Современная математика. Фундаментальные направления. Том 59 (2016). С. 119–147

УДК 517.9.

# ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ С ВЫРОЖДЕННЫМ ЗАВИСЯЩИМ ОТ НЕИЗВЕСТНОГО ОПЕРАТОРОМ ПРИ ПРОИЗВОДНОЙ

© 2016 г. **Б. В. ЛОГИНОВ, Ю. Б. РУСАК, Л. Р. КИМ-ТЯН**

Аннотация. Развита теория обобщенных жордановых цепочек многопараметрических оператор-функций $A(\lambda): E_1 \to E_2$, $\lambda \in \Lambda$, $\dim \Lambda = k$, $\dim E_1 = \dim E_2 = n$, где $A_0 = A(0)$ — необратимый оператор. Для упрощения изложения в разделах 1–3 геометрическая кратность $\lambda_0$ равна единице, т. е. $\dim N(A_0) = 1$, $N(A_0) = \operatorname{span}\{\varphi\}$, $\dim N^*(A_0^*) = 1$, $N^*(A_0^*) = \operatorname{span}\{\psi\}$ и оператор-функция $A(\lambda)$ предполагается линейной по $\lambda$. Для полиномиальной зависимости $A(\lambda)$ в разделе 4 выполнена линеаризация. Однако результаты теорем существования бифуркации получены при наличии нескольких жордановых цепочек.

Даны приложения к вырожденным дифференциальным уравнениям вида $[A_0 + R(\cdot, x)]x' = Bx$.

## СОДЕРЖАНИЕ



## 1. Введение

Рассматриваются дифференциальные уравнения (ДУ) вида

$$A(x)x' = G(x). \tag{1.1}$$

Если не оговорено противоположное $A(x), G(\cdot): E_1 \to E_2$, $\dim E_1 = \dim E_2 = n$, $A(0) = A_0$ — вырожденный оператор $\dim \operatorname{Ker} A_0 = \dim \operatorname{Ker} A_0^* = 1$; $\operatorname{Ker} A_0 = N(A_0) = \operatorname{span}\{\varphi\}$; $\operatorname{Ker} A_0^* = N(A_0^*) = \operatorname{span}\{\psi\}$. Оператор $G(x)$ — достаточно гладкий, $G(0) = 0$; $G(x) = Bx - H(x), H(0) = 0; H'(0) = 0$. Прежде всего следует выяснить, при каких условиях оператор $A(x)$ будет невырожденным в проколотой окрестности точки $x = 0$ или вырожденным в некотором подмногообразии окрестности точки $x = 0$. В этом направлении при использовании результатов [2] в разделах 2 и 3 предложена теория *обобщенных жордановых цепочек* (ОЖЦ) с приложениями к ДУ вида (1.1). В определении жордановых цепочек будет исследован более общий случай линейной оператор-функции по параметру $\lambda$, принадлежащему $k$-мерному линейному пространству, отличному от $E_1$:

$$A(\lambda) = A_0 + DA(0)\lambda : E_1 \to E_2, \lambda \in \Lambda, \dim \Lambda = k, \tag{1.2}$$

Полиномиальные оператор-функции $A(\lambda)$ рассматриваются с помощью процесса линеаризации. В примерах разделов 2 и 3 иногда $\Lambda = E_1$. Часть полученных результатов была доложена на 9-м Международном Конгрессе ISAAC в Кракове в августе 2013 г. [21] и на Международной Конференции DIFF-2014 в Суздале, август 2014 г. [9].

Уравнение вида (1.1) возникает при математическом моделировании динамики и устойчивости деформируемых элементов конструкций при их трансзвуковом обтекании потоком газа [24].

Данная работа выполнена в рамках государственного задания № 2014/232 Минобрнауки России, тема НИР: «Разработка математических методов исследования динамики и устойчивости деформируемых элементов конструкций, установок, приборов, устройств при аэрогидродинамическом, тепловом и ударных воздействиях».

## 2. Жордановы цепочки многопараметрической оператор-функции

Пусть оператор $A(\lambda)$ линеен по $\lambda$, т. е. $A(\lambda) = A_0 + DA(0)\lambda$, где $DA(0)$ отображает некоторую окрестность $\lambda = 0$ в пространство квадратных матриц порядка $n$. Излагаемые далее построения определяют жордановы цепочки оператор-функции (1.2) и сопряженной к ней. Исходным положением развиваемой далее теории является следующее

**Утверждение.** *Для того чтобы отображение* (1.2) *было необратимым в некоторой окрестности точки* $\lambda = 0$, *необходимо и достаточно существование функции* $h(\lambda) : U(0) \to E_1$, *определенной в некоторой окрестности* $\lambda = 0$ *или на некотором ее подмногообразии, такой, что* $[A_0 + DA(0)]h(\lambda) = 0$.

Считая функцию $h(\lambda)$ достаточно гладкой, разложим ее в ряд Тейлора $h(\lambda) = \varphi + Dh(0)\lambda + D^2h(0)\lambda^2 + \ldots + D^sh(0)\lambda^s + \ldots$. Здесь $D^sh(0)$ — $s$-линейный, симметричный оператор или линейный оператор, действующий из $\Lambda \otimes \ldots \otimes \Lambda = \underset{s}{\otimes}\Lambda$ в $E_1$. Получаем разложение

$$0 = A_0\varphi + [A_0Dh(0)\lambda + (DA(0)\lambda)(\varphi)] + \ldots + \left[A_0D^sh(0)\lambda^s + (DA(0))\,\lambda\left(D^{s-1}h(0)\lambda^{s-1}\right)\right] + \ldots$$

Здесь $DA(0)$ можно рассматривать как билинейный оператор от двух переменных и так как его вторая переменная имеет постоянное значение $\varphi$, он представляет собой некоторый известный оператор $B_1$, действующий на $\lambda$, т. е. $A_0Dh(0)\lambda + (DA(0)\lambda)(\varphi) = [A_0Dh(0) + B_1]\lambda$. Таким образом, так как $Dh(0) \in L\{\Lambda \to E_1\}$, оператор $A_0$ порождает оператор $B_1 : L\{\Lambda \to E_1\} \to L\{\Lambda \to E_2\}$ согласно правилу: если $S \in L\{\Lambda \to E_1\}$, то $B_1S = -A_0S$. Для того чтобы $S \in \operatorname{Ker} B_1$, необходимо и достаточно, чтобы $\operatorname{Im} S = \{\varphi\}$ и так как $\dim \Lambda = k$, то существует ровно $k$ линейно независимых операторов $S$ таких, что $\operatorname{Im} S = \{\varphi\}$, т. е. $\dim \operatorname{Ker} B_1 = k$.

Пусть векторы $\xi_1, \ldots, \xi_k$ (соответственно $\xi_1^*, \ldots, \xi_k^*$) образуют базис пространства $\Lambda$ (биортогональный ему базис $\Lambda^*$). Тогда, поскольку $L\{\Lambda \to E_1\}$ изоморфно пространству $\Lambda^* \otimes E_1$: $L\{\Lambda \to E_1\} \approx \Lambda^* \otimes E_1$, базис $\operatorname{Ker} B_1$ составляют операторы $\Phi_i = \xi_i^* \otimes \varphi$,такие что $B\Phi_i = -A_0\Phi_i = -\xi_i^* \otimes A_0\varphi = 0$ или $\Phi_i\xi_s = \delta_{is}\varphi$. Из равенства $\dim L\{\Lambda \to E_1\} = \dim L\{\Lambda \to E_2\}$ следует, что $\dim \operatorname{coKer} B_1 = \dim N(B_1^*) = k$, и так как $L\{\Lambda \to E_1\} \approx \Lambda^* \otimes E_1$, то $L\{\Lambda \to E_2\}^* \approx \Lambda \otimes E_2^*$ и операторы $\Psi_i = \xi_i \otimes \psi$ в пространстве $L\{\Lambda \to E_2\}^*$ образуют базис $\operatorname{Ker} B_1^*$.

Таким образом, для разрешимости уравнения $A_0Dh(0) = -B_1$ необходимо и достаточно выполнение равенства $\langle\langle B_1S, \Psi_i\rangle\rangle = -\langle\langle A_0S, \Psi_i\rangle\rangle = -\sum\limits_{j_i=1}^{s} a_{j_1}\langle\langle \xi_{j_1}^* \otimes A_0e_j, \xi_i \otimes \psi\rangle\rangle = 0$. Здесь $\{e_j\}$ (соответственно $\{u_j\}$) — базис в $E_1(E_2)$ и действие функционалов из пространств $\Lambda^*$, $E_1^*$ и $E_2^*$ на элементах пространств $\Lambda$, $E_1$ и $E_2$ обозначено $\langle\cdot,\cdot\rangle$, а через $\langle\langle\cdot,\cdot\rangle\rangle$ — действие функционалов из пространств $L\{\underset{s}{\otimes}\Lambda \to E_1\}^*$ и $L\{\underset{s}{\otimes}\Lambda \to E_2\}^*$ на элементы пространств $L\{\underset{s}{\otimes}\Lambda \to E_1\}$ и $L\{\underset{s}{\otimes}\Lambda \to E_2\}$. Оператор $Dh(0)$ определяется с точностью до линейной комбинации операторов $\Phi_i$.

Предположим теперь по индукции, что оператор $D^{s-1}h(0)$ определен, и рассмотрим уравнение

$$A_0D^sh(0)\lambda^s + (DA(0)\lambda)(D^{s-1}h(0)\lambda^{s-1}) = [A_0D^sh(0) + B_s]\lambda^s = 0. \tag{2.1}$$

Оператор $A_0$ порождает оператор $B_s$, действующий из пространства $L\{\underset{s}{\otimes}\Lambda \to E_1\}$ в пространство $L\{\underset{s}{\otimes}\Lambda \to E_2\}$ по правилу: если $S \in \{\underset{s}{\otimes}\Lambda \to E_1\}$, то $B_sS = -A_0S$. Так как пространство $L\{\underset{s}{\otimes}\Lambda \to E_1\} \approx \underset{s}{\otimes}\Lambda^* \otimes E_1$ (представляется его элементами), то $\dim \operatorname{Ker} B_s = k^s$ и базис в $\operatorname{Ker} B_s$ составляют операторы $\Phi_{i_1\ldots i_s} = \{\xi_{i_1}^* \otimes \ldots \otimes \xi_{i_s}^* \otimes \varphi\}, i_1, \ldots, i_s = \overline{1,k}$, $B_s\Phi_{i_1\ldots i_s} = -A_0\Phi_{i_1\ldots i_s} = -\xi_{i_1}^* \otimes \ldots \otimes \xi_{i_s}^* \otimes A_0\varphi$. Аналогично определяется базис в $\operatorname{coKer} B_s \subset [L\{\underset{s}{\otimes}\Lambda \longrightarrow E_2\}]^* \approx \underset{s}{\otimes}\Lambda \otimes E_2^*$ как линейно независимые элементы $\Psi_{j_1\ldots j_s} = \xi_{j_1} \otimes \ldots \otimes \xi_{j_s} \otimes \psi$, $j_1, j_2, \ldots, j_s = \overline{1,k}$ и $\dim \operatorname{coKer} B_s = k^s$. Действительно, так как $S \in L\{\underset{s}{\otimes}\Lambda \to E_1\} \approx \underset{s}{\otimes}\Lambda^* \otimes E_1$, то оператор $S$ представляется в виде

$S = \sum a_{j_1\dots j_s} \overset{s}{\underset{k=1}{\otimes}} \xi^*_{j_k} \otimes e_j$ и поэтому $B_sS = -\sum a_{j_1\dots j_s} \overset{s}{\underset{k=1}{\otimes}} \xi^*_{j_k} \otimes A_0e_j$. Поскольку $\langle\langle B_sS, \Psi_{i_1\dots i_s}\rangle\rangle = -\sum a_{j_1\dots j_s} \left\langle \overset{s}{\underset{k=1}{\otimes}} \xi^*_{j_k} \otimes A_0e_j,\ \overset{s}{\underset{i=1}{\otimes}} \xi_i \otimes \psi \right\rangle = -\sum a_{j_1\dots j_s}\langle \xi^*_{j_1}, \xi_{j_1}\rangle \dots \langle A_0e_j, \psi\rangle = 0$, то $\Psi_{j_1\dots j_s}$ образуют базис $\operatorname{coKer} B_s$. Таким образом, для разрешимости уравнения (2.1) необходимо и достаточно выполнение условий

$$\langle\langle B_s, \Psi_{i_1\dots i_s}\rangle\rangle = 0, \qquad i_1, \dots, i_s = \overline{1, k}. \tag{2.2}$$

**Определение 2.1.** Элементы $\varphi, Dh(0), D^2h(0), \dots, D^ph(0)$, до тех пор пока они определяются, образуют *жорданову цепочку* (ЖЦ) элемента $\varphi$ оператор-функции $A_0 + DA(0)\lambda$.

**Лемма 2.1.** *Для того чтобы оператор-функция $A_0 + DA(0)\lambda$ была необратима всюду в окрестности точки $\lambda = 0$, необходимо и достаточно существование жордановой цепочки бесконечной длины.*

*Доказательство. Достаточность*. Пусть существует цепочка бесконечной длины. Для упрощения рассуждений введем на каждом шаге регуляризаторы Шмидта [2]. Тогда в принятых в [2] обозначениях оператор $\widetilde{A}_0 = A_0 + \langle\cdot, e^*_1\rangle\, u_1$, где $\{e^*_j\}_1^n$ — биортогональная система к $\{e_i\}_1^n, e_1 = \varphi$ и $u_1$ — базисный элемент дополнения к $\operatorname{Im} A(0)$ в $E_2$, непрерывно обратим и $\widetilde{A}_0^{-1} = \Gamma$. Аналогично $\widetilde{B}_1 = B_1 + \sum\limits_{i=1}^{k} \langle\cdot,\, \xi_i \otimes e^*_1\rangle \xi^*_i \otimes u_1$ и $\widetilde{B}_1^{-1} = \Gamma_1$. Для $L\{\Lambda \to E_1\} \ni S = \sum\limits_m a_{lm}\xi^*_m \otimes e_l$ имеем $\widetilde{B}_1S = B_1S + \sum\limits_{i=1}^{k} \langle \sum\limits_m a_{lm}\xi^*_m \otimes e_l,\, \xi_i \otimes e^*_1\rangle \xi^*_i \otimes u_1 = B_1S + \sum\limits_{i=1}^{k} a_{1i}\xi^*_i \otimes u_1$, и так как $\langle S\lambda,\, e^*_1\rangle = \langle \sum\limits_m a_{l,m}\lambda_m e_l,\, e^*_1\rangle = \sum\limits_m a_{1m}\lambda_m = \sum\limits_m a_{1m}\xi^*_m(\lambda)$ то $\widetilde{B}_1S = A_0S + \langle S\cdot,\, e^*_1\rangle u_1 = \widetilde{A}_0S$. Отсюда следует соотношение $\Gamma_1T = \Gamma T$ для $T \in L\{\Lambda_1 \to E_2\}$, для доказательства которого достаточно положить $S = \Gamma T : \widetilde{B}_1\Gamma T = \widetilde{A}_0\Gamma T = T$ или, обращая оператор $\widetilde{B}_1 \Rightarrow \Gamma T = \Gamma_1 T$. Аналогично доказывается, что если $B_s : L\{\underset{s}{\otimes}\Lambda \to E_1\} \to L\{\underset{s}{\otimes}\Lambda \to E_2\}$, то $\widetilde{B}_sS = \widetilde{A}_0S$ для $S \in L\{\underset{s}{\otimes}\Lambda \to E_1\}$. Действительно, $\widetilde{B_s}S = B_sS + \sum\langle S,\, \xi_{j_1} \otimes \dots \otimes \xi_{j_s} \otimes e^*_1\rangle \xi^*_{j_1} \otimes \dots \otimes \xi^*_{j_s} \otimes u_1$ при $S = \sum a_{i_1\dots i_s,i}\xi^*_{i_1} \otimes \dots \otimes \xi^*_{i_s} \otimes e_i$ дает $\Rightarrow \widetilde{B}_sS = A_sS + \sum\langle \sum\langle a_{i_1\dots i_s,i}\xi^*_{i_1} \otimes \dots \otimes \xi^*_{i_s} \otimes e_i,\, \xi_{i_1} \otimes \dots \otimes \xi_{i_s} \otimes e^*_1\rangle \xi^*_{i_1} \otimes \dots \otimes \xi^*_{i_s} \otimes u_1\rangle = A_0S + \sum a_{i_1\dots i_s} \overset{s}{\underset{k=1}{\otimes}} \xi^*_{i_k} \otimes u_1 = A_0S + \langle S\cdot,\, e^*_1\rangle u_1 = \widetilde{A}_0S$, так как $\langle S\lambda,\, e^*_1\rangle = \langle \sum a_{i_1\dots i_s,i}\lambda_{i_1}\dots\lambda_{i_s}e_i,\, e^*_1\rangle = \sum a_{i_1\dots i_s,1}\lambda_{i_1}\dots\lambda_{i_s} = \sum a_{i_1\dots i_s,1}e^*_{i_1}(\lambda) \otimes \dots \otimes e^*_{i_s}(\lambda)$. Если теперь $\Gamma_k = (\widetilde{B}_k)^{-1}$,то полагая $S = \Gamma T$, как и выше, находим $\widetilde{B}_s\Gamma T = \widetilde{A_0}\Gamma T = T$ или, обращая $\widetilde{B}_s$, $\Gamma T = \Gamma_k T, k = 1, 2, \dots s, \dots$, откуда следуют неравенства $\|\Gamma_k\| \leqslant \|\Gamma\|\ \forall k$.

Аналогичным образом свяжем с билинейным оператором $DA(0)\lambda = R(\cdot, \lambda) \in L\{E_1 \to E_2\}$ оператор $D_s$, действующий из $L\{\underset{s-1}{\otimes}\Lambda \to E_1\}$ в $L\{\underset{s-1}{\otimes}\Lambda \to E_1\}$ по правилу $D_sS\lambda = R(S\lambda, \lambda)$, для $S \in L\{\underset{s}{\otimes}\Lambda \to E_1\}$, отметив, что $D_0 : E_1 \to L\{\Lambda \to E_2\}$. При этом, очевидно, $\|D_s\| \leqslant \|R\|,\ \forall s$. Используя введенные обозначения, приходим к следующим формулам для элементов жордановой цепочки:

$$J^s = (\Gamma_s D_{s-1}) \dots (\Gamma_1 D_0)\,\varphi, \quad s = 1, 2, \dots,\ J^1 = \varphi. \tag{2.3}$$

Оценка $\|J^s\| \leqslant (\|R\|\|\Gamma\|)^s\|\varphi\|$ дает сходимость ряда $h(\lambda)$ в некоторой окрестности $\lambda = 0$, в которой оператор-функция $A_0 + DA(0)\lambda$ не будет обратима.

*Необходимость*. Пусть в некоторой окрестности $\lambda = 0$ оператор-функция $A(\lambda)$ необратима, т. е. существует функция $X(\lambda) : D_\varepsilon(0) \to E_1$, такая что

$$A(\lambda)X(\lambda) = 0, \quad X(\lambda) \neq 0, \tag{2.4}$$

где можно считать $\|X(\lambda)\| = 1$ в силу линейности уравнения (2.4), или $A_0X(\lambda) + R(X(\lambda), \lambda) = 0$. Вводя регуляризатор Шмидта и учитывая, что $\Gamma u_1 = e_1$, получаем цепочку импликаций $\widetilde{A}_0X(\lambda) + R(X(\lambda), \lambda) = \langle X(\lambda), e^*_1\rangle u_1 \Rightarrow [I + \Gamma R(\cdot,\, \lambda)]\, X(\lambda) = \langle X(\lambda),\, e^*_1\rangle\, e_1 \Rightarrow X(\lambda) = \langle X(\lambda),\, e^*_1\rangle\, (I + \Gamma R(\cdot,\, \lambda))^{-1}\, e_1$, или, применяя к обеим частям последнего равенства функционал $e^*_1$ и учитывая, что $\langle X(\lambda),\, e^*_1\rangle \neq 0$, приходим к соотношениям $1 = \langle [I + \Gamma R(\cdot, \lambda)]^{-1}e_1,\, e^*_1\rangle \Rightarrow$

$\langle \Gamma R(\cdot,\lambda)[I+\Gamma R(\cdot,\lambda)]^{-1}e_1, e_1^*\rangle = 0$ для любого достаточно малого $\lambda$. Поскольку $\Gamma^* e_1^* = u_1^*$, отсюда следует

$$\begin{gathered}\langle R(e_1,\lambda), u_1^*\rangle = 0, \quad \langle R(\Gamma R(e_1,\lambda),\lambda), u_1^*\rangle = 0,\\ \ldots, \quad \langle R(\ldots(\Gamma R(e_1,\lambda)),\lambda), u_1^*\rangle = 0, \ldots\end{gathered} \tag{2.5}$$

Из первого соотношения (2.5) следует, что оператор $D_0\varphi = R(e_1,\cdot)$ ортогонален операторам $\Psi_i = \xi_i \otimes u_1^*, i=\overline{1,k}$, так как согласно (2.5) $R(e_1,\cdot) = \sum r_{\sigma\rho}\xi_\sigma^* \otimes u_\rho$, $\rho > 1$. Это означает существование элемента $J^1$ цепочки (2.3). Аналогично условие $\langle R(\ldots(\Gamma R(e_1,\lambda)),\lambda), u_1^*\rangle = 0$ означает, что полилинейная функция $R(\ldots(\Gamma R(e_1,\lambda)),\lambda)$ имеет вид $\sum r_{\sigma_1,\ldots,\sigma_s,\rho}\xi_{\sigma_1}^* \otimes \ldots \otimes \xi_{\sigma_s}^* \otimes u_\rho$, $\rho > 1$ и поэтому ортогональна всем $\Psi_{\sigma_1,\ldots,\sigma_s,1} = \xi_{\sigma_1}\otimes\ldots\otimes\xi_{\sigma_s}\otimes u_1$. Таким образом, выполняются условия существования любого элемента цепочки (2.3). □

**Лемма 2.2.** *Если $\lambda = 0$ является простым собственным значением оператор-функции* (1.2), *т. е. ЖЦ состоит только из первого элемента $\varphi = J^1$, то в малой окрестности нуля она обратима всюду за исключением некоторой гиперповерхности, проходящей через ноль.*

*Доказательство.* Требуется найти, для каких $\lambda$ существует решение уравнения (2.4), которое, как и выше, переписывается в виде $\widetilde{A_0}X(\lambda) + R(X(\lambda),\lambda) = \langle X(\lambda), e_1^*\rangle u_1 \Rightarrow \ldots \Rightarrow \langle (I+\Gamma R(,\lambda))^{-1}e_1, e_1^*\rangle = 1$. Однако по условию леммы нарушается уже первое равенство (2.5), т. е. $\langle\langle R(e_1,\cdot),\Psi_i\rangle\rangle \neq 0$, или одно из чисел $\langle R(e_1,\xi_i), u_1^*\rangle \neq 0$. Согласно теореме о неявной функции отличные от нуля решения (2.4) существуют только на гиперповерхности $\lambda_i = F(\lambda_1,\ldots,\lambda_{i-1},\lambda_{i+1},\ldots,\lambda_k)$. □

Далее рассматривается оператор-функция $A_0^* x + R^*(x,\lambda)$, где $R^*(x,\lambda)$ — сопряженная к $R(\lambda)$ матрица с учетом действия $R(y,\lambda) = R(\lambda)y$.

**Лемма 2.3.** *Если оператор-функция $A(\lambda) = A_0 + R(\cdot,\lambda)$ имеет в нуле простое собственное значение, то и оператор-функция $A^*(\lambda) = A_0^* + R^*(\cdot,\lambda)$ также имеет ноль простым собственным значением. Она необратима на той же самой гиперповерхности, что и $A(\lambda)$. Ноль-элемент $A^*(\lambda)$ определяется формулой $\Psi(\lambda) = (I+\Gamma^* R^*(\cdot,\lambda))^{-1}u_1^*$.*

*Доказательство.* Если оператор-функция $A(\lambda) = A_0 + R(\cdot,\lambda)$ имеет в нуле простое собственное значение, то $\langle\langle R(e_1,\cdot),\Psi_i\rangle\rangle \neq 0$ для некоторого $\Psi_i = \xi_i\otimes\psi$, для чего необходимо и достаточно существование элемента $\xi_i$ такого, что $\langle R(\xi_i)e_1,\psi\rangle \neq 0$. Действительно, если $R(e_1,\lambda) \in L\{\Lambda \to E_2\}$, то для некоторого $i$ $r_{i1} \neq 0$, откуда следует $R(\xi_i)e_1 = r_{i1}u_1$ и потому $R(e_1,\lambda) = \sum r_{s\sigma}\xi_s^*\otimes u_\sigma$. Если $\langle\langle R(e_1,\cdot),\Psi_i\rangle\rangle \neq 0$, то $r_{i1}\neq 0$ и $R(\xi_i)e_1 = r_{i1}u_1$, поэтому $\langle R(\xi_i)e_1,\psi\rangle \neq 0$. Обратно, если $\langle\langle R(e_1,\cdot),\Psi_i\rangle\rangle = 0$ для каждого $\Psi_i$, то $r_{i1} = 0$, для каждого $i$ и поэтому $\langle R(\xi_i)e_1,\psi\rangle = 0$ для всех $i$.

Аналогичным образом справедливо утверждение: $\langle\langle \Phi_i, R^*(u_1^*,\cdot)\rangle\rangle \neq 0$ тогда и только тогда, когда существует элемент $\xi_i$ такой, что $\langle e_1, R^*(\xi_1)\psi\rangle \neq 0$. Так как $\langle R(\xi_i)e_1,\psi\rangle = \langle e_1, R^*(\xi_i)\psi\rangle$, то из того, что оператор-функция $A(\lambda) = A_0 + R(\cdot,\lambda)$ имеет простым собственным значением $\lambda = 0$, следует, что сопряженная оператор-функция $A^*(\lambda) = A_0^* + R^*(\cdot,\lambda)$ также имеет $\lambda = 0$ простым собственным значением.

Так как определители матриц $A(\lambda)$ и $A^*(\lambda)$ совпадают, то и многообразие вырождения для этих оператор-функций одно и то же. Ноль-элемент оператор-функции $A_0^* + R^*(\cdot,\lambda)$ определяется так же, как это было сделано в лемме 2.2 для $A_0 + R(\cdot,\lambda)$. □

**Лемма 2.4.** *Если оператор-функция $A(\lambda) = A_0 + R(\cdot,\lambda)$ имеет ОЖЦ длины $p$, т. е. $J^1 = \varphi, J^2(\lambda),\ldots,J^p(\lambda,\lambda,\ldots\lambda)$, то оператор-функция $A^*(\lambda) = A_0^* + R^*(\cdot,\lambda)$ также имеет ОЖЦ длины $p$: $\mathcal{J}^1 = \psi, \mathcal{J}^2(\lambda),\ldots,\mathcal{J}^p(\lambda,\ldots,\lambda)$. Здесь $\mathcal{J}^s(\lambda,\ldots,\lambda) \in L\{\underset{s-1}{\otimes}\Lambda \to E_2^*\} \approx \underset{s-1}{\otimes}\Lambda^* \otimes E_2^*$. При этом образы элементов жордановых цепочек при одном и том же значении параметра $\lambda$ удовлетворяют следующим условиям ортогональности: для любых значений $\lambda$, если $s < k, k, s = \overline{1,p}$,*

$$\langle R(J^{p-k}(\lambda,\ldots\lambda),\lambda), \mathcal{J}^s(\lambda,\ldots\lambda)\rangle = 0, \tag{2.6}$$

*и если $k = s$, то найдутся такие значения $\lambda$, для которых*

$$\langle R(J^{p-s}(\lambda,\ldots\lambda),\lambda), \mathcal{J}^s(\lambda,\ldots\lambda)\rangle \neq 0. \tag{2.7}$$

*Доказательство.* Запишем оператор-функцию $A(\lambda) = A_0 + R(\cdot, \lambda)$ в виде $A(\lambda)x = [A_0 + Q(\lambda)]x$. Тогда сопряженная оператор-функция примет вид $A^*(\lambda)w = [A_0^* + Q^*(\lambda)]w$. В этих обозначениях формула для элементов ОЖЦ $J^{s+1} = (\Gamma_s D_{s-1}) \dots (\Gamma_1 D_0)\varphi$ может быть записана в виде суперпозиции $s$ операторов $\Gamma Q(\lambda)$: $J^{s+1} = (\Gamma Q(\lambda) \dots (\Gamma Q(\lambda))\varphi$. Покажем, что ОЖЦ сопряженной оператор-функции, отвечающая элементу $\psi$, также имеет длину $p$ и ее элементы выражаются аналогичным образом. Действительно, так как при $p > 1$ $\langle \varphi, Q^*(\lambda)\psi \rangle = \langle Q(\lambda)\varphi, \psi \rangle = 0$, то элемент $\mathcal{J}^{(2)}(\lambda)$ существует и определяется уравнением $A_0 \mathcal{J}^1(\lambda) = Q^*(\lambda)\psi$. Если ввести регуляризатор Шмидта для $A_0^*$ по формуле $\widetilde{A_0}^* = A_0^* + \langle u_1, \cdot \rangle e_1^*$, то он совпадет с $(\widetilde{A_0})^*$, и поэтому обратный к нему равен $\Gamma^*$. Таким образом, элемент $\mathcal{J}^{(2)}$ можно определить по формуле $\mathcal{J}^{(2)}(\lambda) = \Gamma^* Q^*(\lambda)\psi$. Предположим по индукции, что для $s < p-1$ элемент $\mathcal{J}^{(s)}(\lambda, \dots, \lambda)$ существует и определяется суперпозицией $s-1$ операторов $\Gamma^* Q^*(\lambda)$ по формуле $\mathcal{J}^{(s)}(\lambda, \dots, \lambda) = \Gamma^*(Q^*(\lambda)) \dots (\Gamma^*(Q^*(\lambda)))\psi$. Покажем, что следующий элемент ОЖЦ также существует и выражается аналогично. Действительно, для любого $\lambda$ функция $\mathcal{J}^{(s)}(\lambda, \dots, \lambda)$ удовлетворяет соотношению

$$\langle \varphi, Q^*(\lambda)\mathcal{J}^{(s)}(\lambda, \dots, \lambda) \rangle = \langle \varphi, Q^*(\lambda)(\Gamma^* Q^*(\lambda) \dots (\Gamma^*(Q^*(\lambda))))\psi \rangle = \\ = \langle Q(\lambda) J^{(p-k+s)}(\lambda, \dots, \lambda), \psi \rangle = \langle Q(\lambda)\mathcal{J}^s(\lambda, \dots, \lambda), \psi \rangle = 0.$$

Это означает, что выполняются равенства $\langle \langle \Phi_{i_1 \dots i_s}, Q^*(\lambda)\mathcal{J}^{(s)}(\lambda, \dots, \lambda) \rangle \rangle = 0$, т. е. уравнение $A_0^* \mathcal{J}^{(s+1)}(\lambda, \dots, \lambda) = Q^*(\lambda)\mathcal{J}^{(s)}(\lambda, \dots, \lambda)$ разрешимо и $\mathcal{J}^{(s+1)}(\lambda, \dots, \lambda)$ представляется $s+1$ суперпозицией операторов $\Gamma^*(Q^*(\lambda))$. Теперь ясно, что при $s < k$ и любом $\lambda$

$$\langle R(J^{(p-k)}(\lambda, \dots, \lambda), \lambda), \mathcal{J}^{(s)}(\lambda, \dots, \lambda) \rangle = \\ = \langle Q(\lambda)(\Gamma Q(\lambda)) \dots (\Gamma Q(\lambda))\varphi, (\Gamma^* Q^*(\lambda)) \dots (\Gamma^*(Q^*(\lambda)))\psi \rangle = \langle Q(\lambda) J^{(p-k+s)}(\lambda, \dots, \lambda), \psi \rangle = 0,$$

так как в левой части внутреннего произведения $p-k$ суперпозиций, а в правой $s$ и $p-k+s < p-1$. Если же $k = s$, то $\langle R(J^{(p-s)}(\lambda, \dots, \lambda), \lambda), \mathcal{J}^{(s)}(\lambda, \dots, \lambda) \rangle = \langle Q(\lambda) J^{(p)}(\lambda, \dots, \lambda), \psi \rangle$. Последнее выражение не обращается в ноль хотя бы для некоторых $\lambda$, поскольку длина ОЖЦ равна $p$. □

**Замечание 2.1.** Формулы (2.6) и (2.7) согласуются с соотношениями биортогональности триканонических жордановых наборов оператор-функций одного спектрального параметра, установленными в [7, 12] и неоднократно использовавшимися во многих последующих наших работах, например, [19, 20].

## 3. Жордановы цепочки по направлениям

Для каждой точки $0 \neq \lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_k) \in \Lambda$ сферы $\|e_\lambda\| = 1$, $e_\lambda = \dfrac{\lambda}{\|\lambda\|}$ — единичный вектор в направлении $\lambda$. Сужение оператор-функции $A(\cdot, \lambda) = A_0 + R(\cdot, \lambda)$ на прямую $\lambda = \varepsilon e_\lambda$ зависит только от одномерного параметра $\varepsilon$: $A_\lambda(x, \varepsilon) = [A_0 + \varepsilon R(\cdot, e_\lambda)]x$. В предположении $R(\cdot, e_\lambda) \neq 0$ определяются жордановы цепочки оператор-функции $A(x, \lambda)$ вдоль направления $\lambda$. Длина цепочки по направлению $\lambda$ обозначается $p(\lambda) = p(e_\lambda)$.

**Лемма 3.1.** *Пусть $p$ — длина ОЖЦ многопараметрической оператор-функции $A(x, \lambda)$. Тогда для любого направления $\lambda$ выполнено $p \leqslant p(\lambda)$ и для почти всех направлений $\lambda$ за исключением алгебраического множества выполнено $p = p(\lambda)$.*

*Доказательство.* Элементы ЖЦ в направлении $\lambda$ определяются формулой

$$\varphi^{(s+1)}(\lambda) = \Gamma R(\dots(\Gamma R(\varphi, \lambda), \lambda)) \qquad (s \text{ суперпозиций}). \tag{3.1}$$

Если $s \leqslant p$, где $p$ — длина ОЖЦ оператор-функции $A_0 + R(\cdot, \lambda)$, то $\langle R(\dots(\Gamma R(\varphi, \lambda), \lambda)), \psi \rangle = 0$, иначе не будут выполняться формулы типа (2.2). Поэтому при $s \leqslant p$ все элементы ЖЦ по направлению $e_\lambda$ определены. Направления $\lambda^0$, для которых длина ЖЦ превышает $p$, определяются уравнением

$$\langle R(\dots(\Gamma R(\varphi, \lambda^0), \dots, \lambda^0)), \psi \rangle = 0 \qquad (p+1 \text{ суперпозиция}).$$

□

**Определение 3.1.** Направление $\lambda^0$, вдоль которого $p(\lambda^0) > p$ называется *особым*, все остальные — *неособые*. Особое направление $e_\lambda$, вдоль которого оператор-функция $A_0 + \varepsilon R(\cdot, \lambda^0)$ необратима, называется *вырожденным*.

**Замечание 3.1.** Пусть $p < \infty$. Согласно [2, теорема 30.1] на множестве всех неособых направлений $e_\lambda$ оператор-функция $A_0 + R(\cdot, \lambda^0)$ обратима в шаре $0 < |\epsilon| < \rho(e_\lambda)$ для некоторого $\rho(e_\lambda)$.

**Замечание 3.2.** Следующий пример показывает, что $\rho(\lambda)$ нельзя выбрать не зависящим от $\lambda$:

$$A(\lambda)x = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \lambda_1 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \ \det A(\lambda) = \lambda_1 - \lambda_1^2 - \lambda_2^2,$$

$A(\lambda)$ необратима на кривой $\left(\lambda_1 - \dfrac{1}{2}\right)^2 + \lambda_2 = \dfrac{1}{4}$. Здесь любое направление $e_\lambda \neq (0,1)$, кроме вертикального, является неособым, и $\rho(e_\lambda)$ равно расстоянию от нуля до точки пересечения $e_\lambda$ с кривой $\lambda_1 - \lambda_1^2 - \lambda_2^2 = 0$. Очевидно, что $\rho(e_\lambda) \to 0$ при $e_\lambda \to (0,1)$. Вдоль особого направления $(0,1)$ $A(\lambda)$ обратима везде, кроме $\lambda = 0$.

**Замечание 3.3.** Если вдоль некоторого направления $e_\lambda$ оператор-функция $A(\lambda)$ имеет максимальную ОЖЦ, то вдоль этого направления она обратима всюду, кроме $\lambda = 0$. Это следует из того факта, что в паре базисов $\{\varphi^{(1)}, \varphi^{(2)}, \dots, \varphi^{(n)}\}$ и $\{R(\varphi^{(1)}, \lambda^0), R(\varphi^{(2)}, \lambda^0), \dots, R(\varphi^{(n)}, \lambda^0)\}$ матрица оператор-функции $A(\lambda)$ вдоль направления $e_\lambda$ имеет вид:

$$\begin{pmatrix} -\varepsilon & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -\varepsilon & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -\varepsilon \end{pmatrix}.$$

**Следствие.** *Длина ОЖЦ либо равна бесконечности, либо не превышает размерности пространства.*

**Лемма 3.2.** *Если у оператор-функции $A(\lambda) = A_0 + R(\cdot, \lambda)$ длина жордановой цепочки равна $p$, то для любого достаточно малого значения $\lambda \neq 0$ такого, что направление $\lambda^0 = \dfrac{\lambda}{\|\lambda\|}$ не вырождено, образы элементов жордановой цепочки в точке $\lambda$ линейно независимы.*

*Доказательство.* Действительно, ОЖЦ оператор-функции $A(\lambda) = A_0 + R(\cdot, \lambda)$ определяются формулой

$$J^{s+1}(\lambda, \dots, \lambda) = \Gamma_s R(\dots, \Gamma R(\varphi, \lambda), \dots, \lambda),$$

тогда как цепочки по направлению $e_\lambda$ вычисляются согласно формуле (3.1) леммы 3.1

$$\varphi^{(s+1)}(e_\lambda) = \Gamma R(\dots, \Gamma R(\varphi, e_\lambda), \dots, e_\lambda).$$

Если направление $e_\lambda$ не вырождено, то элементы ОЖЦ линейно независимы. Но тогда и элементы $J^{s+1}(\lambda)$ также линейно независимы как отличающиеся от $\varphi^{(s+1)}(e_\lambda)$ лишь ненулевым скалярным множителем. □

**Замечание 3.4.** Следующий пример показывает, что если направление $e_\lambda$ вырождено, то образы элементов ОЖЦ в точке $\lambda$ могут быть линейно зависимы.

$$A(\lambda) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \lambda_1 \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{3.2}$$

Эта оператор-функция имеет жорданову цепочку, состоящую из двух элементов $J^1 = \varphi = (1,0,0)^T$ и $J^2(\lambda) = (0, \lambda_1, 0)^T$. Дальше эта цепочка не продолжается, так как $R(J^2(\lambda), \lambda) = (\lambda_1^2, \lambda_1\lambda_2, 0)^T$, и поэтому если $\Psi = \xi_1 \otimes \xi_2 \otimes \psi$, то $\langle\langle R(J^2(\lambda), \lambda), \Psi \rangle\rangle \neq 0$. При этом на прямой, соответствующей вырожденному направлению $(0,1)$ (или $(0,1,0)$), если считать, что $\dim \Lambda = 3$), образы элементов ОЖЦ линейно зависимы, так как на этой прямой $J^2(\lambda) = 0$.

**Лемма 3.3.** *Если $n \leqslant k$ и для оператор-функции $A(\lambda) = A_0 + R(\cdot, \lambda)$ длина ОЖЦ $p > 1$, то для нее всегда найдется направление $e_\lambda$, вдоль которого оператор-функция вырождена.*

*Доказательство.* Действительно, рассмотрим оператор-функции, соответствующие базисным направлениям $A_i(x) = A_0x + \varepsilon R(x, \xi_i)$. По условию длина ОЖЦ каждой из этих оператор-функций больше единицы, т. е. $\langle R(e_1, \xi_i), \Psi\rangle = 0$, и $k$ векторов $R(e_1, \xi_1), \ldots, R(e_1, \xi_k)$ принадлежат $(n-1)$-мерному пространству и поэтому линейно зависимы. Это означает, что существуют числа $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ такие, что $\lambda_1 R(e_1, \xi_1) + \ldots + \lambda_k R(e_1, \xi_k) = 0$ или $R(e_1, \lambda_1\xi_1 + \ldots + \lambda_k\xi_k) = 0$. Отсюда следует, что вдоль направления $\lambda^* = \lambda_1\xi_1 + \ldots + \lambda_k\xi_k$ оператор-функция $A_0 + R(\cdot, \lambda^*)$ вырождена. □

**Замечание 3.5.** В случае $n > k$ вырожденное направление может отсутствовать:

$$A(\lambda) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \lambda_1 \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

ОЖЦ этой оператор-функции состоит из двух элементов $(1, 0, 0)$ и $(0, \lambda_1, \lambda_2)$. Очевидно, что квадратичная вектор-функция $(\lambda_1^2 + \lambda_2^2, 0, 0)$ удовлетворяет одному из условий (2.2): $\lambda_1(\lambda_1^2 + \lambda_2^2) \neq 0$ или $\lambda_2(\lambda_1^2 + \lambda_2^2) \neq 0$. Вдоль направлений $(1, 0)$ и $(0, 1)$ $A(\lambda)$ не вырождается, так как $\det[A(\lambda_1, 0)] = -\lambda_1^2 \neq 0$ и $\det[A(0, \lambda_2)] = -\lambda_2^2 \neq 0$, а для «промежуточного» направления $(1, a)$ выполнено $\det[A(\varepsilon, \varepsilon a)] = -\varepsilon^2 - \varepsilon^2 a^2 \neq 0$, т. е. и здесь $A(\lambda)$ не вырождена.

**Замечание 3.6.** Однако для нелинейной оператор-функции (1.2) утверждение леммы 3.2 может не выполняться:

$$A(x, \lambda) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} - \lambda_2 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \lambda_1^2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}.$$

не имеет вырожденных направлений, поскольку $detA(\lambda) = \lambda_1^2 + \lambda_2^2 \neq 0$ при $\lambda \neq 0$.

**Замечание 3.7.** Если оператор-функция (1.2) имеет $\lambda = 0$ простым собственным значением, то она может иметь вырожденные направления:

$$A(x) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} - \lambda_1 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix},$$

$$R(e_1, \lambda) = \xi_1^* \otimes u_1 \Rightarrow \langle\langle R(e_1, \cdot), \Psi_1\rangle\rangle = \langle\langle R(e_1, \cdot), \xi_1 \otimes \psi\rangle\rangle = 1,$$

т. е. $p = 1$; при этом направление $(0, 1)$ вырождено.

## 4. Жордановы цепочки полиномиальных оператор-функций. Линеаризация

Пусть оператор-функция $A(\lambda)$ имеет вид

$$A(\lambda)x = A_0x - R_1(\lambda)x - R_2(\lambda, \lambda)x \ldots - R_m(\lambda, \ldots, \lambda)x, \tag{4.1}$$

где $R_s(\lambda, \ldots, \lambda)$ — $s$-линейная функция $\lambda$ со значениями в $L\{E_1 \to E_2\}$ или $R_s(\lambda, \ldots, \lambda)x \in L\{\Lambda \otimes \ldots \otimes \Lambda \otimes E_1 \to E_2\} \approx \Lambda^\star \otimes \ldots \otimes \Lambda^\star \otimes E_1^\star \otimes E_2$.

Рассмотрим элементы жордановой цепочки $J^1 = \varphi, J^2, \ldots, J^p$, где $J^s$ принадлежит пространству $L\{\overset{s}{\underset{j=1}{\otimes}} \Lambda \to E_1\}$. При $m > p$ они последовательно определяются формулами $J^2 = \Gamma_1 R_1(\lambda)J^1$, если уравнение $B_1J^2 = R_1(\lambda)J^1$ разрешимо; $J^3 = \Gamma_2(R_1(\lambda)J^2 + R_2(\lambda, \lambda)J^1)$, если уравнение $B_2J^3 = R_1(\lambda)J^2 + R_2(\lambda, \lambda)J^1$ разрешимо;........., $J^p = \Gamma_{p-1}(R_1(\lambda)J^{p-1} + R_2(\lambda, \lambda)J^{p-2} + \ldots + R_{p-1}(\lambda, \ldots, \lambda)J^1)$, если уравнение $B_{p-1}J^p = R_1(\lambda)J^{p-1} + R_2(\lambda, \lambda)J^{p-2} + \ldots + R_{p-1}(\lambda, \ldots, \lambda)J^1$ разрешимо. При $s > m$ цепочки определяются по формуле $J^s = \Gamma_s(R_1(\lambda)J^{s-1} + R_2(\lambda, \lambda)J^{s-2} + \ldots + R_m(\lambda, \ldots, \lambda)J^{s-m})$, если уравнение $B_sJ^s = R_1(\lambda)J^{s-1} + R_2(\lambda, \lambda)J^{s-2} + \ldots + R_m(\lambda, \ldots, \lambda)J^{s-m}$ разрешимо.

**Определение 4.1.** Пусть длина ОЖЦ равна $p$, т. е. уравнение

$$B_pJ^{p+1} = R_1(\lambda)J^p + R_2(\lambda, \lambda)J^{p-1} + \ldots + R_m(\lambda, \ldots, \lambda)J^{p-m+1}$$

неразрешимо, так как $\langle R_1(\lambda)J^p + R_2(\lambda, \lambda)J^{p-1} + \ldots + R_m(\lambda, \ldots, \lambda)J^{p-m+1}, \psi\rangle \neq 0$. Тогда выражение

$$\langle R_1(\lambda)J^p + R_2(\lambda, \lambda)J^{p-1} + \ldots + R_m(\lambda, \ldots, \lambda)J^{p-m+1}, \psi\rangle$$

назовем *хвостом* жордановой цепочки. Хвост жордановой цепочки является $p$-линейной формой. При $\dim \operatorname{Ker} A_0 = m$ существует $m$ хвостов по числу ЖЦ. $R$-образ элемента ЖЦ $J^{s-1}$ определяется выражением

$$\mathfrak{R}J^{s-1} = \begin{cases} R_1(\lambda)J^{s-1} + R_2(\lambda,\lambda)J^{s-2} + \ldots + R_m(\lambda,\ldots,\lambda)J^{s-m}, & \text{если } s > m; \\ R_1(\lambda)J^{s-1} + R_2(\lambda,\lambda)J^{s-2} + \ldots + R_{s-1}(\lambda,\ldots,\lambda)J^1, & \text{если } s \leqslant m. \end{cases}$$

Очевидно, что когда элемент ЖЦ $J^s$ существует при $s < p$, $J^s = \Gamma_s(\mathfrak{R}J^{s-1})$.

Для простоты изложения рассмотрим процесс линеаризации на примере квадратичной оператор-функции с двумерным пространством параметров, $\dim \Lambda = 2, \lambda = (\lambda_1, \lambda_2)$.

Пусть

$$A(\lambda)x = A_0x - R_1(\lambda)x - R_2(\lambda,\lambda)x = A_0x - (\lambda_1R_1^1 + \lambda_2R_2^1)x - (\lambda_1^2R_{11}^2 + \lambda_2^2R_{22}^2 + 2\lambda_1\lambda_2R_{12}^2)x. \quad (4.2)$$

Элементы жордановой цепочки этой оператор-функции определяются по формулам: $J^1 = \varphi, J^s = \Gamma((\lambda_1R_1^1 + \lambda_2R_2^1)J^{s-1} - (\lambda_1^2R_{11}^2 + \lambda_2^2R_{22}^2 + 2\lambda_1\lambda_2R_{12}^2)J^{s-2})$. Для линеаризованной оператор-функции $\alpha(\lambda) = \alpha_0 - \rho(\lambda)\chi$, $\alpha(\lambda) : E_1 \times E_1 \times E_1 \to E_2 \times E_1 \times E_1, \lambda \in \Lambda$

$$\alpha(\lambda) = \begin{pmatrix} A_0 & 0 & 0 \\ 0 & E & 0 \\ 0 & 0 & E \end{pmatrix} - \lambda_1 \begin{pmatrix} R_1^1 & R_{11}^2 & R_{12}^2 \\ E & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} - \lambda_2 \begin{pmatrix} R_2^1 & R_{12}^2 & R_{22}^2 \\ 0 & 0 & 0 \\ E & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \chi_1 \\ \chi_2 \\ \chi_2 \end{pmatrix}$$

Единственным нулем оператора $\alpha_0$ является $\Phi^{(1)} = (\varphi, 0, 0)$. Так как $\rho(\lambda)\Phi^{(1)} = ((\lambda_1R_1^1 + \lambda_2R_2^1)\varphi, \lambda_1\varphi, \lambda_2\varphi)$ и функционал $\Psi$ для оператора $\alpha_0$ имеет вид $(\psi, 0, 0)$, то в силу существования элемента $J^2$ уравнение $\alpha_0\Phi^{(2)} = \rho(\lambda)\Phi^{(1)}$ разрешимо и $\Phi^{(2)} = (J^2(\lambda), \lambda_1\varphi, \lambda_2\varphi)$.

**Лемма 4.1.** *Если $p$ — длина жордановой цепочки оператор-функции* (4.2)*, то длина жордановой цепочки ее линеаризации $\alpha_0\chi$ также равна $p$ и элементы ее жордановой цепочки имеют вид*:

$$\Phi^{(s)} = (J^s(\lambda), \lambda_1J^{s-1}, \lambda_2J^{s-1}). \quad (4.3)$$

*Доказательство.* (По индукции.) Начальный шаг индукции проверен. Предположим, что формула (4.3) справедлива и $s < p$. Тогда

$$\rho(\lambda)\Phi^{(s)} = ((\lambda_1R_1^1 + \lambda_2R_2^1)J^s(\lambda) + \lambda_1R_{11}^2(\lambda_1J^{s-1}(\lambda)) +$$
$$+ (\lambda_1R_{12}^2(\lambda_2J^{s-1}(\lambda)) + (\lambda_2R_{22}^2(\lambda_2J^{s-1}(\lambda)), \lambda_1J^s(\lambda), \lambda_2J^s(\lambda)) =$$
$$= ((\lambda_1R_1^1 + \lambda_2R_2^1)J^s(\lambda) + (\lambda_1^2R_{11}^2 + \lambda_2^2R_{22}^2 + 2\lambda_1\lambda_2R_{12}^2)J^{s-1}, \lambda_1J^s(\lambda), \lambda_2J^s(\lambda)),$$

отсюда следует тот же самый вид $s+1$ элемента ЖЦ. Для оператор-функции $A(\lambda)$ от двух параметров третьей степени $A(\lambda)x = A_0x - R_1(\lambda)x - R_2(\lambda,\lambda)x - R_3(\lambda,\lambda,\lambda)x$ вводится обозначение

$$R_3(\lambda,\lambda,\lambda)x = (\lambda_1^3R_{111}^3 + 2\lambda_1^2\lambda^2R_{112}^3 + 2\lambda_1\lambda_2^2R_{122}^3 + \lambda_3^2R_{222}^3)x,$$

поскольку

$$R_3(\lambda_1\xi_1 + \lambda_2\xi_2, \lambda_1\xi_1 + \lambda_2\xi_2, \lambda_1\xi_1 + \lambda_2\xi_2) = \lambda_1^3R_3(\xi_1,\xi_1,\xi_1) + \lambda_1^2\lambda_2(R_3(\xi_1,\xi_1,\xi_2) + R_3(\xi_1,\xi_2,\xi_1) +$$
$$+ R_3(\xi_2,\xi_1,\xi_1)) + \lambda_1\lambda_2^2(R_3(\xi_2,\xi_2,\xi_1) + R_3(\xi_2,\xi_1,\xi_2) + R_3(\xi_1,\xi_2,\xi_2)) + \lambda_1^3R_3(\xi_2,\xi_2,\xi_2),$$
$$2R_{112}^3 = R_3(\xi_1,\xi_1,\xi_2) + R_3(\xi_1,\xi_2,\xi_1) + R_3(\xi_2,\xi_1,\xi_1),$$
$$2R_{122}^3 = R_3(\xi_2,\xi_2,\xi_1) + R_3(\xi_2,\xi_1,\xi_2) + R_3(\xi_1,\xi_2,\xi_2).$$

В этих обозначениях линеаризация принимает вид: $\alpha(\lambda) = \alpha_0\chi - \rho(\lambda)\chi$, где $\alpha(\lambda) : E_1 \times E_1 \times E_1 \times E_1 \times E_1 \times E_1 \to E_2 \times E_1 \times E_1 \times E_1 \times E_1 \times E_1, \lambda \in \Lambda$. Матрицы линеаризации имеют тот же вид, как и в случае второй степени, только их размеры $6 \times 6$. Здесь

$$\rho_1 = \begin{pmatrix} R_1^1 & R_{11}^2 & R_{12}^2 & R_{111}^3 & R_{112}^3 & R_{122}^3 \\ E & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & E & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}5E & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\rho_2 = \begin{pmatrix} R_2^1 & R_{12}^2 & R_{22}^2 & R_{112}^3 & R_{122}^3 & R_{222}^3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ E & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}5E & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & E & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Жорданова цепочка линеаризованной оператор-функции записывается в виде шестикомпонентного вектора $\Phi^{(s)} = (J^s(\lambda), \lambda_1 J^{s-1}(\lambda), \lambda_2 J^{s-1}(\lambda), \lambda_1^2 J^{s-2}(\lambda), \lambda_1\lambda_2 J^{s-2}(\lambda), \lambda_2^2 J^{s-2}(\lambda))$.

Для построения линеаризации полиномиальной оператор-функции (4.1) степени $m$, как и прежде, вводятся обозначения:

$$R_m(\lambda, \lambda, \ldots, \lambda)x = (\lambda_1^m R_{1\ldots 11}^m + 2\lambda_1^{m-1}\lambda_2 R_{1\ldots 12}^m + \ldots + 2\lambda_1\lambda_2^{m-1} R_{12\ldots 2}^m + \lambda_2^m R_{2\ldots 22}^m)x.$$

Оператор-функция $\alpha(\lambda) = \alpha_0\chi - \rho(\lambda)\chi$ действует из пространства $E_1 \times E_1 \times \ldots \times E_1$ в пространство $E_2 \times E_1 \times \ldots \times E_1$ (в каждом произведении $m(m+1)/2$ сомножителей). Матрицы соответственно принимают вид:

$$\rho_1 = \begin{pmatrix} R_1^1 & R_{11}^2 & R_{12}^2 & \ldots & R_{1\ldots 1}^m & \ldots & R_{1\ldots 12}^m & R_{12\ldots 2}^m \\ E & 0 & 0 & \ldots & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & E & 0 & \ldots & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}5E & 0 & \ldots & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & E & \ldots & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0{,}5E & \ldots & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0{,}5E & \ldots & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \end{pmatrix},$$

$$\rho_2 = \begin{pmatrix} R_2^1 & R_{12}^2 & R_{22}^2 & \ldots & R_{1\ldots 12}^m & \ldots & R_{12\ldots 2}^m & R_{2\ldots 2}^m \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ E & 0 & 0 & \ldots & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}5E & 0 & \ldots & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & E & 0 & \ldots & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0{,}5E & \ldots & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0{,}5E & \ldots & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & E & \ldots & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \end{pmatrix}$$

с жордановыми цепочками линеаризованной оператор-функции при $s > m$

$$\Phi^{(s)} = (J^s(\lambda), \lambda_1 J^{s-1}(\lambda), \lambda_2 J^{s-1}(\lambda), \ldots, \\ \lambda_1^m J^{s-m}(\lambda), \lambda_1^{m-1}\lambda_2 J^{s-m}(\lambda), \ldots, \lambda_1\lambda_2^{m-1} J^{s-m}(\lambda), \lambda_2^m J^{s-m}(\lambda)).$$

Линеаризованная оператор-функция в случае $\dim \Lambda > 2$ строится аналогичным образом. □

**Замечание 4.1.** Если длина жордановой цепочки оператор-функции (4.1), равна 1, то в малой окрестности нуля оператор-функция (4.1) необратима на гиперповерхности, проходящей через ноль. Это аналог леммы 2.2, доказательство переносится без изменений.

**Определение 4.2.** Если оператор-функция $A(\lambda)$ обратима в проколотой окрестности точки $\lambda^0$, то эту точку будем называть *особой точкой* соответствующего вырожденного дифференциального уравнения.

**Лемма 4.2** (достаточное условие обратимости оператор-функции $A(\lambda)$ в проколотом круге). *Пусть длина жордановой цепочки оператор-функции* (4.1) *равна двум и хвост жордановой* *цепочки является строго знакоопределенной квадратичной формой. Тогда оператор-функция $A(\lambda)$ обратима в некотором проколотом круге*: $0 < \|\lambda\| < \rho$.

*Доказательство.* Как и раньше, будем искать, для каких $\lambda$ существует решение уравнения $A(\lambda)X(\lambda) = 0, X(\lambda) \neq 0$. Перепишем его в виде:

$$\widetilde{A}_0 X(\lambda) - [R_1(\lambda) + R_2(\lambda,\lambda) + \ldots + R_m(\lambda,\ldots,\lambda)]X(\lambda) = \langle X(\lambda), e_1^\star\rangle u_1$$

или

$$(I - \Gamma[R_1(\lambda) + R_2(\lambda,\lambda) + \ldots + R_m(\lambda,\ldots,\lambda)])X(\lambda) = \langle X(\lambda), e_1^\star\rangle e_1,$$

где $\Gamma = (\widetilde{A_0})^{-1}$. Так как оператор $(I - \Gamma[R_1(\lambda) + R_2(\lambda,\lambda) + \ldots + R_m(\lambda,\ldots,\lambda)])$ обратим при малых $\lambda$, то $X(\lambda) = \langle X(\lambda), e_1^\star\rangle (I - \Gamma[R_1(\lambda) + R_2(\lambda,\lambda) + \ldots + R_m(\lambda,\ldots,\lambda)])^{-1} e_1$. Из этого равенства следует, что ненулевое решение уравнения (2.4) существует только тогда, когда $\langle X(\lambda), e_1^\star\rangle \neq 0$ и поэтому

$$\langle (I - \Gamma[R_1(\lambda) + R_2(\lambda,\lambda) + \ldots + R_m(\lambda,\ldots,\lambda)])^{-1} e_1, e_1^\star\rangle = 1. \tag{4.4}$$

Так как $(I - S)^{-1} = I + S + S^2 + \ldots$ при малом $S$, то уравнение (4.4) можно переписать в виде:

$$0 = \langle (\Gamma[R_1(\lambda) + R_2(\lambda,\lambda) + \ldots + R_m(\lambda,\ldots,\lambda)])^{-1} e_1, e_1^\star\rangle +$$
$$+ \langle (\Gamma[R_1(\lambda) + R_2(\lambda,\lambda) + \ldots + R_m(\lambda,\ldots,\lambda)])\Gamma[R_1(\lambda) + R_2(\lambda,\lambda) + \ldots + R_m(\lambda,\ldots,\lambda)]e_1, e_1^\star\rangle + \ldots$$

Сгруппируем члены одинакового порядка по $\lambda$:

$$0 = \langle \Gamma R_1(\lambda)e_1, e_1^\star\rangle + [\langle \Gamma R_2(\lambda,\lambda)e_1, e_1^\star\rangle + \langle \Gamma R_1(\lambda)\Gamma R_1(\lambda)e_1, e_1^\star\rangle] + \ldots \tag{4.5}$$

Здесь первое слагаемое равно нулю, так как цепочка оператор-функции имеет длину, равную двум, а второе слагаемое является хвостом жордановой цепочки, т. е. невырожденной знакоопределенной квадратичной формой. В силу леммы Морса [11] функция, стоящая в правой части равенства (4.5), эквивалентна своей квадратичной части, которая в силу знакоопределенности обращается в ноль только при $\lambda = 0$. □

**Замечание 4.2.** В случае $\dim E_1 = \dim E_2 = 2$ и $\dim \Lambda = 2$, используя критерий Сильвестра, можно получить уточненное достаточное условие для обратимости оператор-функции $A(\lambda)$ в проколотой окрестности $\lambda = 0$.

Пусть, например, $A(\lambda) = A_0 + \lambda_1 B + \lambda_2 C + \lambda_1^2 D + 2\lambda_1\lambda_2 E + \lambda_2^2 F + \ldots$. Здесь $A_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B = (\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2) = (b_{ij})(\mathcal{B}_i$ — столбцы матрицы $B)$, $C = (\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2) = (c_{ij})$, $D = (\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2) = (d_{ij})$, $E = (\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2) = (e_{ij})$, $F = (\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2) = (f_{ij})$. Тогда, выражая $R_1(\lambda)J^1 + R_2(\lambda,\lambda)J^0$ через введенные выше матрицы, получим $(\lambda_1 B + \lambda_2 C)(\lambda_1\mathcal{B}_1 + \lambda_2\mathcal{C}_1) + (\lambda_1^2\mathcal{D}_1 + 2\lambda_1\lambda_2\mathcal{E}_1 + \lambda_2^2\mathcal{F}_1) = \lambda_1^2(B\mathcal{B}_1 + \mathcal{D}_1) + \lambda_1\lambda_2(B\mathcal{C}_1 + C\mathcal{B}_1 + 2\mathcal{E}_1) + \lambda_2^2(C\mathcal{C}_1 + \mathcal{F}_1)$. Хвост жордановой цепочки имеет вид $\lambda_1^2((b_{11})^2 + b_{12}b_{21} + d_{11}) + \lambda_1\lambda_2(b_{12}c_{21} + 2c_{11}b_{11} + c_{12}b_{21} + 2e_{11}) + \lambda_2^2((c_{11})^2 + c_{12}c_{21} + f_{11})$. Возможны два условия для знакоопределенности хвоста:

$1^0$ — положительно определенный хвост:

$$((b_{11})^2 + b_{12}b_{21} + d_{11}) > 0,$$
$$4((b_{11})^2 + b_{12}b_{21} + d_{11})((c_{11})^2 + c_{12}c_{21} + f_{11}) - (b_{12}c_{21} + 2c_{11}b_{11} + c_{12}b_{21} + 2e_{11})^2 > 0;$$

$2^0$ — отрицательно определенный хвост:

$$((b_{11})^2 + b_{12}b_{21} + d_{11}) < 0,$$
$$4((b_{11})^2 + b_{12}b_{21} + d_{11})((c_{11})^2 + c_{12}c_{21} + f_{11}) - (b_{12}c_{21} + 2c_{11}b_{11} + c_{12}b_{21} + 2e_{11})^2 > 0.$$

**Лемма 4.3.** (достаточное условие существования бифуркации рождения многообразия вырождения из особой точки)**.** *Предположим, что полиномиальная по $\lambda$ и $x$ оператор-функция $A(\lambda, x) : E_1 \to E_2$, $\lambda \in \Lambda$, $\dim \Lambda = k$, $x \in E_1$ удовлетворяет следующим условиям*:

1. *точка $x = 0$ является особой точкой оператор-функции $A(0, x)$;*
2. $A(\lambda, 0) \equiv A_0$, *т. е. оператор-функцию $A(\lambda, x)$ можно представить в виде $A(\lambda, x) = A_0 + R_1(x) + \lambda_1 B_1(x) + \ldots + \lambda_k B_k(x) + \ldots, B_i(0) = 0$;*
3. $\dim \operatorname{Ker} A_0 = 1$;
4. *хотя бы одна из оператор-функций $A_0 + B_1(x), \ldots, A_0 + B_k(x)$ имеет в нуле простое собственное значение.*

*Тогда при всех достаточно малых $\lambda \neq 0$, не принадлежащих некоторому аналитическому множеству, оператор-функция имеет гиперповерхность вырождения $M(\lambda)$.*

*Доказательство.* Следуя доказательству леммы 2.2, будем искать решения уравнения

$$A(\lambda, x)X(\lambda, x) = 0, \quad X(\lambda, x) \neq 0, \quad \|X(\lambda, x)\| = 1.$$

Используя оператор Шмидта, это уравнение можно переписать в виде

$$[\widetilde{A}_0 + R_1(x) + \lambda_1 B_1(x) + \ldots + \lambda_k B_k(x) + \ldots]X(\lambda, x) = \langle X(\lambda, x), e_1^\star\rangle u_1,$$

откуда

$$X(\lambda, x) = \langle X(\lambda, x), e_1^\star\rangle (I + \Gamma R_1(x) + \lambda_1 \Gamma B_1(x) + \ldots + \lambda_k \Gamma B_k(x) + \ldots)^{-1} e_1.$$

Последнее уравнение эквивалентно

$$\langle (I + \lambda R_1(x) + \lambda_1 \Gamma B_1(x) + \ldots + \lambda_k \Gamma B_k(x) + \ldots)^{-1} e_1, e_1^\star\rangle = 1,$$

а это уравнение, в свою очередь, может быть представлено как

$$0 = \langle [R_1(x) + \lambda_1 B_1(x) + \ldots + \lambda_k B_k(x) + \ldots] e_1, u_1^\star\rangle + \ldots \tag{4.6}$$

В силу формулы $(I + K)^{-1} = I - K + K^2(I + K)^{-1}$ все слагаемые правее выписанных имеют степень $\geqslant 2$ по переменной $x$ (здесь $K = R_1(x) + \lambda_1 B_1(x) + \ldots + \lambda_k B_k(x) + \ldots$ так, что каждое его слагаемое содержит $x$ как минимум в первой степени). С другой стороны, уравнение (4.6) можно представить в виде $x_1 a_{10\ldots0}(\lambda) + \ldots + x_n a_{00\ldots1}(\lambda) + x_1^2 a_{20\ldots0}(\lambda) + \ldots + = 0$, где $a_{ij\ldots s}(\lambda)$ — аналитические функции от $\lambda$. Заметим, что так как $x = 0$ является особой точкой невозмущенной оператор-функции, то слагаемое $\langle R_1(x)e_1, u_1^\star\rangle$ также имеет минимальную степень $\geqslant 2$ по переменной $x$. Для определенности будем считать, что оператор-функция $A_0 + B_1(x)$ имеет простое собственное значение, причем жорданова цепочка обрывается вдоль главного направления (см. определение 5.1), т. е. $\langle B_1(e_1)e_1, u_1^\star\rangle \neq 0$. Так как коэффициент при $\lambda_1$ у оператор-функции $a_{10\ldots0}(\lambda)$ равен $\langle B_1(e_1)e_1, u_1^\star\rangle$, то $a_{10\ldots0}(\lambda)$ тождественно не равно нулю. Обозначим через $S \in \Lambda$ множество нулей аналитической функции $a_{10\ldots0}(\lambda)$. Тогда для $\lambda \in S \setminus \Lambda$ множество решений уравнения по теореме о неявной функции представляет собой гиперповерхность $M(\lambda) : X_1 = F(X_2, \ldots, X_n, \lambda)$. □

**Теорема 4.1** (о существовании точек бифуркации). *Если оператор-функция* (4.1) *имеет жорданову цепочку нечетной длины, то в малой окрестности нуля оператор-функция обратима всюду, за исключением множества $M$, которое является либо гиперповерхностью, проходящей через ноль, либо объединением нескольких таких гиперповерхностей.*

*Доказательство.* Повторяя рассуждения из доказательства леммы 2.2, можно прийти к заключению, что точки $\lambda$, в которых оператор-функция $A_0 x - R_1(\lambda)x - R_2(\lambda, \lambda)x - \ldots - R_m(\lambda, \ldots, \lambda)x$ необратима, являются решениями уравнения

$$\langle (I - \Gamma[R_1(\lambda) + R_2(\lambda, \lambda) + \ldots + R_m(\lambda, \ldots, \lambda)])^{-1} e_1, e_1^\star\rangle = 1$$

или

$$\langle \Gamma[R_1(\lambda) + R_2(\lambda, \lambda) + \ldots + R_m(\lambda, \ldots, \lambda)](I - \Gamma[R_1(\lambda) + R_2(\lambda, \lambda) + \ldots + R_m(\lambda, \ldots, \lambda)])^{-1} e_1, e_1^\star\rangle = 0. \tag{4.7}$$

Имеет место формула

$$(I - \Gamma[R_1(\lambda) + R_2(\lambda, \lambda) + \ldots + R_m(\lambda, \ldots, \lambda)])^{-1} e_1 = J^1 + J^2(\lambda) + \ldots + J^p(\lambda, \ldots, \lambda) + \ldots \tag{4.8}$$

Действительно, очевидно, что

$$(I - \Gamma[R_1(\lambda) + R_2(\lambda, \lambda) + \ldots + R_m(\lambda, \ldots, \lambda)])^{-1} e_1 = S^0 + S^1(\lambda) + \ldots + S^{p-1}(\lambda, \ldots, \lambda) + \ldots,$$

где $S^i(\lambda, \ldots, \lambda)$ — полилинейная функция со значениями в $E_1$. Применяя к обеим частям оператор $(I - \Gamma[R_1(\lambda) + R_2(\lambda, \lambda) + \ldots + R_m(\lambda, \ldots, \lambda)])$, получим (если, например, $p < m$):

$$e_1 = S^0 + [S^1(\lambda) - \Gamma R_1(\lambda)S^0] + \ldots + [S^{p-1} - \Gamma R_1(\lambda)S^{p-2} - \Gamma R_2(\lambda, \lambda)S^{p-3} - \ldots - \Gamma R^{p-1}(\lambda, \ldots, \lambda)S^0] + \ldots$$

Откуда следует, что $S^0 = e_1 = J^1, S^1(\lambda) = J^2(\lambda), \ldots, S^{p-1}(\lambda, \ldots, \lambda) = J^p(\lambda, \ldots, \lambda)$. В силу формулы (4.6) все слагаемые в (4.7) степени меньше $p$ обратятся в ноль и, по крайней мере, одно из слагаемых степени $p$ в ноль не обратится. Сделав линейную замену переменных в пространстве $\Lambda$, можно получить, что отличен от нуля коэффициент при мономе $\lambda_1^p$. В силу теоремы деления Мальгранжа [3] существует необратимая в окрестности нуля функция $H(\lambda_1,\dots,\lambda_k)$ такая, что после умножения на уравнение (4.7) примет вид

$$\lambda_1^p + u_1(\lambda_2,\dots,\lambda_k)\lambda_1^{p-1} + \ldots + u_{p-1}(\lambda_2,\dots,\lambda_k)\lambda_1 + u_p(\lambda_2,\dots,\lambda_k) = 0.$$

Так как $p$ нечетно, то множество вещественных решений этого уравнения состоит из одной или нескольких гиперповерхностей. $\square$

**Замечание 4.3.** Следующий пример иллюстрирует множество (уже не являющееся многообразием) вырождения в случае, когда оператор-функция $A_0 + R(\cdot,\lambda)$ имеет цепочку нечетной длины.

Рассмотрим оператор-функцию

$$A(\lambda) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \lambda_1 \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Жорданова цепочка состоит из трех вектор-функций: $J^1 = (1,0,0)$, $J^2(\lambda) = (\lambda_1-\lambda_2)(0,1,0)$ и $J^3(\lambda) = (\lambda_1-\lambda_2)(\lambda_2-\lambda_3)(0,0,1)$, а уравнение (4.7) примет вид $(\lambda_1-\lambda_2)(\lambda_2-\lambda_3)(\lambda_1-\lambda_3)=0$.

Таким образом, множество вырождения состоит из трех плоскостей $\lambda_1=\lambda_2, \lambda_3=\lambda_2, \lambda_1=\lambda_3$, пересекающихся по прямой $\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3$.

Рассмотрим теперь оператор-функцию вида $A_0x - R_1(\lambda)x - R_2(\lambda,\lambda)x - \ldots - R_m(\lambda,\dots,\lambda)x$, у которой $\dim\operatorname{Ker} A_0 = \dim\operatorname{coKer} A_0 = r$ и $\operatorname{Ker} A_0 = \{\varphi_i\}_1^r, \operatorname{Ker} A_0^\star = \{\psi_i\}_1^r$. Предположим сначала, что все жордановы цепочки элементов $\varphi_i$ имеют единичную длину. В этом случае будем говорить, что элементы $\{\varphi_i\}_1^r$ образуют полный жорданов набор, если

$$D_r(\lambda) = \det\|\langle R_1(\lambda)\varphi_i,\psi_j\rangle\| \neq 0. \tag{4.9}$$

Здесь $D_r(\lambda)$ в формуле (4.9) является однородным полиномом от $\lambda$ степени $r$.

**Замечание 4.4.** Если $\det\|\langle R_1(\lambda)\varphi_i,\psi_j\rangle\| \neq 0$, то элементы пространства $L\{\Lambda\to E_2\}$ : $\{R_1(\lambda)\varphi_1,\dots,R_1(\lambda)\varphi_r\}$ линейно независимы над подпространством $\operatorname{Im} A_1$.

Действительно, пусть существуют не равные одновременно нулю константы $s_1,\dots,s_r$ такие, что $s_1R_1(\lambda)\varphi_1 + \ldots + s_rR_1(\lambda)\varphi_r = K(\lambda) \in \operatorname{Im} A_1$, или $\langle\langle K(\lambda),\Psi_{ij}\rangle\rangle = 0$, $i=1,\dots,r$, $j=1,\dots,k$, где $\Psi_{ij} = \xi_j \bigotimes \psi_i$. Значит, $\langle K(\xi_j),\psi_i\rangle = 0$ для любых $j=1,\dots,k$, $i=1,\dots,r$, т. е. для любого $\lambda$ имеем $\langle K(\lambda),\psi_i\rangle = 0$. Отсюда следует, что для любого $\lambda$ выполнено $s_1\langle R_1(\lambda)\varphi_1,\psi_i\rangle + \ldots + s_r\langle R_1(\lambda)\varphi_r,\psi_i\rangle = 0$ и поэтому $\det\|\langle R_1(\lambda)\varphi_i,\psi_j\rangle\| \equiv 0$.

Обратное неверно, что легко видеть из следующего примера. Пусть $\dim E_1 = \dim E_2 = 2$, $A_0 = 0$, т. е. $\dim\operatorname{Ker} A_0 = 2$ и $\operatorname{Ker} A_0 = \{e_1,e_2\}, \operatorname{Ker} A_0^\star = \{u_1^\star,u_2^\star\}, \dim\Lambda = 2$. Пусть $A_0 - R_1(\lambda)$ имеет вид

$$[A_0 - R_1(\lambda)](x)(\lambda) = \lambda_1 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix},$$

т. е. $R_1(\lambda)e_1 = \lambda_1u_1$ и $R_1(\lambda)e_2 = \lambda_2u_1$. Эти функции линейно независимы над подпространством $\operatorname{Im} A_1 = \{0\}$, но $\det\|\langle R_1(\lambda)e_i,u_j^\star\rangle\| \equiv 0$.

**Теорема 4.2** (о точках бифуркации). *Если оператор-функция* (4.1) *имеет $r$ жордановых цепочек единичной длины, образующих полный жорданов набор, и $r$ нечетно, то в малой окрестности нуля оператор-функция обратима всюду, за исключением множества $M$, которое является либо гиперповерхностью, проходящей через ноль, либо объединением нескольких таких гиперповерхностей.*

*Доказательство.* Как в лемме 2.2 и теореме 4.1, будем искать, при каких значениях $\lambda$ разрешимо уравнение

$$[A_0 - R_1(\lambda) - R_2(\lambda,\lambda) - \ldots - R_m(\lambda,\dots,\lambda)]X(\lambda) = [A_0 - R(\lambda)]X(\lambda) = 0. \tag{4.10}$$

Для простоты будем считать, что $\varphi_i = e_i, i=1,\dots,r$ и $\psi_i = u_i^\star, i=1,\dots,r$. Введем оператор Шмидта по формуле ($\Gamma = (\widetilde{A}_0)^{-1}$): $\widetilde{A}_0 = A_0 + \sum\limits_{i=1}^r \langle\cdot,e_i^\star\rangle u_i$. Тогда формула (4.10) перепишется в виде $\widetilde{A}_0 X(\lambda) = R(\lambda)X(\lambda) + \sum\limits_{i=1}^{r} \langle X(\lambda), e_i^\star \rangle u_i \Rightarrow X(\lambda) = \Gamma R(\lambda)X(\lambda) + \sum\limits_{i=1}^{r} \langle X(\lambda), e_i^\star \rangle e_i$. Таким образом, решение уравнения (4.10) имеет вид

$$X(\lambda) = \sum_{i=1}^{r} \langle X(\lambda), e_i^\star \rangle (I - \Gamma R(\lambda))^{-1} e_i.$$

Применение функционалов $e_j^\star, j = 1, \ldots, r$, дает систему $\langle X(\lambda), e_j^\star \rangle = \langle \sum\limits_{i=1}^{r} \langle X(\lambda), e_i^\star \rangle (I - \Gamma R(\lambda))^{-1} e_i, e_j^\star \rangle$. Для того чтобы эта система имела ненулевые решения, необходимо и достаточно, чтобы $\det \| \langle (I - \Gamma R(\lambda))^{-1} e_i, e_j^* \rangle - \delta_{ij} \| = 0 \Rightarrow$

$$\det \| \langle \Gamma R(\lambda)(I - \Gamma R(\lambda))^{-1} e_i, e_j^\star \rangle \| = 0. \tag{4.11}$$

Раскрывая определитель, уравнение можно переписать в виде

$$D_r(\lambda) + \ldots = 0. \tag{4.12}$$

Здесь члены, входящие в «многоточие», имеют степени, бо́льшие $r$ по $\lambda$. Сделав линейную замену переменных в пространстве $\Lambda$, можно получить, что отличен от нуля коэффициент при мономе $\lambda_1^r$. В силу теоремы деления Мальгранжа [3] существует необратимая в окрестности нуля функция $H(\lambda_1, \ldots, \lambda_k)$ такая, что после умножения на нее уравнение (4.12) примет вид

$$\lambda_1^r + u_1(\lambda_2, \ldots, \lambda_k)\lambda_1^{r-1} + \ldots + u_{p-1}(\lambda_2, \ldots, \lambda_k)\lambda_1 + u_p(\lambda_2, \ldots, \lambda_k) = 0.$$

В силу нечетности $r$ множество вещественных решений этого уравнения состоит из одной или нескольких гиперповерхностей. $\square$

**Замечание 4.5.** Следующий пример показывает, что при четных $r$ оператор-функция может быть невырожденной в проколотой окрестности точки $\lambda = 0$. Пусть $n = k = 2$ и $A_0 = 0$, т. е. $e_1$ и $e_2$ — элементы, составляющие жорданов набор. Оператор-функция $A_0 - R(\lambda)$ задается матрицей

$$[A_0 - R_1(\lambda)](x)(\lambda) = \lambda_1 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2, \end{pmatrix},$$

$D_2(\lambda) = \lambda_1^2 + \lambda_2^2 \neq 0$ — т. е. жорданов набор полный.

**Замечание 4.6.** Аналогичным образом можно определить понятие полного жорданового набора в случае нескольких цепочек произвольной длины. Пусть оператор-функции $A_0 x - R_1(\lambda)x - R_2(\lambda, \lambda)x - \ldots - R_m(\lambda, \ldots, \lambda)x$, у которой $\dim \operatorname{Ker} A_0 = \dim \operatorname{coKer} A_0 = r$, $\operatorname{Ker} A_0 = \{\varphi_i\}_1^r$ и $\operatorname{Ker} A_0^\star = \{\psi_i\}_1^r$ имеет $r$ жордановых цепочек: $J_i^1, J_i^2(\lambda), \ldots, J_i^{p_i}(\lambda, \ldots, \lambda), i = 1, \ldots, r$. Будем говорить, что они образуют *полный жорданов набор*, если (считая для простоты $m > p_i$)

$$\det \| \langle R_1(\lambda) J_i^{p_i} + R_2(\lambda, \lambda) J_i^{p_i - 1} + \ldots + R_{p_i}(\lambda, \ldots, \lambda) J_i^1, \psi_j \rangle \| \neq 0$$

или, используя понятие $R$-образа элемента жордановой цепочки,

$$D_k(\lambda) = \det \| \langle R J_i^{p_i}, \psi_j \rangle \| \neq 0 \quad (k = p_1 + \ldots + p_r).$$

**Теорема 4.3** (о точках бифуркации). *Если оператор-функция* (4.1) *имеет $r$ жордановых цепочек, образующих полный жорданов набор, и сумма их длин нечетна, то в малой окрестности нуля оператор-функция обратима всюду, за исключением множества $M$, которое является либо гиперповерхностью, проходящей через ноль, либо объединением нескольких таких гиперповерхностей.*

*Доказательство.* Доказательство практически содержится в доказательствах теорем 4.1 и 4.2. Так же, как в теореме 4.2, решение уравнения (4.10) сводится к (4.11). Для вычисления определителя в (4.11) используется формула (4.8).

$$\begin{aligned} R(\lambda)(I - \Gamma R(\lambda))^{-1} e_i &= \\ &= (R_1(\lambda) + R_2(\lambda, \lambda) + \ldots + R_m(\lambda, \ldots, \lambda))[J_i^1 + J_i^2(\lambda) + \ldots + J_i^{p_i}(\lambda, \ldots, \lambda) + \ldots] = \\ &= R J_i^1 + R J_i^2(\lambda) + \ldots + R J_i^{p_i}(\lambda, \ldots, \lambda) + \ldots \end{aligned}$$

Так как при $s < p_i$ $\langle RJ_i^s, \psi_j\rangle = 0$, то $\langle \Gamma R(\lambda)(I - \Gamma R(\lambda))^{-1} e_i, e_j^\star\rangle = \langle RJ_i^{p_i}, \psi_j\rangle + \ldots$ Здесь $\langle RJ_i^{p_i}, \psi_j\rangle$ является $p_i$-линейной формой по $\lambda$, а остальные члены имеют более высокие порядки по $\lambda$. Поэтому

$$\det \|\langle R(\lambda)(I - \Gamma R(\lambda))^{-1} e_i, e_j^\star\rangle\| = D_k(\lambda) + \ldots$$

Дальнейшая часть доказательства повторяет окончание доказательства теоремы 4.2. □

Следующий пример показывает наличие бифуркации рождения многообразия вырождения из особой точки в случае существования нескольких цепочек единичной длины. Пусть оператор-функция $A(\lambda, x)$ имеет вид ($n = r = k = 2$ и $A_0 = 0$):

$$A(\lambda, x) = \lambda_1 \begin{pmatrix} x_1 - \lambda_1 & x_2 + \lambda_2 \\ -x_2 + \lambda_2 & x_1 + \lambda_1 \end{pmatrix}.$$

Точка $(0,0)$ является особой для оператор-функции $A(0,x)$, так как оператор-функция $A(0,x)$ обратима при $0 < \|x\| < \lambda$, в то время как оператор-функция $A(\lambda, x)$ имеет многообразие вырождения $x_1^2 + x_2^2 = \lambda_1^2 + \lambda_2^2$.

## 5. Вырожденные дифференциальные уравнения

В этом разделе результаты разделов 2, 3 применяются к вопросам существования и единственности вырожденных ДУ вида

$$[A_0 + R(\cdot, x)]x' = Bx. \tag{5.1}$$

Предположим, что оператор-функция $A_0 + R(\cdot, x)$ имеет в нуле простое собственное значение, т. е. жорданова цепочка состоит только из одного элемента $N(A_0) = \operatorname{Ker} A_0$. Тогда в силу леммы 2.2 в окрестности нуля существует гиперповерхность $M$, на которой оператор-функция $A_0 + R(\cdot, x)$ вырождается, т. е. имеет нуль $\Phi(x) = (I + \Gamma R(\cdot, x))^{-1} e_1$, удовлетворяющий условию $\langle \Phi(x), e_1^*\rangle = 1$. Гиперповерхность $M$ определяется уравнением

$$\langle R(\cdot, x)(I + \Gamma R(\cdot, x))^{-1} e_1, u_1^*\rangle = 0,$$

а касательное пространство к ней в точке $x \neq 0$ — уравнением

$$x_1\langle R(e_1, e_1), \psi\rangle + \ldots + x_n\langle R(e_1, e_n), \psi\rangle = 0.$$

Вне гиперповерхности $M$ задача Коши для уравнения (5.1) имеет единственное решение, в то время как система (5.1) на $M$ может не иметь решений нигде (кроме точки 0), может иметь решения всюду и может иметь решения на подмногообразии $M_1 \subset M$.

Рассмотрим следующие уравнения вида (5.1).

$1^0$.

$$\begin{pmatrix} x_1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}.$$

Здесь гиперповерхность $M$ определяется уравнением $x_1 = 0$, система на гиперповерхности примет вид $x_2' = x_2$. Таким образом, через любую точку на $M$ проходит решение, лежащее на гиперповерхности $M$.

$2^0$.

$$\begin{pmatrix} x_1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}.$$

Здесь $M$ по-прежнему определяется уравнением $x_1 = 0$, но система на гиперповерхности следующая: $x_2 = 0$, $x_2' = 0$. На гиперповерхности $M$ решение существует только в точке $(0,0)$.

$3^0$.

$$\begin{pmatrix} x_1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$

Гиперповерхность $M$ определяется уравнением $x_1 = 0$, а система на ней имеет вид $x_1 = 0$, $x_3 = 0$, $x_2' = x_2$. Таким образом, на гиперповерхности $M$ решения существуют только на прямой $(0, x_2, 0)$.

**Определение 5.1.** ОЖЦ оператор-функции $A_0 + R(\cdot, x)$ обрывается вдоль главного направления $e_1$, если $\langle R(e_1, e_1), \psi\rangle \neq 0$.

**Определение 5.2.** Оператор-функции $A_0 + R(\cdot, x)$ не вырождена вдоль гиперповерхности $M$, если она не имеет нулей на касательном расслоении к $M$.

**Лемма 5.1.** *Если у оператор-функции $A(x) = A_0 + R(\cdot, x)$ жорданова цепочка обрывается вдоль главного направления, то $A(x)$ не вырождена вдоль гиперповерхности $M$ в окрестности точки* $0$.

*Доказательство.* Оператор-функция $A(x)$ имеет нуль $e_1$ в точке $x = 0$, а касательное пространство к $M$ имеет нормаль $(\langle R(e_1, e_1), \psi\rangle, \dots, \langle R(e_1, e_n), \psi\rangle)$. Отсюда следует, что в достаточно малой окрестности точки $x = 0$ нуль оператор-функции $A(x)$ не будет принадлежать касательному пространству к $M$, т. е. $A(x)$ не вырождена вдоль гиперповерхности $M$. □

Однако, если жорданова цепочка оператор-функции $A(x)$ обрывается вдоль неглавного направления ($\langle R(e_1, e_1), \psi\rangle = 0$), то $A(x)$ может быть вырождена вдоль гиперповерхности $M$. Если, например,

$$A(x) = \begin{pmatrix} x_2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

то гиперповерхность $M$ определяется уравнением $x_2 = 0$ и ноль $e_1$ принадлежит касательному пространству к $M$ в любой точке окрестности $x = 0$.

В то же время, если ОЖЦ $A(x)$ обрывается вдоль неглавного направления $\langle R(e_1, e_1), \psi\rangle = 0$, то $A(x)$ может вырождаться вдоль гиперповерхности $M$:

$$A(x) = \begin{pmatrix} x_1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Здесь $M$ определена уравнением $x_2 = 0$ и ноль-элемент $e_1$ принадлежит касательному пространству к $M$ в любой точке окрестности точки $x = 0$.

**А. Решения системы (5.1), принадлежащие гиперповерхности вырождения** $M$.

**Теорема 5.1.** *Пусть оператор-функция $A(x)$ имеет в нуле простое собственное значение, причем ее жорданова цепочка обрывается вдоль главного направления. Если к тому же для любого $x \in M$ выполнено $Bx \in \operatorname{Im} A(x)$, то через любую точку окрестности $x = 0$ на $M$ проходит единственное решение* (5.1)*, принадлежащее* $M$.

*Доказательство.* Если у оператор-функции $A(x) = A_0 + R(\cdot, x)$ жорданова цепочка обрывается вдоль главного направления, то в окрестности $x = 0$ уравнение гиперповерхности $M$ можно записать в виде $x_1 = F(x_2, \dots, x_n)$, т. е. в координатной форме гиперповерхность $M$ принимает вид $(F(x_2, \dots, x_n), x_2, \dots, x_n)$. Поэтому уравнение (4.1) можно переписать в виде следующей системы:

$$\begin{pmatrix} a_{11}(x) & \dots & a_{1n}(x) \\ a_{21}(x) & \dots & a_{2n}(x) \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1}(x) & \dots & a_{nn}(x) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial F}{\partial x_2} & \dots & \dots & \dots & \frac{\partial F}{\partial x_n} \\ 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_2' \\ x_3' \\ \dots \\ x_n' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{11} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & \dots & b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots \\ b_{n1} & \dots & b_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F(x) \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}. \tag{5.2}$$

При достаточно малых $x$ отображение (*)

$$\begin{pmatrix} a_{11}(x) & \dots & a_{1n}(x) \\ a_{21}(x) & \dots & a_{2n}(x) \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1}(x) & \dots & a_{nn}(x) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial F}{\partial x_2} & \dots & \dots & \dots & \frac{\partial F}{\partial x_n} \\ 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

определяемое левой частью системы (5.1), не имеет нулей, так как выражение (**)

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial F}{\partial x_2} & \dots & \dots & \dots & \frac{\partial F}{\partial x_n} \\ 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_2' \\ x_3' \\ \dots \\ x_n' \end{pmatrix},$$

совпадающее с левой частью системы (5.1) без первой матрицы, представляет собой касательный вектор к гиперповерхности $M$ в точке $x$, в то время как оператор-функция $A(x)$ не обращается в ноль на касательном расслоении $TM$. Поэтому отображение (*) при любом достаточно малом

$x$ взаимно однозначно отображает касательное многообразие к $(n-1)$-мерному подпространству $(x_2, \dots, x_2)$ на образ оператора $A(x)$, который тоже имеет размерность $n-1$. Вводя соответствующий обратный оператор $T(x)$, получаем систему

$$\begin{pmatrix} x_2' \\ x_3' \\ \dots \\ x_n' \end{pmatrix} = T(x) \begin{pmatrix} b_{11} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & \dots & b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots \\ b_{n1} & \dots & b_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F(x) \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix},$$

которая имеет единственное решение, проходящее через каждую точку окрестности нуля пространства $(x_2, \dots, x_n)$. □

**Замечание 5.1.** В случае, когда ОЖЦ оператор-функции $A(x)$ обрывается вдоль неглавного направления, система (5.1) на гиперповерхности $M$ может не иметь ненулевых решений.

Например, система

$$\begin{pmatrix} x_2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix},$$

эквивалентная $x_2 x_1' = x_1$; $x_2' = x_2$ на гиперповерхности $M$, определяемой уравнением $x_2 = 0$, имеет решение $(0, 0)$.

Однако возможен случай, когда решение, и не единственное, проходит через любую точку $M$: система

$$\begin{pmatrix} x_2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \sim x_2 x_1' = x_2; \quad x_2' = x_2$$

для любой дифференцируемой функции $f(t), f(0) = 0$, проходящей через любую точку $(x_1^0, 0)$, гиперповерхности $M$ имеет лежащее в $M$ решение $(x_1^0 + f(t), 0)$.

Если жорданова цепочка оператор-функции $A(x)$ обрывается вдоль неглавного направления, справедлив следующий аналог теоремы 5.1.

**Теорема 5.2.** *Пусть оператор-функция $A(x)$ имеет в нуле простое собственное значение, причем ее жорданова цепочка обрывается вдоль неглавного направления, но при этом $A(x)$ не вырождена вдоль гиперповерхности $M$ в некоторой проколотой окрестности нуля. Если к тому же для любого $x \in M$ выполнено $Bx \in \operatorname{Im}(A(x))$, то через любую точку окрестности $x = 0$ в $M$ проходит единственное решение* (5.1)*, принадлежащее $M$.*

Доказательство теоремы 5.2 практически не отличается от доказательства теоремы 5.1.

В следующем примере

$$\begin{pmatrix} x_2 & x_1 \\ x_1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

гиперповерхность $M$ определяется уравнением $x_2 = (x_1)^2$ и в проколотой окрестности нуля на $M$ оператор-функция $A(x) = \begin{pmatrix} (x_1)^2 & x_1 \\ x_1 & 1 \end{pmatrix}$ имеет ноль-элемент $(-1, x_1)$, не принадлежащий касательному подпространству $M$ в точке $(x_1, (x_1)^2)$.

Эта система на гиперповерхности $M$ имеет вид

$$\begin{pmatrix} (x_1)^2 & x_1 \\ x_1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1' \\ 2x_1' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ (x_1)^2 \end{pmatrix}$$

и при $x_1 \neq 0$ сводится к однозначно разрешимому уравнению $(x_1 + 2)x_1' = x_1$.

**Теорема 5.3.** *Пусть оператор-функция $A(x)$ имеет в нуле простое собственное значение, причем ее жорданова цепочка обрывается вдоль неглавного направления и в некоторой окрестности $x = 0$ ноль-элемент $\Phi(x)$ оператор-функции $A(x)$ принадлежит касательному расслоению $TM$. Если к тому же для любого $x \in M, Bx \in \operatorname{Im}(A(x)|_{TM(x)})$, то в окрестности $x = 0$ существует $(n-2)$-мерное подмногообразие $N$ гиперповерхности $M$, на котором уравнение* (5.1) *однозначно разрешимо, т. е. через любую точку $N$ проходит единственное решение* (5.1)*, принадлежащее $N$.*

*Доказательство.* Не ограничивая общности, можно считать, что у оператор-функции $A(x) = A_0 + R(,x)$ жорданова цепочка обрывается вдоль направления $x_n$, т. е. в окрестности $x = 0$ уравнение гиперповерхности $M$ можно записать в виде $x_n = F(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1})$ или в координатной форме $(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, F(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}))$. В достаточно малой окрестности $x = 0$ определим подмногообразие $N$ гиперповерхности $M$, отнеся к нему точки:

$$N = \{x | x = (0, x_2, \ldots, x_{n-1}, F(0, x_2, \ldots, x_{n-1}))\}.$$

Перепишем систему (5.1) в следующем виде:

$$\begin{pmatrix} a_{11}(x) & \ldots & a_{1n}(x) \\ a_{21}(x) & \ldots & a_{2n}(x) \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1}(x) & \ldots & a_{nn}(x) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \ldots & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 1 & \ldots & 0 & 0 \\ \frac{\partial F}{\partial x_1} & \ldots & \ldots & \ldots & \frac{\partial F}{\partial x_{n-1}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ x_2' \\ x_3' \\ \ldots \\ x_{n-1}' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{11} & \ldots & b_{1n} \\ b_{21} & \ldots & b_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ b_{n1} & \ldots & b_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ x_2 \\ \ldots \\ F(x) \end{pmatrix}, \quad (5.3)$$

так как при малых $x$ векторы в левой части имеют вид

$$(0, x_2', \ldots, x_{n-1}', \frac{\partial F}{\partial x_2} x_2' + \ldots + \frac{\partial F}{\partial x_{n-1}} x_{n-1}').$$

Нуль-элементы $\Phi(x)$ оператор-функции $A(x)$ не могут принадлежать $TN$, поскольку они мало отличаются от $e_1$ и их первая координата не обращается в ноль. Поэтому оператор $A(x)$ взаимно однозначно отображает $TN(x)$ на $\mathrm{Im}(A(x)|_{TM(x)})$, оба пространства имеют размерность $(n-2)$, так как $Bx \in \mathrm{Im}(A(x)|_{TM(x)})$ для $\forall x \in M$. Тогда введение обратного оператора $T(x)$ дает однозначно разрешимую систему $(x_2', \ldots, x_{n-1}')^T = T(x)\widetilde{b}(x_2, \ldots, F(x))$, где в матрице $\widetilde{b}$ первая строка состоит из нулей, поскольку $Bx \in \mathrm{Im}(A(x)|_{TM(x)})$ для любого $x \in M$. □

**Замечание 5.2.** Следующий пример показывает, что условие $Bx \in \mathrm{Im}(A(x)|_{TM(x)})$ нельзя заменить на условие $Bx \in \mathrm{Im}(A(x))$:

$$\begin{pmatrix} x_2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$

Гиперповерхность $M$ определяется уравнением $x_2$=0, система на ней имеет решение $x_1 = 0$, $x_3 = 0$.

**Замечание 5.3.** Доказательства теорем 5.1–5.3 без изменения переносятся на системы вида $(A_0 + R(,x))x' = H(x)$, где $H(x)$ — гладкая нелинейная функция.

**B. Решения системы (5.1), начинающиеся на гиперповерхности вырождения $M$, но целиком ей не принадлежащие.** Следующий пример показывает, что решения системы (5.1), начинающиеся на гиперповерхности $M$, могут покидать ее. При этом может нарушаться единственность решения с заданной начальной точкой:

$$\mathrm{diag}(x_1, 1, 1)(x_1', x_2', x_3')^T = \mathrm{diag}(1, 1, 1)(x_1, x_2, x_3)^T \sim x_1 x_1' = x_1, x_2' = x_2, x_3' = x_3. \quad (5.4)$$

Здесь гиперповерхность $M$ определяется уравнением $x_1 = 0$. Через любую точку $(0, x_2^0, x_3^0) \in M$ проходят два решения: $(0, x_2^0 \exp(t), x_3^0 \exp(t))$ — принадлежащее $M$ и $(t, x_2^0 \exp(t), x_3^0 \exp(t))$ — не принадлежащее $M$.

Для оператор-функции $A(x)$, имеющей в нуле простое собственное значение с жордановой цепочкой, обрывающейся вдоль неглавного направления, тоже можно построить пример решений, не принадлежащих гиперповерхности вырождения: система $(x_2 x_1', x_2', x_3')^T = (0, 1, 0)^T$ имеет решение $(0, t, 0)$, ортогональное к гиперповерхности $(x_1, 0, x_3)$. Отметим, что в этом примере не выполнены условия теоремы 5.3. Возникает следующая

**Задача.** Пусть выполнены условия теоремы 5.1. Найти уравнения, определяющие решения, начинающиеся на многообразии вырождения $M$ и не принадлежащие этому многообразию.

Применив регуляризатор Шмидта $\widetilde{A_0}$, $\widetilde{A_0}^{-1} = \Gamma$, перепишем уравнение (5.1) в виде: $[\widetilde{A_0} + R(,x)]x' = Bx + \langle x', e_1^* \rangle u_1 \Rightarrow$

$$x' = [I + \Gamma R(\cdot, x)]^{-1} \Gamma B x + \langle x', e_1^* \rangle [I + \Gamma R(\cdot, x)]^{-1} e_1, \quad (5.5)$$

так как $[\widetilde{A}_0 + R(,x)]^{-1} = [I + \Gamma R(\cdot,x)]^{-1}\Gamma$. Заметим, что если $x \in M$, то в силу леммы 2.2 имеем $\langle [I+\Gamma R(,x)]^{-1}e_1, e_1^*\rangle = 1$, если же $x$ не принадлежит $M$, то уравнение (5.5) может не выполняться.

В окрестности $x = 0$ с каждой точкой $x = (x_1, \ldots, x_n)$ ассоциируем точку $x^F$, лежащую на многообразии вырождения $M$: $x^F = (F(x_2, \ldots, x_n), x_2, \ldots, x_n)$. Ясно, что $x = x^F + (x_1 - x_1^F)e_1$. Запишем равенство (5.5) в координатной форме:

$$\begin{aligned} x_1' &= \langle [I + \Gamma R(\cdot,x)]^{-1}\Gamma Bx, e_1^*\rangle + x_1'\langle [I + \Gamma R(,x)]^{-1}e_1, e_1^*\rangle, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_n' &= \langle [I + \Gamma R(\cdot,x)]^{-1}\Gamma Bx, e_n^*\rangle + x_1'\langle [I + \Gamma R(\cdot,x)]^{-1}e_1, e_n^*\rangle. \end{aligned} \tag{5.6}$$

Из первого уравнения (5.6) следует

$$x_1'(1 - \langle [I + \Gamma R(,x)]^{-1}e_1, e_1^*\rangle) = \langle [I + \Gamma R(,x)]^{-1}\Gamma Bx, e_1^*\rangle. \tag{5.7}$$

Преобразуем левую часть равенства (5.7):

$$\begin{aligned} x_1'(1 - \langle [I + \Gamma R(\cdot,x)]^{-1}e_1, e_1^*\rangle) &= x_1'(\langle [I + \Gamma R(\cdot,x^F)]^{-1}e_1, e_1^*\rangle - \langle [I + \Gamma R(\cdot,x)]^{-1}e_1, e_1^*\rangle) = \\ &= x_1'(\langle [I + \Gamma R(\cdot,x^F)]^{-1}e_1 - [I + \Gamma R(\cdot,x^F + (x_1 - x_1^F)e_1)]^{-1}e_1, e_1^*\rangle) = \\ &= x_1'(x_1 - x_1^F)(\langle [I + \Gamma R(\cdot,x^F)]^{-1}\Gamma R(\cdot,e_1)][I + \Gamma R(\cdot,x)]^{-1}e_1, e_1^*\rangle). \end{aligned} \tag{5.8}$$

Так как при малых $A$ и $B$ верно $[I + A]^{-1} - [I + B]^{-1} = [I + A]^{-1}(B - A)[I + B]^{-1}$ (см., например, [14]), то левая часть равенства (5.7) приводится к виду $\langle x', e_1^*\rangle(x_1 - x_1^F)a(x)$, где функция $a(x)$ при малых $x$ близка к $\langle \Gamma R(e_1, e_1), e_1^*\rangle = 1$. Перейдем теперь к правой части равенства (5.7). Заметим, что $\langle [I + \Gamma R(\cdot,x^F)]^{-1}\Gamma Bx^F, e_1^*\rangle = 0$. Действительно, $\langle Bx^F, ([I + \Gamma R(\cdot,x^F)]^{-1}\Gamma)^* e_1^*\rangle = 0$, согласно равенству $[I + \Gamma R(\cdot,x^F)]^{-1}\Gamma)^* = \Gamma^*[I + R^*(\cdot,x^F)\Gamma^*]^{-1} = [I + \Gamma^* R^*(\cdot,x^F)]^{-1}\Gamma$ и в силу условий теоремы 5.1 и леммы 2.4. При использовании этого равенства правую часть (5.7) можно записать в следующем виде:

$$\begin{aligned} &\langle [I + \Gamma R(\cdot,x)]^{-1}\Gamma Bx - [I + \Gamma R(\cdot,x^F)]^{-1}\Gamma Bx^F, e_1^*\rangle = \\ &= \langle [I + \Gamma R(\cdot,x)]^{-1}\Gamma Bx^F - [I + \Gamma R(\cdot,x^F)]^{-1}\Gamma Bx^F, e_1^*\rangle + (x_1 - x_1^F)\langle [I + \Gamma R(\cdot,x)]^{-1}\Gamma Be_1, e_1^*\rangle. \end{aligned} \tag{5.9}$$

Далее,

$$\begin{aligned} [I + \Gamma R(\cdot,x)]^{-1} - [I + \Gamma R(\cdot,x^F)]^{-1} &= [I + \Gamma R(\cdot,x)]^{-1}\{I + \Gamma R(\cdot,x^F) - I - \Gamma R(\cdot,x)\}[I + \Gamma R(\cdot,x^F)]^{-1} = \\ &= (x_1 - x_1^F)[I + \Gamma R(\cdot,x)]^{-1}\Gamma R(\cdot,e_1)[I + \Gamma R(,x^F)]^{-1} \end{aligned}$$

и таким образом, все члены равенства (5.7) имеют множитель $(x_1 - x_1^F)$. Система (5.6) распадается на две. Первая система в качестве первого уравнения будет иметь $x_1 = x_1^F$, откуда соответственно:

$$\begin{aligned} x_1' &= \frac{\partial F}{\partial x_2}x_2' + \ldots + \frac{\partial F}{\partial x_{n-1}}x_{n-1}', \\ x_2' &= \langle [I + \Gamma R(\cdot,x)]^{-1}\Gamma Bx, e_2^*\rangle + x_1'\langle [I + \Gamma R(\cdot,x)]^{-1}e_1, e_2^*\rangle, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_n' &= \langle [I + \Gamma R(\cdot,x)]^{-1}\Gamma Bx, e_n^*\rangle + x_1'\langle [I + \Gamma R(\cdot,x)]^{-1}e_1, e_n^*\rangle. \end{aligned} \tag{5.10}$$

Решения этой системы принадлежат многообразию вырождения $M$. Вторая система имеет вид:

$$\begin{aligned} a(x)x_1' &= \langle [I + \Gamma R(\cdot,x)]^{-1}\Gamma Be_1, e_1^*\rangle + \langle [I + \Gamma R(\cdot,x)]^{-1}\Gamma R(\cdot,e_1)[I + \Gamma R(\cdot,x^F)]^{-1}\Gamma Bx^F, e_1^*\rangle, \\ x_2' &= \langle [I + \Gamma R(\cdot,x)]^{-1}\Gamma Bx, e_2^*\rangle + x_1'\langle [I + \Gamma R(\cdot,x)]^{-1}e_1, e_2^*\rangle, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_n' &= \langle [I + \Gamma R(\cdot,x)]^{-1}\Gamma Bx, e_2^*\rangle + x_1'\langle [I + \Gamma R(\cdot,x)]^{-1}e_1, e_n^*\rangle, \end{aligned} \tag{5.11}$$

и ее решения могут многообразию $M$ не принадлежать.

**Замечание 5.4.** Может случиться, что решения второй системы тоже принадлежат многообразию $M$: система $[\mathrm{diag}(x_1, 1, 1)](x_1', x_2', x_3')^T = 0 \sim x_1 x_1' = 0, x_2' = 0, x_3' = 0$ имеет в качестве решений начинающиеся на гиперповерхности $M$, т. е. на плоскости $(x_2, x_3)$.

**Теорема 5.4.** *Пусть оператор-функция $A(x)$ имеет в нуле простое собственное значение, причем ее жорданова цепочка обрывается вдоль главного направления. Если к тому же для любого $x \in M$, $Bx \in \mathrm{Im}(A(x))$ и $\langle \Gamma Be_1, e_1^* \rangle \neq 0$, то через любую точку окрестности $x = 0$ в $M$ проходит единственное решение* (5.1)*, не принадлежащее $M$.*

Для того чтобы решение, начинающееся на гиперповерхности $M$, определяемое второй системой, покидало гиперповерхность $M$, достаточно, чтобы в некоторой точке гиперповерхности $M$ касательный вектор к решению не принадлежал касательной плоскости к гиперповерхности, определяемой формулой

$$x_1 - x_1^F = \frac{\partial F}{\partial x_2}(x_2 - x_2^F) + \ldots + \frac{\partial F}{\partial x_{n-1}}(x_n - x_n^F). \tag{5.12}$$

Ясно, что при $x^F = 0, x_1' = \langle \Gamma Be_1, e*_1 \rangle, x_2' = 0, \ldots, x_n' = 0$. Таким образом, если $\langle \Gamma Be_1, e_1^* \rangle \neq 0$, то касательный вектор к решению не принадлежит касательной плоскости к гиперповерхности $M$. В силу непрерывности то же самое справедливо для $x^F$, близких к нулю. Для точек $x^F$, принадлежащих гиперповерхности $M$, обозначим через $N_x$ нормаль к $M$ в этой точке. $N_x$ можно рассматривать как элемент пространства $E_1^*$, обращающийся в ноль на подпространстве $TM(x)$.

**Теорема 5.5.** *Пусть выполнены условия теоремы* 5.3 *и нормаль $N_x$ к $M$ является собственным вектором оператора $A^*(x)\Gamma^*$, т. е. $A^*(x)\Gamma^* N_x = \lambda(x) N_x$. Тогда решения, начинающиеся на гиперповерхности $M$, остаются на ней.*

*Доказательство.* Повторим выкладки, предшествующие теореме 5.4, с той разницей, что гиперповерхность $M$ определяется уравнением:

$$x_n = F(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1})$$

Поэтому каждой точке $x$, близкой к нулю, сопоставим точку $x^F = (x_1, x_2, \ldots, F(x_1, \ldots, x_{n-1}))$, лежащую на многообразии вырождения $M$, так что $x = x^F + (x_n - x_n^F)e_n$.

Как и выше, преобразуем уравнение (5.7). Левая часть приводится к виду $\langle x', e_1^* \rangle (x_n - x_n^F) b(x)$, где функция

$$b(x) = (\langle [I + \Gamma R(\cdot, x^F)]^{-1} \Gamma R(\cdot, e_n)[I + \Gamma R(\cdot, x)]^{-1} e_1, e_1^* \rangle)$$

при малых $x$ близка к $\langle \Gamma R(e_1, e_n), e_1^* \rangle = 1$. Аналогичным образом правая часть уравнения (5.7) приводится к виду

$$(x_n - x_n^F)(\langle [I + \Gamma R(\cdot, x)]^{-1} \Gamma Be_n, e_1^* \rangle + \langle [I + \Gamma R(\cdot, x)]^{-1} \Gamma R(\cdot, e_n)[I + \Gamma R(\cdot, x^F)]^{-1} \Gamma Bx^F, e_1^* \rangle).$$

Таким образом, как и в теореме 5.4, система (5.6) распадается на две. В первой из получившихся систем первое уравнение имеет вид $x_n = x_n^F$ и поэтому все решения этой системы, если они существуют, принадлежат гиперповерхности $M$.

Выпишем вторую систему:

$$\begin{gathered} x_1' = (\langle [I + \Gamma R(\cdot, x)]^{-1} \Gamma Be_n, e_1^* \rangle + \langle [I + \Gamma R(\cdot, x)]^{-1} \Gamma R(\cdot, e_n)[I + \Gamma R(\cdot, x^F)]^{-1} \Gamma Bx^F, e_1^* \rangle)/b(x), \\ x_2' = \langle [I + \Gamma R(\cdot, x)]^{-1} \Gamma Bx, e_2^* \rangle + x_1'[I + \Gamma R(\cdot, x)]^{-1} e_1, e_2^* \rangle, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_n' = \langle [I + \Gamma R(\cdot, x)]^{-1} \Gamma Bx, e_n^* \rangle + x_1'[I + \Gamma R(\cdot, x)]^{-1} e_1, e_n^* \rangle. \end{gathered} \tag{5.13}$$

Обозначение

$$G(x) = (\langle [I + \Gamma R(\cdot, x)]^{-1} \Gamma Be_n, e_1^* \rangle + \langle [I + \Gamma R(\cdot, x)]^{-1} \Gamma R(\cdot, e_n)[I + \Gamma R(\cdot, x^F)]^{-1} \Gamma Bx^F, e_1^* \rangle)/b(x)$$

дает систему

$$\begin{gathered} x_1' = G(x), \\ x_2' = \langle [I + \Gamma R(\cdot, x)]^{-1} \Gamma Bx, e_2^* \rangle + G(x)[I + \Gamma R(\cdot, x)]^{-1} e_1, e_2^* \rangle, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_n' = \langle [I + \Gamma R(\cdot, x)]^{-1} \Gamma Bx, e_n^* \rangle + G(x)[I + \Gamma R(\cdot, x)]^{-1} e_1, e_n^* \rangle. \end{gathered} \tag{5.14}$$

Нужно показать, что правая часть этой системы в точках гиперповерхности $M$ принадлежит касательному пространству к $M$, т. е. ортогональна вектору $N_x = \Big(\dfrac{\partial F}{\partial x_1}, \ldots, \dfrac{\partial F}{\partial x_{n-1}}, -1\Big)$.

Покажем сначала, что вектор $G(x) = (1, \langle [I + \Gamma R(\cdot, x)]^{-1} e_1, e_2^* \rangle, \ldots, \langle [I + \Gamma R(\cdot, x)]^{-1} e_1, e_n^* \rangle)$ принадлежит касательному пространству к $M$, если $x$ принадлежит $M$. Так как в силу леммы 2.3 $\langle [I + \Gamma R(\cdot, x)]^{-1} e_1, e_2^* \rangle = 1$, то этот вектор пропорционален $\Phi(x)$, который по условиям теоремы 4.3 принадлежит касательному пространству к $M$. Остается показать, что вектор $(0, \langle [I + \Gamma R(\cdot, x)]^{-1} \Gamma Bx, e_2^* \rangle, \ldots, \langle [I + \Gamma R(\cdot, x)]^{-1} \Gamma Bx, e_n^* \rangle)$ ортогонален $N_x$. В силу формулы $\langle [I + \Gamma R(\cdot, x^F)]^{-1} \Gamma Bx^F, e_1^* \rangle = 0$ его можно переписать в виде

$$(\langle [I + \Gamma R(\cdot, x)]^{-1} \Gamma Bx, e_1^* \rangle, \ldots, \langle [I + \Gamma R(\cdot, x)]^{-1} \Gamma Bx, e_n^* \rangle). \tag{5.15}$$

Так как при малых $x$ оператор $([I + \Gamma R(\cdot, x)]^{-1})^*$ близок к единичному, функционалы $([I + \Gamma R(\cdot, x)]^{-1})^* e_1^*, \ldots, ([I + \Gamma R(\cdot, x)]^{-1})^* e_n^*$ образуют базис пространства $E_1^*$. Поэтому (5.15) являются координатами вектора $\Gamma Bx$ в некотором базисе пространства $E_1$. По условиям теоремы 5.3 при $x \in M$, $Bx \in \operatorname{Im}(A(x)|_{TM(x)})$, т. е. можно считать, что $Bx = A(x)\omega$, где $\omega \in TM(x)$. Тогда $\langle \Gamma Bx, N_x \rangle = \langle \Gamma A(x)\omega, N_x \rangle = \langle \omega A^*(x)\Gamma^*, N_x \rangle = \lambda(x)\langle \omega, N_x \rangle = 0$ и доказательство закончено. □

**Замечание 5.5.** В условиях теоремы 5.3 единственность решений также может нарушаться, хотя все ответвляющиеся решения остаются на гиперповерхности вырождения $M$:

$$\begin{pmatrix} x_2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$

Здесь подмногообразие $N$ из теоремы 5.3 — это ось $x_3$. Но через каждую точку этого подмногообразия проходит множество других решений системы, лежащих на гиперповерхности $M$: $(f(t), 0, x_3^0 e^t)$.

## 6. Особые точки вырожденных систем дифференциальных уравнений

**А. Разрешение особенностей.** Пусть $N(x) \in L\{E_1 \to E_2\}$ — полиномиальная функция $x$ обратима в проколотой окрестности точки $x_0$. В лемме 4.2 были приведены достаточные условия, при выполнении которых оператор-функция $A_0 + N(x)$ обратима в проколотой окрестности точки $x_0$. В этом случае точка $x_0$ — особая точка системы (5.1). Ниже, используя процедуру разрешения особенностей [1, 17], исследуется поведение решений системы (5.1) в окрестности особой точки в случае малых размерностей. При $n = 2$ система (5.1) записывается в виде

$$\begin{pmatrix} a_{11}(x) & a_{12}(x) \\ a_{21}(x) & a_{22}(x) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \tag{6.1}$$

где

$$a_{11}(0) = a_{12}(0) = a_{21}(0) = 0, \quad a_{22}(0) = 1. \tag{6.2}$$

**Лемма 6.1.** *Если в системе* (6.1) $b_{11} \neq 0$, *т. е. оператор-функция* $A_0 - B$ *имеет в нуле простое собственное значение, то особая точка* $x = 0$ *может быть «разрешена» в один шаг. Если* $b_{12} \neq 0$, *она сводится к двум гиперболическим особым точкам, а при* $b_{12} = 0$ — *к одной гиперболической особой точке.*

*Доказательство.* В силу определения особой точки определитель матрицы оператор-функции $A(x)$, $\Delta(x) = a_{11}(x)a_{22}(x) - a_{12}(x)a_{21}(x) \neq 0$ при $0 < \|x\| < \rho$. Поэтому в этом проколотом круге оператор-функция $A(x)$ обратима, матрица обратной оператор-функции имеет вид

$$\Delta^{-1} \begin{pmatrix} a_{22}(x) & -a_{12}(x) \\ -a_{21}(x) & a_{11}(x) \end{pmatrix}$$

и система записывается в виде (6.3):

$$\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix} = \Delta^{-1} \begin{pmatrix} a_{22}(x) & -a_{12}(x) \\ -a_{21}(x) & a_{11}(x) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}. \tag{6.3}$$

Эта система имеет те же траектории, что и система (6.4):

$$\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{22}(x) & -a_{12}(x) \\ -a_{21}(x) & a_{11}(x) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}. \tag{6.4}$$

В этом можно убедиться, поделив одно уравнение на другое, т. е. подсчитав $dx_1/dx_2$. Учитывая формулы (6.2), систему (6.4) можно записать в виде

$$x_1' = b_{11}x_1 + b_{12}x_2 + R_1(x_1, x_2), \quad x_2' = R_2(x_1, x_2).$$

Здесь $R_1(x_1, x_2)$ и $R_2(x_1, x_2)$ — полиномы, у которых все мономы имеют степень выше одного. Замена $x_1 = u, x_2 = uv$ дает

$$u' = b_{11}u + b_{12}uv + R_1(u, uv); \quad uv' = R_2(u, uv) - v(b_{11}u + b_{12}uv + R_1(u, uv)),$$

где $R_1(u, uv) = u^2 P_1(u, v)$ и $R_2(u, uv) = u^2 P_2(u, v)$. Поэтому второе уравнение можно сократить на $u$:

$$u' = b_{11}u + b_{12}uv + R_1(u, uv); v' = -b_{11}v - b_{12}v^2 + R_3(u, v). \tag{6.5}$$

Заметим, что $R_1(0, 0) = 0$ и $R_3(0, v) = 0$ при $u = 0$. Поэтому на прямой $(0, v)$ (прообраз точки $(x_1, x_2) = (0, 0)$) система (6.5) при $b_{11} \neq 0$ и $b_{12} \neq 0$ имеет две гиперболические особые точки $(0, 0)$ и $(0, -b_{11}/b_{12})$. В этих точках линейная часть системы имеет вид:

$$\begin{pmatrix} b_{11} & 0 \\ 0 & -b_{11} \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad \begin{pmatrix} b_{11} & 0 \\ * & -b_{11} \end{pmatrix}.$$

Если же $b_{12} = 0$, то система (6.4) имеет только одну гиперболическую особую точку $(0, 0)$ с линейной частью $\begin{pmatrix} b_{11} & 0 \\ 0 & -b_{11} \end{pmatrix}$. □

Рассмотрим теперь случай $b_{11} = 0$. Тогда система (6.4) записывается в виде

$$x_1' = b_{12}x_2 + R_1(x_1, x_2); \qquad x_2' = R_2(x_1, x_2).$$

Замена $x_1 = uv$, $x_2 = v$ приведет ее к виду

$$v' = R_2(uv, v); \qquad vu' = -uR_2(v, uv) + b_{12}v + R_1(uv, v).$$

Как и выше, $R_1(uv, v) = v^2 P_1(u, v)$, а $R_2(uv, v) = v^2 P_2(u, v)$, поэтому

$$v' = R_2(uv, v); \qquad u' = b_{12} - uvP_2(u, v) + vP_1(u, v). \tag{6.6}$$

На прямой $(u, 0)$, т. е. прообразе точки $(x_1, x_2) = (0, 0)$, система (6.6) не имеет особых точек, если $b_{12} \neq 0$. Далее рассматривается вырожденное дифференциальное уравнение вида

$$(A_0 + N(x))x' = P \tag{6.7}$$

с постоянным вектором $P \in E_2$ как частный случай вырожденного дифференциального уравнения

$$(A_0 + N(x))x' = F(x), \tag{6.8}$$

для которого точка $x = 0$ является особой точкой.

**Определение 6.1.** Особая точка уравнения (6.7) называется *устранимой*, если вектор $P$ не принадлежит $\operatorname{Im} A_0$.

Введенное определение объясняет следующая лемма.

**Лемма 6.2.** *Если точка $x = 0$ является устранимой особой точкой вырожденного дифференциального уравнения* (6.7), *то в проколотой окрестности точки $x = 0$ его решения эквивалентны решениям уравнения $x' = Q$.*

*Доказательство.* Так как оператор $A_0 + N(x)$ обратим в проколотой окрестности точки $x = 0$, то уравнение (6.7) имеет единственное решение, начинающееся в любой точке этой проколотой окрестности. Уравнение (6.7) можно переписать в виде

$$[\widetilde{A}_0 + N(x)]x' = P + \langle x', e_1^\star \rangle u_1. \tag{6.9}$$

Применяя регуляризатор Шмидта $\widetilde{A}_0, \widetilde{A}_0^{-1} = \Gamma$, и отмечая обратимость оператора $\widetilde{A}_0 + N(x)$ при малых $x$, введем обозначение $[\widetilde{A}_0 + N(x)]^{-1} = \Gamma(x), \Gamma(0) = \Gamma$. Тогда уравнение перепишется в виде

$$x' = \Gamma(x)P + \langle x', e_1^\star \rangle \Gamma(x)u_1.$$

Применение функционала $e_1^\star$ дает

$$\langle x', e_1^\star \rangle = \langle \Gamma(x)P, e_1^\star \rangle + \langle x', e_1^\star \rangle \langle \Gamma(x)u_1, e_1^\star \rangle \Rightarrow \langle x', e_1^\star \rangle = \langle \Gamma(x)P, e_1^\star \rangle (1 - \langle \Gamma(x)u_1, e_1^\star \rangle)^{-1}$$

Таким образом, (6.7) эквивалентно уравнению

$$x' = \Gamma(x)P + \langle \Gamma(x)P, e_1^\star\rangle(1 - \langle \Gamma(x)u_1, e_1^\star\rangle)^{-1}\Gamma(x)u_1.$$

Выражение $1 - \langle \Gamma(x)u_1, e_1^\star\rangle$ в проколотой окрестности точки $x = 0$ не обращается в ноль и поэтому сохраняет знак. Действительно, $\Gamma(x)u_1 = [A_0 + \langle \cdot, e_1^\star\rangle u_1 + N(x)]^{-1}u_1 \Rightarrow u_1 = [A_0 + \langle \cdot, e_1^\star\rangle u_1 + N(x)]\Gamma(x)u_1 = [A_0 + N(x)]\Gamma(x)u_1 + \langle \Gamma(x)u_1, e_1^\star\rangle)u_1$. Таким образом, $(1 - \langle \Gamma(x)u_1, e_1^\star\rangle)u_1 = [A_0 + N(x)]\Gamma(x)u_1$. Оба оператора $[A_0 + N(x)]$ и $\Gamma(x)$ обратимы при малых $x$, следовательно, $(1 - \langle \Gamma(x)u_1, e_1^\star\rangle) \neq 0$ в проколотой окрестности точки $x = 0$. Пусть для определенности $1 - \langle \Gamma(x)u_1, e_1^\star\rangle > 0$. Поскольку умножение на положительную скалярную функцию качественно не изменяет поведение решений системы, система (6.7) эквивалентна системе

$$x' = (1 - \langle \Gamma(x)u_1, e_1^\star\rangle)\Gamma(x)P + \langle \Gamma(x)P, e_1^\star\rangle \Gamma(x)u_1, \tag{6.10}$$

правая часть которой в точке $x = 0$ равна $\langle \Gamma P, e_1^\star\rangle e_1 = \langle P, \Gamma^\star e_1^\star\rangle e_1 = \langle P, u_1^\star\rangle e_1 \neq 0$. Таким образом, решения системы (6.7) в малой окрестности эквивалентны решениям системы $x' = e_1$. □

**Замечание 6.1.** Аналогичный результат справедлив для уравнения (6.9), если $F(0)$ не принадлежит $\operatorname{Im} A_0$.

Теперь надо исследовать решения уравнения (6.7) в окрестности точки $x = 0$ в случае, когда $P \in \operatorname{Im} A_0$. Было доказано, что решения уравнения (6.7) в окрестности точки $x = 0$ качественно эквивалентны решениям уравнения (6.10). При $P \in \operatorname{Im} A_0$ точка $x = 0$ является особой точкой уравнения (6.10), так как $\langle P, u_1^\star\rangle = 0$ и $\langle \Gamma u_1, e_1^\star\rangle = 1$. Вычислим линейную часть $L(v)$ векторного поля, задаваемого уравнением (6.10) в точке $x = 0$:

$$L(v) = (\sum_{i=1}^n v_i \frac{\partial\langle \Gamma(x)u_1, e_1^\star\rangle}{\partial x_i})\Gamma P + (\sum_{i=1}^n v_i \frac{\partial\langle \Gamma(x)P, e_1^\star\rangle}{\partial x_i})\Gamma u_1.$$

Заметим, что, так как $\Gamma(x) = [\widetilde{A}_0 + N(x)]^{-1}$, то $\dfrac{\partial \Gamma(0)}{\partial x_i} = -\Gamma \dfrac{\partial N(0)}{x_i}\Gamma = -\Gamma D_i N(0)\Gamma$ и, следовательно, $L(v) = (\sum\limits_{i=1}^n v_i\langle D_iN(0)e_1, u_1^\star\rangle)\Gamma P + (\sum\limits_{i=1}^n v_i\langle D_iN(0)\Gamma P, u_1^\star\rangle)\Gamma u_1$. Точка $x = 0$ не может быть простым собственным значением оператор-функции $A_0 + N(x)$ так как, в противном случае, она не будет особой точкой — оператор-функция будет необратима на гиперповерхности. Поэтому в силу замечания 4.1 $\langle D_iN(0)e_1, u_1^\star\rangle = 0$ и $L(v) = (\sum\limits_{i=1}^n v_i\langle D_iN(0)\Gamma P, u_1^\star\rangle)e_1$. Таким образом, $\operatorname{Im} L \leqslant 1$, и поэтому при $n > 1$ точка $x = 0$ заведомо не является гиперболической для векторного поля (6.10). Если же $\langle D_1N(0)\Gamma P, u_1^\star\rangle \neq 0$, то оператор $L(v)$ имеет собственный вектор $e_1$ соответствующий ненулевому собственному значению, т. е. «гиперболическая часть» оператора $L(v)$ ненулевая. Поэтому уравнение (6.10) можно упростить, используя редукцию на центральное многообразие [18]. Это видно на примере

$$\begin{pmatrix} x_2^2 & -x_1 \\ x_1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Как было показано, эта система эквивалентна следующей:

$$\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & x_1 \\ -x_1 & x_2^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Здесь $D_1N(0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ и $\Gamma P = (0 \quad 1)$. Таким образом, $e_1$ является собственным вектором оператора $L(v)$ и система преобразуется к виду: $x_1' = x_1$; $x_2' = x_2^2$.

Если же уравнение имеет вид

$$\begin{pmatrix} x_1^2 & -x_2 \\ x_2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \tag{6.11}$$

то система эквивалентна следующей:

$$\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & x_2 \\ -x_2 & x_1^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

и поэтому $D_1N(0) = 0$. Гиперболическая часть уравнения полностью отсутствует, и центральное многообразие совпадает со всем пространством $x_1' = x_2$; $x_2' = x_1^2$.

**Замечание 6.2.** Аналогично случаю «неустранимой» особенности можно рассмотреть уравнение

$$(A_0 + N(x))x' = F(0) + Bx + M(x). \tag{6.12}$$

Предполагая, что $F(0) \in \operatorname{Im} A_0$, при повторении вычислений леммы 6.2 вместо формулы (6.10) возникает формула

$$x' = (1 - \langle \Gamma(x)u_1, e_1^\star\rangle)\Gamma(x)[F(0) + Bx + M(x)] + \langle \Gamma(x)[F(0) + Bx + M(x)], e_1^\star\rangle \Gamma(x)u_1. \tag{6.13}$$

Для уточнения поведения решений уравнения (6.12) в окрестности нуля вычислим линейную часть векторного поля $\mathcal{L}$ (6.13). Так как

$$\Gamma(x) = \Gamma - \Gamma N(x)\Gamma + \ldots,$$

$$1 - \langle \Gamma(x)u_1, e_1^\star\rangle = \langle \Gamma N(x)\Gamma u_1, e_1^\star\rangle + \ldots,$$

то нулевая по $x$ степень в этом выражении отсутствует и

$$\mathcal{L}(x) = \langle \Gamma[DN(0)x]\Gamma u_1, e_1^\star\rangle \Gamma F(0) + \langle \Gamma Bx, e_1^\star\rangle \Gamma u_1 + \langle \Gamma[DN(0)x]\Gamma F(0), e_1^\star\rangle \Gamma u_1.$$

Как и выше, $\langle \Gamma[DN(0)x]\Gamma u_1, e_1^\star\rangle = 0$, потому что $x = 0$ является особой точкой вырожденного дифференциального уравнения (6.11).

Следовательно, $\mathcal{L}(x) = \langle Bx - [DN(0)x]\Gamma F(0), u_1^\star\rangle e_1$. Опять для оператора $\mathcal{L}$ выполнено условие $\operatorname{Im}\mathcal{L} \leqslant 1$ и уравнение (6.12) может быть упрощено, если $\langle Be_1 - [DN(0)e_1]\Gamma F(0), u_1^\star\rangle \neq 0$.

Проиллюстрируем это на примере. Выше было показано,что система (6.11) имеет двумерное центральное многообразие. При добавлении в правой части линейного оператора эта ситуация может измениться. Действительно, пусть

$$\begin{pmatrix} x_1^2 & -x_2 \\ x_2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}.$$

Как и ранее, эта система эквивалентна следующей:

$$\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & x_2 \\ -x_2 & x_1^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ x_2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix},$$

или

$$x_1' = x_2 - x_1; \quad x_2' = x_1^2 + x_1x_2. \tag{6.14}$$

Это полугиперболическая система с одномерным центральным многообразием. Следуя предложенной в [18] методике, можно вычислить приближенное уравнение для центрального многообразия $x_1 = x_2 - 2x_2^2 + 14x_2^3 + \ldots$. Замена $x_1 = v + x_2$ приводит систему к виду $v' = -v + 2x_2^2 + 3x_2v + v^2$; $x_2' = 2x_2^2 + 3x_2v + v^2$. Далее используется [18, формула (1.3.6)] для нахождения центрального многообразия $\varphi(x)$: $\varphi'(x)[\varphi^2(x) + 3x\varphi(x) + 2x^2] + \varphi(x) - \varphi^2(x) - 3x\varphi(x) - 2x^2 = 0$. При поиске $\varphi(x)$ в виде $cx^2 + 0(x^3)$ определяется $c = 2$ и последующие слагаемые. Так же определяется приближенное значение векторного поля на многообразии $\varphi(x)$: $x_2' = 2x_2^2 - 6x_2^3 + \ldots$, а из [18, формулы (1.3.4)] следует $x_2' = \varphi^2(x) + 3x\varphi(x) + 2x^2$.

Однако, систему (6.12) можно исследовать в окрестности нуля методом раздувания особенности [1]. При замене $x_2 = ux_1$ система примет вид:

$$x_1' = ux_1 - x_1; \qquad u' = u + ux_1 + x_1 - u^2. \tag{6.15}$$

Эта система имеет на прямой $(0, u)$ две особые точки $(0, 0)$ и $(0, 1)$. Точка $(0, 0)$ — гиперболическая, а в окрестности точки $(0, 1)$ замена $u - 1 = v$ приводит систему (6.16) к виду:

$$x_1' = vx_1; \qquad v' = -v + vx_1 - 2x_1 - v^2. \tag{6.16}$$

Повторное использование метода раздувания особенности $x_1 = vw$ приводит систему (6.16) к виду

$$w' = w + 2vw - vw^2 - 2w^2; \qquad v' = -v - 2vw - v^2w - v^2. \tag{6.17}$$

Система (6.17) снова имеет две особые точки на прямой $(0, w)$: $(0, 0)$ и $(0, 1/2)$.

Точка $(0, 0)$, очевидно, — гиперболическая.

Для исследования поведения системы (6.17) в окрестности точки $(0,2)$ вводится замена: $s+1/2=w$. Тогда $s'=-s+(3/4)v+vs-vs^2-2s^2; v'=-2v-2vs-v^2s-(3/2)v^2$. Таким образом, точка $(0,2)$ — также гиперболическая.

**B. Бифуркация возникновения многообразия вырождения из особой точки.** Следующий пример иллюстрирует бифуркацию возникновения многообразия вырождения из особой точки:

$$\begin{pmatrix} x_1^2-2\lambda x_1-2\mu x_2 & -x_2 \\ x_2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix}=2\begin{pmatrix} x_2^3-\lambda x_2-\mu x_2^2-x_1x_2 \\ x_2^2+x_1+\mu x_2-\lambda \end{pmatrix}. \tag{6.18}$$

Нетрудно проверить, что многообразие вырождения: $(x_1-\lambda)^2+(x_2-\mu)^2=\lambda^2+\mu^2$ является фазовой кривой, соответствующей периодическому решению уравнения (6.18): $x_1-\lambda=\mu\sin 2t+\lambda\cos 2t$; $x_2-\mu=\lambda\sin 2t-\mu\cos 2t$. Также можно проверить, что невозмущенная система

$$\begin{pmatrix} x_1^2 & -x_2 \\ x_2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix}=2\begin{pmatrix} x_2^3-x_1x_2 \\ x_2^2+x_1 \end{pmatrix}.$$

не имеет периодических решений. Действительно, поскольку матрица вырождена только в точке $(0,0)$, то всюду, кроме этой точки, она имеет обратную:

$$\begin{pmatrix} x_1^2 & -x_2 \\ x_2 & 1 \end{pmatrix}^{-1}=(x_2^2+x_1^2)^{-1}\begin{pmatrix} 1 & x_2 \\ -x_2 & x_1^2 \end{pmatrix}^{-1}.$$

Поэтому вырожденная система ДУ имеет те же траектории, что и невырожденная:

$$\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x_2^3 \\ -x_2^4+x_1^3+x_2^2x_1^2+x_2^2x_1 \end{pmatrix}.$$

Покажем, что эта система не может иметь периодических решений. Прежде всего заметим, что она имеет только одну особую точку — $(0,0)$. Значит, периодическое решение, если оно существует, должно обходить вокруг $(0,0)$ [6, теорема 13.1]. Из вида векторного поля следует, что в верхней полуплоскости ($x_2>0$) $x_1$ возрастает, а в нижней полуплоскости — убывает, т. е. периодическое решение должно обходить точку $(0,0)$ по часовой стрелке. Но это невозможно, потому что на левой полуоси ($x_2=0,\ x_1<0$) векторное поле имеет вид $(0,x_1^3)$, т. е. направлено вниз. Таким образом, в построенном примере осуществляется бифуркация возникновения периодического решения из особой точки.

Также нетрудно построить пример векторного поля, для которого решения, начинающиеся на ответвляющемся многообразии вырождения, будут покидать это многообразие:

$$\begin{pmatrix} x_1^2-2\lambda x_1-2\mu x_2 & -x_2 \\ x_2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x_1^2-2\lambda x_1-2\mu x_2+x_2^2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Если точка $(x_1^0,\ x_2^0)$ принадлежит поверхности вырождения, соответствующей значениям параметров $(\lambda,\mu)$, то функция $x_1(t)=x_1^0+t,\ x_2(t)=x_2^0\exp(-t)$ будет решением системы, выходящим из этой точки. Наконец, у системы

$$\begin{pmatrix} x_1^2-2\lambda x_1-2\mu x_2 & -x_2 \\ x_2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

нет решений, начинающихся на многообразии вырождения. Действительно, эта система эквивалентна системе

$$\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix}=(x_1^2-2\lambda x_1-2\mu x_2+x_2^2)^{-1}\begin{pmatrix} 1 \\ -x_2 \end{pmatrix}$$

и $x_1'\to\infty$, когда точка приближается к многообразию вырождения.

**C. Периодические решения вырожденных дифференциальных уравнений с особой точкой.** Следующий пример показывает, что вырожденные дифференциальные уравнения с особой точкой могут иметь периодические решения:

$$\begin{pmatrix} x_1^2+x_2^2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x_1^2x_2^3+x_2^5 \\ -x_1 \end{pmatrix}.$$

Решениями этого вырожденного дифференциального уравнения являются линии уровня функции $G(x_1,x_2)=x_1^2/2+x_2^4/4$.

Приведем теперь некоторые достаточные условия, когда вырожденное дифференциальное уравнение с особой точкой вида

$$\begin{pmatrix} a_{11}(x) & a_{12}(x) \\ a_{21}(x) & a_{22}(x) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P \\ Q \end{pmatrix} \tag{6.19}$$

не имеет периодических решений. Предполагается, что система определена в односвязной области $\mathcal{D}$, содержащей 0, и при $x \neq 0$ определитель $\Delta(x) = a_{11}(x)a_{22}(x) - a_{12}(x)a_{21}(x) \neq 0$.

Если $\gamma(t) = (x_1(t), x_2(t))$ — периодическое решение системы, лежащее в области $\mathcal{D}$, то оно будет также периодическим решением системы

$$\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{22}(x) & -a_{12}(x) \\ -a_{21}(x) & a_{11}(x) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P \\ Q \end{pmatrix}. \tag{6.20}$$

Ранее было доказано, что если $(P, Q)$ не принадлежит $\operatorname{Im} A_0$, то $(0, 0)$ не является особой точкой системы (6.20). Так как определитель системы (6.20) не обращается в ноль в остальных точках области $\mathcal{D}$, то столбцы матрицы $A(t)$ линейно независимы и, следовательно, система (6.20) не имеет особых точек в области $\mathcal{D}$. Значит, она не может иметь там и периодических решений.

Рассмотрим теперь случай, когда $(P, Q)$ принадлежит $\operatorname{Im} A_0$. Тогда линейной заменой переменных систему (6.19) можно привести к виду

$$\begin{pmatrix} 1 + a_{11}(x) & a_{12}(x) \\ a_{21}(x) & a_{22}(x) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P \\ 0 \end{pmatrix}, \tag{6.21}$$

где $a_{11}(0) = a_{12}(0) = a_{21}(0) = a_{22}(0) = 0$.

**Лемма 6.3.** *Вырожденное дифференциальное уравнение* (6.19) *не имеет периодических орбит в окрестности нуля.*

*Доказательство.* В случае, когда $(P, Q)$ принадлежит $\operatorname{Im} A_0$, система (6.20) имеет вид

$$x_1' = Pa_{22}(x); x_2' = -Pa_{21}(x). \tag{6.22}$$

Предположим, что $\gamma(t) = (x_1(t), x_2(t))$ — периодическая орбита уравнения (6.21), а значит, и уравнения (6.22). Рассмотрим криволинейный интеграл по $\gamma(t)$: $\oint (1 + a_{11}(x))dx_1 + a_{12}(x)dx_2$. Так как $\gamma(t)$ — решение системы (6.21), этот интеграл равен

$$\int_0^T [(1 + a_{11}(\gamma(t)))x_1'(t) + a_{12}(\gamma(t))x_2'(t)]dt = \int_0^T P dt = PT.$$

С другой стороны, так как $\gamma(t)$ — решение системы (6.22), то

$$\int_0^T [(1 + a_{11}(\gamma(t)))Pa_{22}(\gamma(t)) + a_{12}(\gamma(t))Pa_{21}(\gamma(t))]dt = \int_0^T P\Delta(t)dt,$$

где $\Delta(t)$ — определитель матрицы $A(\gamma(t))$. Отсюда следует, что $\int_0^T \Delta(t)dt = T$. Однако, это равенство не может выполняться, так как $\gamma(t)$, очевидно, также является решением системы

$$\begin{pmatrix} 1 + a_{11}(x) & a_{12}(x) \\ ma_{21}(x) & ma_{22}(x) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P \\ 0 \end{pmatrix},$$

определитель которой равен $m\Delta(t)$. □

**Лемма 6.4** (Пуанкаре—Бендиксон—Дюлак). *Пусть в некоторой односвязной окрестности нуля $\mathcal{D}$ ноль является единственной особой точкой вырожденных дифференциальных уравнений* (6.22), (6.24).

1. *Если существует непрерывно дифференцируемая, сохраняющая знак функция $S(x)$ такая, что*

$$\frac{\partial[S(x)(1 + a_{11}(x))]}{\partial x_2} = \frac{\partial[S(x)a_{12}(x)]}{\partial x_1},$$

*то система*

$$\begin{pmatrix} 1+a_{11}(x) & a_{12}(x) \\ a_{21}(x) & a_{22}(x) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P \\ Q(x) \end{pmatrix}, \tag{6.23}$$

$Q(0)=0$, *не имеет в области $\mathcal{D}$ периодических решений.*

2. *Если существует непрерывно дифференцируемая функция $U(x)$ такая, что*

$$\frac{\partial[U(x)a_{21}(x)]}{\partial x_2} - \frac{\partial[U(x)a_{22}(x)]}{\partial x_1}$$

*сохраняет знак в области $\mathcal{D}$, то система*

$$\begin{pmatrix} 1+a_{11}(x) & a_{12}(x) \\ a_{21}(x) & a_{22}(x) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P(x) \\ 0 \end{pmatrix} \tag{6.24}$$

*не имеет в области $\mathcal{D}$ периодических решений.*

*Доказательство.* Пусть выполнено условие 1. Тогда в односвязной области $\mathcal{D}$ существует непрерывно дифференцируемая функция $F(x)$ такая, что $\dfrac{\partial F(x)}{\partial x_1} = S(x)(1+a_{11}(x))$ и $\dfrac{\partial F(x)}{\partial x_2} = S(x)a_{12}(x)$. Интегрирование по $\gamma(t)$ дает

$$\oint [S(x)(1+a_{11}(x))]dx_1 + S(x)a_{12}(x)dx_2 = F(\gamma(1)) - F(\gamma(0)) = 0.$$

С другой стороны, в силу первого уравнения (6.23) этот интеграл отличен от нуля:

$$P\oint S(\gamma(t))dt \neq 0,$$

поскольку функция $S(x)$ сохраняет знак.

В случае, когда выполнено условие 2 в силу второго уравнения (6.24), можно записать

$$0 = \oint U(x)a_{21}(x)dx_1 + U(x)a_{22}(x)dx_2,$$

откуда при использовании формулы Грина следует

$$0 = \int\int \{\frac{\partial[U(x)a_{21}(x)]}{\partial x_2} - \frac{\partial[U(x)a_{22}(x)]}{\partial x_1}\} dx_1dx_2,$$

что невозможно, поскольку в области $\mathcal{D}$ подынтегральная функция сохраняет знак. □

## 7. Заключение

Настоящая работа, как и предыдущая [8], выполнена с целью установления связей между методологическими принципами В. А. Треногина и В. М. Арнольда для исследования бифуркационных явлений в качественной теории дифференциальных уравнений [1, 2].

В теоремах существования точек и поверхностей бифуркации раздела 4 укажем наиболее значительные работы, предшествовавшие нашим результатам. Это, в первую очередь, исследования М. А. Красносельского [4, 5], в которых применялась теория степени отображения в бесконечномерных пространствах. В труднодоступной работе [15], по недоразумению не опубликованной кратко в Докладах АН СССР, впервые теория степени отображения (вращения векторного поля) была применена непосредственно к уравнениям разветвления согласно «принципу конечномерности» В. А. Треногина. Результатом явилась наиболее общая теорема существования точки бифуркации от собственного значения нечетной алгебраической кратности. Более доступные публикации [13, 16, 25]. К сожалению, редактор перевода книги Л. Ниренберга «Нелинейный функциональный анализ» [10] Н. Д. Введенская, не зная о работе [15], отметила, что первый результат применения степени отображения к уравнению разветвления был получен Дж. Изе, однако это был очень частный результат. Среди многих более поздних работ этого направления можно указать исследования Р. Дж. Магнуса [23]. Совсем недавно были опубликованы исследования Т. Ма [22] о существовании бифуркации при четно кратном корневом числе при линеаризации.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ


1. *Арнольд В. И.* Геометрические методы в теории обыкновенных дифференциальных уравнений. — М.: МЦНМО, 2002.
2. *Вайнберг М. М., Треногин В. А.* Теория ветвления решений нелинейных уравнений. — М.: Наука, 1969.
3. *Голубицкий М., Гийемен В.* Устойчивые отображения и их особенности. — М.: Мир, 1977.
4. *Красносельский М. А.* Топологические методы в теории нелинейных интегральных уравнений. — М.: ГИТТЛ, 1956.
5. *Красносельский М. А., Забрейко П. П.* Геометрические методы нелинейного анализа и его приложения. — М.: Наука, 1975.
6. *Красносельский М. А., Перов А. И., Поволоцкий А. И., Забрейко П. П.* Векторные поля на плоскости. — М.: Физматлит, 1963.
7. *Логинов Б. В., Русак Ю. Б.* Обобщенная жорданова структура в теории ветвления// В сб.: Прямые и обратные задачи для уравнений с частными производными и их приложения. — Ташкент: ФАН, 1978. — С. 113–148.
8. *Логинов Б. В., Русак Ю. Б., Ким-Тян Л. Р.* Нормальные формы дифференциальных уравнений с вырожденной матрицей при производной при существовании жордановой цепочки максимальной длины// В сб.: Некоторые актуальные проблемы современной математики и математического образования. Материалы научной конференции «Герценовские чтения», СПб., 15–20 апреля 2013. — *LXVI*. — С. 93–109.
9. *Логинов Б. В., Русак Ю. Б., Ким-Тян Л. Р.* Дифференциальные уравнения с вырожденным, линейно зависящим от неизвестного, оператором при производной// В сб.: Международная конференция (DIFF-2014) по дифференциальным уравнениям и динамическим системам, Суздаль 2014. Тезисы докладов. — М.: МИАН, 2014. — С. 106-107.
10. *Ниренберг Л.* Лекции по нелинейному функциональному анализу. — М.: Мир, 1977.
11. *Постников М. М.* Введение в теорию Морса. — М.: Наука, 1971.
12. *Русак Ю. Б.* Обобщенная жорданова структура в теории ветвления// Дисс. к.ф.-м.н. — Ин-т мат. им. В. И. Романовского АН УзССР, 1979.
13. *Сидоров Н. А.* Общие вопросы регуляризации в задачах теории ветвления. — Иркутск: Изд-во Иркут. ун-та, 1982.
14. *Треногин В. А.* Функциональный анализ. — М.: Физматлит, 2002.
15. *Треногин В. А., Сидоров Н. А.* Исследование точек бифуркации и непрерывных ветвей решений нелинейных уравнений// В сб.: Дифференциальные и интегральные уравнения. — Иркутск, 1972. — *1*. — С. 216–248.
16. *Треногин В. А., Филиппов А. Ф.* (ред.) Нелинейный анализ и нелинейные дифференциальные уравнения. — М.: Физматлит, 2003.
17. *Хартман Ф.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. — М.: Мир, 1970.
18. *Carr J.* Application of centra manifold theory// Appl. Math. Sci. — 1981. — *35*.
19. *Loginov B. V.* Branching equation in the root subspaces// Nonlinear Anal. — 1998. — *32*, № 3. — С. 439–448.
20. *Loginov B. V., Rousak Yu. B.* Generalized Jordan structure in the problem of stability of bifurcation equations// Nonlinear Anal. — 1991. — *17*, № 3. — С. 219–231.
21. *Loginov B. V., Rousak Yu. B., Kim-Tyan L. R.* Differential equations with degenerated variable operator at the derivative// В сб.: Current Trends in Analysis and Its Applications. Proceedings of the 9th ISAAC Congress, Kraków 2013. — Basel: Birkhäuser, 2015. — С. 101–108.
22. *Ma T., Wang Sh.* Bifurcation theory and applications. — Hackensack: World Scientific, 2005.
23. *Magnus R. J.* A generalization of multiplicity and the problem of bifurcation// Proc. Lond. Math. Soc. (3). — 1976. — *32*. — С. 251–278.
24. *Marszalek W.* Fold points and singularity induced bifurcation in inviscid transonic flow// Phys. Lett. A. — 2012. — *376*, № 28-29. — С. 2032–2037 (doi:10.1016/j.physleta.2012.05.003).
25. *Sidorov N., Loginov B., Synitsin H. V., Falaleev M. V.* Lyapunov—Schmidt methods in nonlinear analysis and applications. — Dordrecht: Kluwer Academic Publ., 2012.


Б. В. Логинов
Ульяновский гос. технический университет (УлГТУ), Ульяновск, Россия
E-mail: panbobl@yandex.ru

Ю. Б. Русак
Департамент социального сервиса, Канберра, Австралия
E-mail: irousak@gmail.com

Л. Р. Ким-Тян
НИТУ МИСиС, Москва, Россия
E-mail: kim-tyan@yandex.ru

UDC 517.9.

## Differential Equations with Degenerate, Depending on the Unknown Function Operator at the Derivative

© 2016 **B. V. Loginov, Yu. B. Rousak, L. R. Kim-Tyan**

**Abstract**. We develop the theory of generalized Jordan chains of multiparameter operator functions $A(\lambda)$ : $E_1 \to E_2$, $\lambda \in \Lambda$, $\dim \Lambda = k$, $\dim E_1 = \dim E_2 = n$, where $A_0 = A(0)$ is a noninvertible operator. To simplify the notation, in Secs. 1–3 the geometric multiplicity $\lambda_0$ is set to 1, i. e. $\dim N(A_0) = 1$, $N(A_0) = \mathrm{span}\{\varphi\}$, $\dim N^*(A_0^*) = 1$, $N^*(A_0^*) = \mathrm{span}\{\psi\}$, and the operator function $A(\lambda)$ is supposed to be linear with respect to $\lambda$. For the polynomial dependence of $A(\lambda)$, in Sec. 4 we consider a linearization. However, the bifurcation existence theorems hold in the case of several Jordan chains as well.

We consider applications to degenerate differential equations of the form $[A_0 + R(\cdot, x)]x' = Bx$.

### REFERENCES

1. V. I. Arnol'd, *Geometricheskie metody v teorii obyknovennykh differentsial'nykh uravneniy* [Geometric Methods in the Theory of Ordinary Differential Equations], MTsNMO, Moscow, 2002 (in Russian).
2. M. M. Vaynberg and V. A. Trenogin, *Teoriya vetvleniya resheniy nelineynykh uravneniy* [Branching Theory of Solutions to Nonlinear Equations], Nauka, Moscow 1969 (in Russian).
3. M. Golubitskiy and V. Giyemen, *Ustoychivye otobrazheniya i ikh osobennosti* [Stable Mappings and Their Singularities], Mir, Moscow, 1977 (in Russian).
4. M. A. Krasnosel'skij, *Topologicheskie metody v teorii nelineynykh integral'nykh uravneniy* [Topological Methods in the Theory of Nonlinear Integral Equations], GITTL, Moscow, 1956 (in Russian).
5. M. A. Krasnosel'skij, and P. P. Zabreyko, *Geometricheskie metody nelineynogo analiza i ego prilozheniya* [Geometric Methods of Nonlinear Analysis and Its Applications], Nauka, Moscow, 1975 (in Russian).
6. M. A. Krasnosel'skij, A. I. Perov, A. I. Povolotskij, and P. P. Zabreyko, *Vektornye polya na ploskosti* [Vector Fields in a Plane], Fizmatlit, Moscow, 1963 (in Russian).
7. B. V. Loginov and Yu. B. Rusak, "Obobshchennaya zhordanova struktura v teorii vetvleniya" [Generalized Jordan structure in the branching theory], In: *Pryamye i obratnye zadachi dlya uravneniy s chastnymi proizvodnymi i ikh prilozheniya* [Direct and Inverse Problems for Partial Differential Equations and Their Applications], FAN, Tashkent, 1978, 113–148 (in Russian).
8. B. V. Loginov, Yu. B. Rusak, and L. R. Kim-Tyan, "Normal'nye formy differentsial'nykh uravneniy s vyrozhdennoy matritsey pri proizvodnoy pri sushchestvovanii zhordanovoy tsepochki maksimal'noy dliny" [Normal forms of differential equations with degenerate matrix at the derivative when the Jordan chain of maximal length exists], In: "Nekotorye aktual'nye problemy sovremennoy matematiki i matematicheskogo obrazovaniya. Materialy nauchnoy konferentsii "Gertsenovskie chteniya"" [Some actual problems of contemporary mathematics and mathematical education. Proceedings of scientific conference "Hertsen readings"], Saint-Petersburg, April 15–20, 2013, **LXVI**, 93–109 (in Russian).
9. B. V. Loginov, Yu. B. Rusak, and L. R. Kim-Tyan, "Differentsial'nye uravneniya s vyrozhdennym, lineyno zavisyashchim ot neizvestnogo, operatorom pri proizvodnoy" [Differential Equations with Degenerate, Depending on the Unknown Function Operator at the Derivative], In: *Mezhdunarodnaya konferentsiya* (DIFF-2014) *po differentsial'nym uravneniyam i dinamicheskim sistemam. Tezisy dokladov* [Int. Conf. on Differential Equations and Dynamic Systems. Abstracts], Suzdal', 2014, MIAN, Moscow, 2014, 106-107 (in Russian).
10. L. Nirenberg, *Lektsii po nelineynomu funktsional'nomu analizu* [Topics in Nonlinear Functional Analysis], Mir, Moscow, 1977 (in Russian).

11. M. M. Postnikov, *Vvedenie v teoriyu Morsa* [Introduction to the Morse Theory], Nauka, Moscow, 1971 (in Russian).
12. Yu. B. Rusak, *Obobshchennaya zhordanova struktura v teorii vetvleniya* [Generalized Jordan Structure in the Branching Theory], PhD Thesis, In-t mat. im. V. I. Romanovskogo AN UzSSR [V. I. Romanovskiy Math. Inst.], Tashkent, 1979 (in Russian).
13. N. A. Sidorov, *Obshchie voprosy regulyarizatsii v zadachakh teorii vetvleniya* [General Issues of Regularization in Problems of the Branching Theory], Izd-vo Irkut. un-ta, Irkutsk, 1982 (in Russian).
14. V. A. Trenogin, *Funktsional'nyj analiz* [Functional Analysis], Fizmatlit, Moscow, 2002 (in Russian).
15. V. A. Trenogin and N. A. Sidorov, "Issledovanie tochek bifurkatsii i nepreryvnykh vetvey resheniy nelineynykh uravneniy" [Study of bifurcation points and continuous branches of solutions to nonlinear equations]// In: *Differentsial'nye i integral'nye uravneniya* [Differential and Integral Equations], Irkutsk, 1972, **1**, 216–248 (in Russian).
16. V. A. Trenogin and A. F. Filippov (eds.), *Nelineynyj analiz i nelineynye differentsial'nye uravneniya* [Nonlinear Analysis ans Nonlinear Differential Equations], Fizmatlit, Moscow, 2003 (in Russian).
17. F. Khartman, *Obyknovennye differentsial'nye uravneniya* [Ordinary Differential Equations], Mir, Moscow, 1970 (in Russian).
18. J. Carr, "Application of centra manifold theory," *Appl. Math. Sci.*, 1981, **35**.
19. B. V. Loginov, "Branching equation in the root subspaces," *Nonlinear Anal.*, 1998, **32**, No. 3, 439–448.
20. B. V. Loginov and Yu. B. Rousak, "Generalized Jordan structure in the problem of stability of bifurcation equations," *Nonlinear Anal.*, 1991, **17**, No. 3, 219–231.
21. B. V. Loginov, Yu. B. Rousak, and L. R. Kim-Tyan, "Differential equations with degenerated variable operator at the derivative," In: *Current Trends in Analysis and Its Applications*, Proceedings of the 9th ISAAC Congress, Kraków 2013, Birkhäuser, Basel, 2015, 101–108.
22. T. Ma and Sh. Wang, *Bifurcation Theory and Applications*, World Scientific, Hackensack, 2005.
23. R. J. Magnus, "A generalization of multiplicity and the problem of bifurcation," *Proc. Lond. Math. Soc. (3).*, 1976, **32**, 251–278.
24. W. Marszalek, "Fold points and singularity induced bifurcation in inviscid transonic flow," *Phys. Lett. A.*, 2012, **376**, No. 28-29, 2032–2037 (doi:10.1016/j.physleta.2012.05.003).
25. N. Sidorov, B. Loginov, H. V. Synitsin, and M. V. Falaleev, *Lyapunov–Schmidt Methods in Nonlinear Analysis and Applications*, Kluwer Academic Publ., Dordrecht, 2012.

B. V. Loginov
Ul'yanovsk State Technical University, Ul'yanovsk, Russia
E-mail: panbobl@yandex.ru

Yu. B. Rousak
Department of Social Service, Canberra, Australia
E-mail: irousak@gmail.com

L. R. Kim-Tyan
National University of Science and Technology «MISIS», Moscow, Russia
E-mail: kim-tyan@yandex.ru