Современная математика. Фундаментальные направления. Том 59 (2016). С. 97–118

УДК 517.9

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ВОЗМУЩЕННЫХ ПОЛУГРУПП В ПОЛУУПОРЯДОЧЕННЫХ БАНАХОВЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

© 2016 г. **М. И. КАМЕНСКИЙ, И. М. ГУДОШНИКОВ**

Аннотация. В статье доказываются необходимое и достаточное условия устойчивости возмущенных полугрупп линейных операторов в банаховых пространствах с конусами и приводятся примеры использования этих теорем. В частности, рассматривается пример с возмущением краевой задачи линейным оператором с запаздыванием и формулируется условие устойчивости полученной возмущенной полугруппы.

СОДЕРЖАНИЕ

1. Введение

Рассмотрим возмущенную задачу Коши в банаховом пространстве

$$\begin{cases} y' = -(\Gamma + M)y, \\ y(0) = y_0, \end{cases}$$

где Γ — замкнутый, но (вообще говоря) неограниченный оператор, а M — ограниченный оператор, считающийся возмущением. Как будет показано в данной статье, наличие инвариантного относительно Γ и M конуса позволяет доказать связь устойчивости полугруппы, порожденной этой задачей (другими словами, диссипативности оператора $-\Gamma + M$), и свойством оператора $\Gamma^{-1}M$ быть сжимающим. Точные формулировки выглядят следующим образом:

Теорема 3.1. *Пусть F — вещественное банахово пространство, $K \subset F$ — воспроизводящий конус и норма пространства F монотонна. Пусть заданы линейные операторы*:

- $\Gamma : D(\Gamma) \subset F \to F$ *такой, что $-\Gamma$ — производящий оператор сильно непрерывной полугруппы, причем $e^{-\Gamma t} \geqslant 0$ в смысле K для всех $t \geqslant 0$,*
- $M : F \to F$*, ограниченный и $M \geqslant 0$ в смысле K,*

и пусть композиция $\Gamma^{-1}M$ вполне непрерывна.

Тогда при любом $t > 0$

$$\rho(e^{(-\Gamma+M)t}) < 1 \Longrightarrow \rho(\Gamma^{-1}M) < 1.$$

Теорема 5.1. *Пусть F — вещественное банахово пространство, а $K \subset F$ — воспроизводящий конус. Пусть заданы линейные операторы*:

- $\Gamma : D(\Gamma) \subset F \to F$, *такой, что Γ^{-1} вполне непрерывен, $-\Gamma_C$ является производящим оператором аналитической и равномерно экспоненциально устойчивой полугруппы, а $e^{-\Gamma t}$ положительны в смысле K для всех $t \geqslant 0$;*
- $M : F \to F$ *— ограничен и $M \geqslant 0$ в смысле K.*

Тогда для любого $t > 0$

$$\rho(\Gamma^{-1}M) < 1 \Longrightarrow \rho(e^{(-\Gamma+M)t}) < 1.$$

Разделы 3, 4, 5 содержат доказательства этих теорем.

В статье также рассмотрены два примера использования теоремы 5.1. Первый пример, описываемый в разделе 6, касается операторов, действующих в пространстве последовательностей l_1 (бесконечных матриц, их теорию можно найти в [11, 14, 15]). Как будет показано, теорема 5.1 позволяет получить условие устойчивости возмущенной полугруппы, порожденной такими операторами, отличающееся от обычной локализации собственных значений кругами Гершгорина [15].

Вторым примером, который описывается в разделе 7, является задача Коши с производящим оператором $(-\Gamma)(f) = f'' - af$ с краевыми условиями Неймана. Все условия теоремы 5.1 проверяются явно через вычисление функции Грина и проверку положительности и аналитичности получаемой полугруппы. В качестве возмущения рассматриваются операторы с запаздыванием, что стало возможным благодаря характеру условий, наложенных на оператор M в теореме 5.1 (инвариантность конуса и оценка на спектральный радиус/норму).

Для удобства читателя в разделе 2, перед изложением основных результатов, приведены используемые сведения о конусах, полугруппах и комплексификации пространства.

2. Предварительные сведения

2.1. Конуса в банаховом пространстве. В данном разделе приведены основные определения, относящиеся к конусам в банаховом пространстве, которые будут использованы в статье. Источниками по данной теме могут являться [5, 8].

Определение 2.1. Замкнутое подмножество K вещественного банахова пространства X называется *конусом*, если:

1. $\alpha \geqslant 0$, $x \in K \implies \alpha x \in K$,
2. $x, y \in K \implies x + y \in K$,
3. $K \cap (-K) = 0$.

Конус K задает *отношение полуупорядоченности* в пространстве X. Если $x, y \in X$ и $x - y \in K$, то пишут, что $x \geqslant y$.

Определение 2.2. Конус K называется *воспроизводящим*, если

$$\forall (x \in X) \exists (u, v \in K)[x = u - v].$$

Определение 2.3. Норма в пространстве X с конусом K называется *монотонной*, если

$$0 \leqslant x \leqslant y \implies \|x\| \leqslant \|y\|.$$

Определение 2.4. Оператор $A : X \to X$ называется *положительным* (обозначается $A \geqslant 0$), если $A(K) \subset K$.

2.2. Теория полугрупп. Данный раздел, содержащий основные общеизвестные понятия и факты из теории полугрупп, основан на [12]. Также этот материал содержится (в той или иной степени) в [1, 6, 7, 10, 13].

Определение 2.5. Семейство $\{T(t)\}_{t\geqslant 0}$ ограниченных линейных операторов на банаховом пространстве X называется (однопараметрической) *полугруппой* на X, если оно удовлетворяет

$$\begin{cases} T(t+s) = T(t)T(s) \quad \forall (t,s \geqslant 0), \\ T(0) = I. \end{cases}$$

Определение 2.6. Полугруппа $\{T(t)\}_{t\geqslant 0}$ называется *сильно непрерывной*, или C_0-*полугруппой*, если функции

$$\xi_x : \mathbb{R}_+ \to X,$$
$$\xi_x : t \mapsto \xi_x(t) := T(t)x$$

непрерывны при любом $x \in X$.

Определение 2.7. *Производящим оператором* сильно непрерывной полугруппы $T(t)$ называется оператор, определенный на множестве

$$D(A) = \{x | \xi_x \text{ дифференцируема}\}$$

и действующий по правилу

$$A : x \mapsto \lim_{t\downarrow 0} \frac{T(t)x - x}{t}.$$

Мы часто будем обозначать полугруппу $T(t)$ как e^{At}.

Свойство 2.1. *Производящий оператор сильно непрерывной полугруппы всегда является линейным замкнутым плотно определенным оператором.*

Свойство 2.2. *Если* $\{T(t)\}_{t\geqslant 0}$ — *сильно непрерывная полугруппа, то существуют такие* $\omega \in \mathbb{R}$ *и* $M \geqslant 1$, *что для всех* $t \geqslant 0$

$$\|T(t)\| \leqslant M e^{\omega t}.$$

Определение 2.8. Пусть дана сильно непрерывная полугруппа $\mathcal{T} = \{T(t)\}_{t\geqslant 0}$. Тогда ее *порядком роста* называется число

$$\omega_0(\mathcal{T}) = \inf\left\{\omega \in \mathbb{R} : \exists (M_\omega) \forall (t \geqslant 0) \left[\|T(t)\| \leqslant M_\omega e^{\omega t}\right]\right\}.$$

Свойство 2.3. *Если* $\mathcal{T} = \{T(t)\}_{t\geqslant 0}$ — *сильно непрерывная полугруппа, то при любом* $t \geqslant 0$

$$\rho(T(t)) = e^{\omega_0(\mathcal{T})t},$$

где ρ — *спектральный радиус.*

Определение 2.9. Полугруппа $\{T(t)\}_{t\geqslant 0}$ называется *равномерно экспоненциально устойчивой*, если

$$\exists (\varepsilon > 0) \left[\lim_{t\to\infty} e^{\varepsilon t} \|T(t)\| = 0\right].$$

Свойство 2.4. *Сильно непрерывная полугруппа* $\{T(t)\}_{t\geqslant 0}$ *равномерно экспоненциально устойчива тогда и только тогда, когда ее порядок роста* $\omega_0(\mathcal{T}) < 0$.

Определение 2.10. Пусть X — банахово пространство, а $A : D(A) \subset A \to X$ — замкнутый оператор. Тогда

$$s(A) := \sup\{\operatorname{Re} \lambda \in \sigma(A)\}$$

называется *спектральной границей.*

Определение 2.11. *Существенным порядком роста* полугруппы $\mathcal{T} = \{T(t)\}_{t\geqslant 0}$, порожденной производящим оператором A, называется число

$$\omega_{ess}(\mathcal{T}) = \omega_{ess}(A) := \inf_{t>0} \frac{1}{t} \ln \|T(t)\|_{ess},$$

где

$$\|D\|_{ess} = \inf\{\|D - K\| : K \text{— компактный}\}$$

для произвольного оператора D.

Свойство 2.5. *Пусть A является производящим оператором сильно непрерывной полугруппы $\mathcal{T} = \{T(t)\}_{t\geqslant 0}$. Тогда*

$$\omega_0(\mathcal{T}) = \max\{\omega_{ess}(\mathcal{T}), s(A)\}.$$

Свойство 2.6. *Пусть A является производящим оператором сильно непрерывной полугруппы $\mathcal{T} = \{T(t)\}_{t\geqslant 0}$. Тогда при любом $t_0 > 0$*

$$-\infty \leqslant s(A) \leqslant \omega_0(\mathcal{T}) = \inf_{t>0} \frac{1}{t} \ln \|T(t)\| = \lim_{t\to\infty} \frac{1}{t} \ln \|T(t)\| = \frac{1}{t_0} \ln \rho(T(t_0)) < +\infty.$$

Свойство 2.7. *Пусть A является производящим оператором сильно непрерывной полугруппы $\mathcal{T} = \{T(t)\}_{t\geqslant 0}$. Если K — компактный оператор, то*

$$\omega_{ess}(A) = \omega_{ess}(A + K).$$

Также нам потребуется понятие аналитической полугруппы и некоторые общеизвестные факты:

Определение 2.12. Пусть

$$\Sigma_\delta = \{z \in \mathbb{C} : |\arg(z)| < \delta\} \setminus \{0\}.$$

Семейство ограниченных линейных операторов $\{T(z)\}_{z\in\Sigma_\delta\cup\{0\}}$, действующих в банаховом пространстве X, называется *аналитической полугруппой* (угла $\delta \in (0, \pi/2]$), если:

1. $T(0) = I$ и для всех $z_1, z_2 \in \Sigma_\delta$ выполнено $T(z_1 + z_2) = T(z_1)T(z_2)$.
2. Отображение $z \mapsto T(z)$ аналитично в Σ_δ.
3. Для всех $x \in X$ и $\delta' \in (0, \delta)$ выполнено $\lim\limits_{\Sigma'_\delta \to 0} T(z)x = x$.

Лемма 2.1. *Пусть $A : D(A) \subset F \to F$ — линейный оператор в комплексном банаховом пространстве F. Если $\vartheta \in \mathbb{R}$, то*

$$e^{-i\vartheta}\sigma(A) = \sigma(e^{i\vartheta}A).$$

Лемма 2.2. *Пусть A — производящий оператор аналитической полугруппы угла α. Возьмем $\vartheta \in (-\alpha, \alpha)$. Тогда $e^{A(e^{i\vartheta}t)}$ — сильно непрерывная полугруппа, и ее производящий оператор A_ϑ совпадает с $e^{i\vartheta}A$.*

2.3. Комплексификация пространств и операторов. Нам понадобится понятие комплексификации пространства и оператора, описанное в [2, §II.XIII.2].

По произвольному линейному оператору $A : F \to F$, где F — вещественное банахово пространство, может быть построен оператор $A_C : F_C \to F_C$, где $F_C = F \times F$ — комплексное банахово пространство с нормой

$$\|(x, y)\| = \max_{\theta\in[0,2\pi]} \|x \cos\theta + y \sin\theta\|,$$

$A_C : (x, y) \mapsto (Ax, Ay)$. Легко проверить, что:

Свойство 2.8. $A_C B_C = (AB)_C, (A^{-1})_C = (A_C)^{-1}$.

Свойство 2.9. *Для вещественных α, β выполнено $(\alpha A + \beta B)_C = \alpha A_C + \beta B_C$.*

Свойство 2.10. *A_C — компактный оператор тогда и только тогда, когда A — компактный оператор.*

Свойство 2.11. *$\|A_C\| = \|A\|$ благодаря формуле Гельфанда: $\rho(A_C) = \rho(A)$.*

Свойство 2.12. *e^{At} — сильно непрерывная полугруппа тогда и только тогда, когда $(e^{At})_C$ — сильно непрерывная полугруппа, при этом производящий оператор $(e^{At})_C$ совпадает с A_C, т. е.*

$$e^{A_C t} = (e^{At})_C.$$

Кроме того, благодаря свойству 2.11

$$\omega(e^{A_C}t) = \omega(e^{At}).$$

Под спектром, спектральным радиусом и собственным значением оператора A, определенного над вещественным банаховым пространством, понимаются таковые оператора A_C.

3. Необходимое условие устойчивости

Теорема 3.1. *Пусть F — вещественное банахово пространство, $K \subset F$ — воспроизводящий конус и норма пространства F монотонна. Пусть заданы линейные операторы:*

- $\Gamma : D(\Gamma) \subset F \to F$ *такой, что* $-\Gamma$ — *производящий оператор сильно непрерывной полугруппы, причем* $e^{-\Gamma t} \geqslant 0$ *в смысле* K *для всех* $t \geqslant 0$,
- $M : F \to F$, *ограниченный и* $M \geqslant 0$ *в смысле* K,

и композиция $\Gamma^{-1}M$ *вполне непрерывна. Тогда при любом* $t > 0$

$$\rho(e^{(-\Gamma+M)t}) < 1 \Longrightarrow \rho(\Gamma^{-1}M) < 1.$$

Доказательство. В силу компактности спектр $\Gamma^{-1}M$ состоит из изолированных собственных значений конечной кратности [3, III.6.7]. Если $\Gamma^{-1}M$ не имеет собственных значений, отличных от нуля, то $\rho(\Gamma^{-1}M) < 1$ и на этом доказательство завершено. В случае, если $\Gamma^{-1}M$ имеет ненулевые собственные значения, предположим противное заключению теоремы, $\rho(\Gamma^{-1}M) \geqslant 1$, и заметим, что

$$\Gamma^{-1} = R(0,\Gamma) = -R(0,-\Gamma) = \int\limits_0^{+\infty} e^{-\Gamma t} dt \geqslant 0,$$

поэтому оператор $\Gamma^{-1}M$ положителен как композиция положительных операторов и компактен по условию. Поскольку конус K — воспроизводящий, в силу [8, Теорема 6.1, §6] существует собственный вектор $x_0 \in K$, отвечающий собственному значению $\lambda = \rho(\Gamma^{-1}M)$, т. е.

$$\Gamma^{-1}Mx_0 = \lambda x_0,$$

иначе

$$x_0 = \frac{1}{\lambda}\Gamma^{-1}Mx_0,$$

$$\Gamma x_0 = \Gamma\frac{1}{\lambda}\Gamma^{-1}Mx_0 = \frac{1}{\lambda}\Gamma\Gamma^{-1}Mx_0 = \frac{1}{\lambda}Mx_0 \in K.$$

Тогда

$$(-\Gamma + M)x_0 = Mx_0 - \Gamma x_0 = \Gamma\Gamma^{-1}Mx_0 - \Gamma x_0 =$$
$$= \Gamma\lambda x_0 - \Gamma x_0 = \lambda\Gamma x_0 - \Gamma x_0 = (\lambda - 1)\Gamma x_0 \in K.$$

Рассмотрим задачу Коши

$$\begin{cases} y' = (-\Gamma + M)y, \\ y(0) = x_0 \end{cases} \tag{3.1}$$

и ее решение $y(t) = e^{(-\Gamma+M)t}x_0$. Для $t, \triangle t > 0$ имеем

$$y(t + \triangle t) - y(t) = e^{(-\Gamma+M)t}e^{(-\Gamma+M)\triangle t}x_0 - e^{(-\Gamma+M)t}x_0 =$$
$$= e^{(-\Gamma+M)t}(e^{(-\Gamma+M)\triangle t}x_0 - x_0) = e^{(-\Gamma+M)t}\int\limits_0^{\triangle t} e^{(-\Gamma+M)s}(-\Gamma + M)x_0\, ds =$$
$$= e^{(-\Gamma+M)t}\int\limits_0^{\triangle t} e^{(-\Gamma+M)s}(\lambda - 1)\Gamma x_0\, ds. \tag{3.2}$$

Заметим, что при любом $t \geqslant 0$ оператор $e^{(-\Gamma+M)t}$ положителен, поскольку к нему сходится итеративная схема $v_0 = I; v_{i+1} = Qv_i$ со следующим положительным оператором:

$$(Qv)(t) = e^{-\Gamma t} + \int\limits_0^t e^{(-\Gamma)(t-s)}Mv(s)ds.$$

По предположению противного, $\lambda = \rho(\Gamma^{-1}M) \geqslant 1$. Поэтому из (3.2) имеем

$$y(t + \triangle t) - y(t) \geqslant 0,$$

т. е.

$$y(t+\triangle t) \geqslant y(t)$$

в смысле K. В силу положительности $y(t+\triangle t)$ и $y(t)$ и монотонности нормы из этого следует

$$\|y(t+\triangle t)\| \geqslant \|y(t)\|,$$

что противоречит устойчивости полугруппы, следующей из посылки $\rho(e^{(-\Gamma+M)t}) < 1$, а значит, наше предположение неверно и $\rho(\Gamma^{-1}M) < 1$. □

4. Позитивирующее многозначное отображение

Пусть F — вещественное банахово пространство, а $K \subset F$ — воспроизводящий конус. Тогда на F можно следующим образом задать многозначное отображение:

$$P : F \longrightarrow 2^K,$$

$$P : x \longmapsto \{u+v | u, v \in K; u - v = x\},$$

где 2^K — множество всех подмножеств конуса K. Поскольку конус воспроизводящий, то $P(x)$ содержит хотя бы один элемент для каждого $x \in F$.

Выведем некоторые свойства отображения P.

Свойство 4.1. $\forall(x \in F)[P(x) \subset K]$.

Очевидно, так как каждый $y \in P(x)$ является суммой двух элементов K.

Свойство 4.2. $\forall(x \in F)[P(x) = P(-x)]$.

Пусть $y \in P(x)$. Значит, $\exists(u, v \in K)[(u+v=y) \wedge (u-v=x)]$. Тогда $v - u = -x \Rightarrow y = u + v \in P(-x)$, т. е. $P(x) \subset P(-x)$. Взяв в качестве x вектор $-x$, убедимся в верности обратного вложения.

Свойство 4.3. $\forall(x \in F, y \in P(x))[(y + x \in K) \wedge (y - x \in K)]$.

$y \in P(x) \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} \exists(u, v \in K)[(u+v=y) \wedge (u-v=x)]$. Тогда $y + x = u + v + u - v = 2u \in K$ и $y - x = u + v - (u - v) = u + v - u + v = 2v \in K$.

Свойство 4.4. $y \geqslant x, y \geqslant -x \Longrightarrow y \in P(x)$.

Требуемое разложение: $u = \dfrac{1}{2}(y+x) \in K$, $v = \dfrac{1}{2}(y-x) \in K$, $u+v=y$, $u-v=x$.

Свойство 4.5. $P(0) = K$.

По свойству 4.1 $P(0) \subset K$. Докажем обратное вложение. Пусть $y \in K$. Тогда $u = v = \dfrac{y}{2}$ будет требуемым разложением вектора 0.

Свойство 4.6. $\forall(x \in F)[b \in P(x), a \geqslant b \Longrightarrow a \in P(x)]$

$b \in P(x) \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} \exists(u, v \in K)[(u+v=b) \wedge (u-v=x)]$,
$a \geqslant b \Longrightarrow a - b \in K$.

Пусть $u_1 = u + \dfrac{a-b}{2} \in K$, $v_1 = v + \dfrac{a-b}{2} \in K$. Тогда $u_1 + v_1 = u + \dfrac{a-b}{2} + v + \dfrac{a-b}{2} = b + a - b = a$, $u_1 - v_1 = u + \dfrac{a-b}{2} - \left(v + \dfrac{a-b}{2}\right) = u - v = x$. Следовательно, $a \in P(x)$.

Свойство 4.7. $\forall(x \in F)[P(x)$— *замкнутое множество*$]$.

Пусть дана произвольная последовательность $\{y_i\}$ такая, что $\{y_i\} \subset P(x)$, $y_i \to y$. Тогда $\dfrac{1}{2}(y_i + x) \to \dfrac{1}{2}(y+x)$, $\dfrac{1}{2}(y_i - x) \to \dfrac{1}{2}(y-x)$. В силу замкнутости конуса и свойства 4.3 имеем: $u = \dfrac{1}{2}(y+x) \in K$, $v = \dfrac{1}{2}(y-x) \in K$, $u+v=y, u-v=x$, следовательно, $y \in P(x)$ и $P(x)$ замкнуто.

Свойство 4.8. $\forall(x \in F, \alpha \in \mathbb{R})[|\alpha| P(x) \subset P(\alpha x)]$

При $\alpha = 0$: $|\alpha|P(x) = 0 \subset P(\alpha x) = P(0) = K$.

При $\alpha > 0$: $|\alpha|P(x) = \alpha P(x)$. Пусть $y \in P(x)$, т. е. $\exists(u, v \in K)[(u+v = y) \wedge (u - v = x)]$. Тогда $\alpha y = \alpha(u+v) = \alpha u + \alpha v$, $\alpha u \in K, \alpha v \in K$. $\alpha u - \alpha v = \alpha(u-v) = \alpha x$, следовательно, $\alpha y \in P(\alpha x)$.

При $\alpha < 0$: $|\alpha|P(x) = -\alpha P(x)$. Пусть $y \in P(x)$, т. е. $\exists(u, v \in K)[(u+v = y) \wedge (u-v = x)]$. Тогда $-\alpha y = -\alpha(u+v) = (-\alpha u)+(-\alpha v)$, $-\alpha u \in K, -\alpha v \in K$. Поскольку $(-\alpha v)-(-\alpha u) = \alpha(u-v) = \alpha x$, следовательно, $-\alpha y \in P(\alpha x)$.

Свойство 4.9. $\forall(x_1, x_2 \in F)[P(x_1) + P(x_2) \subset P(x_1 + x_2)]$.

Пусть $y_1 \in P(x_1), y_2 \in P(x_2)$, т. е. $\exists(u_1, v_1 \in K)[(u_1 + v_1 = y_1) \wedge (u_1 - v_1 = x_1)], \exists(u_2, v_2 \in K)[(u_2 + v_2 = y_2) \wedge (u_2 - v_2 = x - 2)]$. Тогда $y_1 + y_2 = u_1 + v_1 + u_2 + v_2 = (u_1 + u_2) + (v_1 + v_2)$ и $(u_1 + u_2) - (v_1 + v_2) = u_1 - v_1 + u_2 - v_2 = x_1 + x_2$, следовательно, $y_1 + y_2 \in P(x_1 + x_2)$. Значит, $P(x_1) + P(x_2) \subset P(x_1 + x_2)$.

Свойство 4.10. *Пусть* $S : F \to F$ *— линейный положительный оператор. Тогда* $\forall(x \in F)[SPx \subset PSx]$

$$\begin{gathered}P(x) \overset{\text{def}}{=} \{u+v | u, v \in K; u - v = x\},\\ SP(x) = S\{u+v|u, v \in K; u-v = x\} =\\ = \{Su + Sv | u, v \in K; u - v = x\} \subset P(Su - Sv) = PS(u - v) = PS(x).\end{gathered}$$

5. Теорема о сохранении устойчивости

Лемма 5.1. *Пусть* F *— комплексное банахово пространство, и заданы линейные операторы*:

- $\Gamma : D(\Gamma) \subset F \to F$ *такой, что* Γ^{-1} *компактен,*
- $M : F \to F$ *— ограниченный оператор.*

Пусть также $\rho(\Gamma^{-1}M) < 1$. *Тогда оператор* $-\alpha\Gamma + M$ *при всех* $\alpha : \alpha' \leqslant \alpha < +\infty$, *где* $0 < \alpha' < 1$, *является оператором с компактной резольвентой.*

Доказательство. Возьмем $\varepsilon : 0 < \varepsilon < 1 - \rho(\Gamma^{-1}M)$. Мы можем ввести (см. [5, гл. 2, § 5, п. 2]) в F такую норму $\|\cdot\|_\varepsilon$, эквивалентную текущей, что норма операторов, построенная по ней, такова:

$$\|\Gamma^{-1}M\|_\varepsilon \leqslant \rho(\Gamma^{-1}M) + \varepsilon < \rho(\Gamma^{-1}M) + 1 - \rho(\Gamma^{-1}M) = 1.$$

Теперь выберем $\alpha' : \|\Gamma^{-1}M\|_\varepsilon < \alpha' < 1$. Можно видеть, что для произвольного $\alpha : \alpha' \leqslant \alpha < +\infty$ верна оценка $\left\|\dfrac{1}{\alpha}\Gamma^{-1}M\right\|_\varepsilon < 1$. Далее зафиксируем λ такое, что

$$0 < \lambda < \frac{1 - \|\frac{1}{\alpha}\Gamma^{-1}M\|_\varepsilon}{\|\frac{1}{\alpha}\Gamma^{-1}M\|_\varepsilon}.$$

Тогда

$$\|\frac{1}{\alpha}\Gamma^{-1}M\|_\varepsilon + \|\frac{\lambda}{\alpha}\Gamma^{-1}\|_\varepsilon < 1.$$

А это означает, что

$$\rho\left(\frac{1}{\alpha}\Gamma^{-1}M + \frac{\lambda}{\alpha}\Gamma^{-1}\right) \leqslant \|\frac{1}{\alpha}\Gamma^{-1}M + \frac{\lambda}{\alpha}\Gamma^{-1}\|_\varepsilon \leqslant \|\frac{1}{\alpha}\Gamma^{-1}M\|_\varepsilon + \|\frac{\lambda}{\alpha}\Gamma^{-1}\|_\varepsilon < 1.$$

Поэтому можно разложить в ряд Неймана резольвенту:

$$\begin{gathered}R_\lambda(-\alpha\Gamma + M) = (-\alpha\Gamma + M - \lambda I)^{-1} = \left(-\alpha\Gamma\left(I - \frac{1}{\alpha}\Gamma^{-1}M - \frac{\lambda}{\alpha}\Gamma^{-1}\right)\right)^{-1} =\\ = \left(I - \frac{1}{\alpha}\Gamma^{-1}M - \frac{\lambda}{\alpha}\Gamma^{-1}\right)^{-1}\left(-\frac{1}{\alpha}\Gamma^{-1}\right) = \sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{\alpha}\Gamma^{-1}M + \frac{\lambda}{\alpha}\Gamma^{-1}\right)^k\left(-\frac{1}{\alpha}\Gamma^{-1}\right).\end{gathered} \tag{5.1}$$

Из (5.1) видно, что $R_\lambda(-\alpha\Gamma + M)$ компактна, т. е. оператор $-\alpha\Gamma + M$ является оператором с компактной резольвентой(см. [3, гл. III, § 6, п. 8]) при всех $\alpha : \alpha' \leqslant \alpha < +\infty$, где $\alpha' < 1$. □

Лемма 5.2. *Пусть* F *— вещественное банахово пространство, а* $K \subset F$ *— воспроизводящий конус. Пусть заданы линейные операторы*:

- $\Gamma : D(\Gamma) \subset F \to F$, *такой, что* $-\Gamma$ *является производящим оператором сильно непрерывной полугруппы и эта полугруппа положительна в смысле* K *при каждом значении параметра,*
- $M : F \to F$ — *ограничен и положителен в смысле* K.

Пусть $\rho(\Gamma^{-1}M) < 1$. *Тогда операторы вида* $-\alpha\Gamma + M$ *имеют собственное значение с нулевой вещественной частью только при* $\alpha < 1$.

Доказательство. Предположим противное, что оператор $\alpha_0\Gamma + M$ имеет собственное значение $i\omega$, $\omega \in \mathbb{R}$, ему отвечает собственный вектор $x_0 + iy_0$ и при этом $\alpha_0 \geqslant 1$.

Частным решением уравнения

$$y' = (-\alpha_0\Gamma + M)y$$

при начальном условии $y(0) = x_0 + iy_0$ является функция

$$y_1(t) = (x_0 + iy_0)(\cos\omega t + i\sin\omega t) = (x_0\cos\omega t - y_0\sin\omega t) + i(x_0\sin\omega t + y_0\cos\omega t),$$

при начальном условии $y(0) = x_0 - iy_0$ — функция

$$y_2(t) = (x_0 - iy_0)(\cos\omega t - i\sin\omega t) = (x_0\cos\omega t - y_0\sin\omega t) - i(x_0\sin\omega t + y_0\cos\omega t),$$

а значит и их сумма (при начальном условии $y(0) = 2x_0$)

$$y^*(t) = 2x_0\cos\omega t - 2y_0\sin\omega t.$$

Решение y^* — периодическое (с периодом $T = \dfrac{2\pi}{\omega}$) и невырожденное (так как собственный вектор $x_0 + iy_0 \neq 0 + i0$). При этом данное решение лежит в вещественной компоненте F_C, и мы можем в доказательстве этой леммы работать далее с операторами, действующими в F, а не в F_C.

Поскольку y^* является решением неоднородной системы

$$\begin{cases} y' = -\alpha_0\Gamma y + My^*, \\ y(0) = 2x_0, \end{cases}$$

то

$$y^*(t) = \int\limits_{-\infty}^{t} e^{-\alpha_0\Gamma(t-s)}My^*(s)ds.$$

Рассмотрим семейство линейных операторов

$$Q_t : F \longrightarrow F,$$

$$Q_t : x \longmapsto \int\limits_{-\infty}^{t} e^{-\alpha_0\Gamma(t-s)}Mxds.$$

Покажем, что все Q_t совпадают с одним оператором $Q \overset{\text{def}}{=} \dfrac{1}{\alpha_0}\Gamma^{-1}M$. Для любого $x \in F$ верно:

$$Q_t x = \int\limits_{-\infty}^{t} e^{-\alpha_0\Gamma(t-s)}Mxds = \int\limits_{-\infty}^{t} e^{-\alpha_0\Gamma(t-s)}(-\alpha_0\Gamma)(-\alpha_0\Gamma)^{-1}Mxds =$$

$$\overset{s=t-q}{=} -\frac{1}{\alpha_0}\left(\int\limits_{+\infty}^{0}(-1)(-\alpha_0)\Gamma e^{-\alpha_0\Gamma q}dq\right)\Gamma^{-1}Mx = -\frac{1}{\alpha_0}\left(\int\limits_{0}^{+\infty}-\alpha_0\Gamma e^{-\alpha_0\Gamma q}dq\right)\Gamma^{-1}Mx =$$

$$= -\frac{1}{\alpha_0}e^{-\alpha_0\Gamma q}\Big|_{q=0}^{+\infty}\Gamma^{-1}Mx = -\frac{1}{\alpha_0}(0 - I)\Gamma^{-1}Mx = \frac{1}{\alpha_0}\Gamma^{-1}Mx,$$

т. е.

$$Q_t = \frac{1}{\alpha_0}\Gamma^{-1}M = Q.$$

Заметим, что $\alpha_0 \geqslant 1$ по предположению, а $\rho(\Gamma^{-1}M) < 1$, значит, в F можно ввести (см. [5, гл. 2, § 5, п. 2]) такую норму $\|\cdot\|_L$, эквивалентную заданной в F, что

$$\|\Gamma^{-1}M\|_L \overset{\text{def}}{=} \sup_{x\in F, x\neq 0} \frac{\|\Gamma^{-1}Mx\|_L}{\|x\|_L} < 1.$$

Тогда $\forall x, y \in F$ верно:

$$\|Q_t x - Q_t y\|_L = \|Q_t(x-y)\|_L = \|\frac{1}{\alpha_0}\Gamma^{-1}M(x-y)\|_L \leqslant \frac{1}{\alpha_0}\|\Gamma^{-1}M\|_L\|x-y\|_L$$

Значит, Q_t — сжимающее отображение, имеющее единственную неподвижную точку в F. Поскольку Q_t — линейный оператор, то этой неподвижной точкой является ноль.

Поскольку K — воспроизводящий конус, то на F можно задать отображение P. Рассмотрим множество

$$\widetilde{P} \overset{\text{def}}{=} \bigcap_{s\in\mathbb{R}} P(y^*(s)).$$

Каждое из множеств $P(y^*(s))$ замкнуто, поэтому $\widetilde{P}$ также замкнуто (пересечение любого числа замкнутых множеств замкнуто).

Покажем, что множество $\widetilde{P}$ непусто. Обозначим

$$a_1 = 2x_0 + 2y_0,$$
$$a_2 = 2x_0 - 2y_0.$$

Тогда

$$2x_0 = \frac{a_1 + a_2}{2},$$
$$2y_0 = \frac{a_1 - a_2}{2}.$$

Благодаря тому, что конус K воспроизводящий, существуют его элементы u_1, v_1, u_2, v_2 такие, что

$$a_1 = u_1 - v_1,$$
$$a_2 = u_2 - v_2.$$

Обозначим $\xi = u_1 + v_1 + u_2 + v_2$. Очевидно, $\xi \in K$ и при этом

$$\begin{aligned}\xi - y^*(t) &= u_1 + v_1 + u_2 + v_2 - 2x_0\cos\omega t + 2y_0 \sin\omega t = \\ &= u_1 + v_1 + u_2 + v_2 - \frac{a_1+a_2}{2}\cos\omega t + \frac{a_1 - a_2}{2}\sin\omega t = \\ &= u_1 + v_1 + u_2 + v_2 - \frac{u_1 - v_1 + u_2 - v_2}{2}\cos\omega t + \frac{u_1 - v_1 - u_2 + v_1}{2}\sin\omega t = \\ &= u_1\left(1 - \frac{\cos\omega t}{2} + \frac{\sin\omega t}{2}\right) + v_1\left(1 + \frac{\cos\omega t}{2} - \frac{\sin\omega t}{2}\right) + u_2\left(1 - \frac{\cos\omega t}{2} - \frac{\sin\omega t}{2}\right) + \\ &+ v_2\left(1 + \frac{\cos\omega t}{2} + \frac{\sin\omega t}{2}\right).\end{aligned}$$

Можно видеть, что множитель перед каждым вектором не может быть меньше нуля, поэтому $\xi - y^*(t) \in K$, т. е. $\xi \geqslant y^*(t)$ при всех t. Так как $-y^*(t) = y^*\Big(t + \dfrac{\pi}{\omega}\Big)$, то по свойству 4.4 имеем $\xi \in P(y^*(t))$, т. е. $\xi \in \widetilde{P}$.

Продолжим исследование операторов Q_t. Для всех $t \in \mathbb{R}$ и $\widetilde{y} \in \widetilde{P}$ имеем:

$$Q_t\widetilde{y} = \int\limits_{-\infty}^{t} e^{-\alpha_0\Gamma(t-s)}M\widetilde{y}ds = \int\limits_{-\infty}^{t} e^{-\alpha_0\Gamma(t-s)}M\left(\frac{\widetilde{y} + y^*(s)}{2} + \frac{\widetilde{y} - y^*(s)}{2}\right)ds =$$

$$= \int\limits_{-\infty}^{t} e^{-\alpha_0\Gamma(t-s)}M\frac{\widetilde{y} + y^*(s)}{2}ds + \int\limits_{-\infty}^{t} e^{-\alpha_0\Gamma(t-s)}M\frac{\widetilde{y} - y^*(s)}{2}ds \in \text{(так как интегралы неотрицательны)}$$

$$\in P\left(\int\limits_{-\infty}^{t} e^{-\alpha_0\Gamma(t-s)}M\frac{\widetilde{y}+y^*(s)}{2}ds - \int\limits_{-\infty}^{t} e^{-\alpha_0\Gamma(t-s)}M\frac{\widetilde{y}-y^*(s)}{2}ds\right) =$$

$$= P\left(\int\limits_{-\infty}^{t} e^{-\alpha_0\Gamma(t-s)}M\left(\frac{\widetilde{y}+y^*(s)}{2} - \frac{\widetilde{y}-y^*(s)}{2}\right)ds\right) =$$

$$= P\left(\int\limits_{-\infty}^{t} e^{-\alpha_0\Gamma(t-s)}My^*(s)ds\right) = P(y^*(t)).$$

Поскольку при любом t оператор $Q_t = Q$, то $\forall(t\in\mathbb{R})[Q\widetilde{y}\in P(y^*(t))]$, т. е. $Q\widetilde{y}\in\bigcap\limits_{t\in\mathbb{R}} P(y^*(t)) = \widetilde{P}$. Значит, отображение

$$\widetilde{Q} : \widetilde{P} \longrightarrow \widetilde{P},$$
$$\widetilde{Q} : x \longmapsto \frac{1}{\alpha_0}\Gamma^{-1}Mx$$

задано корректно. Поскольку множество $\widetilde{P}$ замкнуто, то его можно рассматривать как метрическое пространство с метрикой, порожденной нормой пространства F. Отображение $\widetilde{Q}$ является сжимающим, так же как и Q, поэтому оно имеет неподвижную точку $y_f\in\widetilde{P}$. Тогда y_f также является неподвижной точкой отображения Q, имеющей единственную неподвижную точку — ноль. Следовательно, $y_f = 0\in\widetilde{P}$.

Заметим, что $\widetilde{P}\subset P(y^*(0))$, поэтому $0\in P(y^*(0))$. То есть, $\exists(u_x, v_x\in K : u_x+v_x=0)[u_x-v_x = y^*(0)]$.

$$u_x - v_x = y^*(0) = 2x_0\cos(\omega 0) - 2y_0\sin(\omega 0) = 2x_0.$$

Но K — конус, поэтому $(u_x, v_x\in K)\wedge(u_x+v_x=0)\Longrightarrow(u_x=0)\wedge(v_x=0)$, значит, $u_x - v_x = 0-0=0=2x_0=x_0$.

Аналогично, $\widetilde{P}\subset P\Big(y^*\Big(\dfrac{\pi}{2\omega}\Big)\Big)\Longrightarrow 0\in P\Big(y^*\Big(\dfrac{\pi}{2\omega}\Big)\Big)\Longrightarrow\exists(u_y, v_y\in K : u_y+v_y=0)[u_y-v_y = y^*\Big(\dfrac{\pi}{2\omega}\Big) = -2y_0]\Longrightarrow(u_y=0)\wedge(v_y=0)\Longrightarrow u_y-v_y=0=-2y_0=y_0$.

То есть x_0 и y_0 одновременно равны нулю. Но такого не может быть, так как x_0+iy_0 — собственный вектор, который не может быть нулевым.

Имеем противоречие, значит, наше предположение неверно и $\alpha_0 < 1$. □

Теорема 5.1. *Пусть F — вещественное банахово пространство, а $K\subset F$ — воспроизводящий конус. Пусть заданы линейные операторы*:

- $\Gamma : D(\Gamma)\subset F\to F$, *такой, что* Γ^{-1} *вполне непрерывен,* $-\Gamma_C$ *является производящим оператором аналитической и равномерно экспоненциально устойчивой полугруппы, а* $e^{-\Gamma t}$ *положительны в смысле* K *для всех* $t\geqslant 0$.
- $M : F\to F$ — *ограничен и* $M\geqslant 0$ *в смысле* K.

Тогда для любого $t > 0$

$$\rho(\Gamma^{-1}M) < 1 \Longrightarrow \rho(e^{(-\Gamma+M)t}) < 1.$$

Доказательство. Поскольку полугруппа $e^{-\Gamma t}$ является сильно непрерывной, то найдутся такие c и ω_1, что $\|e^{-\Gamma t}\|\leqslant ce^{\omega_1 t}$, и, в силу ее устойчивости, $\omega_1 < 0$.

Пусть $\alpha\geqslant 0$. Тогда $D(-\alpha\Gamma) = D(-\Gamma)$ и $e^{(-\alpha\Gamma)t} = e^{-\Gamma(\alpha t)}$ — сильно непрерывная полугруппа, причем $\|e^{(-\alpha\Gamma)t}\|\leqslant ce^{\omega_1\alpha t}$.

Из леммы 5.1 следует, что существует такое $\alpha' : 0 < \alpha' < 1$, что $-\alpha\Gamma_C + M_C$, а значит, и $-\alpha\Gamma + M$ является оператором с компактной резольвентой при всех $\alpha\geqslant\alpha'$.

Рассмотрим подробнее семейство операторов

$$\{-\alpha\Gamma + M\}_{\alpha\geqslant\alpha'}. \tag{5.2}$$

Сразу можно сказать, что, поскольку M — ограниченный оператор, то согласно [12, теорема III.1.3, с. 158] $e^{(-\alpha\Gamma+M)t}$ — сильно непрерывная полугруппа и

$$\|e^{(-\alpha\Gamma+M)t}\| \leqslant ce^{(\alpha\omega_1+c\|M\|)t}.$$

Так как $\omega_1<0$, то при $\alpha > -\frac{c\|M\|}{\omega_1}$ мы получим, что $\alpha\omega_1+c\|M\|<0$, т. е. весь спектр $\sigma(-\alpha\Gamma+M)$ лежит в левой полуплоскости.

Поскольку $-\Gamma_C$ — производящий оператор аналитической полугруппы, то существует такое $\vartheta \in (0,\pi/2)$, что сужения $e^{-\Gamma_C z}$ на $\{e^{i\vartheta}t \,|\, t\geqslant 0\}$ и $\{e^{-i\vartheta}t \,|\, t\geqslant 0\}$ являются сильно непрерывными полугруппами. По лемме 2.2 их производящими операторами являются соответственно $-e^{i\vartheta}\Gamma_C$ и $-e^{-i\vartheta}\Gamma_C$. Тогда существуют такие $M_i, M_{-i}, \omega_i, \omega_{-i}$, что

$$\|e^{(-e^{i\vartheta}\Gamma_C)t}\| \leqslant M_i e^{\omega_i t},$$
$$\|e^{(-e^{-i\vartheta}\Gamma_C)t}\| \leqslant M_{-i} e^{\omega_{-i} t}.$$

Тогда

$$\|e^{(e^{i\vartheta}(-\alpha\Gamma_C+M))t}\| \leqslant M_i e^{(\alpha\omega_i+M_i\|M\|)t},$$
$$\|e^{(e^{-i\vartheta}(-\alpha\Gamma_C+M_C))t}\| \leqslant M_{-i} e^{(\alpha\omega_{-i}+M_{-i}\|M\|)t},$$

значит,

$$\operatorname{Re}\sigma(e^{i\vartheta}(-\alpha\Gamma_C+M_C)) \leqslant \alpha\omega_i+M_i\|M\|,$$
$$\operatorname{Re}\sigma(e^{-i\vartheta}(-\alpha\Gamma_C+M_C)) \leqslant \alpha\omega_{-i}+M_{-i}\|M\|,$$

и по лемме 2.1

$$\operatorname{Re} e^{-i\vartheta}\sigma(-\alpha\Gamma+M) \leqslant \alpha\omega_i+M_i\|M\|,$$
$$\operatorname{Re} e^{i\vartheta}\sigma(-\alpha\Gamma+M) \leqslant \alpha\omega_{-i}+M_{-i}\|M\|,$$

т. е. если $\lambda\in\sigma(-\alpha\Gamma+M)$, то

$$\operatorname{Re}\lambda\cos\vartheta+\operatorname{Im}\lambda\sin\vartheta \leqslant \alpha\omega_i+M_i\|M\|,$$
$$\operatorname{Re}\lambda\cos\vartheta-\operatorname{Im}\lambda\sin\vartheta \leqslant \alpha\omega_{-i}+M_{-i}\|M\|,$$

и наконец

$$\operatorname{Im}\lambda \leqslant -\operatorname{ctg}\vartheta\operatorname{Re}\lambda+\frac{\alpha\omega_i+M_i\|M\|}{\sin\vartheta}, \tag{5.3}$$
$$\operatorname{Im}\lambda \geqslant \operatorname{ctg}\vartheta\operatorname{Re}\lambda-\frac{\alpha\omega_{-i}+M_{-i}\|M\|}{\sin\vartheta}. \tag{5.4}$$

Таким образом, спектр $-\alpha\Gamma+M$ находится внутри сектора комплексной плоскости, обращенного расширяющейся частью в сторону убывания вещественной оси.

С другой стороны, как было сказано выше, при $\alpha\geqslant\alpha'$ оператор $-\alpha\Gamma+M$ — оператор с компактной резольвентой, поэтому его спектр при каждом фиксированном α состоит из изолированных собственных значений конечной кратности, а при изменении α собственные значения образуют непрерывные, возможно пересекающиеся, ветви $\mu(\alpha)$. При этом возможна ситуация, когда $|\mu(\alpha)|\to\infty$ при α, стремящемся к конечной величине. (Детальное обоснование см. в [3], в частности, теорема IV.3.16. Можно даже заметить, что семейство (5.2) является голоморфным типа (A) и ветви его собственных значений аналитичны.)

Пусть функция $\mu(\alpha)$, действующая из (a,b) или $[a,b)$ в $\mathbb{C}$ — любая ветвь собственного значения такая, что $\alpha'\leqslant a<1$, а $1<b\leqslant+\infty$. Рассмотрим несколько возможных случаев.

Если $b=+\infty$, то при $\alpha > -\dfrac{c\|M\|}{\omega_1}$, как было показано выше, $\operatorname{Re}\mu(\alpha)<0$. Поэтому, если ветвь $\mu(\alpha)$ не пересекает мнимую ось, то она целиком лежит в левой полуплоскости, если же она пересекает ее, то в силу леммы 5.2 — только при значениях $\alpha<1$, поэтому при $\alpha=1$ $\operatorname{Re}\mu(\alpha)<0$.

Если $b<\infty$, а при $\alpha\geqslant b$ функция $\mu(\alpha)$ не определена, то $|\mu(\alpha)|\to\infty$ при $\alpha\to b$ слева. Однако, из оценок (5.3), (5.4) видно, что неограниченный рост $|\mu(\alpha)|$ при ограниченных α возможен, только если $\operatorname{Re}\mu(\alpha)\to-\infty$. Очевидно, что тогда существует такое $\alpha\in(1,b)$, что $\operatorname{Re}\mu(\alpha)<0$. Поэтому, как и в предыдущем случае, $\mu(1)$ лежит в левой полуплоскости. Таким образом, мы показали, что весь спектр оператора $-\Gamma+M$ лежит в левой полуплоскости, т. е.

$$s(-\Gamma+M)\leqslant 0.$$

Так как $-\Gamma + M$ — оператор с компактной резольвентой, то единственной предельной точкой его спектра может быть ∞. С другой стороны, весь его спектр находится в секторе, определяемом (5.3), (5.3) при $\alpha = 1$. Поэтому ситуация, когда $\exists\{\lambda_i\} \subset \sigma(-\Gamma + M) : \operatorname{Re}\lambda_{\mathrm{i}} \to 0$ невозможна, а это значит, что

$$s(-\Gamma + M) < 0.$$

Поскольку $e^{(-\Gamma_C + M_C)t}$ — аналитическая полугруппа, то она непрерывна по норме при $t > 0$, а поскольку ее производящий оператор имеет компактную резольвенту, то данная полугруппа компактна при $t > 0$ (см. теорему 2.4.29 и последующую диаграмму в [12]). Существенный спектр отсутствует при $t > 0$, поэтому

$$\omega_0(e^{(-\Gamma+M)t}) = s(-\Gamma + M) < 0,$$

т. е. $e^{(-\Gamma+M)t}$ равномерно экспоненциально устойчива. □

6. Пример: бесконечные матрицы

Рассмотрим пространство последовательностей l_1 с конусом

$$K = \{\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}} \in l_1 : \forall(k \in \mathbb{N})[x_k \geqslant 0]\}.$$

Пусть $\{\gamma_k\}$ — последовательность положительных чисел такая, что $\lim\limits_{k\to\infty} \gamma_k = +\infty$. Тогда согласно [15, теорема 2] следующие операторы корректно определены, область определения $D(\Gamma)$ плотна в l_1, и Γ^{-1} компактен:

$$\Gamma : D(\Gamma) \subset l_1 \to l_1,$$

$$\Gamma x = \begin{pmatrix} \gamma_1 & 0 & \dots & 0 & \dots \\ 0 & \gamma_2 & \dots & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \\ 0 & 0 & \dots & \gamma_k & \dots \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \ddots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_k \\ \vdots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma_1 x_1 \\ \gamma_2 x_2 \\ \vdots \\ \gamma_i x_k \\ \vdots \end{pmatrix}, \quad \Gamma^{-1} x = \begin{pmatrix} \frac{1}{\gamma_1} & 0 & \dots & 0 & \dots \\ 0 & \frac{1}{\gamma_2} & \dots & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \\ 0 & 0 & \dots & \frac{1}{\gamma_k} & \dots \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \ddots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_k \\ \vdots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{x_1}{\gamma_1} \\ \frac{x_2}{\gamma_2} \\ \vdots \\ \frac{x_k}{\gamma_k} \\ \vdots \end{pmatrix}.$$

Оператор $-\Gamma$ порождает сильно непрерывную, устойчивую, положительную в смысле конуса K полугруппу сжатий

$$e^{-\Gamma t} = \begin{pmatrix} e^{-\gamma_1 t} & 0 & \dots & 0 & \dots \\ 0 & e^{-\gamma_2 t} & \dots & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \\ 0 & 0 & \dots & e^{-\gamma_k t} & \dots \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

Пусть $r > 0, s \neq 0$, тогда

$$\|R(r + is, -\Gamma)\| = \|(-\Gamma - (r + is)I\| = \left\| \begin{pmatrix} \frac{1}{-\gamma_1 - r - is} & 0 & \dots & 0 & \dots \\ 0 & \frac{1}{-\gamma_2 - r - is} & \dots & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \\ 0 & 0 & \dots & \frac{1}{-\gamma_k - r - is} & \dots \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \ddots \end{pmatrix} \right\| =$$

$$= \frac{1}{|s|} \left\| \begin{pmatrix} \frac{|s|}{\gamma_1 + r + is} & 0 & \dots & 0 & \dots \\ 0 & \frac{|s|}{\gamma_2 + r + is} & \dots & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \\ 0 & 0 & \dots & \frac{|s|}{\gamma_k + r + is} & \dots \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \ddots \end{pmatrix} \right\| \leqslant \frac{1}{|s|} \sup_{k\in\mathbb{N}} \left\{ \frac{|s|}{|\gamma_k + r + is|} \right\} < \frac{1}{|s|},$$

что в силу [12, теорема II.4.6.d] влечет аналитичность полугруппы $e^{-\Gamma t}$.

Таким образом, оператор Γ удовлетворяет всем условиям теоремы 5.1 и для любого M — положительного ограниченного линейного оператора такого, что $\rho(\Gamma^{-1}M) < 1$, сильно непрерывная полугруппа $e^{(-\Gamma+M)t}$ устойчива. Заметим, что

$$\Gamma^{-1}M = \begin{pmatrix} \frac{m_{11}}{\gamma_1} & \frac{m_{12}}{\gamma_1} & \dots & \frac{m_{1q}}{\gamma_1} & \dots \\ \frac{m_{21}}{\gamma_2} & \frac{m_{22}}{\gamma_2} & \dots & \frac{m_{2q}}{\gamma_2} & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \\ \frac{m_{p1}}{\gamma_p} & \frac{m_{p2}}{\gamma_p} & \dots & \frac{m_{pq}}{\gamma_p} & \dots \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

и для операторной l_1-нормы верно следующее:

$$\rho(\Gamma^{-1}M) \leqslant \|\Gamma^{-1}M\| = \sup_{q\in\mathbb{N}} \sum_{p=1}^{\infty} \frac{m_{pq}}{\gamma_p}.$$

Таким образом, используя теорему 5.1, можно получить следующий факт:

Теорема 6.1. *Для определенного выше оператора Γ и оператора $M : l_1 \to l_1$, определенного как $M = \{m_{pq}\}_{p,q\in\mathbb{N}}$, K-положительного (т. е. $m_{pq} \geqslant 0$) и ограниченного (т. е. $\sup\limits_{q\in\mathbb{N}} \sum\limits_{p\in\mathbb{N}} m_{pq} < +\infty$) условие*

$$\sup_{q\in\mathbb{N}} \sum_{p=1}^{\infty} \frac{m_{pq}}{\gamma_p} < 1 \tag{6.1}$$

влечет устойчивость полугруппы $e^{(-\Gamma+M)t}$.

Заметим, что, используя локализацию собственных значений кругами Гершгорина (для случая бесконечных матриц см., например, [15]), можно получить следующие неравенства в качестве различных достаточных условий устойчивости $e^{(-\Gamma+M)t}$:

$$\forall p \in \mathbb{N} \qquad \frac{\sum\limits_{q\in\mathbb{N}} m_{pq}}{\gamma_p} < 1, \tag{6.2}$$

$$\forall q \in \mathbb{N} \qquad \frac{\sum\limits_{p\in\mathbb{N}} m_{pq}}{\gamma_q} < 1. \tag{6.3}$$

Но, к примеру, для матриц

$$\Gamma = \begin{pmatrix} 10 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 20 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 30 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}, \quad M = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 1 & 1 & \dots \\ 5 & 1 & 1 & 1 & \dots \\ 5 & 1 & 1 & 1 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

выполнено только (6.1), но не (6.2) и (6.3). Также отметим, что для случая операторов, действующих в пространстве l_∞, из теоремы 5.1 аналогичным образом можно получить условие на возмущение, однако в этом случае оно не дает преимуществ по сравнению с методом кругов Гершгорина.

7. Пример: возмущение краевой задачи операторами с запаздыванием

7.1. Исходный оператор. Пусть пространство $F{=}C[0,1]$, а оператор L задан дифференциальным выражением

$$l(f) = f''$$

и краевыми условиями

$$\begin{aligned} f'(0) = 0, \\ f'(1) = 0, \end{aligned} \tag{7.1}$$

т. е.

$$L : D(L) = \{f \in C^2[0,1] : f'(0) = f'(1) = 0\} \subset F \to F,$$
$$L : f \mapsto f''.$$

Оператор L имеет собственное значение $\lambda_0 = 0$ с собственными векторами $f_0(t) \equiv c$ и собственные значения $\lambda_k = -\pi^2 k^2, k \in \mathbb{N}$ с собственными векторами $f_k(t) = c\cos \pi k t$. Этим его спектр исчерпывается.

7.2. Функция Грина и резольвента. Найдем резольвенту оператора L для регулярных λ, т. е. оператор $(L - \lambda I)^{-1}$. Для этого построим функцию Грина краевой задачи

$$\begin{cases} f'' - \lambda f = g, \\ U_1(f) := f'(0) = 0, \\ U_2(f) := f'(1) = 0. \end{cases} \tag{7.2}$$

Нам известна фундаментальная система решений однородного уравнения:

$$f_1(t) = e^{\sqrt{\lambda}t},$$
$$f_2(t) = e^{-\sqrt{\lambda}t}$$

и производные ее членов:

$$f_1'(t) = \sqrt{\lambda}e^{\sqrt{\lambda}t},$$
$$f_2'(t) = -\sqrt{\lambda}e^{-\sqrt{\lambda}t}.$$

Построим функцию Грина, следуя доказательству теоремы 1 из [9, I.§3.3]. Известно, что

$$G_\lambda(x,\xi) = \begin{cases} 0 \leqslant x < \xi \leqslant 1 : a_1(\xi)f_1(x) + a_2(\xi)f_2(x), \\ 0 \leqslant \xi < x \leqslant 1 : b_1(\xi)f_1(x) + b_2(\xi)f_2(x). \end{cases} \tag{7.3}$$

где a и b удовлетворяют условиям

$$\begin{cases} a_1(\xi)f_1(\xi) + a_2(\xi)f_2(\xi) - (b_1(\xi)f_1(\xi) + b_2(\xi)f_2(\xi)) = 0, \\ a_1(\xi)f_1'(\xi) + a_2(\xi)f_2'(\xi) - (b_1'(\xi)f_1(\xi) + b_2'(\xi)f_2(\xi)) = -1. \end{cases}$$

Обозначив

$$\begin{aligned} c_1 &= b_1 - a_1, \\ c_2 &= b_2 - a_2, \end{aligned} \tag{7.4}$$

получим систему:

$$\begin{cases} c_1(\xi)e^{\sqrt{\lambda}\xi} + c_2(\xi)e^{\sqrt{-\lambda}\xi} = 0, \\ c_1(\xi)\sqrt{\lambda}e^{\sqrt{\lambda}\xi} - \sqrt{\lambda}e^{-\sqrt{\lambda}\xi} = 1. \end{cases}$$

Решаем:

$$W(\xi) = \begin{vmatrix} e^{\sqrt{\lambda}\xi} & e^{\sqrt{-\lambda}\xi} \\ \sqrt{\lambda}e^{\sqrt{\lambda}\xi} & -\sqrt{\lambda}e^{\sqrt{-\lambda}\xi} \end{vmatrix} = -\sqrt{\lambda}e^{(\sqrt{\lambda}\xi - \sqrt{\lambda}\xi)} - \sqrt{\lambda}e^{(\sqrt{\lambda}\xi - \sqrt{\lambda}\xi)} = -2\sqrt{\lambda},$$

$$W_1(\xi) = \begin{vmatrix} 0 & e^{-\sqrt{\lambda}\xi} \\ 1 & -\sqrt{\lambda}e^{-\sqrt{\lambda}} \end{vmatrix} = -e^{-\sqrt{\lambda}\xi},$$

$$W_2(\xi) = \begin{vmatrix} e^{\sqrt{\lambda}\xi} & 0 \\ \sqrt{\lambda}e^{\sqrt{\lambda}} & 1 \end{vmatrix} = e^{\sqrt{\lambda}\xi},$$

$$c_1(\xi) = \frac{W_1(\xi)}{W(\xi)} = \frac{-e^{-\sqrt{\lambda}\xi}}{-2\sqrt{\lambda}} = \frac{e^{-\sqrt{\lambda}\xi}}{2\sqrt{\lambda}},$$

$$c_2(\xi) = \frac{W_2(\xi)}{W(\xi)} = \frac{e^{\sqrt{\lambda}\xi}}{-2\sqrt{\lambda}} = -\frac{e^{\sqrt{\lambda}\xi}}{2\sqrt{\lambda}}.$$

Краевые условия дают систему

$$\begin{cases} U_1(G_\lambda) = 0, \\ U_2(G_\lambda) = 0, \end{cases}$$

из которой с учетом (7.3) и (7.4) (см. [9, I.§3.3]) получаем систему

$$\begin{cases} b_1(\xi)\sqrt{\lambda}e^{\sqrt{\lambda}\cdot 0} - b_2(\xi)\sqrt{\lambda}e^{-\sqrt{\lambda}\cdot 0} = \frac{e^{-\sqrt{\lambda}\xi}}{2\sqrt{\lambda}}\sqrt{\lambda}e^{\sqrt{\lambda}\cdot 0} + \frac{e^{\sqrt{\lambda}\xi}}{2\sqrt{\lambda}}\sqrt{\lambda}e^{-\sqrt{\lambda}\cdot 0}, \\ b_1(\xi)\sqrt{\lambda}e^{\sqrt{\lambda}\cdot 1} - b_2(\xi)\sqrt{\lambda}e^{-\sqrt{\lambda}\cdot 1} = 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} b_1(\xi)\sqrt{\lambda} - b_2(\xi)\sqrt{\lambda} = \frac{e^{-\sqrt{\lambda}\xi}}{2} + \frac{e^{\sqrt{\lambda}\xi}}{2}, \\ b_1(\xi)e^{\sqrt{\lambda}} = b_2(\xi)e^{-\sqrt{\lambda}}; \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sqrt{\lambda}(b_1(\xi) - b_2(\xi)) = \frac{e^{-\sqrt{\lambda}\xi}+e^{\sqrt{\lambda}\xi}}{2}, \\ b_1(\xi) = b_2(\xi)e^{-2\sqrt{\lambda}}; \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sqrt{\lambda}b_2(\xi)(e^{-2\sqrt{\lambda}} - 1) = \frac{e^{-\sqrt{\lambda}\xi}+e^{\sqrt{\lambda}\xi}}{2}, \\ b_1(\xi) = b_2(\xi)e^{-2\sqrt{\lambda}}. \end{cases}$$

Заметим, что $\sqrt{\lambda}(e^{-2\sqrt{\lambda}} - 1) = 0 \Rightarrow \{-\pi^2k^2 : k \in \{0\} \cup \mathbb{N}\}$. Продолжим:

$$\begin{cases} b_2(\xi) = \frac{e^{-\sqrt{\lambda}\xi}+e^{\sqrt{\lambda}\xi}}{2\sqrt{\lambda}(e^{-2\sqrt{\lambda}}-1)}, \\ b_1(\xi) = \frac{(e^{-\sqrt{\lambda}\xi}+e^{\sqrt{\lambda}\xi})e^{-2\sqrt{\lambda}}}{2\sqrt{\lambda}(e^{-2\sqrt{\lambda}}-1)}. \end{cases}$$

Тогда

$$a_1(\xi) = b_1(\xi) - c_1(\xi) = \frac{(e^{-\sqrt{\lambda}\xi} + e^{\sqrt{\lambda}\xi})e^{-2\sqrt{\lambda}}}{2\sqrt{\lambda}(e^{-2\sqrt{\lambda}} - 1)} - \frac{e^{-\sqrt{\lambda}\xi}}{2\sqrt{\lambda}},$$

$$a_2(\xi) = b_2(\xi) - c_2(\xi) = \frac{e^{-\sqrt{\lambda}\xi} + e^{\sqrt{\lambda}\xi}}{2\sqrt{\lambda}(e^{-2\sqrt{\lambda}} - 1)} + \frac{e^{\sqrt{\lambda}\xi}}{2\sqrt{\lambda}}.$$

Итого:

$$G_\lambda(x,\xi) = \begin{cases} 0 \leqslant x < \xi \leqslant 1 : G_{1,\lambda}(x,\xi), \\ 0 \leqslant \xi < x \leqslant 1 : G_{2,\lambda}(x,\xi); \end{cases}$$

$$G_{1,\lambda}(x,\xi) = \left(\frac{(e^{-\sqrt{\lambda}\xi} + e^{\sqrt{\lambda}\xi})e^{-2\sqrt{\lambda}}}{2\sqrt{\lambda}(e^{-2\sqrt{\lambda}} - 1)} - \frac{e^{-\sqrt{\lambda}\xi}}{2\sqrt{\lambda}}\right)e^{\sqrt{\lambda}x} + \left(\frac{e^{-\sqrt{\lambda}\xi} + e^{\sqrt{\lambda}\xi}}{2\sqrt{\lambda}(e^{-2\sqrt{\lambda}} - 1)} + \frac{e^{\sqrt{\lambda}\xi}}{2\sqrt{\lambda}}\right)e^{-\sqrt{\lambda}x},$$

$$G_{2,\lambda}(x,\xi) = \frac{(e^{-\sqrt{\lambda}\xi} + e^{\sqrt{\lambda}\xi})e^{-2\sqrt{\lambda}}}{2\sqrt{\lambda}(e^{-2\sqrt{\lambda}} - 1)}e^{\sqrt{\lambda}x} + \frac{e^{-\sqrt{\lambda}\xi} + e^{\sqrt{\lambda}\xi}}{2\sqrt{\lambda}(e^{-2\sqrt{\lambda}} - 1)}e^{-\sqrt{\lambda}x}.$$

Упростим:

$$G_{1,\lambda}(x,\xi) = \frac{1}{2\sqrt{\lambda}(e^{-2\sqrt{\lambda}} - 1)}\Big(e^{-\sqrt{\lambda}\xi-2\sqrt{\lambda}+\sqrt{\lambda}x} + e^{\sqrt{\lambda}\xi-2\sqrt{\lambda}+\sqrt{\lambda}x} - e^{-2\sqrt{\lambda}-\sqrt{\lambda}\xi+\sqrt{\lambda}x} + e^{-\sqrt{\lambda}\xi+\sqrt{\lambda}x} +$$

$$+ e^{-\sqrt{\lambda}\xi-\sqrt{\lambda}x} + e^{\sqrt{\lambda}\xi-\sqrt{\lambda}x} + e^{-2\sqrt{\lambda}+\sqrt{\lambda}\xi-\sqrt{\lambda}x} - e^{\sqrt{\lambda}\xi-\sqrt{\lambda}x}\Big) =$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{\lambda}(e^{-2\sqrt{\lambda}} - 1)}\Big(e^{\sqrt{\lambda}\xi-2\sqrt{\lambda}+\sqrt{\lambda}x} + e^{-\sqrt{\lambda}\xi+\sqrt{\lambda}x} + e^{-\sqrt{\lambda}\xi-\sqrt{\lambda}x} + e^{-2\sqrt{\lambda}+\sqrt{\lambda}\xi-\sqrt{\lambda}x}\Big) =$$

$$= \frac{(e^{-2\sqrt{\lambda}}e^{\sqrt{\lambda}\xi} + e^{-\sqrt{\lambda}\xi})(e^{\sqrt{\lambda}x} + e^{-\sqrt{\lambda}x})}{2\sqrt{\lambda}(e^{-2\sqrt{\lambda}} - 1)}$$

$$G_{2,\lambda}(x,\xi) = \frac{(e^{-\sqrt{\lambda}\xi} + e^{\sqrt{\lambda}\xi})(e^{-2\sqrt{\lambda}}e^{\sqrt{\lambda}x} + e^{-\sqrt{\lambda}x})}{2\sqrt{\lambda}(e^{-2\sqrt{\lambda}} - 1)}.$$

Получив функцию Грина, мы можем выписать резольвенту оператора L:

$$R(\lambda, L)(f) = \int\limits_0^1 G_\lambda(x,\xi)f(\xi)d\xi,$$

где $f \in C[0,1]$.

7.3. Секториальность оператора. Покажем теперь, что L — секториальный оператор (см. [12, II.4.a]). Для этого достаточно, чтобы для некоторого $\theta \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$ сектор $\Sigma_\theta = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\arg \lambda| < \theta\} \setminus \{0\}$ состоял из одних только регулярных точек и найдется такое M, что для всех этих точек

$$||R(\lambda, L)|| \leqslant \frac{M}{|\lambda|}. \tag{7.5}$$

Зафиксируем $\theta \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$. Весь спектр L лежит на мнимой оси в левой полуплоскости, так что он не лежит в Σ_θ. Докажем теперь оценку (7.5).

$$||R(\lambda, L)|| = \sup_{f \in C[0,1], ||f||=1} ||R(\lambda, L)f|| = \sup_{f \in C[0,1], ||f||=1} \max_{x \in [0,1]} \left| \int_0^1 G_\lambda(x,\xi) f(\xi) d\xi \right| \leqslant$$

$$\leqslant \sup_{f \in C[0,1], ||f||=1} \max_{x \in [0,1]} \int_0^1 |G_\lambda(x,\xi) f(\xi)| d\xi \leqslant \sup_{f \in C[0,1], ||f||=1} \max_{x \in [0,1]} \int_0^1 |G_\lambda(x,\xi)| \max_{y \in [0,1]} |f(y)| d\xi =$$

$$= \sup_{f \in C[0,1], ||f||=1} \max_{x \in [0,1]} \left(\int_0^1 |G_\lambda(x,\xi)| d\xi \, ||f|| \right) = \max_{x \in [0,1]} \int_0^1 |G_\lambda(x,\xi)| d\xi =$$

$$= \max_{x \in [0,1]} \left(\int_0^x |G_{2,\lambda}(x,\xi)| d\xi + \int_x^1 |G_{1,\lambda}(x,\xi)| d\xi \right) =$$

$$= \max_{x \in [0,1]} \left(\int_0^x \left| \frac{(e^{-\sqrt{\lambda}\xi} + e^{\sqrt{\lambda}\xi})(e^{-2\sqrt{\lambda}} e^{\sqrt{\lambda}x} + e^{-\sqrt{\lambda}x})}{2\sqrt{\lambda}(e^{-2\sqrt{\lambda}} - 1)} \right| d\xi + \right.$$

$$\left. + \int_x^1 \left| \frac{(e^{-2\sqrt{\lambda}} e^{\sqrt{\lambda}\xi} + e^{-\sqrt{\lambda}\xi})(e^{\sqrt{\lambda}x} + e^{-\sqrt{\lambda}x})}{2\sqrt{\lambda}(e^{-2\sqrt{\lambda}} - 1)} \right| d\xi \right) \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{2|\sqrt{\lambda}||e^{-2\sqrt{\lambda}} - 1|} \max_{x \in [0,1]} \left(\left| e^{-2\sqrt{\lambda}} e^{\sqrt{\lambda}x} + e^{-\sqrt{\lambda}x} \right| \int_0^x \left(\left| e^{-\sqrt{\lambda}\xi} \right| + \left| e^{\sqrt{\lambda}\xi} \right| \right) d\xi + \right.$$

$$\left. + \left| e^{\sqrt{\lambda}x} + e^{-\sqrt{\lambda}x} \right| \int_x^1 \left(\left| e^{-\sqrt{\lambda}\xi} \right| + \left| e^{-2\sqrt{\lambda}} \right| \left| e^{\sqrt{\lambda}\xi} \right| \right) d\xi \right) \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{2|\sqrt{\lambda}||e^{-2\sqrt{\lambda}} - 1|} \max_{x \in [0,1]} \left(\left(e^{-2\operatorname{Re}\sqrt{\lambda}} e^{\operatorname{Re}\sqrt{\lambda}x} + e^{-\operatorname{Re}\sqrt{\lambda}x} \right) \left(\frac{e^{-\operatorname{Re}\sqrt{\lambda}x} - 1}{-\operatorname{Re}\sqrt{\lambda}} + \frac{e^{\operatorname{Re}\sqrt{\lambda}x} - 1}{\operatorname{Re}\sqrt{\lambda}} \right) + \right.$$

$$\left. + \left(e^{\operatorname{Re}\sqrt{\lambda}x} + e^{-\operatorname{Re}\sqrt{\lambda}x} \right) \left(\frac{e^{-\operatorname{Re}\sqrt{\lambda}} - e^{-\operatorname{Re}\sqrt{\lambda}x}}{-\operatorname{Re}\sqrt{\lambda}} + e^{-2\operatorname{Re}\sqrt{\lambda}} \frac{e^{\operatorname{Re}\sqrt{\lambda}} - e^{\operatorname{Re}\sqrt{\lambda}x}}{\operatorname{Re}\sqrt{\lambda}} \right) \right) = \frac{1}{2|\sqrt{\lambda}||e^{-2\sqrt{\lambda}} - 1|} \times$$

$$\times \max_{x \in [0,1]} \left(\frac{1}{-\operatorname{Re}\sqrt{\lambda}} \left(e^{-2\operatorname{Re}\sqrt{\lambda}} e^{\operatorname{Re}\sqrt{\lambda}x} e^{-\operatorname{Re}\sqrt{\lambda}x} - e^{-2\operatorname{Re}\sqrt{\lambda}} e^{\operatorname{Re}\sqrt{\lambda}x} + e^{-\operatorname{Re}\sqrt{\lambda}x} e^{-\operatorname{Re}\sqrt{\lambda}x} - e^{-\operatorname{Re}\sqrt{\lambda}x} \right) + \right.$$

$$+ \frac{1}{\operatorname{Re}\sqrt{\lambda}} \left(e^{-2\operatorname{Re}\sqrt{\lambda}} e^{\operatorname{Re}\sqrt{\lambda}x} e^{\operatorname{Re}\sqrt{\lambda}x} - e^{-2\operatorname{Re}\sqrt{\lambda}} e^{\operatorname{Re}\sqrt{\lambda}x} + e^{-\operatorname{Re}\sqrt{\lambda}x} e^{\operatorname{Re}\sqrt{\lambda}x} - e^{-\operatorname{Re}\sqrt{\lambda}x} \right) +$$

$$+ \frac{1}{-\operatorname{Re}\sqrt{\lambda}} \left(e^{\operatorname{Re}\sqrt{\lambda}x} e^{-\operatorname{Re}\sqrt{\lambda}} - e^{\operatorname{Re}\sqrt{\lambda}x} e^{-\operatorname{Re}\sqrt{\lambda}x} + e^{-\operatorname{Re}\sqrt{\lambda}x} e^{-\operatorname{Re}\sqrt{\lambda}} - e^{-\operatorname{Re}\sqrt{\lambda}x} e^{-\operatorname{Re}\sqrt{\lambda}x} \right) +$$

$$+ \frac{1}{\operatorname{Re}\sqrt{\lambda}} \left(e^{\operatorname{Re}\sqrt{\lambda}x} e^{-2\operatorname{Re}\sqrt{\lambda}} e^{\operatorname{Re}\sqrt{\lambda}} - e^{\operatorname{Re}\sqrt{\lambda}x} e^{-2\operatorname{Re}\sqrt{\lambda}} e^{-\operatorname{Re}\sqrt{\lambda}x} + e^{-\operatorname{Re}\sqrt{\lambda}x} e^{-2\operatorname{Re}\sqrt{\lambda}} e^{\operatorname{Re}\sqrt{\lambda}} - \right.$$

$$\left. \left. - e^{-\operatorname{Re}\sqrt{\lambda}x} e^{-2\operatorname{Re}\sqrt{\lambda}} e^{\operatorname{Re}\sqrt{\lambda}x} \right) \right) = \frac{1}{2|\sqrt{\lambda}||e^{-2\sqrt{\lambda}} - 1||\operatorname{Re}\sqrt{\lambda}|} \max_{x \in [0,1]} \left(-e^{-2\operatorname{Re}\sqrt{\lambda}} + e^{-2\operatorname{Re}\sqrt{\lambda}} e^{\operatorname{Re}\sqrt{\lambda}x} + \right.$$

$$-e^{-2\operatorname{Re}\sqrt{\lambda}x} + e^{-\operatorname{Re}\sqrt{\lambda}x} + e^{-2\operatorname{Re}\sqrt{\lambda}} e^{2\operatorname{Re}\sqrt{\lambda}x} - e^{-2\operatorname{Re}\sqrt{\lambda}} e^{\operatorname{Re}\sqrt{\lambda}x} + 1 - e^{-\operatorname{Re}\sqrt{\lambda}x} - e^{-\operatorname{Re}\sqrt{\lambda}} e^{\operatorname{Re}\sqrt{\lambda}x} + 1 -$$

$$-e^{-\mathrm{Re}\sqrt{\lambda}}e^{-\mathrm{Re}\sqrt{\lambda}x}+e^{-2\mathrm{Re}\sqrt{\lambda}x}+e^{-\mathrm{Re}\sqrt{\lambda}}e^{\mathrm{Re}\sqrt{\lambda}x}-e^{-2\mathrm{Re}\sqrt{\lambda}}e^{2\mathrm{Re}\sqrt{\lambda}x}+e^{-\mathrm{Re}\sqrt{\lambda}}e^{-\mathrm{Re}\sqrt{\lambda}x}-e^{-2\mathrm{Re}\sqrt{\lambda}}\Big)=$$

$$=\frac{|e^{-2\mathrm{Re}\sqrt{\lambda}}-1|}{|\sqrt{\lambda}||\mathrm{Re}\sqrt{\lambda}||e^{-2\sqrt{\lambda}}-1|}. \tag{7.6}$$

Здесь следует сделать два замечания. Во-первых, поскольку $|\arg\lambda|<\theta<\pi$, то можно выбирать в качестве $\sqrt{\lambda}$ тот из корней, который лежит в правой полуплоскости, и без ограничения общности можно считать, что $0\leqslant|\arg\sqrt{\lambda}|<\dfrac{\theta}{2}<\dfrac{\pi}{2}$. Тогда $|\mathrm{Re}\sqrt{\lambda}|=|\sqrt{\lambda}|\cos|\arg\sqrt{\lambda}|>|\sqrt{\lambda}|\cos\dfrac{\theta}{2}$.

Во-вторых, для произвольных $a,b>0$, $|\varphi|<\dfrac{\pi}{2}$, будет верно:

$$|a(\cos\varphi+i\sin\varphi)-b|=\sqrt{(a\cos\varphi-b)^2+a^2\sin^2\varphi}=$$

$$=\sqrt{a^2\cos^2\varphi-2a\cos\varphi\cdot b+b^2+a^2\sin^2\varphi}=\sqrt{a^2(\cos^2\varphi+\sin^2\varphi)-2ab\cos\varphi+b^2}=$$

$$=\sqrt{a^2-2ab\cos\varphi+b^2}\geqslant\sqrt{a^2-2ab+b^2}=\sqrt{(a-b)^2}=a-b.$$

В нашем случае $a=e^{-2\mathrm{Re}\sqrt{\lambda}}, b=1, \varphi=\arg\sqrt{\lambda}$. Поэтому из (7.6) следует, что

$$R(\lambda,L)\leqslant\frac{1}{|\lambda|\cos\frac{\theta}{2}}.$$

Мы доказали, что L — секториальный оператор.

7.4. Обратимый оператор и полугруппа. В [12, II.2.12] показано, что оператор L порождает сильно непрерывную полугруппу на пространстве $F=C[0,1]$, заданную формулой

$$(e^{Lt}f)(s)=\int\limits_0^1 k_t(s,r)f(r)dr,$$

$$k_t(s,r)=1+2\sum_{n\in\mathbb{N}}e^{-\pi^2n^2t}\cos(\pi ns)\,\cos(\pi nr),$$

причем k_t — положительные функции, определенные на $[0,1]\times[0,1]$.

Поскольку $0\in\sigma(L)$, то оператор L необратим. Построим масштабированную полугруппу, выбрав число $a\in(0,\infty)$ и обозначив

$$\Gamma=-L+aI.$$

Тогда согласно [12, II.2.2]

$$\sigma(-\Gamma)=\sigma(L-aI)=\{-\pi^2k^2-a:k\in\{0\}\cup\mathbb{N}\},$$

$$e^{-\Gamma}=e^{-at}e^{Lt}. \tag{7.7}$$

Поскольку L является секториальным оператором, он порождает аналитическую полугруппу [12, Theorem II.4.6], а значит и $-\Gamma=L-aI$ порождает аналитическую полугруппу, так как $-aI$ — ограниченный оператор (см. [12, Proposition III.1.12]). Так как

$$R(\lambda,\Gamma)=(\Gamma-\lambda I)^{-1}=(-(-\Gamma-(-\lambda)I))^{-1}=-(-\Gamma-(-\lambda)I)^{-1}=-R(-\Gamma,-\lambda),$$

то

$$\sigma(\Gamma)=-\sigma(-\Gamma)=\{\pi^2k^2+a:k\in\{0\}\cup\mathbb{N}\}$$

при тех же собственных подпространствах, отвечающих соответствующим собственным значениям.

Как можно видеть, 0 является регулярной точкой оператора Γ, поэтому он обратим. Согласно [3, теорема 6.15, III.6.3] имеем расширенный спектр (который может отличаться от спектра оператора только точками 0 и ∞):

$$\widetilde{\sigma}(\Gamma^{-1})=\{0\}\cup\left\{\frac{1}{\pi^2k^2+a}:k\in\{0\}\cup\mathbb{N}\right\},$$

и получаем спектральный радиус

$$\sigma(\Gamma^{-1})\ni\frac{1}{a}=\rho(\Gamma^{-1}).$$

Заметим, что

$$(\Gamma^{-1}f)(x) = ((-L+aI)^{-1}f)(x) = ((-(L-aI))^{-1}f)(x) = (-(L-aI)^{-1}f)(x) = -\int\limits_0^1 G_a(x,\xi)f(\xi)d\xi. \tag{7.8}$$

Как показано в [4, IV.§6.1.4], в этом случае оператор Γ^{-1} компактен, а значит, компактна и резольвента Γ и $-\Gamma$. Поскольку полугруппа $e^{-\Gamma t}$ аналитична, то она непрерывна по норме при $t > 0$, и благодаря компактности резольвенты генератора мы имеем компактность полугруппы (см. [12, Theorem II.4.29]). Значит, у нее отсутствует существенный спектр и $\omega_0(e^{-\Gamma t}) = s(-\Gamma) = \sup \operatorname{Re}\sigma(-\Gamma) = -a < 0$, т. е. полугруппа устойчива.

Рассмотрим конус

$$K = \{f \in C[0,1] : \forall(x \in [0,1])[f(x) \geqslant 0]\}.$$

Если рассматривать операторы только над вещественнозначными функциями, мы получаем, что полугруппа $e^{-\Gamma t}$ положительна в смысле K благодаря положительности ядер k_t (что дает положительность e^{Lt}) и соотношению (7.7).

7.5. Примеры возмущений с запаздыванием. Таким образом, для оператора $-\Gamma$ выполнены все условия теоремы 5.1. В качестве ее следствия мы можем сформулировать следующую теорему:

Теорема 7.1. *Пусть $M : F \to F$ — ограниченный линейный оператор, положительный относительно конуса K и такой, что $\rho(\Gamma^{-1}M) < 1$. Тогда полугруппа $e^{(-\Gamma+M)t}$ равномерно экспоненциально устойчива.*

Пример 7.1. Зафиксируем $0 < p < 1$. Рассмотрим функцию $q_1 \in K$ и оператор

$$(M_1 f)(t) = \begin{cases} t \in [0,p] : q_1(t)f(0), \\ t \in [p,1] : q_1(t)f(t-p). \end{cases}$$

M_1 положителен и ограничен. Выясним, когда полугруппа $e^{(-\Gamma+M_1)t}$ равномерно экспоненциально устойчива.

Заметим, что

$$\rho(\Gamma^{-1}M_1) \leqslant \|\Gamma^{-1}M_1\| = \sup_{f\in C[0,1],\|f\|=1} \max_{x\in[0,1]} |(\Gamma^{-1}M_1 f)(x)| =$$

$$= \sup_{f\in C[0,1],\|f\|=1} \max_{x\in[0,1]} \left| -\int\limits_0^1 G_a(x,\xi)M_1 f(\xi)d\xi \right| \leqslant$$

$$\leqslant \sup_{f\in C[0,1],\|f\|=1} \max_{x\in[0,1]} \left(\int\limits_0^p |G_a(x,\xi)|\,|q_1(\xi)|\,|f(0)|d\xi + \int\limits_p^1 |G_a(x,\xi)|\,|q_1(\xi)|\,|f(\xi-p)|d\xi \right) \leqslant$$

$$\leqslant \sup_{f\in C[0,1],\|f\|=1} \max_{x\in[0,1]} \int\limits_0^1 |G_a(x,\xi)|\,|q_1(\xi)|d\xi\|f\| = \max_{x\in[0,1]} \int\limits_0^1 |G_a(x,\xi)|q_1(\xi)d\xi.$$

Таким образом, $e^{(-\Gamma+M_1)t}$ устойчива, если

$$\max_{x\in[0,1]} \int\limits_0^1 |G_a(x,\xi)|q_1(\xi)d\xi < 1.$$

Если для всех $x \in [1-p,1]$

$$\left[\int\limits_0^p |G_a(x,\xi)|q_1(\xi)d\xi \int\limits_p^1 |G_a(x,\xi)|q_1(\xi)d\xi \neq 0 \right], \tag{7.9}$$

то мы можем несколько улучшить оценку.

Выберем непрерывную на $[0,1]$ функцию $\nu(t) : \forall(t \in [0,1])[\nu(t) \neq 0]$. Введем норму на $C[0,1]$:

$$\|x\|_\nu = \|\nu x\|.$$

Она эквивалентна стандартной:

$$\|x\| = \left\|\frac{\nu}{\nu}x\right\| = \max_{t\in[0,1]}\left|\frac{\nu(t)}{\nu(t)}x(t)\right| \leqslant \max_{t\in[0,1]}\left|\frac{1}{\nu(t)}\right| \max_{t\in[0,1]}|\nu(t)x(t)| = \left\|\frac{1}{\nu}\right\| \|x\|_\nu,$$

$$\|x\|_\nu = \|x\nu\| = \max_{t\in[0,1]}|x(t)\nu(t)| \leqslant \max_{t\in[0,1]}|x(t)| \max_{t\in[0,1]}|\nu(t)| = \|x\|\|\nu\|.$$

Тогда, подобно случаю со стандартной нормой,

$$\rho(\Gamma^{-1}M_1) \leqslant \|\Gamma^{-1}M_1\|_\nu = \sup_{f\in C[0,1], \|f\|_\nu=1} \max_{x\in[0,1]}\left|-\int_0^1 G_a(x,\xi)M_1 f(\xi)d\xi\nu(x)\right| \leqslant$$

$$\leqslant \sup_{f\in C[0,1], \|f\|_\nu=1} \max_{x\in[0,1]}\left(\int_0^p |G_a(x,\xi)|q_1(\xi)\left|f(0)\frac{\nu(0)}{\nu(0)}\right|d\xi|\nu(x)| + \right.$$

$$\left. + \int_p^1 |G_a(x,\xi)|q_1(\xi)\left|f(\xi-p)\frac{\nu(\xi-p)}{\nu(\xi-p)}\right|d\xi|\nu(x)|\right) \leqslant$$

$$\leqslant \sup_{f\in C[0,1], \|f\|_\nu=1} \max_{x\in[0,1]}\left(\int_0^p |G_a(x,\xi)|q_1(\xi)d\xi\|f\|_\nu\left|\frac{\nu(x)}{\nu(0)}\right| + \right.$$

$$\left. + \int_p^1 |G_a(x,\xi)|q_1(\xi)d\xi\|f\|_\nu \max_{\xi\in[p,1]}\left|\frac{\nu(x)}{\nu(\xi-p)}\right|\right) =$$

$$= \max_{x\in[0,1]}\left(\int_0^p |G_a(x,\xi)|q_1(\xi)d\xi\left|\frac{\nu(x)}{\nu(0)}\right| + \int_p^1 |G_a(x,\xi)|q_1(\xi)d\xi \max_{\xi\in[p,1]}\left|\frac{\nu(x)}{\nu(\xi-p)}\right|\right). \qquad (7.10)$$

Выберем $\nu(x)$ следующим образом:

$$\nu(x) = \begin{cases} 1, & x \leqslant 1-p, \\ \min\left(1, \dfrac{\int_0^p |G_a(1-p,\xi)|q_1(\xi)d\xi}{\int_0^p |G_a(x,\xi)|q_1(\xi)d\xi}\right)\min\left(1, \dfrac{\int_p^1 |G_a(1-p,\xi)|q_1(\xi)d\xi}{\int_p^1 |G_a(x,\xi)|q_1(\xi)d\xi}\right), & 1-p < x. \end{cases}$$

Функция $\nu(x)$ определена, непрерывна и положительна на $[0,1]$ благодаря (7.9). Далее для $x > 1-p$

$$\int_0^p |G_a(x,\xi)|q_1(\xi)d\xi\left|\frac{\nu(x)}{\nu(0)}\right| + \int_p^1 |G_a(x,\xi)|q_1(\xi)d\xi \max_{\xi\in[p,1]}\left|\frac{\nu(x)}{\nu(\xi-p)}\right| \leqslant$$

$$\leqslant \int_0^p |G_a(1-p,\xi)|q_1(\xi)d\xi\nu(1-p) + \int_p^1 |G_a(1-p,\xi)|q_1(\xi)d\xi\nu(1-p).$$

Значит, максимум по x в (7.10) достигается при $x \in [0, 1-p]$, и при выполненном (7.9) условием устойчивости будет неравенство

$$\max_{x\in[0,1-p]}\int_0^1 |G_a(x,\xi)|q_1(\xi)d\xi < 1.$$

Пример 7.2. Пусть $q_2 : [0,1] \times [0,1] \to [0,1]$ — непрерывная функция такая, что $\forall x, s \in [0,1]\; q_2(x,s) \geqslant 0$. Рассмотрим оператор

$$(M_2 f)(s) = \int\limits_0^p q_2(t,s) f(0) ds + \int\limits_p^1 q_2(t,s) f(s-p) ds.$$

Аналогично:

$$\rho(\Gamma^{-1}M_1) \leqslant \sup_{f\in C[0,1],\|f\|=1} \max_{x\in[0,1]} \left| -\int\limits_0^1 G_a(x,\xi) \left(\int\limits_0^p q_2(\xi,s) f(0) ds + \int\limits_p^1 q_2(\xi,s) f(s-p) ds \right) d\xi \right| \leqslant$$

$$\leqslant \max_{x\in[0,1]} \int\limits_0^1 |G_a(x,\xi)| \int\limits_0^1 q_2(\xi,s) ds\, d\xi$$

имеем условие устойчивости полугруппы $e^{(-\Gamma+M_2)t}$:

$$\max_{x\in[0,1]} \int\limits_0^1 |G_a(x,\xi)| \int\limits_0^1 q_2(\xi,s) ds\, d\xi < 1.$$

Аналогично примеру 7.1, если для всех $x \in [1-p, 1]$

$$\int\limits_0^1 \int\limits_0^p |G_a(x,\xi)| q_2(\xi,s) ds\, d\xi \int\limits_0^1 \int\limits_p^1 |G_a(x,\xi)| q_2(\xi,s) ds\, d\xi \neq 0,$$

то верна оценка

$$\rho(\Gamma^{-1}M_2) \leqslant \|\Gamma^{-1}M_2\|_\nu \leqslant$$

$$\leqslant \max_{x\in[0,1]} \left(\int\limits_0^1 \int\limits_0^p |G_a(x,\xi)| q_2(\xi,s) ds\, d\xi \left| \frac{\nu(x)}{\nu(0)} \right| + \int\limits_0^1 \int\limits_p^1 |G_a(x,\xi)| q_2(\xi,s) ds\, d\xi \max_{s\in[p,1]} \left| \frac{\nu(x)}{\nu(s-p)} \right| \right)$$

и, выбрав

$$\nu(x) = \begin{cases} 1, & x \leqslant 1-p, \\ \min\left(1, \dfrac{\int_0^1\int_0^p |G_a(1-p,\xi)| q_2(\xi,s) ds\, d\xi}{\int_0^1\int_0^p |G_a(x,\xi)| q_2(\xi,s) ds\, d\xi}\right) \min\left(1, \dfrac{\int_0^1\int_p^1 |G_a(1-p,\xi)| q_2(\xi,s) ds\, d\xi}{\int_0^1\int_p^1 |G_a(x,\xi)| q_2(\xi,s) ds\, d\xi}\right), & 1-p < x, \end{cases}$$

получаем улучшенное условие устойчивости

$$\max_{x\in[0,1-p]} \int\limits_0^1 |G_a(x,\xi)| \int\limits_0^1 q_2(\xi,s) ds\, d\xi < 1.$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Далецкий Ю.Л., Крейн С.Г.* Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве. — М.: Наука, 1970.
2. *Канторович Л.В., Акилов Г.П.* Функциональный анализ. — М.: Наука, 1977.
3. *Като Т.* Теория возмущений линейных операторов. — М.: Мир, 1972.
4. *Колмогоров А.Н., Фомин С.В.* Элементы теории функций и функционального анализа. 7-е изд. — М.: Физматлит, 2004.
5. *Красносельский М.А.* Положительные решения операторных уравнений. — М.: ГИФМЛ, 1962.
6. *Красносельский М.А., Забрейко П.П., Пустыльник Е.И., Соболевский П.Е.* Интегральные операторы в пространствах суммируемых функций. — М.: Наука, 1966.
7. *Крейн С.Г.* Линейные уравнения в банаховом пространстве. — М.: Наука, 1971.
8. *Крейн М.Г., Рутман М.А.* Линейные операторы, оставляющие инвариантным конус в пространстве Банаха// Усп. мат. наук. — 1948. — *3*, вып. 1 (23). — С. 3–95.
9. *Наймарк М.А.* Линейные дифференциальные операторы. 2-е изд. — М.: Наука, 1969.

10. *Хилле Э., Филлипс Р.* Функциональный анализ и полугруппы. — М.: Иностранная литература, 1962.
11. *Cooke R.* Infinite matrices and sequence spaces. — London: McMillan and Co. Ltd., 1950.
12. *Engel K.-J., Nagel R.* One-parameter semigroups for linear evolution equations. — New York: Springer, 2000.
13. *Pazy A.* Semigroups of linear operators and applications to partial differential equations. — New York: Springer, 1983.
14. *Shivakumar P. N., Sivakumar K. C.* A review of infinite matrices and their applications// Linear Algebra Appl. — 2009. — *430.* — С. 976–998.
15. *Shivakumar P. N., Williams J. J., Rudraiah N.* Eigenvalues for infinite matrices// Linear Algebra Appl. — 1987. — *96.* — С. 35–63.

М. И. Каменский
Воронежский государственный университет
E-mail: mikhailkamenski@mail.ru

И. М. Гудошников
Воронежский государственный университет
E-mail: gudoshnikov@yandex.ru

UDC 517.9

On Stability of Perturbed Semigroups in Partially Ordered Banach Spaces

© 2016 **M. I. Kamenskii, I. M. Gudoshnikov**

Abstract. We prove necessary and sufficient conditions for stability of perturbed semigroups of linear operators in Banach spaces with cones and consider some examples of using these conditions. In particular, we consider an example where the boundary-value problem is perturbed by a linear operator with delayed argument and establish conditions of stability for such a perturbed semigroup.

REFERENCES

1. Yu. L. Daletskij and S. G. Krejn, *Ustoychivost' resheniy differentsial'nykh uravneniy v banakhovom prostranstve* [Stability of Solutions of Differential Equations in Banach Space], Nauka, Moscow, 1970 (in Russian).
2. L. V. Kantorovich and G. P. Akilov, *Funktsional'nyy analiz* [Functional Analysis], Nauka, Moscow, 1977 (in Russian).
3. T. Kato, *Teoriya vozmushcheniy lineynykh operatorov* [Perturbation Theory for Linear Operators], Mir, Moscow, 1972 (in Russian).
4. A. N. Kolmogorov and S. V. Fomin, *Elementy teorii funktsiy i funktsional'nogo analiza. 7-e izd.* [Elements of the Theory of Functions and Functional Analysis. 7th ed.], Fizmatlit, Moscow, 2004 (in Russian).
5. M. A. Krasnosel'skij, *Polozhitel'nye resheniya operatornykh uravneniy* [Positive Solutions of Operator Equations], GIFML, Moscow, 1962 (in Russian).
6. M. A. Krasnosel'skij, P. P. Zabreyko, E. I. Pustyl'nik, and P. E. Sobolevskij, *Integral'nye operatory v prostranstvakh summiruemykh funktsiy* [Integral Operators is Spaces of Summable Functions], Nauka, Moscow, 1966 (in Russian).
7. S. G. Krejn, *Lineynye uravneniya v banakhovom prostranstve* [Linear Equations in Banach Space], Nauka, Moscow, 1971 (in Russian).
8. M. G. Kreyn and M. A. Rutman, "Lineynye operatory, ostavlyayushchie invariantnym konus v prostranstve Banakha" [Linear operators preserving an invariant cone in a Banach space], *Usp. mat. nauk.* [Progr. Math. Sci.], 1948, **3**, No. 1 (23), 3–95 (in Russian).
9. M. A. Naymark, *Lineynye differentsial'nye operatory. 2-e izd.* [Linear Differential Operators], Nauka, Moscow, 1969 (in Russian).

10. E. Hille and R. Phillips, *Funktsional'nyy analiz i polugruppy* [Functional Analysis and Semigroups], Inostrannaya literatura, Moscow, 1962 (in Russian).
11. R. Cooke, *Infinite Matrices and Sequence Spaces*, McMillan and Co. Ltd., London, 1950.
12. K.-J. Engel and R. Nagel, *One-Parameter Semigroups for Linear Evolution Equations*, Springer, New York, 2000.
13. A. Pazy, *Semigroups of Linear Operators and Applications to Partial Differential Equations*, Springer, New York, 1983.
14. P. N. Shivakumar and K. C. Sivakumar, "A review of infinite matrices and their applications," *Linear Algebra Appl.*, 2009, **430**, 976–998.
15. P. N. Shivakumar, J. J. Williams, and N. Rudraiah, "Eigenvalues for infinite matrices," *Linear Algebra Appl.*, 1987, **96**, 35–63.

M. I. Kamenskii
Voronezh State University, Voronezh, Russia
E-mail: mikhailkamenski@mail.ru

I. M. Gudoshnikov
Voronezh State University, Voronezh, Russia
E-mail: gudoshnikov@yandex.ru