$\begin{cases} u_t + \tilde{f}(u, v)_x = 0, \\ v_t - v_x = 0. \end{cases} \quad (2.1)$$

Функция \tilde{f} удовлетворяет условию

$$\frac{\partial \tilde{f}}{\partial u}(0, 0) > -1,$$

таким образом, эта система равномерно гиперболическая в некоторой компактной окрестности начала координат.

Легко проверить, что система (2.1) принадлежит классу Темпла [18], в частности, это позволяет ввести координаты Римана (w, v) , такие что ее квазилинейная форма имеет вид

$$\begin{cases} w_t + \frac{\partial \tilde{f}(u, v)}{\partial u} w_x = 0, \\ v_t - v_x = 0, \end{cases} \quad (2.2)$$

где $u = u(w, v)$ — риманова замена координат.

2.2. Решение типа волнового фронта. Определим $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ равенством

$$\frac{\partial \tilde{f}}{\partial u}(u(w, v), v) = \frac{\partial f}{\partial w}(w, v).$$

Так как замена координат Римана сохраняет регулярность $D\tilde{f}$, можем считать, что f — функция класса C^3 , удовлетворяющая условиям

1. $\|D^\alpha f\|_{L^\infty} < \infty$ для всех мультииндексов α , $|\alpha| \leq 3$;
2. $\frac{\partial f}{\partial w}(w, v) > -1$ в окрестности $(0, 0)$.

Мы построим решение волнового фронта в координатах (w, v) , определив (неконсервативный) метод Римана решения задачи.

Замечание 2.1. Решение, которое будет получено, вообще говоря, не соответствует стандартному (энтропийному) решению типа волнового фронта (2.1). Однако, как было сказано во введении, целью настоящей работы является избежать технических трудностей, этой цели служит выбор координат (w, v) и использование (неконсервативного) метода Римана решения задачи.

Для произвольного $\varepsilon > 0$ обозначим через $f_\varepsilon(\cdot, v)$ кусочно-постоянную аффинную интерполяцию $f(\cdot, v)$ как функции от w на сетке с шагом ε .

Определим *аппроксимацию Римана*, связанную с f , следующим образом: решение задачи Римана

$$((w^-, v^-), (w^+, v^+)) \in (\mathbb{Z}\varepsilon)^2 \times (\mathbb{Z}\varepsilon)^2 \subseteq \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$$

дается функцией $(t, x) \mapsto (w(t, x), v(t, x))$, где

$$v(t, x) = \begin{cases} v^- & \text{при } x < -t, \\ v^+ & \text{при } x \geq -t, \end{cases}$$

а $w(t, x)$ — кусочно-постоянное непрерывное справа решение скалярной задачи Римана (w^-, w^+) с функцией потока $f_\varepsilon(\cdot, v^+)$ (см. [9]).

Пусть (w_0, v_0) — начальные данные задачи Коши для системы (2.2). Пусть $(w_{0,\varepsilon}, v_{0,\varepsilon})$ — аппроксимация (w_0, v_0) (в том смысле, что $(w_{0,\varepsilon}, v_{0,\varepsilon}) \rightarrow (w_0, v_0)$ в L^1 -норме при $\varepsilon \rightarrow 0$), такая что $w_{0,\varepsilon}, v_{0,\varepsilon}$ имеет компактный носитель, принимает значение в дискретном множестве \mathbb{Z}_ε , и

$$\text{Tot.Var.}(w_{0,\varepsilon}) \leq \text{Tot.Var.}(w_0), \quad \text{Tot.Var.}(v_{0,\varepsilon}) \leq \text{Tot.Var.}(v_0). \quad (2.3)$$

Используя стандартный алгоритм трассировки волнового фронта, строим функцию

$$(t, x) \mapsto (w_\varepsilon(t, x), v_\varepsilon(t, x)),$$

определенную при всех $t \geq 0$ и $x \in \mathbb{R}$ (см., например, [2, 3]). Легко заметить, что $(w_\varepsilon(t, \cdot), v_\varepsilon(t, \cdot))$ непрерывна справа, имеет компактный носитель, кусочно-постоянна и принимает значения на множестве $\mathbb{Z}_\varepsilon \times \mathbb{Z}_\varepsilon$.

Волновым фронтом мы будем называть кусочно-аффинную разрывную кривую $(t, x) \mapsto (w_\varepsilon(t, x), v_\varepsilon(t, x))$. В частности, разрывную кривую v будем называть *волновым фронтом первого семейства* (положительным или отрицательным в зависимости от знака скачка), кривую w будем называть *волновым фронтом второго семейства*. Это стандартная терминология, используемая в гиперболических законах сохранения.

Пусть $\{(t_j, x_j)\}$, $j \in \{1, 2, \dots, J\}$, будут точками на (t, x) -плоскости, в которых сталкиваются два (или более) волновых фронта. Будем считать без ограничения общности, что $t_j < t_{j+1}$ и для каждого j ровно два волновых фронта встречаются в точке (t_j, x_j) . Это стандартное предположение, достигаемое малым возмущением скорости волнового фронта. Также положим $t_0 := 0$.

Определение 2.1. Для каждого $j = 1, \dots, J$ мы будем говорить, что (t_j, x_j) — *точка взаимодействия* (или *точка нетрансверсального взаимодействия*), если волновые фронты, встречающиеся в точке (t_j, x_j) , принадлежат второму семейству и имеют одинаковый знак. Точка взаимодействия называется *положительной* (соответственно, *отрицательной*), если волновые фронты, встречающиеся в точке (t_j, x_j) , положительны (соответственно, отрицательны).

Кроме того, мы будем называть точку (t_j, x_j) *точкой уничтожения*, если волновые фронты, встречающиеся в точке (t_j, x_j) , принадлежат второму семейству и имеют разные знаки.

Точку (t_j, x_j) будем называть *точкой трансверсального взаимодействия*, если один из фронтов, встречающихся в точке (t_j, x_j) , принадлежит первому семейству, а другой — второму.

Так как по определению аппроксимации Римана волновые фронты второго семейства возникают в момент времени $t = 0$ и распространяются с постоянной скоростью -1 , три перечисленных выше случая являются единственно возможными.

Обозначим через $\{v_h\}_{1 \leq h \leq H}$ волновые фронты первого семейства, возникающие в момент времени $t = 0$. Для каждого h обозначим через v_h^-, v_h^+ соответственно левое и правое состояние волнового фронта v_h , а через $|v_h| := |v_h^+ - v_h^-|$ — его интенсивность. Пусть $\mathbf{x}(t, v_h)$ обозначает положение волнового фронта v_h в момент времени t ; очевидно, что $\mathbf{x}(t, v_h) = \mathbf{x}(0, v_h) - t$. Будем считать, что $\mathbf{x}(0, v_h) < \mathbf{x}(0, v_{h+1})$ при всех h . Если (t_j, x_j) — точка трансверсального взаимодействия, обозначим через $h(j)$ индекс волнового фронта второго семейства $v_{h(j)}$, участвующего в трансверсальном взаимодействии.

2.3. Алгоритм трассировки волнового фронта. Опишем алгоритм трассировки волнового фронта для приближенного решения, построенного в пункте 2.2.

Для начала определим дискретное множество \mathcal{W} , называемое *множеством волн*, следующим образом:

$$\mathcal{W} := \left\{ 1, 2, \dots, \frac{1}{\varepsilon} \text{Tot.Var.}(w_{0,\varepsilon}) \right\} \subseteq \mathbb{N}.$$

Теперь опишем рекурсивный алгоритм, для любой волны $s \in \mathcal{W}$ определяющий

- *знак* $\mathcal{S}(s)$ волны s ,
- *правое состояние* $\hat{w}(s)$ волны s ,
- *время уничтожения* $\mathfrak{t}^{\text{canc}}(s)$ волны s ,

а также отображение

$$\mathbf{x} : \left\{ (t, s) \mid s \in \mathcal{W}, t \in [0, \mathfrak{t}^{\text{canc}}(s)] \right\} \rightarrow \mathbb{R},$$

называемое *отображением положений*, которое дает положение любой волны $s \in \mathcal{W}$ в любой момент времени $t \in [0, \mathfrak{t}^{\text{canc}}(s)]$.

Определим $\mathbf{x}(0, \cdot)$ в момент времени $t = 0$. Для произвольного $s \in \mathcal{W}$ положим:

$$\mathbf{x}(0, s) := \inf \left\{ x \in (-\infty, +\infty) \mid \varepsilon s \leq \text{Tot.Var.}(w_{0,\varepsilon}; (-\infty; x]) \right\}.$$

Теперь определим знак волны $s \in \mathcal{W}$:

$$\mathcal{S}(s) := \text{sign} \left[w_{0,\varepsilon}(\mathbf{x}(0, s)) - w_{0,\varepsilon}(\mathbf{x}(0, s)-) \right]$$

и правое состояние волны $s \in \mathcal{W}$:

$$\hat{w}(s) := \sum_{s' \leq s} \mathcal{S}(s') \varepsilon.$$

Множество

$$\mathcal{W}(t) := \{s \in \mathcal{W} \mid \mathfrak{t}^{\text{canc}}(s) > t\}, \quad t \geq 0$$

(которое является неявным описанием отображения $\mathfrak{t}^{\text{canc}} : \mathcal{W} \rightarrow (0, +\infty]$), и положение \mathbf{x} при $t > 0$ определяются рекурсивно, с разбиением интервала $[0, +\infty)$ следующим образом:

$$[0, +\infty) = \{0\} \cup (0, t_1] \cup \dots \cup (t_j, t_{j+1}] \cup \dots \cup (t_{J-1}, t_J] \cup (t_J, +\infty),$$

в предположении, что $\mathcal{W}(t)$ и $\mathbf{x}(t, \cdot)$ определены для произвольного $t \leq t_j$ и определяя $\mathcal{W}(t)$ и $\mathbf{x}(t, \cdot)$ на интервале времени $(t_j, t_{j+1}]$ со свойством постоянства \mathcal{S} на

$$\mathcal{W}(t, x) := \{s \in \mathcal{W} \mid s \in \mathcal{W}(t) \text{ и } \mathbf{x}(t, s) = x\}.$$

Мы определили $\mathbf{x}(0, \cdot)$ в момент времени $t = 0$; более того, т. к. областью значений $\mathfrak{t}^{\text{canc}}$ является $(0, \infty]$, получаем $\mathcal{W}(0) = \mathcal{W}$.

Предположим, что $\mathcal{W}(t)$ и $\mathbf{x}(t, \cdot)$ определены при всех $t \leq t_j$, и определим их при $t \in (t_j, t_{j+1}]$ (или $t \in (t_J, +\infty)$). Для любого $t \leq t_j$ положим

$$\sigma(t, s) := \begin{cases} \frac{d}{du} \text{conv}_{\mathcal{W}(t, \mathbf{x}(t, s))} f_\varepsilon \left((\hat{w}(s) - \varepsilon, \hat{w}(s)), v(\mathbf{x}(t, s)) \right) & \text{если } \mathcal{S}(s) = +1, \\ \frac{d}{du} \text{conc}_{\mathcal{W}(t, \mathbf{x}(t, s))} f_\varepsilon \left((\hat{w}(s), \hat{w}(s) + \varepsilon), v(\mathbf{x}(t, s)) \right) & \text{если } \mathcal{S}(s) = -1, \end{cases} \quad (2.4)$$

где

$$W(t, x) := \begin{cases} \bigcup_{s \in \mathcal{W}(t, x)} (\hat{w}(s) - \varepsilon, \hat{w}(s)] & \text{если } \mathcal{S}(s) = +1, \\ \bigcup_{s \in \mathcal{W}(t, x)} [\hat{w}(s), \hat{w}(s) + \varepsilon] & \text{если } \mathcal{S}(s) = -1, \end{cases}$$

и conv/conc определены в разделе 1.3.

Заметим, что $\sigma(t, s)$ — это скорость Ранкина—Гюгони волнового фронта, содержащего s в момент времени t . Для $t < t_{j+1}$ (или $t_J < t < +\infty$) положим

$$\mathcal{W}(t) = \mathcal{W}(t_j) \quad \text{и} \quad \mathbf{x}(t, s) := \mathbf{x}(t_j, s) + \sigma(t_j, s)(t - t_j) \quad \text{для всех } s \in \mathcal{W}(t).$$

При $t = t_{j+1}$ положим

$$\mathbf{x}(t_{j+1}, s) := \mathbf{x}(t_j, s) + \sigma(t_j, s)(t_{j+1} - t_j),$$

если $\mathbf{x}(t_j, s) + \sigma(t_j, s)(t_{j+1} - t_j)$ не является точкой взаимодействия/уничтожения/трансверсального взаимодействия x_{j+1} ; в противном случае для волн s , таких что $\mathbf{x}(t_j, s) + \sigma(t_j, s)(t_{j+1} - t_j) = x_{j+1}$ и

$$\mathcal{S}(s)w_\varepsilon(t_{j+1}, x_{j+1}-) \leq \mathcal{S}(s)\hat{w}(s) - \varepsilon \leq \mathcal{S}(s)\hat{w}(s) \leq \mathcal{S}(s)w_\varepsilon(t_{j+1}, x_{j+1}) \quad (2.5)$$

(т. е. уничтожение возможно только в (t_{j+1}, x_{j+1})), положим

$$\mathbf{x}(t_{j+1}, s) := \mathbf{x}(t_j, s) + \sigma(t_j, s)(t_{j+1} - t_j) = x_{j+1}.$$

Для всех остальных волн $s \in \mathcal{W}(t_j)$, таких что $\mathbf{x}(t_j, s) + \sigma(t_j, s)(t_{j+1} - t_j) = x_{j+1}$, но не удовлетворяющих (2.5) (т. е. их возможное уничтожение происходит в (t_{j+1}, x_{j+1})), положим $\mathfrak{t}^{\text{canc}}(s) := t_{j+1}$, таким образом определив $\mathcal{W}(t_{j+1})$.

Следующее утверждение дает некоторые полезные свойства определенных выше объектов. Их доказательства достаточно просты и могут быть найдены в [7].

Утверждение 2.1. *Справедливы следующие свойства:*

1. отображение положений \mathbf{x} возрастает на $\mathcal{W}(t)$ при любом фиксированном $t \geq 0$ и является липшицевым при $t \in [0, \tau^{\text{canc}}(s))$ для любой фиксированной волны $s \in \mathcal{W}$;
2. при всех $(t, x) \in [0, \infty) \times \mathbb{R}$:
 - (a) если $w_\varepsilon(t, x-) < w_\varepsilon(t, x)$, то $W(t, x) = (w(t, x-), w(t, x)]$ и $\hat{w}|_{\mathcal{W}(t, x)} : \mathcal{W}(t, x) \rightarrow W(t, x) \cap \mathbb{Z}\varepsilon$ — строго возрастающее и биективное отображение;
 - (b) если $w(t, x-) > w(t, x)$, то $W(t, x) = [w(t, x), w(t, x-))$ и $\hat{w}|_{\mathcal{W}(t, x)} : \mathcal{W}(t, x) \rightarrow W(t, x) \cap \mathbb{Z}\varepsilon$ — строго убывающее и биективное отображение;
 - (c) если $w(t, x-) = w(t, x)$, то $\mathcal{W}(t, x) = W(t, x) = \emptyset$.

Будем использовать обозначение $|s| := \varepsilon$ для интенсивности волны $s \in \mathcal{W}$.

В завершение данного раздела введем понятие *интервала волн* в момент времени t , которое будет часто использоваться в следующих разделах.

Определение 2.2. Пусть $\mathcal{I} \subseteq \mathcal{W}(t)$. Будем говорить, что \mathcal{I} — *интервал волн* в момент времени t , если для любых заданных $s_1, s_2 \in \mathcal{I}$, таких что $s_1 \leq s_2$, и для любого $p \in \mathcal{W}(t)$

$$s_1 \leq p \leq s_2 \implies p \in \mathcal{I}.$$

Будем говорить, что интервал волн \mathcal{I} *однородный* в момент времени t , если для всех $s, s' \in \mathcal{I}$, $\mathcal{S}(s) = \mathcal{S}(s')$. Если волны в \mathcal{I} положительны (отрицательны), будем говорить, что \mathcal{I} — *положительный (отрицательный)* интервал волн.

Для заданного (непустого) однородного интервала волн $\mathcal{I} \subseteq \mathcal{W}(t)$ в момент времени t легко видеть, что множество

$$I := \begin{cases} \bigcup_{s \in \mathcal{I}} (\hat{w}(s) - \varepsilon, \hat{w}(s)] & \text{если } \mathcal{S}(\mathcal{I}) = +1, \\ \bigcup_{s \in \mathcal{I}} [\hat{w}(s), \hat{w}(s) + \varepsilon) & \text{если } \mathcal{S}(\mathcal{I}) = -1, \end{cases}$$

является вещественным интервалом. Таким образом, можно определить

- *интенсивность* \mathcal{I} как

$$|\mathcal{I}| := \sum_{s \in \mathcal{I}} |s| = \text{card}(\mathcal{I})\varepsilon = \mathcal{L}^1(I);$$

- *скорость Ранкина — Гюгонио*, определяемую непрерывной функцией $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ для однородного интервала волн \mathcal{I} следующим образом:

$$\sigma^{\text{rh}}(g, \mathcal{I}) := \frac{g(\sup(I)) - g(\inf(I))}{\sup(I) - \inf(I)};$$

- *энтропийную скорость*, определенную для волны $s \in \mathcal{I}$ задачей Римана \mathcal{I} и функцией потока g как

$$\sigma^{\text{ent}}(g, \mathcal{I}, s) := \begin{cases} \frac{d}{du} \text{conv}_I g_\varepsilon \left((\hat{w}(s) - \varepsilon, \hat{w}(s)) \right) & \text{если } \mathcal{S}(\mathcal{I}) = +1, \\ \frac{d}{du} \text{conc}_I g_\varepsilon \left((\hat{w}(s), \hat{w}(s) - \varepsilon) \right) & \text{если } \mathcal{S}(\mathcal{I}) = -1, \end{cases}$$

где g_ε обозначает кусочно-непрерывную аффинную интерполяцию g на сетке ε ; будем также говорить, что две волны $s, s' \in \mathcal{I}$ разделены задачей Римана \mathcal{I} с потоком g , если $\sigma^{\text{ent}}(g, \mathcal{I}, s) \neq \sigma^{\text{ent}}(g, \mathcal{I}, s')$.

Замечание 2.2. Для аппроксимации Глимма решения общей системы (1.1)-(1.2) по прежнему можно определить алгоритм трассировки волн, вводя n множеств волн (по одному для каждого семейства), которые должны быть подмножествами вещественной оси, поэтому для схемы Глимма лучше иметь бесконечно много бесконечно малых волн вместо конечного числа дискретных волн. Более того, можно определить отображение положений $\mathbf{x}(t, s)$ и отображение скорости $\sigma(t, s)$, решая задачу Римана в каждой точке сетки $(i\varepsilon, m\varepsilon)$ и используя сэмплирующую последовательность

для возобновления процедуры в моменты времени $t = i\varepsilon$, $i \in \mathbb{N}$ (см. [8, раздел 4], где алгоритм трассировки волн называется *представлением Лагранжа*).

2.4. Эффективная функция потока f_t^{eff} . Зафиксируем произвольное время \bar{t} . Разбивая $\mathcal{W}(\bar{t})$ относительно отношения эквивалентности

$$s \sim s' \iff \{p \in \mathcal{W} \mid s \leq p \leq s'\} \cap \mathcal{W}(\bar{t}) \text{ — однородный интервал волн,}$$

можно записать $\mathcal{W}(\bar{t})$ как конечное объединение непересекающихся максимальных (относительно вложения) однородных интервалов волн \mathcal{M}_l :

$$\mathcal{W}(\bar{t}) = \bigcup_{l=1}^L \mathcal{M}_l.$$

Заметим, что данное разбиение может меняться только в моменты уничтожения.

Зафиксируем \bar{t} и максимальный однородный положительный (соответственно, отрицательный) интервал волн \mathcal{M}_l . Определим *эффективную функцию потока* $f_t^{\text{eff}} : \bigcup_{s \in \mathcal{M}_l} (\hat{w}(s) - \varepsilon, \hat{w}(s)) \rightarrow \mathbb{R}$ (соответственно, $f_t^{\text{eff}} : \bigcup_{s \in \mathcal{M}_l} [\hat{w}(s), \hat{w}(s) + \varepsilon) \rightarrow \mathbb{R}$) как произвольную $C^{1,1}$ -функцию, удовлетворяющую следующему условию:

$$\frac{d^2 f_t^{\text{eff}}}{dw^2}(w) := \frac{\partial^2 f}{\partial w^2}(w, v) \quad \text{для почти всех } w, \quad (2.6)$$

где $v = v(\bar{t}, \mathbf{x}(\bar{t}, s))$ для всех s , таких что $w \in (\hat{w}(s) - \varepsilon, \hat{w}(s))$ (соответственно, $w \in [\hat{w}(s), \hat{w}(s) + \varepsilon)$).

Замечание 2.3.

1. Для упрощения обозначений мы не указываем явно зависимость f_t^{eff} от однородного интервала \mathcal{M}_l . В дальнейшем это не вызовет недоразумений.
2. Эффективная функция потока f_t^{eff} определена с точностью до аффинных функций.
3. Пусть $\mathcal{I} \subseteq \mathcal{M}_l$ — положительный (соответственно, отрицательный) интервал волн в момент времени \bar{t} . Предположим, что $\mathcal{I} \ni s \mapsto v(\bar{t}, \mathbf{x}(\bar{t}, s))$ тождественно равно некоторому \bar{v} на \mathcal{I} . Тогда f_t^{eff} совпадает с $f(\cdot, \bar{v})$ на $\bigcup_{s \in \mathcal{I}} (\hat{w}(s) - \varepsilon, \hat{w}(s))$ (соответственно, $\bigcup_{s \in \mathcal{I}} [\hat{w}(s), \hat{w}(s) + \varepsilon)$) с точностью до аффинных функций. Таким образом, $s, s' \in \mathcal{I}$ разделены задачей Римана \mathcal{I} с функцией потока f_t^{eff} тогда и только тогда, когда они разделены той же задачей Римана с функцией потока $f(\cdot, \bar{v})$. Более точно,

$$\sigma^{\text{ent}}(f_t^{\text{eff}}, \mathcal{I}, s') - \sigma^{\text{ent}}(f_t^{\text{eff}}, \mathcal{I}, s) = \sigma^{\text{ent}}(f(\cdot, \bar{v}), \mathcal{I}, s') - \sigma^{\text{ent}}(f(\cdot, \bar{v}), \mathcal{I}, s).$$

Аналогично, если $\mathcal{I}, \mathcal{I}_1, \mathcal{I}_2 \subseteq \mathcal{M}_l$ — интервалы волн во время \bar{t} , такие что $\mathcal{I}_1, \mathcal{I}_2 \subseteq \mathcal{I}$ и $\mathcal{I} \ni s \mapsto v(\bar{t}, \mathbf{x}(\bar{t}, s))$ тождественно равны некоторому \bar{v} , то

$$\sigma^{\text{rh}}(f_t^{\text{eff}}, \mathcal{I}_2) - \sigma^{\text{rh}}(f_t^{\text{eff}}, \mathcal{I}_1) = \sigma^{\text{rh}}(f(\cdot, \bar{v}), \mathcal{I}_2) - \sigma^{\text{rh}}(f(\cdot, \bar{v}), \mathcal{I}_1).$$

Замечание 2.4. Определение эффективной функции потока для аппроксимации Глимма решения общей системы (1.1)-(1.2) полностью аналогично (2.6) (см. [8, определение 4.8]).

2.5. Функционал трансверсального взаимодействия Q^{trans} . Определим стандартный функционал трансверсального взаимодействия Глимма Q^{trans} , который будет часто использоваться в дальнейшем:

$$Q^{\text{trans}}(t) := \sum_{h=1}^H \sum_{\substack{s \in \mathcal{W}(t) \\ \mathbf{x}(t, s) < \mathbf{x}(t, v_h)}} |v_h| |s|.$$

Напомним, что $|v_h|$ — интенсивность волнового фронта v_h , а $|s| = \varepsilon$ — интенсивность волнового фронта s . Следующее утверждение является классическим, см., например, [9].

Утверждение 2.2.

1. $Q^{\text{trans}}(0) \leq \text{Tot.Var.}(v(0, \cdot)) \text{Tot.Var.}(w(0, \cdot));$

2. функционал Q^{trans} — положительный, кусочно-постоянный, непрерывный справа и невозрастающий; более того, в момент t_j каждого трансверсального взаимодействия

$$Q^{\text{trans}}(t_j) - Q^{\text{trans}}(t_{j-1}) = -|v_{h(j)}| |\mathcal{W}(t_j, x_j)|,$$

где $v_{h(j)}$ — волновой фронт первого семейства, участвующий в трансверсальном взаимодействии в момент времени t_j .

3. ОСНОВНАЯ ТЕОРЕМА

Оставшаяся часть работы посвящена доказательству оценки (1.4). Точнее, мы докажем ниже теорему 3.1 об изменении скорости каждой волны в каждый момент взаимодействия, уничтожения или трансверсального взаимодействия. Уравнение (3.23) показывает, что теорема 3.1 эквивалентна (1.4) (или даже сильнее, т. к. она учитывает также уничтожения и трансверсальные взаимодействия).

Как и в предыдущем разделе, $(t, x) \mapsto (w_\varepsilon(t, x), v_\varepsilon(t, x))$ — решение задачи Коши (1.1)-(1.2) типа ε -волнового фронта. Рассмотрим алгоритм трассировки волнового фронта и соответствующие функцию положений $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t, s)$ и функцию скоростей $\sigma = \sigma(t, s)$, построенные в предыдущем разделе. Фиксируем волну $s \in \mathcal{W}(0)$ и рассмотрим функцию $t \mapsto \sigma(t, s)$. По построению она определена до момента времени $t^{\text{canc}}(s)$, когда s уничтожается; кроме того, она кусочно-постоянна и непрерывна справа с возможными скачками при $t = t_j, j \in 1, \dots, J$.

3.1. Формулировка основной теоремы и идея доказательства. Мы докажем следующий результат.

Теорема 3.1. Верно следующее неравенство:

$$\sum_{j=1}^J \sum_{s \in \mathcal{W}(t_j)} |\sigma(t_j, s) - \sigma(t_{j-1}, s)| |s| \leq \mathcal{O}(1) \left[\text{Tot.Var.}(w(0, \cdot))^2 + \text{Tot.Var.}(v(0, \cdot))^2 \right], \quad (3.1)$$

где $|s| := \varepsilon$ — интенсивность волны s , а символ Ландау $\mathcal{O}(1)$ означает константу, которая может зависеть только от функции потока f .

Замечание 3.1. Аналогом теоремы 3.1 для приближенного решения Глимма общей системы (1.1)-(1.2) является [8, теорема 1.1].

Для доказательства теоремы 3.1 сначала разобьем слагаемые левой части (3.1) на моменты взаимодействий, уничтожений и трансверсальных взаимодействий:

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^J \sum_{s \in \mathcal{W}(t_j)} |\sigma(t_j, s) - \sigma(t_{j-1}, s)| |s| &= \sum_{\substack{(t_j, x_j) \\ \text{взаимодействия}}} \sum_{s \in \mathcal{W}(t_j)} |\sigma(t_j, s) - \sigma(t_{j-1}, s)| |s| + \\ &+ \sum_{\substack{(t_j, x_j) \\ \text{уничтожения}}} \sum_{s \in \mathcal{W}(t_j)} |\sigma(t_j, s) - \sigma(t_{j-1}, s)| |s| + \\ &+ \sum_{\substack{(t_j, x_j) \\ \text{трансверсальные} \\ \text{взаимодействия}}} \sum_{s \in \mathcal{W}(t_j)} |\sigma(t_j, s) - \sigma(t_{j-1}, s)| |s|. \end{aligned}$$

Стандартные вычисления, основанные на свойствах выпуклых и вогнутых оболочек (см. [7, утверждения 4.1 и 4.3]), показывают, что:

- в любой трансверсальной точке взаимодействия (t_j, x_j)

$$\sum_{s \in \mathcal{W}(t_j)} |\sigma(t_j, s) - \sigma(t_{j-1}, s)| |s| \leq \|D_{wv}^2 f\|_{L^\infty} |v_{h(j)}| |\mathcal{W}(t_j, x_j)| \leq \mathcal{O}(1) \left[Q^{\text{trans}}(t_{j-1}) - Q^{\text{trans}}(t_j) \right];$$

- в любой точке уничтожения (t_j, x_j)

$$\sum_{s \in \mathcal{W}(t_j)} |\sigma(t_j, s) - \sigma(t_{j-1}, s)| |s| \leq \|D_{wv}^2 f\|_{L^\infty} \text{Tot.Var.}(w(0, \cdot)) \left[\text{Tot.Var.}(w_\varepsilon(t_{j-1}, \cdot)) - \text{Tot.Var.}(w_\varepsilon(t_j, \cdot)) \right].$$

Так как $t \mapsto Q^{\text{trans}}(t)$ и $t \mapsto \text{Tot.Var.}(w_\varepsilon(t))$ — убывающие функционалы, ограниченные при $t = 0$, используя утверждение 2.2, получим, что

$$\sum_{\substack{(t_j, x_j) \\ \text{уничтожения} \\ \text{или} \\ \text{трансверсальные} \\ \text{взаимодействия}}} \sum_{s \in \mathcal{W}(t_j)} |\sigma(t_j, s) - \sigma(t_{j-1}, s)| |s| \leq \mathcal{O}(1) \left[\text{Tot.Var.}(w(0, \cdot))^2 + \text{Tot.Var.}(v(0, \cdot))^2 \right]. \quad (3.2)$$

Замечание 3.2. В общем гиперболическом случае размерности $n \times n$ функционалы $t \mapsto Q^{\text{trans}}(t)$ и $t \mapsto \text{Tot.Var.}(w_\varepsilon(t))$ не будут убывающими, но их рост ограничен убывающим кубическим функционалом, введенным Бьянкини в [4]:

$$Q^{\text{cubic}}(t) := \sum_{\substack{s < s' \\ s, s' \in \mathcal{W}(t)}} |\sigma(t, s) - \sigma(t, s')| |s| |s'|. \quad (3.3)$$

Таким образом, оценка, аналогичная (3.2), справедлива в общем случае.

Нетривиальная часть оценки относится к моментам взаимодействия (моментам, в которые взаимодействуют два волновых фронта из одного семейства и одного знака), т. е. часть оценки (3.1), эквивалентная (1.4). Опишем технику, используемую для оценки членов, соответствующих взаимодействиям. Введем функционал $t \mapsto \Omega(t)$ со следующими свойствами:

1. при $t = 0$ имеем $\Omega(0) \leq \mathcal{O}(1) \text{Tot.Var.}(w_0)^2$;
2. Ω равен константе, когда нет взаимодействий, уничтожений или трансверсальных взаимодействий;
3. в момент уничтожения Ω убывает;
4. в момент трансверсального взаимодействия Ω может увеличиться не более чем на величину

$$\Omega(t_j) - \Omega(t_{j-1}) \leq \mathcal{O}(1) |v_{h(j)}| |\mathcal{W}(t_j, x_j)| \leq \mathcal{O}(1) \left[Q^{\text{trans}}(t_{j-1}) - Q^{\text{trans}}(t_j) \right]; \quad (3.4)$$

5. в момент взаимодействия Ω может убывать минимум на

$$\sum_{s \in \mathcal{W}(t_j)} |\sigma(t_j, s) - \sigma(t_{j-1}, s)| |s| \leq 2 \left[\Omega(t_{j-1}) - \Omega(t_j) \right]. \quad (3.5)$$

Используя (3.4)-(3.5) и тот факт, что Q^{trans} — ограниченный убывающий функционал, стандартное вычисление показывает, что

$$\sum_{\substack{(t_j, x_j) \\ \text{взаимодействия}}} \sum_{s \in \mathcal{W}(t_j)} |\sigma(t_j, s) - \sigma(t_{j-1}, s)| |s| \leq \mathcal{O}(1) \left[\text{Tot.Var.}(w(0, \cdot))^2 + \text{Tot.Var.}(v(0, \cdot))^2 \right],$$

и тем самым завершается доказательство теоремы 3.1.

Замечание 3.3. В общем случае доказательство не столь просто, как в рассматриваемой ситуации. Однако возникающие трудности носят в основном технический характер. Мы их отметим в замечании после явного определения Ω .

В оставшейся части работы мы докажем оценки (3.4) и (3.5).

3.2. Анализ взаимодействия волн. В этом пункте мы введем обозначение пары волн, которые *не взаимодействовали до момента времени t* , пары волн, которые *уже взаимодействовали*, и пары волн, которые *будут взаимодействовать снова*. Для каждой пары волн, которые уже взаимодействовали, мы определим интервал волн и разбиение этого интервала, которое в некотором смысле содержит их предшествующую историю.

Замечание 3.4. Этот раздел аналогичен [8, раздел 5], где рассмотрены взаимодействия волн для решения Глимма общей задачи Коши (1.1)-(1.2). Основные отличия нашего модельного случая и общего случая заключаются в том, что в последнем могут возникать волны при $t > 0$.

Определение 3.1. Пусть \bar{t} — фиксированный момент времени и $s, s' \in \mathcal{W}(\bar{t})$. Будем говорить, что

- s, s' взаимодействуют в момент времени \bar{t} , если $\mathbf{x}(\bar{t}, s) = \mathbf{x}(\bar{t}, s')$;
- s, s' уже взаимодействовали к моменту времени \bar{t} , если существует $t \leq \bar{t}$, такое что s, s' взаимодействуют в момент времени t ;
- s, s' не взаимодействовали к моменту времени \bar{t} , если для любого $t \leq \bar{t}$ они не взаимодействовали в момент времени t ;
- s, s' будут взаимодействовать снова после момента времени \bar{t} , если существует $t > \bar{t}$, такое что s, s' взаимодействуют в момент времени t .

Заметим, что

- если две волны $s, s' \in \mathcal{W}(t)$ уже взаимодействовали к моменту времени \bar{t} , то у них одинаковый знак;
- если $s \leq p \leq p' \leq s'$ — волны из $\mathcal{W}(t)$ и s, s' уже взаимодействовали к моменту времени \bar{t} , то p, p' уже взаимодействовали к моменту времени \bar{t} (т. к. $r \mapsto \mathbf{x}(t, r)$ возрастает).

Определение 3.2. Пусть $s, s' \in \mathcal{W}(\bar{t})$ — две волны, уже взаимодействовавшие к моменту времени \bar{t} . Будем говорить, что s, s' разделены в вещественном решении в момент времени \bar{t} , если

$$(\mathbf{x}(\bar{t}, s), \sigma(\bar{t}, s)) \neq (\mathbf{x}(\bar{t}, s'), \sigma(\bar{t}, s')),$$

т. е. если в момент времени \bar{t} у них либо различные положения, либо одинаковые положения, но различные скорости. Если они не разделены в вещественном решении, мы будем говорить, что они объединены в вещественном решении.

Замечание 3.5. Если $\bar{t} \neq t_j$ при каждом j , то две волны разделены в вещественном решении тогда и только тогда, когда у них различные положения. Условие наличия различных скоростей нужно только в моменты времени уничтожения и трансверсального взаимодействия.

Определение 3.3. Фиксируем время \bar{t} и две волны $s, s' \in \mathcal{W}(\bar{t})$, $s < s'$. Предположим, что s, s' разделены в вещественном решении в момент времени \bar{t} . Определим момент последнего разделения $\mathfrak{t}^{\text{split}}(\bar{t}, s, s')$ (если s, s' уже взаимодействовали к моменту \bar{t}) и момент взаимодействия $\mathfrak{t}^{\text{int}}(\bar{t}, s, s')$ (если s, s' будут взаимодействовать после момента \bar{t}) по формулам

$$\begin{aligned} \mathfrak{t}^{\text{split}}(\bar{t}, s, s') &:= \max \{t \leq \bar{t} \mid \mathbf{x}(t, s) = \mathbf{x}(t, s')\}, \\ \mathfrak{t}^{\text{int}}(\bar{t}, s, s') &:= \min \{t > \bar{t} \mid \mathbf{x}(t, s) = \mathbf{x}(t, s')\}. \end{aligned}$$

Кроме того, положим

$$\mathbf{x}^{\text{sp}}(\bar{t}, s, s') := \mathbf{x}(\mathfrak{t}^{\text{split}}(\bar{t}, s, s'), s) = \mathbf{x}(\mathfrak{t}^{\text{split}}(\bar{t}, s, s'), s')$$

и

$$\mathbf{x}^{\text{int}}(\bar{t}, s, s') := \mathbf{x}(\mathfrak{t}^{\text{int}}(\bar{t}, s, s'), s) = \mathbf{x}(\mathfrak{t}^{\text{int}}(\bar{t}, s, s'), s').$$

Определение 3.4. Зафиксируем время $\bar{t} \geq 0$. Для пары волн s, s' , которые уже взаимодействовали и разделены при \bar{t} , определим характеристический интервал s, s' в момент \bar{t} как

$$\mathcal{I}(\bar{t}, s, s') := \mathcal{W}(\mathfrak{t}^{\text{split}}(\bar{t}, s, s'), \mathbf{x}^{\text{sp}}(\bar{t}, s, s')) \cap \mathcal{W}(\bar{t}). \quad (3.7)$$

Несложно заметить, что $\mathcal{I}(\bar{t}, s, s')$ — волновой интервал в момент \bar{t} . Заметим также, что он изменяется только в момент взаимодействия, уничтожения или трансверсального взаимодействия.

Определим теперь разбиение $\mathcal{P}(\bar{t}, s, s')$ волнового интервала $\mathcal{I}(\bar{t}, s, s')$ рекурсивно по $\bar{t} = t_0, \dots, t_J$, $\bar{t} \geq \mathfrak{t}^{\text{split}}(\bar{t}, s, s')$, для волн s, s' , разделенных в вещественном решении в момент \bar{t} , следующим образом. Если $\bar{t} = \mathfrak{t}^{\text{split}}(\bar{t}, s, s') = t_{\bar{j}}$ при некотором $\bar{j} \in \{0, \dots, J\}$, то $\mathcal{P}(t_{\bar{j}}, s, s')$ задается отношением эквивалентности

$$p \sim p' \iff p, p' \text{ не разделены в вещественном решении при } t_{\bar{j}} \text{ или, что эквивалентно, они не разделены задачей Римана } \mathcal{W}(t_{\bar{j}}, \mathbf{x}(t_{\bar{j}}, s)) \text{ с функцией потока } \mathbf{f}_{t_{\bar{j}}}^{\text{eff}}.$$

С другой стороны, если $\bar{t} = t_{\bar{j}} > \mathfrak{t}^{\text{split}}(\bar{t}, s, s')$ при некотором $\bar{j} \in \{1, \dots, J\}$ (т. е. s, s' разделены в вещественном решении при $t_{\bar{j}-1}$), то $\mathcal{P}(t_{\bar{j}}, s, s')$ задается отношением эквивалентности

$$p \sim p' \iff p, p' \text{ принадлежат одному классу эквивалентности } \mathcal{J} \in \mathcal{P}(t_{\bar{j}-1}, s, s') \text{ при } t_{\bar{j}-1}$$

и задача Римана $\mathcal{J} \cap \mathcal{W}(t_j)$ с функцией потока $\mathbf{f}_{t_j}^{\text{eff}}$ их не разделяет.

Наконец, при $t \in [t_j, t_{j+1})$ положим $\mathcal{P}(t, s, s') = \mathcal{P}(t_j, s, s')$.

Следующие два утверждения совместно с определением 3.5 описывают некоторые свойства $\mathcal{P}(\bar{t}, s, s')$. Их детальные (но несложные) доказательства по индукции см. в [7, определение 4.12 и утверждения 4.11, 4.13].

Утверждение 3.1. Пусть $t \geq 0$ и $s, s' \in \mathcal{W}(t)$. Предположим, что s, s' разделены при t в вещественном решении и уже взаимодействовали. Если $p, p' \in \mathcal{I}(t, s, s')$ не разделены разбиением $\mathcal{P}(t, s, s')$, то они не разделены в вещественном решении при t .

Определение 3.5. Пусть даны два множества A, B , $A \subseteq B$. Пусть \mathcal{P} — разбиение B . Будем говорить, что \mathcal{P} может быть сужено на A , если для любого $C \in \mathcal{P}$ выполнено либо $C \subseteq A$, либо $C \subseteq B \setminus A$. Также будем писать

$$\mathcal{P}|_A := \{C \in \mathcal{P} \mid C \subseteq A\}.$$

Очевидно, что \mathcal{P} может быть сужено на A тогда и только тогда, когда оно может быть сужено на $B \setminus A$.

Утверждение 3.2. Пусть $t \geq 0$ и $s, s', p, p' \in \mathcal{W}(t)$, $p \leq s < s' \leq p'$. Предположим, что p, p' уже взаимодействовали в момент времени t , а s, s' разделены в вещественном решении в момент времени t . Тогда $\mathcal{P}(t, p, p')$ может быть сужено на $\mathcal{I}(t, p, p') \cap \mathcal{I}(t, s, s')$ и на $\mathcal{I}(t, p, p') \setminus \mathcal{I}(t, s, s')$.

Более того, если $p, p' \in \mathcal{I}(t, s, s')$, то $\mathcal{I}(t, p, p') = \mathcal{I}(t, s, s')$ и $\mathcal{P}(t, p, p') = \mathcal{P}(t, s, s')$.

3.3. Определение \mathfrak{Q} . Теперь мы можем определить функционал \mathfrak{Q} и доказать, что он удовлетворяет неравенствам (3.4)-(3.5). Начнем с определения веса $\mathfrak{q}(t, s, s')$ для пары волн (s, s') , таких что $s < s'$ в момент времени t :

- если (s, s') никогда не взаимодействовали к моменту t , то

$$\mathfrak{q}(t, s, s') = \|D_{ww}^2 f\|_{\infty};$$

- если (s, s') уже взаимодействовали, но они не разделены в момент t , то

$$\mathfrak{q}(t, s, s') = 0;$$

- если (s, s') уже взаимодействовали и они разделены в момент t , но они не будут взаимодействовать после момента t , то

$$\mathfrak{q}(t, s, s') = 0;$$

- если (s, s') уже взаимодействовали и разделены в момент t и они будут взаимодействовать после момента t , то

$$\mathfrak{q}(t, s, s') = \frac{\pi(t, s, s')}{d(t, s, s')}, \quad (3.8)$$

где $\pi(t, s, s')$ и $d(t, s, s')$ определены ниже.

Так как s, s' будут взаимодействовать после момента t , то $t < \mathfrak{t}^{\text{int}}(t, s, s')$. Пусть элементы разбиения

$$\mathcal{J}, \mathcal{J}' \in \mathcal{P}(t, s, s'), \text{ такие что } s \in \mathcal{J}, s' \in \mathcal{J}',$$

$$\mathcal{K}, \mathcal{K}' \in \mathcal{P}(\mathfrak{t}^{\text{int}}(t, s, s')-, s, s'), \text{ такие что } s \in \mathcal{K}, s' \in \mathcal{K}'.$$

содержат s, s' в момент времени t и в левой окрестности момента $\mathfrak{t}^{\text{int}}(t, s, s')$ соответственно. Заметим, что мы должны рассматривать разбиение при $\mathfrak{t}^{\text{int}}(t, s, s')-$, т. е. в левой окрестности $\mathfrak{t}^{\text{int}}(t, s, s')$, потому что в силу определения $\mathcal{P}(t, s, s')$ непрерывно справа. Очевидно, что $\mathcal{K} \subseteq \mathcal{J}$ и $\mathcal{K}' \subseteq \mathcal{J}'$. Положим

$$\mathcal{G} := \mathcal{K} \cup \{p \in \mathcal{J} \mid p > \mathcal{K}\}, \quad \mathcal{G}' := \{p \in \mathcal{J}' \mid p < \mathcal{K}'\} \cup \mathcal{K}', \quad \mathcal{B} := \mathcal{K} \cup \{p \in \mathcal{W}(t) \mid \mathcal{K} < p < \mathcal{K}'\} \cup \mathcal{K}'. \quad (3.9)$$

Нетрудно видеть, что $\mathcal{G}, \mathcal{G}', \mathcal{B}$ — интервалы волн в момент времени t . Теперь мы можем определить

$$\pi(t, s, s') := \left[\sigma^{\text{rh}}(\mathbf{f}_t^{\text{eff}}, \mathcal{G}) - \sigma^{\text{rh}}(\mathbf{f}_t^{\text{eff}}, \mathcal{G}') \right]^+, \quad d(t, s, s') := |\mathcal{B}| = \text{card}(\mathcal{B})\varepsilon. \quad (3.10)$$

В силу гладкости отображения $w \mapsto \mathbf{f}_t^{\text{eff}}(w)$, в любой момент времени t и для любой пары $(s, s') \in \mathcal{W}(t)$, такой что $s < s'$, имеем

$$0 \leq \mathbf{q}(t, s, s') \leq \|D_{ww}^2 f\|_{\infty}. \quad (3.11)$$

Введем функционал

$$\mathfrak{Q}(t) := \sum_{\substack{s, s' \in \mathcal{W}(t) \\ s < s'}} \mathbf{q}(t, s, s') |s| |s'|. \quad (3.12)$$

Напомним, что $|s| = |s'| = \varepsilon$ — это интенсивность волн s и s' соответственно. Сразу видно, что:

1. $\mathfrak{Q}(0) \leq \|D_{ww}^2 f\|_{L^\infty} \text{Tot.Var.}(w(0, \cdot))^2$ (свойство (1) на стр. 158);
2. если нет взаимодействий, уничтожений или трансверсальных взаимодействий, то \mathfrak{Q} постоянен, т. к. $\mathcal{I}, \mathcal{P}, \mathbf{f}_t^{\text{eff}}$ постоянны (свойство (2) на с. 158).

Утверждение 3.3. Если t_j — точка уничтожения, то $\mathfrak{Q}(t_j) \leq \mathfrak{Q}(t_{j-1})$ (свойство (3) на с. 158).

Доказательство. Для вычисления изменения $\mathbf{q}(t, s, s')$ при уничтожениях достаточно рассмотреть только два следующих интересных случая.

Сначала предположим, что s, s' не разделены в вещественном решении при t_{j-1} , но разделены при t_j . В этом случае по определению π и в силу свойств выпуклых функций будем иметь $\pi(t_j, s, s') = 0$ и, следовательно, $\mathbf{q}(t_j, s, s') = \mathbf{q}(t_{j-1}, s, s') = 0$.

Теперь предположим, что s, s' разделены в вещественном решении как в момент времени t_{j-1} , так и в момент времени t_j , что они уже взаимодействовали к моменту t_{j-1} и будут взаимодействовать после t_j . Без ограничения общности предположим, что волны s, s' положительны, а волны, которые уничтожились, отрицательны. Введем обозначения

$$\begin{aligned} \mathcal{J}_{j-1}, \mathcal{J}'_{j-1} &\in \mathcal{P}(t_{j-1}, s, s'), \text{ где } s \in \mathcal{J}_{j-1}, s' \in \mathcal{J}'_{j-1}, \\ \mathcal{J}_j, \mathcal{J}'_j &\in \mathcal{P}(t_j, s, s'), \text{ где } s \in \mathcal{J}_j, s' \in \mathcal{J}'_j, \\ \mathcal{K}, \mathcal{K}' &\in \mathcal{P}(\mathfrak{t}^{\text{int}}(t, s, s')-, s, s'), \text{ где } s \in \mathcal{K}, s' \in \mathcal{K}', \end{aligned} \quad (3.13)$$

и определим

$$\begin{aligned} \mathcal{G}_{j-1} &:= \mathcal{K} \cup \{z \in \mathcal{J}_{j-1} \mid z > \mathcal{K}\}, & \mathcal{G}_j &:= \mathcal{K} \cup \{z \in \mathcal{J}_j \mid z > \mathcal{K}\}, \\ \mathcal{G}'_{j-1} &:= \{z \in \mathcal{J}'_{j-1} \mid z < \mathcal{K}'\} \cup \mathcal{K}', & \mathcal{G}'_j &:= \{z \in \mathcal{J}'_j \mid z < \mathcal{K}'\} \cup \mathcal{K}', \\ \mathcal{B}_{j-1} &:= \mathcal{K} \cup \{p \in \mathcal{W}(t_{j-1}) \mid \mathcal{K} < p < \mathcal{K}'\} \cup \mathcal{K}', & \mathcal{B}_j &:= \mathcal{K} \cup \{p \in \mathcal{W}(t_j) \mid \mathcal{K} < p < \mathcal{K}'\} \cup \mathcal{K}'. \end{aligned} \quad (3.14)$$

Из свойств выпуклых функций следует, что (см. рис. 1)

$$\sigma^{\text{rh}}(\mathbf{f}_{t_j}^{\text{eff}}, \mathcal{G}_j) \leq \sigma^{\text{rh}}(\mathbf{f}_{t_j}^{\text{eff}}, \mathcal{G}_{j-1}), \quad \sigma^{\text{rh}}(\mathbf{f}_{t_j}^{\text{eff}}, \mathcal{G}'_j) \geq \sigma^{\text{rh}}(\mathbf{f}_{t_j}^{\text{eff}}, \mathcal{G}'_{j-1}). \quad (3.15)$$

В силу того, что $\mathbf{f}_{t_j}^{\text{eff}} = \mathbf{f}_{t_{j-1}}^{\text{eff}}$ (т. к. нет трансверсальных взаимодействий при t_j), имеем $\pi(t_j, s, s') \leq \pi(t_{j-1}, s, s')$.

Более того, заметим, что $\mathcal{B}_{j-1} = \mathcal{B}_j$, т. к. волны в \mathcal{B}_{j-1} не могут быть уничтожены. Таким образом, $\mathbf{q}(t_j, s, s') \leq \mathbf{q}(t_{j-1}, s, s')$, что влечет уменьшение \mathfrak{Q} в момент времени уничтожения. \square

Для завершения доказательства теоремы 3.1 осталось показать, что \mathfrak{Q} удовлетворяет свойствам 4 и 5 на с. 158, т. е. неравенствам (3.4)-(3.5).

Замечание 3.6. Определение $\mathbf{q}(t, s, s')$ (формулы (3.8)–(3.10)) — это определение из [8], введенное здесь с некоторым упрощением в силу рассматриваемого нами модельного случая. В работах [6, 7] использовались другие определения.

Определение из [6] работает в скалярном случае, но не может быть перенесено на общий случай.

С другой стороны, определение из [7] обладает тем недостатком, что оценка (3.11) не выполняется. Функционал $\mathfrak{Q}(t) = \sum_{s < s'} \mathbf{q}(t, s, s') |s| |s'|$ по-прежнему равномерно ограничен величиной $\|D_{ww}^2\|_{\infty} \text{Tot.Var.}(w(0, \cdot))^2$ (свойство (1) на с. 158) и доказательство теоремы 3.1 справедливо при предположениях, сделанных в работе [7] (совпадающих с предположениями в настоящей работе,

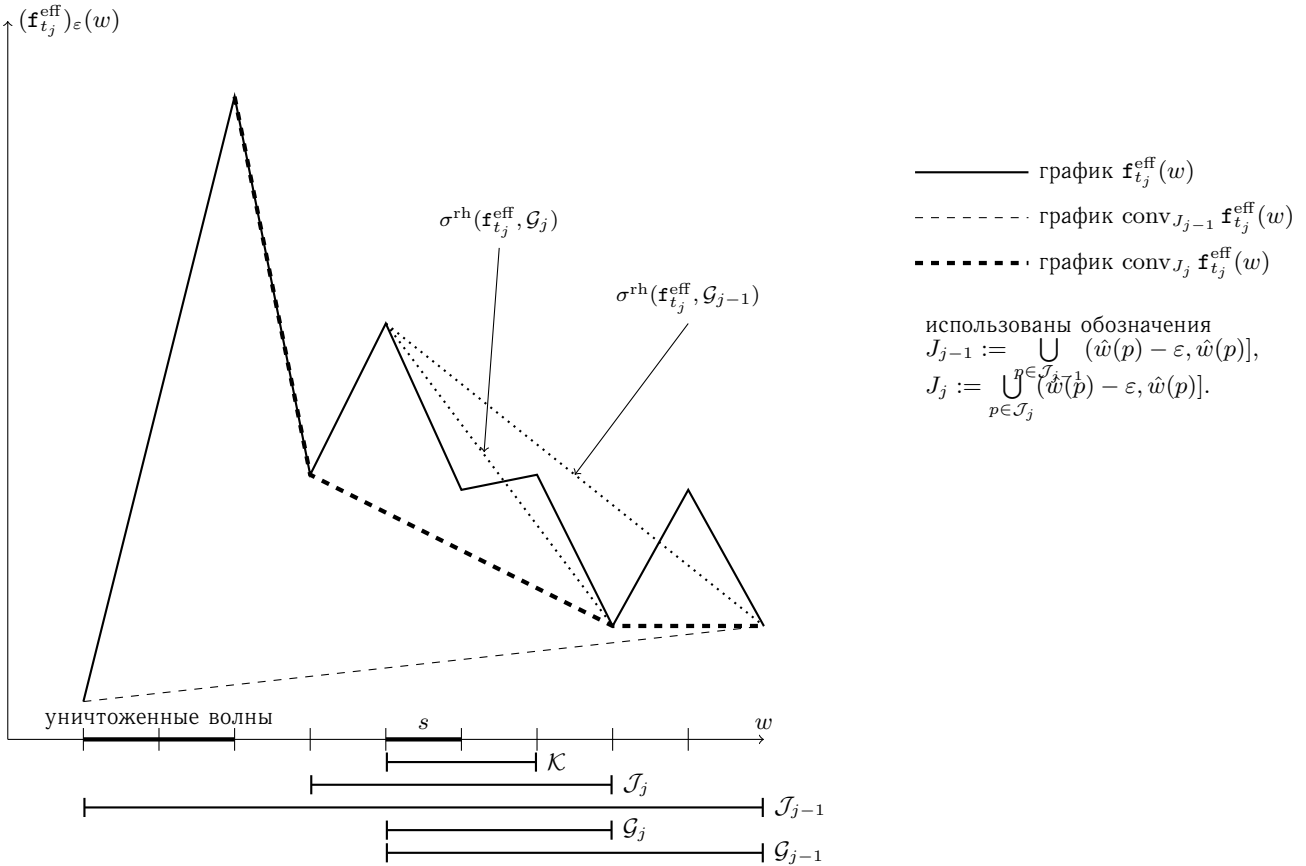


Рис. 1. Графическое доказательство (3.15).

т. е. ищется решение волнового фронта для треугольной системы (2.2)). Однако определение q , данное в [7], не работает в общем случае, т. к. не выполняется (3.11).

В настоящей работе мы используем корректное определение весов, которые надо приписать каждой паре волн (s, s') , чтобы доказать теорему 3.1 и в общем случае.

Замечание 3.7. В общем случае [8] (приближенное решение (1.1)-(1.2) по схеме Глимма) нужно учитывать тот факт, что некоторые волны могут создаваться при $t > 0$. При этом возникают следующие две трудности:

1. функционал Ω может возрасть в момент времени t , соответствующий возникновению волны, потому что:
 - веса для новых волн должны быть вычислены и суммированы;
 - веса $q(t, s, s')$ для пар (s, s') , существовавших до момента времени t , могут увеличиться;
 в обоих случаях приращение Ω ограничено убывающим кубическим функционалом Q^{cubic} , определенным в (3.3);
2. могут произойти уничтожения внутри интервалов $\mathcal{I}(t, s, s')$ (и не только на границах этих интервалов), а тогда веса $q(t, s, s')$ могут увеличиться; однако в этом случае увеличение $q(t, s, s')$ ограничено убыванием полной вариации приближенного решения.

3.4. Возрастающая часть Ω . Этот раздел посвящен доказательству неравенства (3.4). А именно, мы докажем следующую теорему.

Теорема 3.2. Если (t_j, x_j) — точка трансверсального взаимодействия, то

$$\Omega(t_j) - \Omega(t_{j-1}) \leq \mathcal{O}(1) |v_{h(j)}| |\mathcal{W}(t_j, x_j)|,$$

где $|v_{h(j)}|$ — интенсивность волнового фронта первого семейства, участвующего в трансверсальном взаимодействии в момент времени t_j .

Исследование возрастания Ω для приближенного решения общей системы (1.1)-(1.2) по схеме Глимма, осуществлено в [8, теорема 6.5] и похоже на приведенное ниже, за исключением (многочисленных) технических деталей.

Доказательство. Доказательство разбито на четыре этапа.

Шаг 1. Прежде всего, заметим, что для любых волн $s, s' \in \mathcal{W}(t_j) = \mathcal{W}(t_{j-1})$ выполнено $\mathfrak{q}(t_j, s, s') \neq \mathfrak{q}(t_{j-1}, s, s')$, только если

- (а) по крайней мере одна из волн из s, s' принадлежит $\mathcal{W}(t_j, x_j)$;
- (б) волны s, s' уже взаимодействовали к моменту времени t_{j-1} ;
- (с) волны s, s' будут взаимодействовать снова после t_j ;

Пусть s, s' — пара волн, удовлетворяющая (а), (б), или (с).

Шаг 2. Заметим, что если s, s' удовлетворяют (а), (б), (с) выше, то $\mathfrak{t}^{\text{int}}(t_j, s, s') = \mathfrak{t}^{\text{int}}(t_{j-1}, s, s')$. Так как $d(t_j, s, s')$ и $d(t_{j-1}, s, s')$ вычисляются с учетом разбиения

$$\mathcal{P}(\mathfrak{t}^{\text{int}}(t_j, s, s')-, s, s') = \mathcal{P}(\mathfrak{t}^{\text{int}}(t_{j-1}, s, s')-, s, s')$$

левой окрестности времени взаимодействия $\mathfrak{t}^{\text{int}}(t_j, s, s') = \mathfrak{t}^{\text{int}}(t_{j-1}, s, s')$, то из (3.10) следует, что

$$d(t_j, s, s') = d(t_{j-1}, s, s'). \quad (3.16)$$

Шаг 3. Вычислим теперь вариацию π , т. е. $\pi(t_j, s, s') - \pi(t_{j-1}, s, s')$. Определим

$$\mathcal{J}_{j-1}, \mathcal{J}'_{j-1}, \quad \mathcal{J}_j, \mathcal{J}'_j, \quad \mathcal{K}, \mathcal{K}', \quad \mathcal{G}_{j-1}, \mathcal{G}'_{j-1}, \quad \mathcal{G}_j, \mathcal{G}'_j,$$

как в (3.13)-(3.14) при доказательстве утверждения 3.3. Также в этом случае выполняются неравенства (3.15), т. е.

$$\sigma^{\text{rh}}(\mathbf{f}_{t_j}^{\text{eff}}, \mathcal{G}_j) \leq \sigma^{\text{rh}}(\mathbf{f}_{t_j}^{\text{eff}}, \mathcal{G}_{j-1}), \quad \sigma^{\text{rh}}(\mathbf{f}_{t_j}^{\text{eff}}, \mathcal{G}'_j) \geq \sigma^{\text{rh}}(\mathbf{f}_{t_j}^{\text{eff}}, \mathcal{G}'_{j-1}). \quad (3.17)$$

Считая без ограничения общности, что s, s' — положительные волны, введем

$$G_{j-1} := \bigcup_{p \in \mathcal{G}_{j-1}} (\hat{w}(p) - \varepsilon, \hat{w}(p)], \quad G'_{j-1} := \bigcup_{p \in \mathcal{G}'_{j-1}} (\hat{w}(p) - \varepsilon, \hat{w}(p)].$$

Теперь мы можем сделать следующие преобразования:

$$\begin{aligned} & \pi(t_j, s, s') - \pi(t_{j-1}, s, s') = \\ & = \left[\sigma^{\text{rh}}(\mathbf{f}_{t_j}^{\text{eff}}, \mathcal{G}_j) - \sigma^{\text{rh}}(\mathbf{f}_{t_j}^{\text{eff}}, \mathcal{G}'_j) \right]^+ - \left[\sigma^{\text{rh}}(\mathbf{f}_{t_{j-1}}^{\text{eff}}, \mathcal{G}_{j-1}) - \sigma^{\text{rh}}(\mathbf{f}_{t_{j-1}}^{\text{eff}}, \mathcal{G}'_{j-1}) \right]^+ \leq \\ & \text{(согласно (3.17))} \leq \left[\sigma^{\text{rh}}(\mathbf{f}_{t_j}^{\text{eff}}, \mathcal{G}_{j-1}) - \sigma^{\text{rh}}(\mathbf{f}_{t_j}^{\text{eff}}, \mathcal{G}'_{j-1}) \right]^+ - \left[\sigma^{\text{rh}}(\mathbf{f}_{t_{j-1}}^{\text{eff}}, \mathcal{G}_{j-1}) - \sigma^{\text{rh}}(\mathbf{f}_{t_{j-1}}^{\text{eff}}, \mathcal{G}'_{j-1}) \right]^+ \leq \\ & \leq \left| \left[\sigma^{\text{rh}}(\mathbf{f}_{t_j}^{\text{eff}}, \mathcal{G}_{j-1}) - \sigma^{\text{rh}}(\mathbf{f}_{t_j}^{\text{eff}}, \mathcal{G}'_{j-1}) \right] - \left[\sigma^{\text{rh}}(\mathbf{f}_{t_{j-1}}^{\text{eff}}, \mathcal{G}_{j-1}) - \sigma^{\text{rh}}(\mathbf{f}_{t_{j-1}}^{\text{eff}}, \mathcal{G}'_{j-1}) \right] \right| = \\ & = \left| \left(\frac{\mathbf{f}_{t_j}^{\text{eff}}(\max G_{j-1}) - \mathbf{f}_{t_j}^{\text{eff}}(\min G_{j-1})}{\max G_{j-1} - \min G_{j-1}} - \frac{\mathbf{f}_{t_j}^{\text{eff}}(\max G'_{j-1}) - \mathbf{f}_{t_j}^{\text{eff}}(\min G'_{j-1})}{\max G'_{j-1} - \min G'_{j-1}} \right) - \right. \\ & \left. - \left(\frac{\mathbf{f}_{t_{j-1}}^{\text{eff}}(\max G_{j-1}) - \mathbf{f}_{t_{j-1}}^{\text{eff}}(\min G_{j-1})}{\max G_{j-1} - \min G_{j-1}} - \frac{\mathbf{f}_{t_{j-1}}^{\text{eff}}(\max G'_{j-1}) - \mathbf{f}_{t_{j-1}}^{\text{eff}}(\min G'_{j-1})}{\max G'_{j-1} - \min G'_{j-1}} \right) \right| = \\ & = \frac{1}{\mathcal{L}^1(G_{j-1})\mathcal{L}^1(G'_{j-1})} \left| \int_{\min G_{j-1}}^{\max G_{j-1}} \int_{\min G'_{j-1}}^{\max G'_{j-1}} \left[\left(\frac{d\mathbf{f}_{t_j}^{\text{eff}}(\tau)}{dw} - \frac{d\mathbf{f}_{t_j}^{\text{eff}}(\tau')}{dw} \right) - \right. \right. \\ & \quad \left. \left. - \left(\frac{d\mathbf{f}_{t_{j-1}}^{\text{eff}}(\tau)}{dw} - \frac{d\mathbf{f}_{t_{j-1}}^{\text{eff}}(\tau')}{dw} \right) \right] d\tau' d\tau \right| = \\ & = \frac{1}{\mathcal{L}^1(G_{j-1})\mathcal{L}^1(G'_{j-1})} \left| \int_{\min G_{j-1}}^{\max G_{j-1}} \int_{\min G'_{j-1}}^{\max G'_{j-1}} \int_{\tau'}^{\tau} \left(\frac{d^2\mathbf{f}_{t_j}^{\text{eff}}(\xi)}{dw^2} - \frac{d^2\mathbf{f}_{t_{j-1}}^{\text{eff}}(\xi)}{dw^2} \right) d\xi d\tau' d\tau \right| \leq \end{aligned}$$

$$\leq \frac{1}{\mathcal{L}^1(G_{j-1})\mathcal{L}^1(G'_{j-1})} \int_{\min G_{j-1}}^{\max G_{j-1}} \int_{\min G'_{j-1}}^{\max G'_{j-1}} \int_{\tau'}^{\tau} \left| \frac{d^2 \mathbf{f}_{t_j}^{\text{eff}}(\xi)}{dw^2} - \frac{d^2 \mathbf{f}_{t_{j-1}}^{\text{eff}}(\xi)}{dw^2} \right| d\xi d\tau' d\tau. \quad (3.18)$$

Заметим, что если

$$\left| \frac{d^2 \mathbf{f}_{t_j}^{\text{eff}}(\xi)}{dw^2} - \frac{d^2 \mathbf{f}_{t_{j-1}}^{\text{eff}}(\xi)}{dw^2} \right| \neq 0,$$

то

$$\xi \in E := \left[\min \left\{ w_\varepsilon(t_j, x_j -), w_\varepsilon(t_j, x_j) \right\}, \max \left\{ w_\varepsilon(t_j, x_j -), w_\varepsilon(t_j, x_j) \right\} \right],$$

и в этом случае

$$\frac{d^2 \mathbf{f}_{t_j}^{\text{eff}}(\xi)}{dw^2} - \frac{d^2 \mathbf{f}_{t_{j-1}}^{\text{eff}}(\xi)}{dw^2} = \frac{\partial^2}{\partial w^2} f(\xi, v(t_j, x_j)) - \frac{\partial^2}{\partial w^2} f(\xi, v(t_j, x_j -)) = \int_{v_{h(j)}^-}^{v_{h(j)}^+} \frac{\partial^3}{\partial w^2 \partial v}(\xi, v) dv.$$

Тогда можно продолжить цепочку неравенств в (3.18):

$$\begin{aligned} \dots &\leq \frac{1}{\mathcal{L}^1(G_{j-1})\mathcal{L}^1(G'_{j-1})} \int_{\min G_{j-1}}^{\max G_{j-1}} \int_{\min G'_{j-1}}^{\max G'_{j-1}} \int_{[\tau, \tau'] \cap E} \int_{v_{h(j)}^-}^{v_{h(j)}^+} \left| \frac{\partial^3}{\partial w^2 \partial v}(\xi, v) \right| dv d\xi d\tau' d\tau \leq \\ &\leq \|D_{wv}^3\|_\infty |v_{h(j)}| |\mathcal{W}(t_j, x_j)|. \end{aligned} \quad (3.19)$$

Шаг 4. Вычислим теперь вариацию \mathfrak{Q} , используя (3.16) и (3.19):

$$\begin{aligned} \mathfrak{Q}(t_j) - \mathfrak{Q}(t_{j-1}) &= \\ &= \sum_{\substack{s, s' \in \mathcal{W}(t_j) \\ s < s' \\ s, s' \text{ удовлетворяют} \\ \text{(a), (b), (c)}}} \left[\mathfrak{q}(t_j, s, s') - \mathfrak{q}(t_{j-1}, s, s') \right] |s| |s'| = \\ &= \left(\sum_{\substack{s < \mathcal{W}(t_j, x_j) \\ s' \in \mathcal{W}(t_j, x_j) \\ s, s' \text{ удовлетворяют} \\ \text{(b), (c)}}} + \sum_{\substack{s < \mathcal{W}(t_j, x_j) \\ s' > \mathcal{W}(t_j, x_j) \\ s, s' \text{ удовлетворяют} \\ \text{(b), (c)}}} + \sum_{\substack{s \in \mathcal{W}(t_j, x_j) \\ s' > \mathcal{W}(t_j, x_j) \\ s, s' \text{ удовлетворяют} \\ \text{(b), (c)}}} \right) \left[\mathfrak{q}(t_j, s, s') - \mathfrak{q}(t_{j-1}, s, s') \right] |s| |s'| = \\ &= \left(\sum_{\substack{s < \mathcal{W}(t_j, x_j) \\ s' \in \mathcal{W}(t_j, x_j) \\ s, s' \text{ удовлетворяют} \\ \text{(b), (c)}}} + \sum_{\substack{s < \mathcal{W}(t_j, x_j) \\ s' > \mathcal{W}(t_j, x_j) \\ s, s' \text{ удовлетворяют} \\ \text{(b), (c)}}} + \sum_{\substack{s \in \mathcal{W}(t_j, x_j) \\ s' > \mathcal{W}(t_j, x_j) \\ s, s' \text{ удовлетворяют} \\ \text{(b), (c)}}} \right) \frac{1}{d(t_j, s, s')} \left[\pi(t_j, s, s') - \pi(t_{j-1}, s, s') \right] |s| |s'| \leq \\ &\quad \text{(в силу (3.19))} \\ &\leq \mathcal{O}(1) |v_{h(j)}| |\mathcal{W}(t_j, x_j)| \left(\sum_{\substack{s < \mathcal{W}(t_j, x_j) \\ s' \in \mathcal{W}(t_j, x_j) \\ s, s' \text{ удовлетворяют} \\ \text{(b), (c)}}} + \sum_{\substack{s < \mathcal{W}(t_j, x_j) \\ s' > \mathcal{W}(t_j, x_j) \\ s, s' \text{ удовлетворяют} \\ \text{(b), (c)}}} + \sum_{\substack{s \in \mathcal{W}(t_j, x_j) \\ s' > \mathcal{W}(t_j, x_j) \\ s, s' \text{ удовлетворяют} \\ \text{(b), (c)}}} \right) \frac{|s| |s'|}{d(t_j, s, s')} \leq \\ &\leq \mathcal{O}(1) |v_{h(j)}| |\mathcal{W}(t_j, x_j)| \left(\sum_{\substack{s < \mathcal{W}(t_j, x_j) \\ s' \in \mathcal{W}(t_j, x_j) \\ s, s' \text{ удовлетворяют} \\ \text{(b), (c)}}} + \sum_{\substack{s < \mathcal{W}(t_j, x_j) \\ s' > \mathcal{W}(t_j, x_j) \\ s, s' \text{ удовлетворяют} \\ \text{(b), (c)}}} + \sum_{\substack{s \in \mathcal{W}(t_j, x_j) \\ s' > \mathcal{W}(t_j, x_j) \\ s, s' \text{ удовлетворяют} \\ \text{(b), (c)}}} \right) \frac{|s| |s'|}{|\hat{w}(s') - (\hat{w}(s) - \varepsilon)|}. \end{aligned} \quad (3.20)$$

Положим

$$\begin{aligned} p_1 &:= \min \{p \in \mathcal{W}(t_j) \mid p \text{ уже взаимодействовала хотя бы с одной из волн в } \mathcal{W}(t_j, x_j) \text{ при } t_j\}, \\ p_2 &:= \max \{p \in \mathcal{W}(t_j) \mid p \text{ уже взаимодействовала хотя бы с одной из волн в } \mathcal{W}(t_j, x_j) \text{ при } t_j\}, \\ r_1 &:= \min \mathcal{W}(t_j, x_j), \\ r_2 &:= \max \mathcal{W}(t_j, x_j). \end{aligned}$$

Продолжим преобразования (3.20) следующим образом:

$$\begin{aligned} \dots &\leq \mathcal{O}(1) |v_{h(j)}| |\mathcal{W}(t_j, x_j)| \left(\int_{\hat{w}(p_1)-\varepsilon}^{\hat{w}(r_1)-\varepsilon} \int_{\hat{w}(r_1)-\varepsilon}^{\hat{w}(r_2)} + \int_{\hat{w}(p_1)-\varepsilon}^{\hat{w}(r_1)-\varepsilon} \int_{\hat{w}(p_1)-\varepsilon}^{\hat{w}(p_2)} + \int_{\hat{w}(r_1)-\varepsilon}^{\hat{w}(r_2)} \int_{\hat{w}(r_1)-\varepsilon}^{\hat{w}(p_2)} \right) \left(\frac{dw' dw}{w' - w} \right) \leq \\ & \text{(используем то, что для любых } a \leq \xi \leq b \text{ имеем } \int_a^\xi \int_\xi^b \frac{dw' dw}{w' - w} \leq \ln(2)(b - a)) \\ & \leq \mathcal{O}(1) |v_{h(j)}| |\mathcal{W}(t_j, x_j)| \left(\hat{w}(p_2) - (\hat{w}(p_1) - \varepsilon) \right) \leq \\ & \leq \mathcal{O}(1) |v_{h(j)}| |\mathcal{W}(t_j, x_j)| \text{Tot.Var.}(w_\varepsilon(0, \cdot)) \leq \\ & \leq \mathcal{O}(1) |v_{h(j)}| |\mathcal{W}(t_j, x_j)|, \end{aligned}$$

что завершает доказательство теоремы. \square

3.5. Убывающая часть Ω . Этот раздел посвящен доказательству неравенства (3.5). Мы докажем его только для точек положительного взаимодействия, случай точек отрицательного взаимодействия полностью аналогичен.

Исследование убывания Ω для приближенного решения общей системы (1.1)-(1.2) по методу Глимма проведено в [8, теорема 6.7], и оно полностью совпадают с приведенным ниже за исключением (многочисленных) технических трудностей.

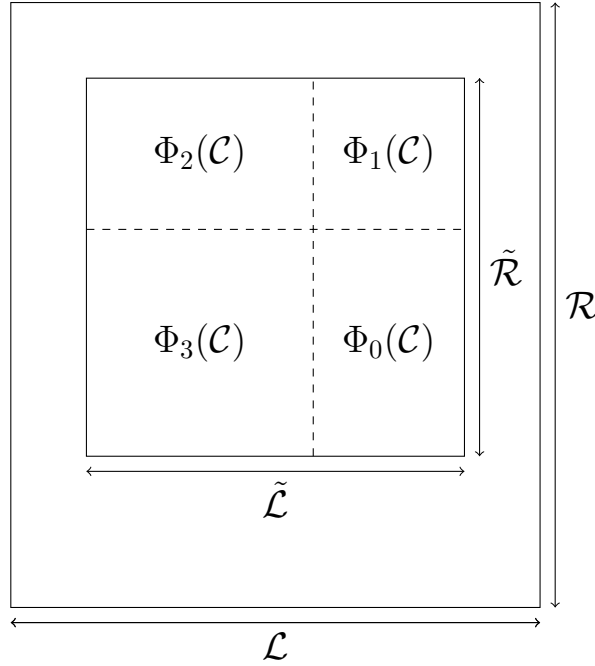
Для начала мы докажем следующее утверждение.

Утверждение 3.4. Пусть (t_j, x_j) — точка положительного взаимодействия. Пусть \mathcal{L}, \mathcal{R} — два волновых фронта (рассматриваемые как множества волн), взаимодействующие при (t_j, x_j) , $\mathcal{L} < \mathcal{R}$. Тогда выполнено следующее неравенство:

$$\begin{aligned} \sigma^{\text{rh}}(\mathbf{f}_{t_{j-1}}^{\text{eff}}, \mathcal{L}) - \sigma^{\text{rh}}(\mathbf{f}_{t_{j-1}}^{\text{eff}}, \mathcal{R}) |\mathcal{L}| |\mathcal{R}| &\leq \\ &\leq \sum_{\substack{(s, s') \in \mathcal{L} \times \mathcal{R} \\ (s, s') \text{ уже} \\ \text{взаимодействовали}}} \pi(t_{j-1}, s, s') |s| |s'| + \sum_{\substack{(s, s') \in \mathcal{L} \times \mathcal{R} \\ (s, s') \text{ никогда} \\ \text{не взаимодействовали}}} \|D_{ww}^2 f\|_{L^\infty} (|\mathcal{L}| + |\mathcal{R}|) |s| |s'|. \end{aligned}$$

Доказательство. Введем вспомогательные обозначения. Для произвольного прямоугольника $\mathcal{C} := \tilde{\mathcal{L}} \times \tilde{\mathcal{R}} \subseteq \mathcal{L} \times \mathcal{R}$ положим (см. рис. 2):

$$\begin{aligned} \Phi_0(\mathcal{C}) &:= \begin{cases} \emptyset, & \mathcal{C} = \emptyset, \\ \left[\tilde{\mathcal{L}} \cap \mathcal{I}(t_{j-1}, \max \tilde{\mathcal{L}}, \min \tilde{\mathcal{R}}) \right] \times \left[\tilde{\mathcal{R}} \cap \mathcal{I}(t_{j-1}, \max \tilde{\mathcal{L}}, \min \tilde{\mathcal{R}}) \right], & \max \tilde{\mathcal{L}}, \min \tilde{\mathcal{R}} \\ & \text{взаимодействовали,} \\ \{(\max \tilde{\mathcal{L}}, \min \tilde{\mathcal{R}})\}, & \max \tilde{\mathcal{L}}, \min \tilde{\mathcal{R}} \\ & \text{не взаимодействовали,} \end{cases} \\ \Phi_1(\mathcal{C}) &:= \begin{cases} \emptyset, & \mathcal{C} = \emptyset, \\ \left[\tilde{\mathcal{L}} \cap \mathcal{I}(t_{j-1}, \max \tilde{\mathcal{L}}, \min \tilde{\mathcal{R}}) \right] \times \left[\tilde{\mathcal{R}} \setminus \mathcal{I}(t_{j-1}, \max \tilde{\mathcal{L}}, \min \tilde{\mathcal{R}}) \right], & \max \tilde{\mathcal{L}}, \min \tilde{\mathcal{R}} \\ & \text{взаимодействовали,} \\ \{\max \tilde{\mathcal{L}}\} \times \left[\tilde{\mathcal{R}} \setminus \{\min \tilde{\mathcal{R}}\} \right], & \max \tilde{\mathcal{L}}, \min \tilde{\mathcal{R}} \\ & \text{не взаимодействовали,} \end{cases} \end{aligned}$$

Рис. 2. Разбиение $C := \mathcal{L} \times \mathcal{R}$.

$$\Phi_2(\mathcal{C}) := \begin{cases} \emptyset, & \mathcal{C} = \emptyset, \\ \left[\tilde{\mathcal{L}} \setminus \mathcal{I}(t_{j-1}, \max \tilde{\mathcal{L}}, \min \tilde{\mathcal{R}}) \right] \times \left[\tilde{\mathcal{R}} \setminus \mathcal{I}(t_{j-1}, \max \tilde{\mathcal{L}}, \min \tilde{\mathcal{R}}) \right], & \max \tilde{\mathcal{L}}, \min \tilde{\mathcal{R}} \\ & \text{взаимодействовали,} \\ \left[\tilde{\mathcal{L}} \setminus \{\max \tilde{\mathcal{L}}\} \right] \times \left[\tilde{\mathcal{R}} \setminus \{\min \tilde{\mathcal{R}}\} \right], & \max \tilde{\mathcal{L}}, \min \tilde{\mathcal{R}} \\ & \text{не взаимодействовали,} \end{cases}$$

$$\Phi_3(\mathcal{C}) := \begin{cases} \emptyset, & \mathcal{C} = \emptyset, \\ \left[\tilde{\mathcal{L}} \setminus \mathcal{I}(t_{j-1}, \max \tilde{\mathcal{L}}, \min \tilde{\mathcal{R}}) \right] \times \left[\tilde{\mathcal{R}} \cap \mathcal{I}(t_{j-1}, \max \tilde{\mathcal{L}}, \min \tilde{\mathcal{R}}) \right], & \max \tilde{\mathcal{L}}, \min \tilde{\mathcal{R}} \\ & \text{взаимодействовали,} \\ \left[\tilde{\mathcal{L}} \setminus \{\max \tilde{\mathcal{L}}\} \right] \times \{\min \tilde{\mathcal{R}}\}, & \max \tilde{\mathcal{L}}, \min \tilde{\mathcal{R}} \\ & \text{не взаимодействовали.} \end{cases}$$

Очевидно, что $\{\Phi_0(\mathcal{C}), \Phi_1(\mathcal{C}), \Phi_2(\mathcal{C}), \Phi_3(\mathcal{C})\}$ — непересекающееся разбиение \mathcal{C} .

Обозначим через $\Delta\sigma^{\text{rh}}(\mathbf{f}_{t_{j-1}}^{\text{eff}}, \mathcal{C}) := \sigma^{\text{rh}}(\mathbf{f}_{t_{j-1}}^{\text{eff}}, \tilde{\mathcal{L}}) - \sigma^{\text{rh}}(\mathbf{f}_{t_{j-1}}^{\text{eff}}, \tilde{\mathcal{R}})$ разность скоростей, поставленную в соответствие эффективной функцией потока первому и второму краям \mathcal{C} в момент времени t_{j-1} . Положим $|\mathcal{C}| := |\mathcal{L}||\mathcal{R}| = \text{card}(\mathcal{C})\varepsilon^2$. В силу сохранения $\Delta\sigma^{\text{rh}}(\mathbf{f}_{t_{j-1}}^{\text{eff}}, \mathcal{C})|\mathcal{C}| = \sum_{a=0}^3 \Delta\sigma^{\text{rh}}(\mathbf{f}_{t_{j-1}}^{\text{eff}}, \Phi_a(\mathcal{C}))|\Phi_a(\mathcal{C})|$.

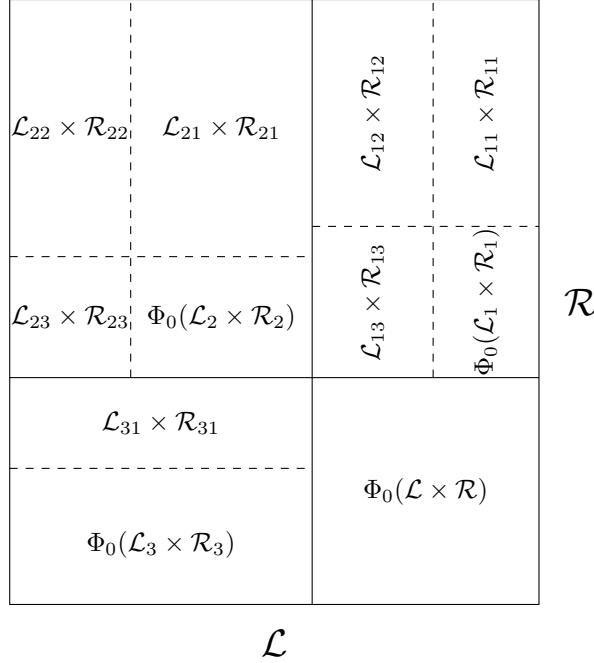
Для произвольного множества A обозначим через $A^{<\mathbb{N}}$ множество всех конечных последовательностей, принимающих значения в A . Будем предполагать, что $\emptyset \in A^{<\mathbb{N}}$ и называть \emptyset *пустой последовательностью*. Существует естественный порядок \preceq на $A^{<\mathbb{N}}$: для $\alpha, \beta \in A^{<\mathbb{N}}$,

$$\alpha \preceq \beta \iff \beta \text{ получается из } \alpha \text{ добавлением конечной последовательности.}$$

Подмножество $D \subseteq A^{<\mathbb{N}}$ называется *деревом*, если для произвольных $\alpha, \beta \in A^{<\mathbb{N}}$, таких что $\alpha \preceq \beta$, из включения $\beta \in D$ следует $\alpha \in D$.

Введем отображение $\Psi : \{1, 2, 3\}^{<\mathbb{N}} \rightarrow 2^{\mathcal{L} \times \mathcal{R}}$ по формуле

$$\Psi_\alpha = \begin{cases} \mathcal{L} \times \mathcal{R}, & \text{если } \alpha = \emptyset, \\ \Phi_{a_n} \circ \dots \circ \Phi_{a_1}(\mathcal{L} \times \mathcal{R}), & \text{если } \alpha = (a_1, \dots, a_n) \in \{1, 2, 3\}^{<\mathbb{N}} \setminus \{\emptyset\}. \end{cases}$$


 Рис. 3. Пример разбиения $\mathcal{L} \times \mathcal{R}$ с использованием дерева D .

Пусть для $\alpha \in \{1, 2, 3\}^{<\mathbb{N}}$ $\mathcal{L}_\alpha, \mathcal{R}_\alpha$ определяются соотношениями $\Psi_\alpha = \mathcal{L}_\alpha \times \mathcal{R}_\alpha$. Определим дерево в $\{1, 2, 3\}^{<\mathbb{N}}$, полагая $\alpha \in D \iff \Psi_\alpha \neq \emptyset$ (см. рис. 3).

Идея доказательства заключается в том, чтобы показать, что для каждого $\alpha \in D$ в прямоугольнике Ψ_α выполняется неравенство

$$\Delta\sigma^{\text{rh}}(\mathbf{f}_{t_{j-1}}^{\text{eff}}, \Psi_\alpha) |\Psi_\alpha| \leq \sum_{\substack{(s, s') \in \Psi_\alpha \\ (s, s') \text{ уже} \\ \text{взаимодействовали}}} \pi(t_{j-1}, s, s') |s| |s'| + \sum_{\substack{(s, s') \in \Psi_\alpha \\ (s, s') \text{ никогда не} \\ \text{взаимодействовали}}} \|D_{ww}^2 f\|_{L^\infty} (|\mathcal{L}| + |\mathcal{R}|) |s| |s'|.$$

Заключение будет следовать из того, что $\emptyset \in D$ и $\Psi_\emptyset = \mathcal{L} \times \mathcal{R}$. Нам понадобятся следующие две леммы.

Лемма 3.1. Для произвольного $\alpha \in D$, если $\max \mathcal{L}_\alpha, \min \mathcal{R}_\alpha$ уже взаимодействовали к моменту времени t_{j-1} , разбиение $\mathcal{P}(t_{j-1}, \max \mathcal{L}_\alpha, \min \mathcal{R}_\alpha)$ интервала $\mathcal{I}(t_{j-1}, \max \mathcal{L}_\alpha, \min \mathcal{R}_\alpha)$ может быть сужено на

$$\mathcal{L}_\alpha \cap \mathcal{I}(t_{j-1}, \max \mathcal{L}_\alpha, \min \mathcal{R}_\alpha)$$

и на

$$\mathcal{R}_\alpha \cap \mathcal{I}(t_{j-1}, \max \mathcal{L}_\alpha, \min \mathcal{R}_\alpha).$$

Идея доказательства. По индукции с помощью утверждений 3.1 и 3.2 доказывается более сильное утверждение: для каждого $\beta \preceq \alpha$ разбиение $\mathcal{P}(t_{j-1}, \max \mathcal{L}_\alpha, \min \mathcal{R}_\alpha)$ интервала $\mathcal{I}(t_{j-1}, \max \mathcal{L}_\alpha, \min \mathcal{R}_\alpha)$ может быть сужено на $\mathcal{L}_\beta \cap \mathcal{I}(t_{j-1}, \max \mathcal{L}_\alpha, \min \mathcal{R}_\alpha)$ и на $\mathcal{R}_\beta \cap \mathcal{I}(t_{j-1}, \max \mathcal{L}_\alpha, \min \mathcal{R}_\alpha)$. Детальное доказательство см. в [7, лемма 4.17]. \square

Лемма 3.2. Для каждого $\alpha \in D$, если $\max \mathcal{L}_\alpha, \min \mathcal{R}_\alpha$ уже взаимодействовали к моменту времени t_{j-1} , для $\Phi_0(\Psi_\alpha)$ выполнено неравенство

$$\Delta\sigma^{\text{rh}}(\mathbf{f}_{t_{j-1}}^{\text{eff}}, \Phi_0(\Psi_\alpha)) |\Phi_0(\Psi_\alpha)| \leq \sum_{(s, s') \in \Phi_0(\Psi_\alpha)} \pi(t_{j-1}, s, s') |s| |s'|.$$

Доказательство. По определению Φ_0

$$\Phi_0(\Psi_\alpha) = \left[\mathcal{L}_\alpha \cap \mathcal{I}(t_{j-1}, \max \mathcal{L}_\alpha, \min \mathcal{R}_\alpha) \right] \times \left[\mathcal{R}_\alpha \cap \mathcal{I}(t_{j-1}, \max \mathcal{L}_\alpha, \min \mathcal{R}_\alpha) \right].$$

В силу предыдущей леммы

$$\begin{aligned}\mathcal{P}(t_{j-1}, \max \mathcal{L}_\alpha, \min \mathcal{R}_\alpha)|_{\mathcal{L}_\alpha \cap \mathcal{I}(t_{j-1}, \max \mathcal{L}_\alpha, \min \mathcal{R}_\alpha)} &= \{\mathcal{J}_1, \dots, \mathcal{J}_L\}, \\ \mathcal{P}(t_{j-1}, \max \mathcal{L}_\alpha, \min \mathcal{R}_\alpha)|_{\mathcal{R}_\alpha \cap \mathcal{I}(t_{j-1}, \max \mathcal{L}_\alpha, \min \mathcal{R}_\alpha)} &= \{\mathcal{K}_1, \dots, \mathcal{K}_N\}.\end{aligned}$$

Заметим, что для любых $(s, s') \in \mathcal{J}_l \times \mathcal{K}_n \subseteq \Phi_0(\Psi_\alpha)$

$$\pi(t_{j-1}, s, s') = \left[\sigma^{\text{rh}}(\mathbf{f}_{t_{j-1}}^{\text{eff}}, \mathcal{J}_l) - \sigma^{\text{rh}}(\mathbf{f}_{t_{j-1}}^{\text{eff}}, \mathcal{K}_n) \right]^+. \quad (3.21)$$

Действительно, в силу утверждения 3.2

$$\mathcal{I}(t_{j-1}, s, s') = \mathcal{I}(t_{j-1}, \max \mathcal{L}_\alpha, \min \mathcal{R}_\alpha), \quad \mathcal{P}(t_{j-1}, s, s') = \mathcal{P}(t_{j-1}, \max \mathcal{L}_\alpha, \min \mathcal{R}_\alpha),$$

откуда с учетом равенства $\mathfrak{t}^{\text{int}}(t_{j-1}, s, s') = t_j$ следует (3.21). Таким образом,

$$\begin{aligned}\Delta \sigma^{\text{rh}}(\mathbf{f}_{t_{j-1}}^{\text{eff}}, \Phi_0(\Psi_\alpha))|_{\Phi_0(\Psi_\alpha)} &= \\ (\text{в силу сохранения}) &= \sum_{l=1}^L \sum_{n=1}^N \Delta \sigma^{\text{rh}}(\mathbf{f}_{t_{j-1}}^{\text{eff}}, \mathcal{J}_l \times \mathcal{K}_n)|_{\mathcal{J}_l \times \mathcal{K}_n} = \\ &= \sum_{l=1}^L \sum_{n=1}^N \Delta \sigma^{\text{rh}}(\mathbf{f}_{t_{j-1}}^{\text{eff}}, \mathcal{J}_l \times \mathcal{K}_n) \sum_{(s, s') \in \mathcal{J}_l \times \mathcal{K}_n} |s||s'| \leq \\ &\leq \sum_{l=1}^L \sum_{n=1}^N \left[\Delta \sigma^{\text{rh}}(\mathbf{f}_{t_{j-1}}^{\text{eff}}, \mathcal{J}_l \times \mathcal{K}_n) \right]^+ \sum_{(s, s') \in \mathcal{J}_l \times \mathcal{K}_n} |s||s'| = \\ (\text{в силу (3.21)}) &= \sum_{l=1}^L \sum_{n=1}^N \sum_{(s, s') \in \mathcal{J}_l \times \mathcal{K}_n} \pi(t_{j-1}, s, s') |s||s'| = \\ &= \sum_{(s, s') \in \Phi_0(\Psi_\alpha)} \pi(t_{j-1}, s, s') |s||s'|.\end{aligned}$$

□

Завершение доказательства утверждения 3.4. Как было сказано ранее, для завершения доказательства достаточно показать, что для каждого $\alpha \in D$ для Ψ_α справедлива оценка

$$\Delta \sigma^{\text{rh}}(\mathbf{f}_{t_{j-1}}^{\text{eff}}, \Psi_\alpha)|_{\Psi_\alpha} \leq \sum_{\substack{(s, s') \in \Psi_\alpha \\ (s, s') \text{ уже} \\ \text{взаимодействовали}}} \pi(t_{j-1}, s, s') |s||s'| + \sum_{\substack{(s, s') \in \Psi_\alpha \\ (s, s') \text{ никогда не} \\ \text{взаимодействовали}}} \|D_{ww}^2 f\|_{L^\infty} (|\mathcal{L}| + |\mathcal{R}|) |s||s'|. \quad (3.22)$$

Это доказывается (обратной) индукцией по дереву D . Если $\alpha \in D$ — лист дерева (т. е. $\alpha a \notin D$ для некоторого $a \in \{1, 2, 3\}$), то $\Psi_\alpha = \Phi_0(\Psi_\alpha)$. Если $\max \mathcal{L}_\alpha, \min \mathcal{R}_\alpha$ никогда не взаимодействовали к моменту времени t_{j-1} , то $\Psi_\alpha = \Phi_0(\Psi_\alpha) = \{(\max \mathcal{L}_\alpha, \min \mathcal{R}_\alpha)\}$ и неравенство (3.22) следует из теоремы о среднем. Если $\max \mathcal{L}_\alpha, \min \mathcal{R}_\alpha$ уже взаимодействовали в момент времени t_{j-1} , то каждая волна в \mathcal{L}_α взаимодействовала с любой волной из \mathcal{R}_α , и тогда неравенство (3.22) следует из леммы 3.2.

Теперь возьмем $\alpha \in D$, такое что α не является листом. Тогда $\Phi_1(\Psi_\alpha) = \Psi_{\alpha 1}$, $\Phi_2(\Psi_\alpha) = \Psi_{\alpha 2}$, $\Phi_3(\Psi_\alpha) = \Psi_{\alpha 3}$ и

$$\begin{aligned}
 & \Delta\sigma^{\text{rh}}(\mathbf{f}_{t_{j-1}}^{\text{eff}}, \Psi_\alpha)|\Psi_\alpha| = \\
 (\text{в силу сохранения}) &= \Delta\sigma^{\text{rh}}(\mathbf{f}_{t_{j-1}}^{\text{eff}}, \Phi_0(\Psi_\alpha))|\Phi_0(\Psi_\alpha)| + \sum_{a=1}^3 \Delta\sigma^{\text{rh}}(\mathbf{f}_{t_{j-1}}^{\text{eff}}, \Phi_a(\Psi_\alpha))|\Phi_a(\Psi_\alpha)| = \\
 &= \Delta\sigma^{\text{rh}}(\mathbf{f}_{t_{j-1}}^{\text{eff}}, \Phi_0(\Psi_\alpha))|\Phi_0(\Psi_\alpha)| + \sum_{a=1}^3 \Delta\sigma^{\text{rh}}(\mathbf{f}_{t_{j-1}}^{\text{eff}}, \Psi_{\alpha a})|\Psi_{\alpha a}| \leq \\
 (\text{в силу леммы 3.2}) &\leq \sum_{(s,s') \in \Phi_0(\Psi_\alpha)} \pi(t_{j-1}, s, s')|s||s'| + \sum_{a=1}^3 \Delta\sigma^{\text{rh}}(\mathbf{f}_{t_{j-1}}^{\text{eff}}, \Psi_{\alpha a})|\Psi_{\alpha a}| \leq \\
 (\text{в силу индуктивного предположения}) & \\
 &\leq \sum_{(s,s') \in \Phi_0(\Psi_\alpha)} \pi(t_{j-1}, s, s')|s||s'| + \\
 &+ \sum_{a=1}^3 \left(\sum_{\substack{(s,s') \in \Psi_{\alpha a} \\ (s,s') \text{ уже} \\ \text{взаимодействовали}}} \pi(t_{j-1}, s, s')|s||s'| + \right. \\
 &+ \left. \sum_{\substack{(s,s') \in \Psi_{\alpha a} \\ (s,s') \text{ никогда не} \\ \text{взаимодействовали}}} \|D_{ww}^2 f\|_{L^\infty} (|\mathcal{L}| + |\mathcal{R}|)|s||s'| \right) = \\
 &= \sum_{\substack{(s,s') \in \Psi_\alpha \\ (s,s') \text{ уже} \\ \text{взаимодействовали}}} \pi(t_{j-1}, s, s')|s||s'| + \sum_{\substack{(s,s') \in \Psi_\alpha \\ (s,s') \text{ никогда не} \\ \text{взаимодействовали}}} \|D_{ww}^2 f\|_{L^\infty} (|\mathcal{L}| + |\mathcal{R}|)|s||s'|,
 \end{aligned}$$

что завершает доказательство утверждения. \square

Теорема 3.3. В каждой точке взаимодействия (t_j, x_j) выполнено

$$\sum_{s \in \mathcal{W}(t_j)} |\sigma(t_j, s) - \sigma(t_{j-1}, s)||s| \leq 2[\mathfrak{Q}(t_{j-1}) - \mathfrak{Q}(t_j)].$$

Доказательство. Как было сказано в начале этого раздела, мы предполагаем без ограничения общности, что все волны в $\mathcal{W}(t_j, x_j)$ положительные. Пусть \mathcal{L}, \mathcal{R} — два волновых фронта (рассматриваемые, как множества волн), взаимодействующие в (t_j, x_j) , $\mathcal{L} < \mathcal{R}$. Стандартным образом, замечая, что волны, меняющие скорость после взаимодействия, принадлежат $\mathcal{L} \cup \mathcal{R}$, получаем

$$\begin{aligned}
 \sum_{s \in \mathcal{W}(t_j)} |\sigma(t_j, s) - \sigma(t_{j-1}, s)||s| &= 2 \frac{|\sigma^{\text{rh}}(\mathbf{f}_{t_{j-1}}^{\text{eff}}, \mathcal{L}) - \sigma^{\text{rh}}(\mathbf{f}_{t_{j-1}}^{\text{eff}}, \mathcal{R})||\mathcal{L}||\mathcal{R}|}{|\mathcal{L}| + |\mathcal{R}|} = \\
 &= 2 \frac{(\sigma^{\text{rh}}(\mathbf{f}_{t_{j-1}}^{\text{eff}}, \mathcal{L}) - \sigma^{\text{rh}}(\mathbf{f}_{t_{j-1}}^{\text{eff}}, \mathcal{R}))|\mathcal{L}||\mathcal{R}|}{|\mathcal{L}| + |\mathcal{R}|},
 \end{aligned} \tag{3.23}$$

где последнее равенство следует из того, что $\sigma^{\text{rh}}(\mathbf{f}_{t_{j-1}}^{\text{eff}}, \mathcal{L}) > \sigma^{\text{rh}}(\mathbf{f}_{t_{j-1}}^{\text{eff}}, \mathcal{R})$, поскольку \mathcal{L} и \mathcal{R} взаимодействуют и $\mathcal{L} < \mathcal{R}$. Более того, заметим, что в силу утверждения 3.1, для любых $(s, s') \in \mathcal{L} \times \mathcal{R}$

$$|\mathcal{L}| + |\mathcal{R}| \geq d(t_{j-1}, s, s').$$

Тогда, пользуясь утверждением 3.4, получаем

$$\sum_{s \in \mathcal{W}(t_j)} |\sigma(t_j, s) - \sigma(t_{j-1}, s)||s| = 2 \frac{(\sigma^{\text{rh}}(\mathbf{f}_{t_{j-1}}^{\text{eff}}, \mathcal{L}) - \sigma^{\text{rh}}(\mathbf{f}_{t_{j-1}}^{\text{eff}}, \mathcal{R}))|\mathcal{L}||\mathcal{R}|}{|\mathcal{L}| + |\mathcal{R}|} \leq$$

$$\begin{aligned}
&\leq \frac{2}{|\mathcal{L}| + |\mathcal{R}|} \left[\sum_{\substack{(s,s') \in \mathcal{L} \times \mathcal{R} \\ (s,s') \text{ уже} \\ \text{взаимодействовали}}} \pi(t_{j-1}, s, s') |s| |s'| + \sum_{\substack{(s,s') \in \mathcal{L} \times \mathcal{R} \\ (s,s') \text{ никогда не} \\ \text{взаимодействовали}}} \|D_{ww}^2 f\|_{L^\infty} (|\mathcal{L}| + |\mathcal{R}|) |s| |s'| \right] \leq \\
&\leq 2 \left[\sum_{\substack{(s,s') \in \mathcal{L} \times \mathcal{R} \\ (s,s') \text{ уже} \\ \text{взаимодействовали}}} \frac{\pi(t_{j-1}, s, s') |s| |s'|}{d(t_{j-1}, s, s')} + \sum_{\substack{(s,s') \in \mathcal{L} \times \mathcal{R} \\ (s,s') \text{ никогда не} \\ \text{взаимодействовали}}} \|D_{ww}^2 f\|_{L^\infty} |s| |s'| \right] = \\
&= 2 \sum_{(s,s') \in \mathcal{L} \times \mathcal{R}} \mathfrak{q}(t_{j-1}, s, s') |s| |s'| = 2 [\mathfrak{Q}(t_{j-1}) - \mathfrak{Q}(t_j)],
\end{aligned}$$

Что и требовалось доказать. \square

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Ancona F., Marson A.* Sharp convergence rate of the Glimm scheme for general nonlinear hyperbolic systems// *Commun. Math. Phys.* — 2011. — 302. — С. 581–630.
2. *Baiti P., Bressan A.* The semigroup generated by a Temple class system with large data// *Differ. Integr. Equ.* — 1997. — 10. — С. 401–418.
3. *Bianchini S.* The semigroup generated by a Temple class system with nonconvex flux function// *Differ. Integr. Equ.* — 2000. — 13 (10–12). — С. 1529–1550.
4. *Bianchini S.* Interaction estimates and Glimm functional for general hyperbolic systems// *Discrete Contin. Dyn. Syst.* — 2003. — 9. — С. 133–166.
5. *Bianchini S., Bressan A.* Vanishing viscosity solutions of nonlinear hyperbolic systems// *Ann. Math. (2).* — 2005. — 161. — С. 223–342.
6. *Bianchini S., Modena S.* On a quadratic functional for scalar conservation laws// *J. Hyperbolic Differ. Equ.* — 2014. — 11 (2). — С. 355–435.
7. *Bianchini S., Modena S.* Quadratic interaction functional for systems of conservation laws: a case study// *Bull. Inst. Math. Acad. Sin. (N.S.).* — 2014. — 9 (3). — С. 487–546.
8. *Bianchini S., Modena S.* Quadratic interaction functional for general systems of conservation laws// *Commun. Math. Phys.* — 2015. — 338, № 3. — С. 1075–1152.
9. *Bressan A.* Hyperbolic systems of conservation laws. The one dimensional Cauchy problem. — Oxford University Press, 2000.
10. *Bressan A., Marson A.* Error bounds for a deterministic version of the Glimm scheme// *Arch. Ration. Mech. Anal.* — 1998. — 142. — С. 155–176.
11. *Daferrmos C.* Hyperbolic conservation laws in continuum physics. — Springer, 2005.
12. *Glimm J.* Solutions in the large for nonlinear hyperbolic systems of equations// *Commun. Pure Appl. Math.* — 1965. — 18. — С. 697–715.
13. *Lax P.D.* Hyperbolic systems of conservation laws. II// *Commun. Pure Appl. Math.* — 1957. — 10. — С. 537–566.
14. *Lax P.D.* Shock waves and entropy// В сб.: *Contribution to nonlinear functional analysis.* — New York: Academic Press, 1971. — С. 603–634.
15. *Liu T.P.* The Riemann problem for general 2×2 conservation laws// *Trans. Am. Math. Soc.* — 1974. — 199. — С. 89–112.
16. *Liu T.P.* The Riemann problem for general systems of conservation laws// *J. Differ. Equ.* — 1975. — 18. — С. 218–234.
17. *Liu T.P.* The deterministic version of the Glimm scheme// *Commun. Math. Phys.* — 1977. — 57. — С. 135–148.
18. *Temple B.* Systems of conservation laws with invariant submanifolds// *Trans. Am. Math. Soc.* — 1983. — 280. — С. 781–795.

Стефано Модена

S.I.S.S.A., Via Bonomea 265, 34136 Trieste, TS, Italy

E-mail: smodena@sissa.it

Quadratic Interaction Estimate for Hyperbolic Conservation Laws: an Overview

© 2016 S. Modena

Abstract. In the joint work with S. Bianchini [8] (see also [6, 7]), we proved a quadratic interaction estimate for the system of conservation laws

$$\begin{cases} u_t + f(u)_x = 0, \\ u(t = 0) = u_0(x), \end{cases}$$

where $u : [0, \infty) \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$, $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ is strictly hyperbolic, and $\text{Tot.Var.}(u_0) \ll 1$. For a wavefront solution in which only two wavefronts at a time interact, such estimate can be written in the form

$$\sum_{t_j \text{ interaction time}} \frac{|\sigma(\alpha_j) - \sigma(\alpha'_j)| |\alpha_j| |\alpha'_j|}{|\alpha_j| + |\alpha'_j|} \leq C(f) \text{Tot.Var.}(u_0)^2,$$

where α_j and α'_j are the wavefronts interacting at the interaction time t_j , $\sigma(\cdot)$ is the speed, $|\cdot|$ denotes the strength, and $C(f)$ is a constant depending only on f (see [8, Theorem 1.1] or Theorem 3.1 in the present paper for a more general form).

The aim of this paper is to provide the reader with a proof of such quadratic estimate in a simplified setting, in which:

- all the main ideas of the construction are presented;
- all the technicalities of the proof in the general setting [8] are avoided.

REFERENCES

1. F. Ancona and A. Marson, “Sharp convergence rate of the Glimm scheme for general nonlinear hyperbolic systems,” *Commun. Math. Phys.*, 2011, **302**, 581–630.
2. P. Baiti and A. Bressan, “The semigroup generated by a Temple class system with large data,” *Differ. Integr. Equ.*, 1997, **10**, 401–418.
3. S. Bianchini, “The semigroup generated by a Temple class system with nonconvex flux function,” *Differ. Integr. Equ.*, 2000, **13** (10–12), 1529–1550.
4. S. Bianchini, “Interaction estimates and Glimm functional for general hyperbolic systems,” *Discrete Contin. Dyn. Syst.*, 2003, **9**, 133–166.
5. S. Bianchini and A. Bressan, “Vanishing viscosity solutions of nonlinear hyperbolic systems,” *Ann. Math. (2)*, 2005, **161**, 223–342.
6. S. Bianchini and S. Modena, “On a quadratic functional for scalar conservation laws,” *J. Hyperbolic Differ. Equ.*, 2014, **11** (2), 355–435.
7. S. Bianchini and S. Modena, “Quadratic interaction functional for systems of conservation laws: a case study,” *Bull. Inst. Math. Acad. Sin. (N.S.)*, 2014, **9** (3), 487–546.
8. S. Bianchini and S. Modena, “Quadratic interaction functional for general systems of conservation laws,” *Commun. Math. Phys.*, 2015, **338**, No. 3, 1075–1152.
9. A. Bressan, *Hyperbolic Systems of Conservation Laws. The One Dimensional Cauchy Problem*, Oxford University Press, 2000.
10. A. Bressan and A. Marson “Error bounds for a deterministic version of the Glimm scheme,” *Arch. Ration. Mech. Anal.*, 1998, **142**, 155–176.
11. C. Dafermos, *Hyperbolic Conservation Laws in Continuum Physics*, Springer, 2005.
12. J. Glimm, “Solutions in the large for nonlinear hyperbolic systems of equations,” *Commun. Pure Appl. Math.*, 1965, **18**, 697–715.
13. P. D. Lax, “Hyperbolic systems of conservation laws. II,” *Commun. Pure Appl. Math.*, 1957, **10**, 537–566.
14. P. D. Lax, “Shock waves and entropy,” In: *Contribution to Nonlinear Functional Analysis*, 603–634, Academic Press, New York, 1971.
15. T. P. Liu, “The Riemann problem for general 2×2 conservation laws,” *Trans. Am. Math. Soc.*, 1974, **199**, 89–112.
16. T. P. Liu, “The Riemann problem for general systems of conservation laws,” *J. Differ. Equ.*, 1975, **18**, 218–234.

17. T. P. Liu, "The deterministic version of the Glimm scheme," *Commun. Math. Phys.*, 1977, **57**, 135–148.
18. B. Temple, "Systems of conservation laws with invariant submanifolds," *Trans. Am. Math. Soc.*, 1983, **280**, 781–795.

Stefano Modena
S.I.S.S.A., Via Bonomea 265, 34136 Trieste, TS, Italy
E-mail: smodena@sissa.it