

НЕПРЕРЫВНАЯ ЗАВИСИМОСТЬ РЕШЕНИЙ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО-РАЗНОСТНЫХ УРАВНЕНИЙ ОТ СДВИГОВ АРГУМЕНТА

© 2016 г. **Е. П. ИВАНОВА**

Аннотация. Изучаются краевые задачи для дифференциально-разностных операторов при наличии возмущений в сдвигах аргумента. Получены условия равномерной относительно сдвига аргумента положительной определенности семейства дифференциально-разностных операторов и непрерывной зависимости решений таких задач от сдвигов. Исследуется также проблема коэрцитивности дифференциально-разностных операторов с несоизмеримыми сдвигами аргументов и возможность аппроксимации этих операторов рациональными операторами.

СОДЕРЖАНИЕ

1. Введение		74
2. Возмущенные разностные операторы		76
3. Разрешимость семейства возмущенных краевых задач и условия сходимости решений		83
4. Разностные операторы с несоизмеримыми сдвигами		89
5. Дифференциально-разностные уравнения с несоизмеримыми сдвигами		91
Список литературы		95

1. ВВЕДЕНИЕ

В статье рассматриваются краевые задачи для дифференциально-разностных уравнений

$$-(R^\varepsilon u'(x))' = f(x), \quad x \in Q, \tag{1.1}$$

$$u(x) = 0, \quad x \notin Q, \tag{1.2}$$

где $Q = (0, a)$, $R^\varepsilon : L_2(\mathbb{R}) \rightarrow L_2(\mathbb{R})$ — семейство симметричных разностных операторов

$$(R^\varepsilon u)(x) = (Au)(x) + (Bu)(x), \tag{1.3}$$

$B : L_2(\mathbb{R}) \rightarrow L_2(\mathbb{R})$ — разностный оператор с целыми (соизмеримыми) сдвигами

$$(Bu)(x) = b_0 u(x) + \sum_{k=1}^N b_k (u(x+k) + u(x-k)), \tag{1.4}$$

$b_i \in \mathbb{R}$; $A : L_2(\mathbb{R}) \rightarrow L_2(\mathbb{R})$ — семейство разностных операторов, зависящих от малого параметра ε ($\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$).

Рассматривается случай, когда $A = A^\varepsilon$ — разностные операторы вида:

$$(A^\varepsilon u)(x) = a_0 u(x) + \sum_{i=1}^p a_i (u(x+i\varepsilon) + u(x-i\varepsilon)), \tag{1.5}$$

и случай, когда $A = A^\varepsilon$ — семейство разностных операторов, возмущенных относительно j — целого сдвига аргумента:

$$(A^\varepsilon u)(x) = a_0 u(x) + a_j^\varepsilon (u(x+j+\varepsilon) + u(x-j-\varepsilon)), \tag{1.6}$$

a_i — вещественные постоянные.

Работа выполнена при поддержке РФФИ, грант № 14-01-00265.

Рассмотрен также случай, когда $A = A^\tau$ — разностные операторы:

$$(A^\tau u)(x) = a_0 u(x) + a_\tau (u(x + \tau) + u(x - \tau)),$$

где τ — иррациональный сдвиг аргумента (несоизмеримый с остальными сдвигами в операторе B).

В статье изучаются условия равномерной по ε положительной определенности возмущенных разностных операторов вида (1.3), (1.5) и (1.3), (1.6), разрешимости семейства краевых задач (1.1)-(1.2), непрерывной зависимости решений u_ε от малого параметра ε и возможности предельного перехода $u_\varepsilon \rightarrow u_{\text{lim}}$, $\varepsilon \rightarrow 0$ к решению u_{lim} предельной задачи с разностным оператором

$$R^{\text{lim}} = A^{\text{lim}} + B,$$

где $A^{\text{lim}} = a_{\text{lim}} I$, $a_{\text{lim}} = a_0 + 2 \sum_{i=1}^p a_i$ или $a_{\text{lim}} = a_0 + 2a_j$, и I — тождественный оператор.

Краевые задачи вида (1.1)-(1.2) с дифференциально-разностными операторами, содержащими сдвиги аргумента в старших членах, впервые исследовались в работах [1, 2]. Интерес к этим задачам связан с различными приложениями [6]. Наиболее глубоко были изучены краевые задачи для эллиптических дифференциально-разностных уравнений с целочисленными или соизмеримыми сдвигами пространственных переменных (оператор $R^\varepsilon = B$, $A = 0$). Общая теория таких задач построена в монографии А. Л. Скубачевского [5].

Вопрос непрерывной зависимости решений эллиптических краевых задач для дифференциально-разностных уравнений от сдвигов аргумента и возможности предельного перехода при $\varepsilon \rightarrow 0$ впервые исследовался Л. Е. Россовским. В работе [3] им изучается краевая задача для уравнений в частных производных, в которой дифференциально-разностный оператор содержит только возмущенную составляющую. В одномерном случае это разностные операторы вида (1.5) ($R^\varepsilon = A$, $B = 0$). Им получен критерий равномерной сильной эллиптичности последовательности дифференциально-разностных операторов и возможности предельного перехода при $\varepsilon \rightarrow 0$ к стационарной задаче в терминах скалярного символа, зависящего от коэффициентов разностного оператора. Предельное уравнение в этом случае не содержит сдвигов аргумента и является чисто дифференциальным (уравнением в частных производных). Л. Е. Россовским также исследовалась непрерывная зависимость решений функционально-дифференциальных уравнений от коэффициента сжатия аргумента.

А. Л. Скубачевским была высказана идея использовать эти результаты для исследования краевых задач для дифференциально-разностных уравнений с иррациональными (несоизмеримыми) сдвигами. Изучение таких задач осложняется рядом особенностей. Во-первых, это нарушение гладкости решений. Если решения краевых задач для дифференциально-разностных уравнений с соизмеримыми сдвигами (назовем их *рациональными* задачами) сохраняют гладкость в некоторых подобластях [5], то решения краевых задач с несоизмеримыми сдвигами (*иррациональных* задач) могут иметь всюду плотное множество точек разрыва производной (см. [5, пример 3.10]). Во-вторых, если решения задач для дифференциально-разностных уравнений с рациональными сдвигами могут быть получены с помощью сведения их к нелокальным задачам (см. [5]), то такой метод к иррациональным задачам напрямую не применим. В-третьих, трудности связаны с проверкой условий положительной определенности иррациональных разностных операторов, действующих на ограниченных областях. Если для рациональных операторов с постоянными коэффициентами получен критерий их положительной определенности [5], то для иррациональных операторов известны только достаточные условия, выраженные в виде положительности скалярного символа, зависящего от коэффициентов разностного оператора. Поскольку в этом символе не учитываются свойства и размер области, на которой действует разностный оператор, то для небольших областей эти условия являются избыточными и далекими от необходимых. В данной статье исследуются условия положительной определенности дифференциально-разностных операторов с несоизмеримыми сдвигами и возможность аппроксимации этих операторов рациональными.

Работа состоит из 5 разделов.

В разделе 2 исследуются возмущенные разностные операторы вида (1.3), (1.5) и их поведение при $\varepsilon \rightarrow 0$. Получен критерий равномерной положительной определенности семейства возмущенных операторов, действующих на ограниченных областях, в терминах коэффициентов этих операторов. В этом критерии совмещается оценка возмущенной части оператора с помощью символа,

аналогичного символу Л. Е. Россовского, и оценка стационарной части в терминах положительной определенности некоторых контрольных матриц.

В разделе 3 статьи исследуется возможность предельного перехода в семействе возмущенных краевых задач (1.1)-(1.2) при $\varepsilon \rightarrow 0$ к невозмущенной задаче. Получены достаточные условия такого перехода и сходимости семейства обобщенных решений возмущенных задач к решению предельной задачи. Рассматриваются примеры, в которых нарушение этих условий приводит к нарушению сходимости.

В разделе 4 изучаются разностные операторы с несоизмеримыми сдвигами (иррациональные операторы). Строится аппроксимация иррационального оператора с помощью операторов с соизмеримыми сдвигами. Получены достаточные условия равномерной положительной определенности семейства таких операторов, выраженные в терминах положительной определенности некоторых контрольных матриц, и условия положительной определенности предельного иррационального оператора. Эти условия, в отличие от известных ранее символьных условий, учитывают свойства области действия оператора и близки к необходимым.

В разделе 5 работы исследуются краевые задачи для дифференциально-разностных уравнений с несоизмеримыми сдвигами. Доказана теорема об аппроксимации таких задач рациональными задачами, получены достаточные условия сходимости решений рациональных задач к решению иррациональной задачи. Предложенные алгоритмы аппроксимации реализованы в программной среде Maple, полученные в статье теоретические результаты проиллюстрированы примерами.

2. ВОЗМУЩЕННЫЕ РАЗНОСТНЫЕ ОПЕРАТОРЫ

Рассмотрим семейство симметричных разностных операторов $R^\varepsilon, A^\varepsilon, B : L_2(\mathbb{R}) \rightarrow L_2(\mathbb{R})$

$$(R^\varepsilon u)(x) = (A^\varepsilon u)(x) + (Bu)(x), \quad (2.1)$$

$$(A^\varepsilon u)(x) = a_0 u(x) + \sum_{i=1}^p a_i (u(x+i\varepsilon) + u(x-i\varepsilon)) \quad (2.2)$$

$$(Bu)(x) = \sum_{k=1}^{N-1} b_k (u(x+k) + u(x-k)), \quad (2.3)$$

a_i, b_k — вещественные постоянные, $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$ — малый параметр.

Введем также разностный оператор $R^C : L_2(\mathbb{R}) \rightarrow L_2(\mathbb{R})$:

$$(R^C u)(x) = \tilde{a}u(x) + \sum_{k=1}^{N-1} b_k (u(x+k) + u(x-k)) = \tilde{a}u(x) + (Bu)(x). \quad (2.4)$$

Операторы R^ε ($\varepsilon > 0$) назовем *возмущенными* операторами, R^C — *контрольным*.

Будем рассматривать действия операторов $R^C, \{R^\varepsilon\}_\varepsilon$ на функциях $u \in L_2(\mathbb{R})$, для которых

$$u(x) = 0 \quad \text{при} \quad x \notin Q = (0, N), \quad (2.5)$$

N — натуральное. Более общий случай, когда $Q = (0, a)$, $a \in \mathbb{R}$, привносит некоторые технические осложнения, не являющиеся, однако принципиальными для рассматриваемой задачи.

Для учета однородных краевых условий (2.5) введем операторы $I_Q : L_2(Q) \rightarrow L_2(\mathbb{R})$ — оператор продолжения функции из $L_2(Q)$ нулем вне Q ; $P_Q : L_2(\mathbb{R}) \rightarrow L_2(Q)$ — оператор сужения функции из $L_2(\mathbb{R})$ на Q .

Введем также операторы $R_Q^C = P_Q R^C I_Q : L_2(Q) \rightarrow L_2(Q)$, $R_Q^\varepsilon = P_Q R^\varepsilon I_Q : L_2(Q) \rightarrow L_2(Q)$, $A_Q^\varepsilon = P_Q A^\varepsilon I_Q : L_2(Q) \rightarrow L_2(Q)$.

Определение 2.1. Самосопряженный оператор $R_Q : L_2(Q) \rightarrow L_2(Q)$ будем называть *положительно определенным*, если найдется $c > 0$, что для всех $u \in L_2(Q)$, $u \neq 0$ выполнено неравенство

$$(R_Q u, u)_{L_2(Q)} > c(u, u)_{L_2(Q)}.$$

Здесь $(u, u)_{L_2(Q)}$ — скалярное произведение в пространстве $L_2(Q)$.

Получим условия равномерной по $\varepsilon \geq 0$ положительной определенности семейства самосопряженных разностных операторов R_Q^ε . Равномерная положительная определенность позволит в дальнейшем осуществить предельный переход при $\varepsilon \rightarrow 0$.

Будем оценивать спектр $\sigma(R_Q^\varepsilon)$ семейства возмущенных операторов $\{R_Q^\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$ через спектр контрольного оператора R_Q^C , подобрав соответствующим образом коэффициент \tilde{a} ($\tilde{a} < a_0$).

Для оценки спектра разностных операторов воспользуемся методом, разработанным в [5].

Рассмотрим разностный оператор $R : L_2(\mathbb{R}) \rightarrow L_2(\mathbb{R})$

$$(Ru)(x) = b_0u(x) + \sum_{i=1}^k b_k(u(x+ih) + u(x-ih)),$$

$b_k, h \in \mathbb{R}$, $h > 0$ и оператор $R_Q = P_Q R I_Q : L_2(Q) \rightarrow L_2(Q)$, $Q = (0, d)$.

Пусть $d = kh + \theta$, где $0 < \theta \leq h$, k — натуральное. Если $0 < \theta < h$, обозначим $Q_{1i} = ((i-1)h, (i-1)h + \theta)$ ($i = 1, \dots, k+1$) и $Q_{2i} = ((i-1)h + \theta, ih)$ ($i = 1, \dots, k$). Если $\theta = h$, обозначим $Q_{1i} = ((i-1)h, ih)$ ($i = 1, \dots, k+1$). Если $0 < \theta < h$, то существует два класса интервалов Q_{1i} и Q_{2i} , если $\theta = h$, то один класс интервалов Q_{1i} . Для любого интервала Q_{si} и целого j либо найдется интервал Q_{sm} из того же класса s , такой что $Q_{si} + jh = Q_{sm}$, либо $Q_{si} + jh \subset \mathbb{R} \setminus Q$. Совокупность интервалов Q_{sk} называется разбиением области Q .

Пусть $P_s : L_2(Q) \rightarrow L_2(\bigcup_k Q_{sk})$ — оператор ортогонального проектирования на подпространство $L_2(\bigcup_k Q_{sk})$, где $L_2(\bigcup_k Q_{sk}) = \{u \in L_2(Q) \mid u(x) = 0, x \notin \bigcup_k Q_{sk}\}$. Если $\theta = h$, то оператор P_s — тождественный оператор. В силу [5, лемма 2.5] $L_2(Q) = \bigoplus_s L_2(\bigcup_i Q_{si})$ и $L_2(\bigcup_i Q_{si})$ является инвариантным подпространством оператора R_Q .

Введем изоморфизм гильбертовых пространств $U_s : L_2(\bigcup_i Q_{si}) \rightarrow L_2^M(Q_{s1})$ по формуле

$$(U_s u)_i(x) = u(x + (i-1)h) \quad (x \in Q_{s1}, i = 1, \dots, M), \text{ где } L_2^M(Q_{s1}) = \prod_{i=1}^M L_2(Q_{s1}), M = k+1, \text{ если } s = 1 \text{ и } M = k, \text{ если } s = 2.$$

Обозначим R_1 матрицу размерности $(k+1) \times (k+1)$ с элементами

$$r_{ij} = b_{j-i} \quad (j, i = 1, \dots, k+1), \quad r_{ji} = r_{ij}. \quad (2.6)$$

Эта матрица имеет вид

$$R_1 = \begin{pmatrix} b_0 & b_1 & \cdots & b_k \\ b_1 & b_0 & \cdots & b_{k-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_k & b_{k-1} & \cdots & b_0 \end{pmatrix}$$

и является симметричной теплицевой матрицей (см. [4]). Обозначим R_2 матрицу размерности $k \times k$, полученную из матрицы R_1 вычеркиванием последней строки и столбца.

Введем оператор $R_{Q_s} = U_s R_Q U_s^{-1} : L_2^M(Q_{s1}) \rightarrow L_2^M(Q_{s1})$, $s = 1, 2$, если $\theta < h$ и $s = 1$, если $\theta = h$. В силу [5, лемма 2.6] оператор R_{Q_s} есть оператор умножения на матрицу R_s . В силу [5, лемма 2.7] спектр $\sigma(R_Q) = \sigma(R_1) \cup \sigma(R_2)$, $\theta < h$; $\sigma(R_Q) = \sigma(R_1)$, $\theta = h$.

Для удобства дальнейшего изложения сформулируем следующую лемму.

Лемма 2.1 ([5, леммы 2.6–2.8]). *Оператору R_Q соответствует оператор умножения на матрицы R_1, R_2 , спектр оператора R_Q является объединением спектров этих матриц; оператор R_Q является положительно определенным тогда и только тогда, когда матрица R_1 положительно определена.*

Для оценки спектра оператора R_Q^C построим соответствующее ему разбиение области $Q = (0, N)$ и матрицу R_M^C . В операторе R_Q^C минимальный сдвиг аргумента $h = 1$, при этом $\theta = h = 1$. Разбиение области Q в этом случае состоит из одного класса подобластей: $Q_{1i} = (i-1, i)$ ($i = 1, \dots, N$). Действию оператора R_Q^C соответствует умножение на матрицу $R_M^C = \|r_{ij}\|_{i,j=1}^N$, построенную по формуле (2.6)

$$r_{ij} = \begin{cases} \tilde{a}, & i = j, \\ b_{j-i}, & i \neq j, \end{cases} \quad r_{ij} = r_{ji}. \quad (2.7)$$

В силу леммы 2.1 оператор R_Q^C положительно определен тогда и только тогда, когда матрица R_Q^C положительно определена. Матрицу R_M^C назовем *контрольной*.

Оценим теперь спектр возмущенных операторов A_Q^ε ($\varepsilon > 0$). Для фиксированного $\varepsilon > 0$ представим N в виде: $N = \varepsilon K + \theta$, K — натуральное, $0 < \theta \leq \varepsilon$. Для оператора A_Q^ε разбиение области $Q = (0, N)$ состоит в общем случае из двух классов областей: $Q_{11} = (0, \theta)$, $Q_{12} = (\varepsilon, \varepsilon + \theta), \dots, Q_{1m} = (m\varepsilon, m\varepsilon + \theta), \dots, Q_{1p+1} = (K\varepsilon, N)$; $Q_{21} = (\theta, \varepsilon)$, $Q_{22} = (\varepsilon + \theta, 2\varepsilon), \dots, Q_{2m} = ((m-1)\varepsilon + \theta, m\varepsilon), \dots, Q_{2K} = ((K-1)\varepsilon + \theta, K\varepsilon)$.

В силу леммы 2.1 действие оператора A_Q^ε сводится к умножению на матрицы $A_{1M}^\varepsilon = \|\alpha_{ij}\|_{i,j=1}^{K+1}$, A_{2M}^ε :

$$\alpha_{ij} = \begin{cases} a_0, & i = j, \\ a_{j-i}, & 0 < j - i \leq p, \\ 0, & j - i > p, \end{cases} \quad \alpha_{ji} = \alpha_{ij}. \quad (2.8)$$

Матрица A_{2M}^ε размерности $K \times K$ — это матрица A_{1M}^ε без последней строки и столбца. Спектр оператора A_Q^ε в силу леммы 2.1 совпадает со спектром матрицы A_{1M}^ε . В силу формулы (2.8) все матрицы $\{A_{1M}^\varepsilon\}$ при различных $\varepsilon > 0$ принадлежат к одному классу теплицевых матриц (см. [4]), изменяется только их размерность $K(\varepsilon) + 1$. Обозначим этот класс $\{A_n\}_{n=1}^\infty$, $n = K(\varepsilon) + 1$ — размерность матрицы A_n .

Введем в рассмотрение символ $f(\lambda)$ класса $\{A_n\}_{n=1}^\infty$ теплицевых матриц (см. [4]):

$$f(\lambda) := a_0 + 2 \sum_{i=1}^p a_i \cos(\lambda i). \quad (2.9)$$

Замечание 2.1. Символ $a_R(\lambda)$, используемый в [3] для исследования коэрцитивности возмущенных дифференциально-разностных операторов, для семейства операторов вида A^ε из формулы (2.2) принимает этот же вид: $f(\lambda) = a_R(\lambda)$.

Обозначим

$$M := \sup_{\lambda} f(\lambda), \quad m := \inf_{\lambda} f(\lambda). \quad (2.10)$$

Из теории теплицевых матриц известна [4, лемма 4.1] равномерная по размерности n оценка спектра $\sigma(A_n) = \{\tau_{nk}\}$ класса симметричных теплицевых матриц A_n (τ_{nk} — собственные числа матрицы A_n , k — номер собственного числа):

$$m \leq \tau_{nk} \leq M. \quad (2.11)$$

Введем в рассмотрение предельный разностный оператор $R^{\lim} : L_2(\mathbb{R}) \rightarrow L_2(\mathbb{R})$

$$(R^{\lim} u)(x) = a_{\lim} u(x) + \sum_{k=1}^{N-1} b_k (u(x+k) + u(x-k)) = a_{\lim} u(x) + (Bu)(x), \quad (2.12)$$

где

$$a_{\lim} = a_0 + 2 \sum_{i=1}^p a_i. \quad (2.13)$$

Рассмотрим также оператор $R_Q^{\lim} : L_2(Q) \rightarrow L_2(Q)$, $R_Q^{\lim} = P_Q R^{\lim} I_Q$. Предельный оператор R_Q^{\lim} получается из оператора R_Q^ε подстановкой $\varepsilon = 0$, то есть $R_Q^{\lim} = R_Q^0$.

Замечание 2.2. В силу формул (2.4), (2.12) операторы R^{\lim} , R^C отличаются только коэффициентами a_{\lim} , \tilde{a} . Если в операторе R_Q^C положить $\tilde{a} := m = \inf_{\lambda} f(\lambda)$, то коэффициент a_{\lim} предельного оператора R_Q^{\lim} и коэффициент \tilde{a} оператора R_Q^C связаны неравенством

$$a_{\lim} = a_0 + 2 \sum_{i=1}^p a_i \geq \tilde{a} := \inf_{\lambda} (a_0 + 2 \sum_{i=1}^p a_i \cos(\lambda i)).$$

В силу этого неравенства и из положительной определенности оператора R_Q^C следует положительная определенность оператора R_Q^{\lim} .

Лемма 2.2. *Если при $\tilde{a} := m = \inf_{\lambda} f(\lambda)$ контрольный оператор R_Q^C является положительно определенным (контрольная матрица R_M^C является положительно определенной), то семейство возмущенных разностных операторов R_Q^ε равномерно относительно малого параметра $\varepsilon \geq 0$ положительно определено.*

Доказательство. Пусть оператор R_Q^C положительно определен, т. е. существует $\alpha > 0$:

$$(R_Q^C u, u)_{L_2(Q)} \geq \alpha(u, u)_{L_2(Q)} \quad (2.14)$$

для всех $u \in L_2(Q)$. Преобразуем оператор R_Q^ε :

$$\begin{aligned} (R_Q^\varepsilon u, u)_{L_2(Q)} &= (A_Q^\varepsilon u, u)_{L_2(Q)} + (B_Q u, u)_{L_2(Q)} = ((A_Q^\varepsilon - mI)u, u)_{L_2(Q)} + ((B_Q + mI)u, u)_{L_2(Q)} = \\ &= (\tilde{A}_Q^\varepsilon u, u)_{L_2(Q)} + (R_Q^C u, u)_{L_2(Q)}. \end{aligned}$$

Здесь $I : L_2(Q) \rightarrow L_2(Q)$ — тождественный оператор. В операторе R_Q^C положим $\tilde{a} = m$. Семейству операторов $\tilde{A}_Q^\varepsilon : L_2(Q) \rightarrow L_2(Q)$, $\tilde{A}_Q^\varepsilon = A_Q^\varepsilon - mI$ ($\varepsilon > 0$) соответствуют теплицевы матрицы $\tilde{A}_M^\varepsilon = A_M^\varepsilon - \tilde{a}E^{N(\varepsilon)}$ ($\varepsilon > 0$) одного класса с символом $\tilde{f}(\lambda) := f(\lambda) - m$. Здесь $E^{N(\varepsilon)}$ — единичные матрицы размерности $N(\varepsilon)$. Следовательно, в силу формул (2.9), (2.11) для их собственных чисел $\tilde{\tau}_{nk}$ справедлива оценка $\tilde{\tau}_{nk} \geq \inf_{\lambda} \tilde{f}(\lambda) = \inf_{\lambda} f(\lambda) - \tilde{a} = 0$. Отсюда $(\tilde{A}_Q^\varepsilon u, u)_{L_2(Q)} \geq 0$ для всех $u \in L_2(Q)$ и, следовательно в силу (2.14)

$$(R_Q^\varepsilon u, u)_{L_2(Q)} = (\tilde{A}_Q^\varepsilon u, u)_{L_2(Q)} + (R_Q^C u, u)_{L_2(Q)} \geq \alpha(u, u)_{L_2(Q)}.$$

Для $\varepsilon = 0$ утверждение леммы следует из замечания 2.2. \square

Равномерная по ε положительная определенность операторов R_Q^ε понадобится в дальнейшем для осуществления предельного перехода при $\varepsilon \rightarrow 0$.

Аналогично лемме 2.2 доказывается следующая лемма.

Лемма 2.3. *Если при $\tilde{a} := m = \inf_{\lambda} f(\lambda)$ контрольный оператор R_Q^C является неотрицательно определенным (контрольная матрица R_M^C является неотрицательно определенной) то семейство возмущенных разностных операторов R_Q^ε равномерно относительно малого параметра $\varepsilon \geq 0$ неотрицательно определено.*

Рассмотрим частный случай, когда в операторе A^ε из формулы (2.2) $\varepsilon(n) = \frac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N}$. Этот случай будет важен для доказательства леммы 2.6 и построения алгоритма решения краевых задач для возмущенных дифференциально-разностных операторов в разделе 3.

Возмущенные разностные операторы A^ε примут вид

$$(A^{\varepsilon(n)} u)(x) = a_0 u(x) + \sum_{i=1}^p a_i \left(u\left(x + \frac{i}{n}\right) + u\left(x - \frac{i}{n}\right) \right). \quad (2.15)$$

Операторы $R_Q^\varepsilon = R_Q^{\frac{1}{n}}$ будем в этом случае обозначать для упрощения обозначений R_Q^n . При каждом фиксированном $n \in \mathbb{N}$ для оператора R_Q^n можно сформировать соответствующую матрицу R_M^n . В этом случае минимальный сдвиг аргумента $h = \frac{1}{n}$, разбиение области $Q = (0, N)$ состоит из одного класса Nn подобластей $Q_i = \left(\frac{i-1}{n}, \frac{i}{n} \right)$, $i = 1, \dots, nN$ и матрица R_M^n является блочной матрицей размерности $Nn \times Nn$:

$$R_M^n = A^{Nn} + B^{Nn}. \quad (2.16)$$

Матрица $B^{Nn} = \|B_{ij}\|_{i,j=1}^{Nn}$ состоит из клеток $B_{ij} = E^n r_{ij}$, E^n — единичные матрицы размерности n , r_{ij} — элементы матрицы R_M^C , заданные формулой (2.7). Матрица $A^{Nn} = \|\alpha_{ij}\|_{i,j=1}^{Nn}$, где α_{ij} определяются формулой (2.8).

В силу леммы 2.1 оператор R_Q^n положительно определен тогда и только тогда, когда матрица R_M^n положительно определена. Таким образом, задача оценки спектра семейства операторов $\{R_Q^n\}_{n \in \mathbb{N}}$ сводится к оценке спектра семейства матриц $\{R_M^n\}_{n \in \mathbb{N}}$ через спектр контрольной матрицы R_M^C .

Из леммы 2.2 получим

Следствие 2.1. Если при $\tilde{\alpha} := m = \inf_{\lambda} f(\lambda)$, контрольная матрица R_M^C является положительно определенной, то матрицы R_M^n равномерно по $n \in \mathbb{N}$ положительно определены, т. е. для любого $n \in \mathbb{N}$ и всех $x \in \mathbb{R}^{nN}$

$$(R_M^n x, x)_{nN} \geq \alpha (x, x)_{nN}, \quad (2.17)$$

где $\alpha > 0$ — минимальное собственное значение матрицы R_M^C .

(Здесь $(\cdot, \cdot)_{nN}$ — скалярное произведение в \mathbb{R}^{nN} .)

Аналогично доказывается следующая лемма.

Лемма 2.4. Если при $\tilde{\alpha} := m = \inf_{\lambda} f(\lambda)$, контрольная матрица R_M^C неотрицательно определена, то матрицы R_M^n для всех $n \in \mathbb{N}$ неотрицательно определены.

Равномерная по $n \in \mathbb{N}$ положительная определенности матриц R_M^n понадобится в дальнейшем для осуществления предельного перехода при $n \rightarrow \infty$.

Обозначим $\tilde{B}^{Nn} = B^{Nn} + \tilde{\alpha} E^{nN}$, $\tilde{A}^{Nn} = A^{Nn} - \tilde{\alpha} E^{nN}$. Тогда матрицу R_M^n можно представить в виде

$$R_M^n = A^{Nn} + B^{Nn} = A^{Nn} - \tilde{\alpha} E^{nN} + B^{Nn} + \tilde{\alpha} E^{nN} = \tilde{A}^{Nn} + \tilde{B}^{Nn}. \quad (2.18)$$

Лемма 2.5. Спектр $\sigma(\tilde{B}^{Nn})$ блочных матриц \tilde{B}^{Nn} совпадает со спектром $\sigma(R_M^C)$ матрицы R_M^C : $\sigma(\tilde{B}^{Nn}) = \sigma(R_M^C)$.

Доказательство. Утверждение леммы следует непосредственно из способа формирования матрицы \tilde{B}^{Nn} на основе матрицы R_M^C : на место каждого элемента r_{ij} матрицы R_M^C в матрице \tilde{B}^{Nn} подставляется диагональная матрица $B_{ij} = \text{diag}(r_{ij})$ размерности n . При этом размерность инвариантного подпространства, соответствующего собственному числу матрицы R_M^C при переходе к \tilde{B}^{Nn} возрастает в n раз. \square

Замечание 2.3. Из [3, теорема 2.13] следует, что критерием равномерной положительной определенности семейства операторов $A_Q^n = P_Q A^{\varepsilon(n)} I_Q : L_2(Q) \rightarrow L_2(Q)$, где разностный оператор определен формулой (2.21), является условие $a_R(\lambda) > 0 \forall \lambda \in \mathbb{R}$, а в силу замечания 2.1 и $f(\lambda) > 0$. И если $m = \inf_{\lambda} f(\lambda) = 0$, то для любого $\varepsilon > 0$ найдется номер n и функция $u \in L_2(Q)$ такие, что

$$(A_Q^n u, u)_{L_2(Q)} < \varepsilon (u, u)_{L_2(Q)}.$$

Лемма 2.6. Если совокупность матриц $\{R_M^n\}_{n \in \mathbb{N}}$ равномерно по $n \in \mathbb{N}$ положительно определена, т. е. существует $\alpha > 0$, для которой выполнена формула (2.12), то контрольная матрица R_M^C также положительно определена.

Доказательство. Предположим противное: пусть матрица R_M^C имеет собственное значение $\lambda_b \leq 0$ и собственный вектор $h = (h_1, \dots, h_N)^T$: $R_M^C h = \lambda_b h$. Тогда в силу леммы 2.5 матрица \tilde{B}^{Nn} также имеет собственное значение $\lambda_b \leq 0$, с n — мерным подпространством собственных векторов

$$\begin{aligned} H_1 &= (h_1, 0, \dots, 0; h_2, 0, \dots, 0; \dots; h_N, 0, \dots, 0)^T \in \mathbb{R}^{nN}, \\ H_2 &= (0, h_1, 0, \dots, 0; 0, h_2, 0, \dots, 0; \dots; 0, h_N, 0, \dots, 0)^T \in \mathbb{R}^{nN}, \\ &\dots \\ H_n &= (0, \dots, 0, h_1; 0, \dots, 0, h_2; \dots; 0, \dots, 0, h_N)^T \in \mathbb{R}^{nN}, \end{aligned}$$

где у вектора H_k ненулевые элементы расположены на месте k , $k = 1, \dots, n$. Следовательно, для любого $u \in \mathbb{R}^n$ ($u \neq 0_n$) вектор вида $V = (h_1 u, h_2 u, \dots, h_N u)^T \in \mathbb{R}^{nN}$ является линейной комбинацией собственных векторов H_k и также будет собственным вектором матрицы \tilde{B}^{Nn} : $\tilde{B}^{Nn} V = \lambda_b V$. То есть

$$(\tilde{B}^{Nn} V, V)_{nN} = (\lambda_b V, V)_{nN}. \quad (2.19)$$

Подберем вектор $u \in \mathbb{R}^n$ таким образом, чтобы V был собственным вектором также и для матрицы \tilde{A}^{nN} . Пусть n достаточно велико, так что $\frac{p}{n} < 1 - \frac{p}{n}$, и все сдвиги оператора $A^{\varepsilon(n)}$ при $x \in \left(\frac{p}{n}, 1 - \frac{p}{n}\right)$ происходят внутри интервала $(0, 1)$. Если взять вектор $u = (u_1, \dots, u_n)^T \in \mathbb{R}^n$ с координатами $u_i = 0$, $i = 1, \dots, p$, $i = n - p + 1, \dots, n$, то $(\tilde{A}^n u, u)_n = (\tilde{A}_0^n u, u)_n$, где матрица \tilde{A}_0^n — это матрица, полученная из \tilde{A}^n наложением на нее «рамки» нулей ширины p . Матрица \tilde{A}_0^n — это матрица \tilde{A}^{n-2p} , т. е. принадлежит к тому же классу теплицевых матриц, что и матрица \tilde{A}^n . В силу замечания 2.2, если $\inf_{\lambda} \tilde{f}(\lambda) = 0$, то для любого сколь угодно малого $\varepsilon > 0$ найдется $n \in \mathbb{N}$ такое, что $\lambda_{\min}^a < \varepsilon$, где λ_{\min}^a — минимальное собственное значение матрицы \tilde{A}_0^n и собственный вектор $u \in \mathbb{R}^n$: $(\tilde{A}_0^n u, u)_n = \lambda_{\min}^a (u, u)_n$. (Вектор u имеет нулевые координаты по краям.)

Если взять $V = (h_1 u, h_2 u, \dots, h_N u)^T \in \mathbb{R}^{nN}$, h_i — координаты собственного вектора h матрицы R_M^C , то $(\tilde{A}^{nN} V, V)_{nN} = (A_{\text{block}} V, V)_{nN}$, где матрица A_{block} — блочная матрица, она состоит из матриц \tilde{A}_0^n , т. е. это прореженная нулями исходная матрица \tilde{A}^{nN} . Используя соотношение

$$(V, V)_{nN} = \sum_{i=1}^N (h_i u, h_i u)_n = (u, u)_n \sum_{i=1}^N h_i^2,$$

получаем

$$\begin{aligned} (\tilde{A}^{nN} V, V)_{nN} &= (A_{\text{block}} V, V)_{nN} = \sum_{i=1}^N h_i^2 (\tilde{A}_0^n u, u)_n = \sum_{i=1}^N h_i^2 \lambda_{\min}^a (u, u)_n = \\ &= \lambda_{\min}^a (u, u)_n \sum_{i=1}^N h_i^2 = \lambda_{\min}^a (V, V)_{nN}. \end{aligned} \quad (2.20)$$

То есть вектор V является собственным вектором матрицы \tilde{A}^{nN} . Подставляя в (2.13) соотношения (2.19), (2.20), получим

$$(R_M^n V, V)_{nN} = (\tilde{B}^{nN} V, V)_{nN} + (\tilde{A}^{nN} V, V)_{nN} = \lambda_b (V, V)_{nN} + \lambda_{\min}^a (V, V)_{nN} \leq (0 + \varepsilon) (V, V)_{nN}.$$

Таким образом, для любого $\varepsilon > 0$ найдется $n \in \mathbb{N}$ и вектор V : $(R_M^n V, V)_{nN} < \varepsilon (V, V)_{nN}$, что противоречит условию (2.12) равномерной положительной определенности матричного семейства $\{R_M^n\}_{n \in \mathbb{N}}$. \square

Лемма 2.7. Если совокупность матриц $\{R_M^n\}_{n \in \mathbb{N}}$ неотрицательно определена, то контрольная матрица R_M^C также неотрицательно определена.

Доказательство аналогично.

Таким образом, из лемм 2.3, 2.6 следует

Теорема 2.1. Совокупность операторов $\{R_Q^\varepsilon\}$ равномерно по $\varepsilon \geq 0$ положительно определена тогда и только тогда, когда контрольный оператор R_Q^C является положительно определенным (контрольная матрица R_M^C является положительно определенной).

Из лемм 2.4, 2.7 следует

Теорема 2.2. Совокупность операторов $\{R_Q^\varepsilon\}$ равномерно по $\varepsilon \geq 0$ неотрицательно определена тогда и только тогда, когда контрольный оператор R_Q^C (контрольная матрица R_M^C) является неотрицательно определенным.

Рассмотрим далее семейство симметричных разностных операторов $R^\varepsilon : L_2(\mathbb{R}) \rightarrow L_2(\mathbb{R})$

$$(R^\varepsilon u)(x) = (A^\varepsilon u)(x) + (Bu)(x), \quad (2.21)$$

где разностные операторы $B : L_2(\mathbb{R}) \rightarrow L_2(\mathbb{R})$ определены формулой (2.3); $A^\varepsilon : L_2(\mathbb{R}) \rightarrow L_2(\mathbb{R})$ — семейство возмущенных (относительно j — целого сдвига аргумента) разностных операторов:

$$(A^\varepsilon u)(x) = a_0 u(x) + a_j^\varepsilon (u(x + j + \varepsilon) + u(x - j - \varepsilon)), \quad (2.22)$$

где $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$ — малый параметр.

Для интервала $Q = (0, N)$ введем операторы:

$$R_Q^\varepsilon = P_Q R^\varepsilon I_Q : L_2(Q) \rightarrow L_2(Q), \quad A_Q^\varepsilon = P_Q A^\varepsilon I_Q : L_2(Q) \rightarrow L_2(Q).$$

Исследуем вопрос равномерной по ε положительной определенности семейства разностных операторов R_Q^ε и в дальнейшем возможности предельного перехода при $\varepsilon \rightarrow 0$.

Используем метод оценки спектра операторов R_Q^ε , описанный выше.

Для фиксированного ε обозначим $j_\varepsilon := j + \varepsilon$ и представим N в виде: $N = j_\varepsilon k + \theta$, $k = k(\varepsilon)$ — натуральное, $0 < \theta \leq j_\varepsilon$. Для оператора A_Q^ε разбиение области $Q = (0, N)$ состоит из двух классов. Первый класс состоит из областей:

$$Q_{11} = (0, \theta), \quad Q_{12} = (j_\varepsilon, j_\varepsilon + \theta), \quad \dots, \quad Q_{1m} = (mj_\varepsilon, mj_\varepsilon + \theta), \quad \dots, \quad Q_{1k} = (kj_\varepsilon, N).$$

Второй класс областей:

$$Q_{21} = (\theta, j_\varepsilon), \quad Q_{22} = (j_\varepsilon + \theta, 2j_\varepsilon), \quad \dots, \quad Q_{2m} = ((m-1)j_\varepsilon + \theta, mj_\varepsilon), \quad \dots, \quad Q_{2k} = ((k-1)j_\varepsilon + \theta, kj_\varepsilon).$$

В силу леммы 2.1 действие оператора A_Q^ε сводится к умножению на матрицы R_1^ε и R_2^ε где $R_1^\varepsilon = \| |r_{ij}| \|_{i,j=1}^{k+1}$, $r_{ii} = a_0$, $r_{i,i+1} = r_{i+1,i} = a_j^\varepsilon$, $i = 1, \dots, k$, остальные элементы матрицы равны нулю. Матрица R_2^ε размерности $k \times k$ — это матрица R_1^ε без последней строки и столбца. Спектр оператора A_Q^ε совпадает со спектром матрицы R_1^ε .

Для $0 \leq \varepsilon < 1$ матрицы R_1^ε могут отличаться только размерностью $k(\varepsilon)$: $\min_{\varepsilon} k(\varepsilon) = k(1) \leq k(\varepsilon) \leq \max_{\varepsilon} k(\varepsilon) = k(0)$, следовательно, число таких матриц конечно. Обозначим λ_{\min} — минимальное собственное значение матриц R_1^ε для всех $0 \leq \varepsilon < 1$. Тогда для любого $u \in L_2(Q)$ и любого $0 \leq \varepsilon < 1$

$$(A_Q^\varepsilon u, u)_{L_2(Q)} \geq \lambda_{\min}(u, u)_{L_2(Q)},$$

следовательно,

$$((A_Q^\varepsilon - \lambda_{\min} I)u, u)_{L_2(Q)} \geq 0, \tag{2.23}$$

где I — тождественный оператор.

Введем контрольный разностный оператор $R_Q^C = P_Q R^C I_Q : L_2(Q) \rightarrow L_2(Q)$, где $R^C : L_2(\mathbb{R}) \rightarrow L_2(\mathbb{R})$ разностный оператор

$$(R^C u)(x) = \tilde{a}u(x) + (Bu)(x),$$

$\tilde{a} = \lambda_{\min}$. Действию оператора R_Q^C , как и в разделе 2, соответствует умножение на матрицу R_M^C , определенную формулой (2.7).

Теорема 2.3. Если оператор R_Q^C (матрица R_M^C) положительно определен, то семейство разностных операторов R_Q^ε равномерно относительно малого параметра $\varepsilon \geq 0$ положительно определено.

Доказательство. Пусть оператор R_Q^C положительно определен, т. е. для некоторого $c > 0$

$$(R_Q^C u, u)_{L_2(Q)} \geq c(u, u)_{L_2(Q)}$$

для всех $u \in L_2(Q)$. В силу формулы (2.23) для всех $\varepsilon \geq 0$ и $u \in L_2(Q)$

$$\begin{aligned} (R_Q^\varepsilon u, u)_{L_2(Q)} &= (A_Q^\varepsilon u, u)_{L_2(Q)} + (B_Q u, u)_{L_2(Q)} = \\ &= ((A_Q^\varepsilon - \lambda_{\min} I)u, u)_{L_2(Q)} + ((B_Q + \lambda_{\min} I)u, u)_{L_2(Q)} \geq \\ &\geq (R_Q^C u, u)_{L_2(Q)} \geq c(u, u)_{L_2(Q)}. \end{aligned}$$

□

3. РАЗРЕШИМОСТЬ СЕМЕЙСТВА ВОЗМУЩЕННЫХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ И УСЛОВИЯ СХОДИМОСТИ РЕШЕНИЙ

Рассмотрим семейство краевых задач для дифференциально-разностных уравнений

$$-(R_Q^\varepsilon u'_\varepsilon(x))' = f(x), \quad x \in Q, \quad (3.1)$$

где $Q = (0, N)$, $\varepsilon \geq 0$, $R_Q^\varepsilon = P_Q R^\varepsilon I_Q$, R^ε — разностные операторы, определенные формулой (2.1), и $f \in L_2(Q)$.

Краевые задачи для дифференциально-разностных уравнений вида (3.1), вообще говоря, не имеют гладких классических решений, и естественно определить решение в обобщенном смысле (см. [5]).

Для $Q = (0, a)$ введем в рассмотрение $\dot{H}^1(Q)$ — пространство Соболева функций, у которых существует и принадлежит пространству $L_2(Q)$ обобщенная производная, $\dot{H}^1(Q) = \{u \in H^1(Q) | u(0) = u(a) = 0\}$. Эквивалентная норма $\|u\|_{\dot{H}^1(Q)}$ в $\dot{H}^1(Q)$ определяется формулой $\|u\|_{\dot{H}^1(Q)}^2 = \int_0^a (u'(x))^2 dx$.

Определение 3.1. Обобщенным решением краевой задачи (3.1) будем называть функцию $u_\varepsilon \in \dot{H}^1(Q)$, если для любой $v \in \dot{H}^1(Q)$ выполнено интегральное тождество

$$(R_Q^\varepsilon u'_\varepsilon, v')_{L_2(Q)} = (f, v)_{L_2(Q)}. \quad (3.2)$$

Введем в рассмотрение предельную задачу

$$-(R_Q^{\text{lim}} u'_{\text{lim}}(x))' = f(x), \quad x \in Q, \quad (3.3)$$

где $R_Q^{\text{lim}} : L_2(Q) \rightarrow L_2(Q)$, $R_Q^{\text{lim}} = P_Q R^{\text{lim}} I_Q$, где оператор $R_Q^{\text{lim}} : L_2(Q) \rightarrow L_2(Q)$ определен формулой (2.12)

Решение задачи (3.3) также определяется интегральным тождеством

$$(R_Q^{\text{lim}} u'_{\text{lim}}, v')_{L_2(Q)} = (f, v)_{L_2(Q)}, \quad (3.4)$$

выполненным для любой функции $v \in \dot{H}^1(Q)$.

Замечание 3.1. Поскольку в силу замечания 2.2 из положительной определенности оператора R_Q^C следует положительная определенность оператора R_Q^{lim} , условия существования решения предельной задачи являются более слабыми, чем условия возможности предельного перехода к ней. Это свойство впервые было обнаружено Л. Е. Россовским в [3] для эллиптических задач со сжатием и растяжением аргумента и задач для дифференциально-разностных уравнений в случае, когда все отклонения аргумента пропорционально стремятся к нулю.

Доказательство следующей теоремы аналогично доказательству [3, лемма 2.11 и следствие 2.4].

Теорема 3.1. Пусть оператор R_Q^C является положительно определенным (матрица R_M^C является положительно определенной). Тогда для любого $\varepsilon > 0$ существует единственное решение $u_\varepsilon \in \dot{H}^1(Q)$ задачи (3.2) и существует единственное решение $u_{\text{lim}} \in \dot{H}^1(Q)$ предельной задачи (3.4). При этом $u_\varepsilon \rightarrow u_{\text{lim}}$ ($\varepsilon \rightarrow 0$) в норме пространства $\dot{H}^1(Q)$.

Доказательство. Из теоремы 2.1 следует, что все операторы R_Q^ε равномерно по $\varepsilon \geq 0$ положительно определены и для некоторого $c > 0$ для всех $u \in L_2(Q)$ выполнено соотношение

$$(R_Q^\varepsilon u, u)_{L_2(Q)} \geq c(u, u)_{L_2(Q)}, \quad (3.5)$$

где c не зависит от $\varepsilon \geq 0$ и $u \in L_2(Q)$. Из положительной определенности операторов $R_Q^{\varepsilon n}$ для всех $\varepsilon > 0$ следует существование и единственность решений $u_\varepsilon \in \dot{H}^1(Q)$ задач (3.2) (см. [5]). В силу замечания 2.2 оператор R_Q^{lim} также является положительно определенным и задача (3.4) имеет единственное решение $u_{\text{lim}} \in \dot{H}^1(Q)$. Из непрерывности производной $u' \in L_2(Q)$ в средне-квадратичном получим, что

$$\begin{aligned} & |(R_Q^\varepsilon u', v')_{L_2(Q)} - (R_Q^{\text{lim}} u', v')_{L_2(Q)}| = \\ & |((R_Q^\varepsilon - R_Q^{\text{lim}})u', v')_{L_2(Q)}| \leq \| (R_Q^\varepsilon - R_Q^{\text{lim}})u' \|_{L_2(Q)} \|v'\|_{L_2(Q)} \leq h_\varepsilon(u) \|v\|_{\dot{H}^1(Q)}, \end{aligned} \quad (3.6)$$

где $h_\varepsilon(u) \rightarrow 0$ при $\varepsilon \rightarrow 0$ для любой фиксированной функции $u \in \mathring{H}^1(Q)$. Из интегральных тождеств (3.2), (3.4) следует

$$(R_Q^\varepsilon u'_\varepsilon, v')_{L_2(Q)} = (R_Q^{\text{lim}} u'_{\text{lim}}, v')_{L_2(Q)}.$$

Отсюда для любого $v \in \mathring{H}^1(Q)$

$$(R_Q^\varepsilon u'_\varepsilon - R_Q^\varepsilon u'_{\text{lim}}, v')_{L_2(Q)} = (R_Q^{\text{lim}} u'_{\text{lim}} - R_Q^\varepsilon u'_{\text{lim}}, v')_{L_2(Q)}.$$

Полагая $v = u_\varepsilon - u_{\text{lim}}$, из равномерной положительной определенности операторов R_Q^ε и неравенства (3.6) получим

$$\begin{aligned} c \|u'_\varepsilon - u'_{\text{lim}}\|_{L_2(Q)}^2 &\leq (R_Q^\varepsilon(u'_\varepsilon - u'_{\text{lim}}), u'_\varepsilon - u'_{\text{lim}})_{L_2(Q)} = \\ &= (R_Q^{\text{lim}} u'_{\text{lim}}, u'_\varepsilon - u'_{\text{lim}})_{L_2(Q)} - (R_Q^\varepsilon u'_{\text{lim}}, u'_\varepsilon - u'_{\text{lim}})_{L_2(Q)} \leq h_\varepsilon(u_{\text{lim}}) \|u'_\varepsilon - u'_{\text{lim}}\|_{L_2(Q)}, \end{aligned}$$

где $c > 0$, $h_\varepsilon(u_{\text{lim}}) \rightarrow 0$, $\varepsilon \rightarrow 0$. Отсюда

$$\|u'_\varepsilon - u'_{\text{lim}}\|_{L_2(Q)}^2 \leq \frac{h_\varepsilon(u_{\text{lim}})}{c} \rightarrow 0, \quad \varepsilon \rightarrow 0,$$

и, значит, $\|u_\varepsilon - u_{\text{lim}}\|_{\mathring{H}^1(Q)} \rightarrow 0$, $\varepsilon \rightarrow 0$. □

Пример 3.1. Рассмотрим семейство краевых задач для дифференциально-разностных уравнений

$$-(R_Q^n u'_n(x))' = f(x), \quad x \in Q = (0, 2), \quad n \in \mathbb{N}, \quad (3.7)$$

где $R_Q^n : L_2(Q) \rightarrow L_2(Q)$, $R_Q^n = P_Q R^n I_Q$, R^n – разностные операторы:

$$(R^n u)(x) = a_0 u(x) + a_\varepsilon (u(x + 1/n) + u(x - 1/n)) + b_1 (u(x + 1) + u(x - 1)). \quad (3.8)$$

Это задача вида (3.2) при $\varepsilon = \frac{1}{n} \rightarrow 0$, $n \rightarrow \infty$. Везде ниже в примерах будем рассматривать этот случай. Получим условия на коэффициенты разностного оператора a_0 , a_ε , b_1 , при которых существует последовательность $u_n \in \mathring{H}^1(Q)$ обобщенных решений краевых задач (3.7), сходящаяся при $n \rightarrow \infty$ в пространстве $\mathring{H}^1(Q)$ к обобщенному решению $u_{\text{lim}} \in \mathring{H}^1(Q)$ предельной задачи:

$$-(R_Q^{\text{lim}} u'_{\text{lim}}(x))' = f(x), \quad x \in Q, \quad (3.9)$$

где $R_Q^{\text{lim}} : L_2(Q) \rightarrow L_2(Q)$, $R_Q^{\text{lim}} = P_Q R^{\text{lim}} I_Q$, R^{lim} – предельный разностный оператор:

$$(R^{\text{lim}} u)(x) = (a_0 + 2a_\varepsilon)u(x) + b_1(u(x + 1) + u(x - 1)).$$

Введем контрольный оператор

$$(R^C u)(x) = \tilde{a}u(x) + b_1(u(x + 1) + u(x - 1)).$$

Символ теплицевых матриц возмущенных операторов: $f(\lambda) = a_0 + 2a_\varepsilon \cos(\lambda)$, $\tilde{a} := m = \inf_\lambda f(\lambda) = a_0 - 2|a_\varepsilon|$. Контрольная матрица:

$$R_M^C = \begin{pmatrix} \tilde{a} & b_1 \\ b_1 & \tilde{a} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_0 - 2|a_\varepsilon| & b_1 \\ b_1 & a_0 - 2|a_\varepsilon| \end{pmatrix}. \quad (3.10)$$

Условие положительной определенности матрицы R_M^C :

$$a_0 - 2|a_\varepsilon| - |b_1| > 0. \quad (3.11)$$

В силу теоремы 2.1 условия (3.11) являются необходимыми и достаточными для положительной определенности семейства возмущенных операторов. Если использовать стандартный символ дифференциально-разностных операторов (см. [5]), достаточным условием положительной определенности будет условие $g(\lambda) = a_0 + 2a_\varepsilon \cos\left(\frac{\lambda}{n}\right) + 2b_1 \cos(\lambda) > 0 \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}$ или

$$a_0 - 2|a_\varepsilon| - 2|b_1| > 0. \quad (3.12)$$

Для решения задач используется программная среда Maple. Решения строятся аналитически, методом сведения краевых задач для дифференциально-разностных уравнений к нелокальным задачам для обыкновенных дифференциальных уравнений, см. [5].

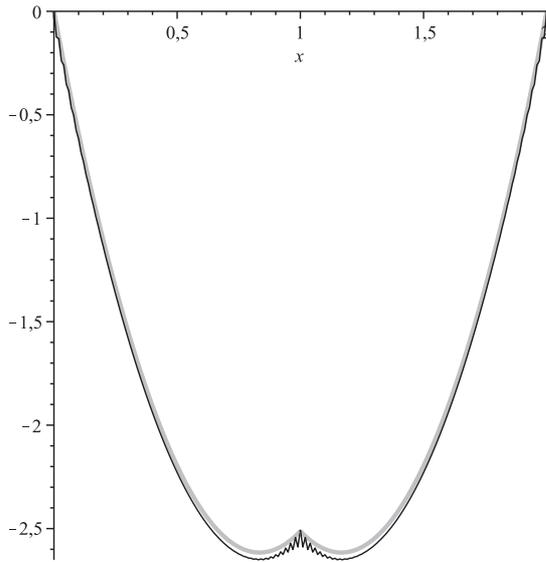


Рис. 1. Графики решений $u_{\text{lim}}(x)$ и $u_{100}(x)$ из примера 3.1. Сходимость возмущенных решений к $u_{\text{lim}}(x)$.

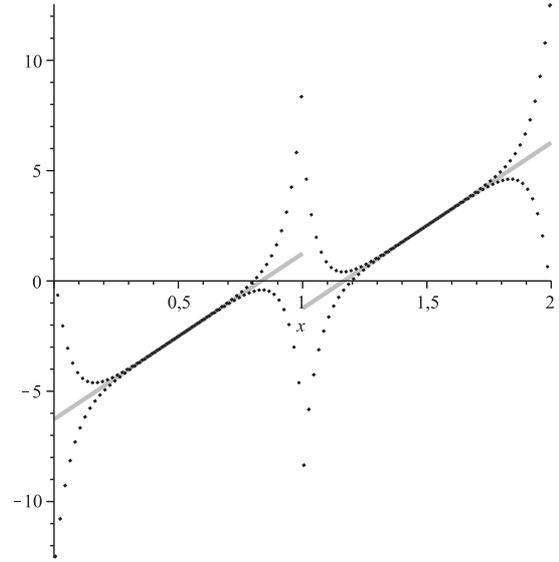


Рис. 2. Графики обобщенных производных $u'_{100}(x)$ и $u'_{\text{lim}}(x)$ решений из примера 3.1.

Значения коэффициентов разностных операторов, удовлетворяющих равенству

$$a_0 - 2|a_\varepsilon| - |b_1| = 0, \tag{3.13}$$

назовем *критическими*. Рассмотрим поведение семейства решений краевых задач в окрестности критических значений коэффициентов.

Пусть коэффициенты $a_0 = 1$, $a_\varepsilon = 0,33$, $b_1 = -0,33$. Последовательность разностных операторов:

$$(R^n u)(x) = u(x) + 0,33(u(x + 1/n) + u(x - 1/n)) - 0,33(u(x + 1) + u(x - 1)).$$

Неравенство (3.11) выполнено: $1 - 0,99 = 0,01 > 0$, и в силу теоремы 3.1 при $n \rightarrow \infty$ решения возмущенных задач (3.7) сходятся в пространстве $\dot{H}^1(Q)$ к u_{lim} — решению предельной задачи (3.9) с разностным оператором

$$(R_{\text{lim}} u)(x) = 1,66u(x) - 0,33(u(x + 1) + u(x - 1)).$$

Минимальное собственное значение λ_{min}^C матрицы R_M^C : $\lambda_{\text{min}}^C = 0,01 > 0$. При этом условие (3.12) не выполняется и мы находимся за рамками традиционных достаточных условий положительной определенности разностных (и соответствующих дифференциально-разностных операторов).

Для $f(x) = -10$ получено решение $u_{\text{lim}} \in \dot{H}^1(0, 2)$ предельной задачи (3.9):

$$u_{\text{lim}}(x) = \begin{cases} 3,76x^2 - 6,27x, & 0 < x \leq 1, \\ 3,76x^2 - 8,77x + 2,49, & 1 \leq x < 2. \end{cases}$$

Обобщенная производная предельной задачи $u'_{\text{lim}} \in L_2(0, 2)$:

$$u'_{\text{lim}}(x) = \begin{cases} 7,52x - 6,27, & 0 < x \leq 1, \\ 7,52x - 8,77, & 1 < x < 2. \end{cases}$$

Минимальное собственное значение $\lambda_{\text{min}}^{100}$ ($n = 100$) матрицы R_M^n : $\lambda_{\text{min}}^{100} = 0,0103 > \lambda_{\text{min}}^C > 0$.

На рис. 1 представлены графики решений $u_{\text{lim}}(x)$ и $u_{100}(x)$. На рис. 2 даны графики обобщенных производных решений. Два отрезка параллельных прямых — график функции $u'_{\text{lim}}(x)$, кривые в форме XX — график обобщенной производной $u'_{100}(x)$.

Пример 3.2. Рассмотрим задачу из примера 3.1 с коэффициентами разностного оператора: $a_0 = 1$, $a_\varepsilon = 1/3$, $b_1 = -1/3$. Это критический случай: коэффициенты удовлетворяют равенству (3.13). Условие теоремы 2.1 не выполнено. Однако предельный разностный оператор

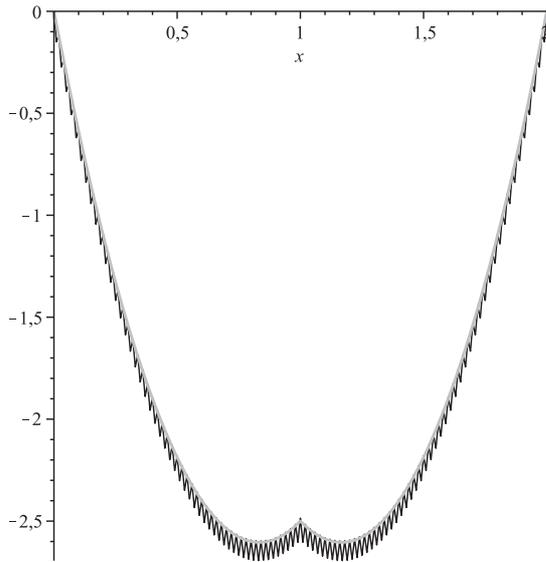


Рис. 3. Графики решений $u_{\text{lim}}(x)$ и $u_{100}(x)$ из примера 3.2. Критический случай: сходимость возмущенных решений к $u_{\text{lim}}(x)$ только в $L_2(Q)$.

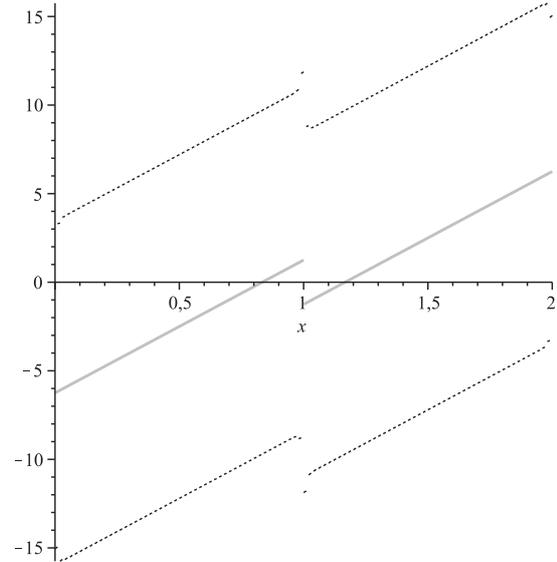


Рис. 4. Графики обобщенных производных $u'_{\text{lim}}(x)$ и $u'_{100}(x)$ решений из примера 3.2.

$R_Q^{\text{lim}} = P_Q R^{\text{lim}} I_Q$, $(R^{\text{lim}} u)(x) = \frac{5}{3}u(x) - \frac{1}{3}(u(x+1) + u(x-1))$ остается положительно определенным и решение $u_{\text{lim}} \in \dot{H}^1(0, 2)$ задачи (3.9) существует и единственно:

$$u_{\text{lim}}(x) = \begin{cases} 3,75x^2 - 6,25x, & 0 < x \leq 1, \\ 3,75x^2 - 8,75x + 2,50, & 1 \leq x < 2. \end{cases}$$

Возмущенные разностные операторы также положительно определены (результат компьютерного моделирования) и существуют и единственны решения $u_n \in \dot{H}^1(0, 2)$ соответствующих задач (3.7). Совокупность матриц R_M^n в силу леммы 2.3 является неотрицательно определенной. Однако в силу теоремы 2.1 равномерная по n положительная определенность матриц R_M^n отсутствует: $\inf_n \lambda_{\min}^n = 0$ ($\lambda_{\min}^n \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$).

На рис. 3 приведены графики решений $u_{\text{lim}}(x)$ и $u_{100}(x)$ для $n = 100$, при этом $\lambda_{\min}^{100} = 3 \cdot 10^{-4} > 0$. На рис. 4 приведен график функции $u'_{\text{lim}}(x)$:

$$u'_{\text{lim}}(x) = \begin{cases} 7,5x - 6,25, & 0 < x \leq 1, \\ 7,5x - 8,75, & 1 < x < 2, \end{cases}$$

и график функции $u'_{100}(x)$ — штрих-пунктирные линии («реплика» функции Дирихле).

На рис. 5 приведены графики решений $u_{\text{lim}}(x)$ и $u_{200}(x)$. Минимальное собственное значение матрицы R_M^{200} : $\lambda_{\min}^{200} = 8 \cdot 10^{-5} > 0$, и $\lambda_{\min}^n \rightarrow 0$ с ростом n .

Условия теоремы 3.1 не выполнены, решения возмущенных задач u_n при $n \rightarrow \infty$ не сходятся в норме $\dot{H}^1(0, 2)$ к решению предельной задачи u_{lim} , однако, как показывает компьютерное моделирование, в норме $L_2(0, 2)$ сходимость сохраняется.

Пример 3.3. В задаче из примера 3.1 положим значения коэффициентов разностного оператора $a_0 = 1$, $a_\varepsilon = 0,35$, $b_1 = -0,33$. Условие (3.11) нарушается: $1 - 0,7 - 0,33 = -0,03 < 0$. При достаточно больших n появляются отрицательные собственные значения матриц R_M^n разностных операторов. Так, $\lambda_{\min}^{200} = -0,03 < 0$. На рис. 6 представлены графики решений $u_{\text{lim}}(x)$ и $u_{200}(x)$ — пилообразный.

На рис. 7 приведены графики обобщенных производных решений. График функции $u'_{200}(x) \in L_2(0, 2)$ — «облако» точек.

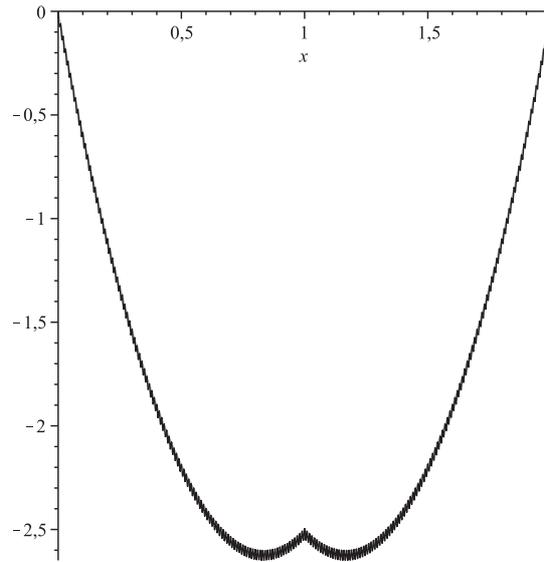


Рис. 5. Графики решений $u_{\text{lim}}(x)$ и $u_{200}(x)$ из примера 3.2. Критический случай: сходимость в $L_2(Q)$.

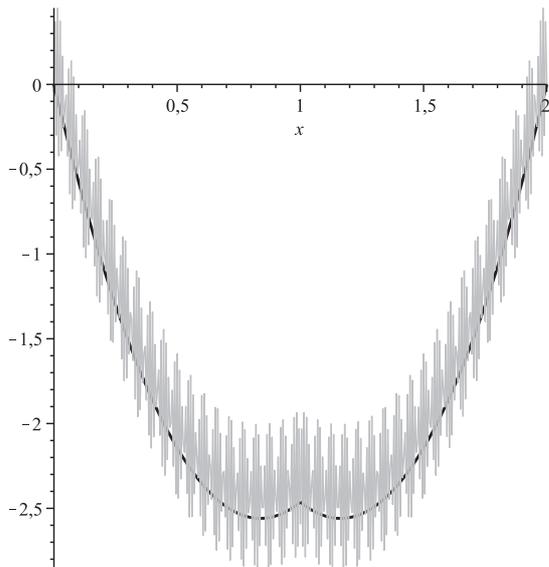


Рис. 6. Графики решений $u_{\text{lim}}(x)$ и $u_{200}(x)$ из примера 3.3. Возмущенные решения расходятся.

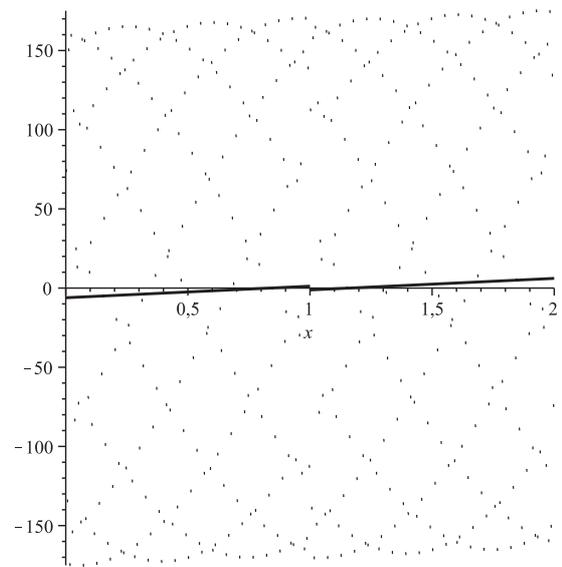


Рис. 7. Графики обобщенных производных $u'_{\text{lim}}(x)$ и $u'_{200}(x)$ решений из примера 3.3.

Последовательность решений $u_n(x)$ при $n \rightarrow \infty$ расходится как в пространстве $\dot{H}^1(0, 2)$, так и в $L_2(0, 2)$.

Рассмотрим далее семейство краевых задач для дифференциально-разностных уравнений

$$-(R_Q^\varepsilon u'_\varepsilon(x))' = f(x), \quad x \in Q, \tag{3.14}$$

где $\varepsilon > 0$ — малый параметр (возмущение относительно сдвига аргумента), $Q = (0, N)$, $R_Q^\varepsilon = P_Q R^\varepsilon I_Q$, R^ε — разностные операторы, определенные формулой (2.21), $f \in L_2(Q)$.

Решения $u_\varepsilon \in \dot{H}^1(Q)$ краевой задачи (3.14) будем понимать в смысле определения 3.1: если для любой $v \in \dot{H}^1(Q)$ выполнено интегральное тождество

$$(R_Q^\varepsilon u'_\varepsilon, v')_{L_2(Q)} = (f, v)_{L_2(Q)}. \quad (3.15)$$

Введем в рассмотрение предельную задачу

$$-(R_Q^{\text{lim}} u'_{\text{lim}}(x))' = f(x), \quad x \in Q, \quad (3.16)$$

где $R_Q^{\text{lim}} : L_2(Q) \rightarrow L_2(Q)$, $R_Q^{\text{lim}} = P_Q R^{\text{lim}} I_Q$,

$$(R^{\text{lim}} u)(x) = a_0 u(x) + a_\varepsilon (u(x+j) + u(x-j)) + \sum_{k=1}^N b_k (u(x+k) + u(x-k)).$$

Решение $u_{\text{lim}} \in \dot{H}^1(Q)$ уравнения (3.16) также определяется интегральным тождеством

$$(R_Q^{\text{lim}} u'_{\text{lim}}, v')_{L_2(Q)} = (f, v)_{L_2(Q)}, \quad (3.17)$$

выполненным для любой функции $v \in \dot{H}^1(Q)$. Аналогично теореме 1.4 доказывается следующая теорема.

Теорема 3.2. Пусть матрица R_M^C положительно определена. Тогда при любых достаточно малых $\varepsilon > 0$ существуют единственные решения $u_\varepsilon \in \dot{H}^1(Q)$ задач (3.14) и существует единственное решение $u_{\text{lim}} \in \dot{H}^1(Q)$ предельной задачи (3.16). При этом $u_\varepsilon \rightarrow u_{\text{lim}}$ ($\varepsilon \rightarrow 0$) в норме пространства $\dot{H}^1(Q)$.

Пример 3.4. Рассмотрим семейство возмущенных краевых задач для дифференциально-разностных уравнений

$$-(R_Q^n u'_n(x))' = f(x), \quad x \in Q = (0, 2), \quad n \in \mathbb{N}, \quad (3.18)$$

где $R_Q^n : L_2(Q) \rightarrow L_2(Q)$, $R_Q^n = P_Q R^n I_Q$, R^n — разностные операторы:

$$(R^n u)(x) = a_0 u(x) + a_\varepsilon (u(x+1+1/n) + u(x-1-1/n)) + b_1 (u(x+1) + u(x-1)).$$

Это краевые задачи вида (3.14), где $\varepsilon = \frac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N}$. Получим условия на коэффициенты разностного оператора a_ε , b_1 , при которых последовательность $u_n \in \dot{H}^1(Q)$ обобщенных решений краевых задач (3.18), сходится при $n \rightarrow \infty$ в $\dot{H}^1(Q)$ к решению $u_{\text{lim}} \in \dot{H}^1(Q)$ предельной задачи:

$$-(R_Q^{\text{lim}} u'_{\text{lim}}(x))' = f(x), \quad x \in Q, \quad (3.19)$$

где $R_Q^{\text{lim}} : L_2(Q) \rightarrow L_2(Q)$, $R_Q^{\text{lim}} = P_Q R^{\text{lim}} I_Q$, R^{lim} — предельный разностный оператор:

$$(R^{\text{lim}} u)(x) = a_0 u(x) + (b_1 + a_\varepsilon)(u(x+1) + u(x-1)).$$

Для разностных операторов $A_Q^n = P_Q A^n I_Q : L_2(Q) \rightarrow L_2(Q)$,

$$(A^n u)(x) = a_0 u(x) + a_\varepsilon (u(x+1+1/n) + u(x-1-1/n)), \quad n \in \mathbb{N},$$

построим разбиение области $Q = (0, 2)$ на два класса подобластей: $Q_{11} = (0, 1 - \frac{1}{n})$, $Q_{12} = (1 + \frac{1}{n}, 2)$, $Q_{21} = (1 - \frac{1}{n}, 1 + \frac{1}{n})$. В силу леммы 2.1 первому классу областей соответствуют умножение на матрицу

$$R_1 = \begin{pmatrix} a_0 & a_\varepsilon \\ a_\varepsilon & a_0 \end{pmatrix}.$$

Второму классу областей (одной области Q_{21}) соответствуют умножение на константу a_0 . Минимальное собственное значение λ_{min} матрицы R_1 : $\lambda_{\text{min}} = a_0 - |a_\varepsilon|$. Положим $\tilde{a} = \lambda_{\text{min}} = a_0 - |a_\varepsilon|$.

Контрольная матрица:

$$R_M^C = \begin{pmatrix} \tilde{a} & b_1 \\ b_1 & \tilde{a} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_0 - |a_\varepsilon| & b_1 \\ b_1 & a_0 - |a_\varepsilon| \end{pmatrix}.$$

Условие положительной определенности матрицы R_M^C :

$$a_0 - |a_\varepsilon| - |b_1| > 0. \quad (3.20)$$

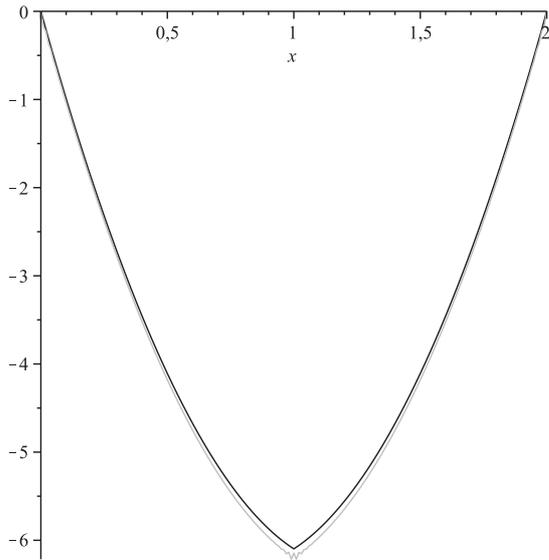


Рис. 8. Графики решений $u_{\text{lim}}(x)$ и $u_{100}(x)$ из примера 3.4. Случай сходимости возмущенных решений u_n к $u_{\text{lim}}(x)$.

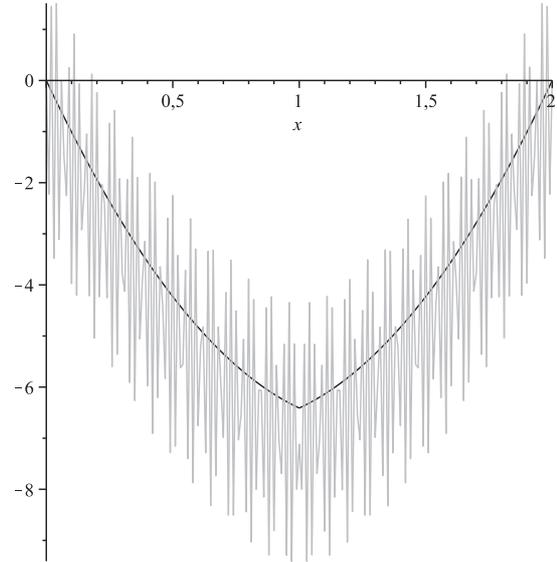


Рис. 9. Графики решений $u_{\text{lim}}(x)$ и $u_{100}(x)$ из примера 3.4. Случай расходимости возмущенных решений.

В силу теоремы 2.3 условие (3.20) является достаточным для равномерной положительной определенности семейства возмущенных операторов.

1. Пусть коэффициенты $a_0 = 1$, $a_\varepsilon = 0,58$, $b_1 = -0,4$, $f(x) = -10$. Последовательность разностных операторов примет вид:

$$(R^n u)(x) = u(x) + 0,58(u(x+1+1/n) + u(x-1-1/n)) - 0,4(u(x+1) + u(x-1)).$$

Неравенство (3.20) выполнено: $1 - 0,4 - 0,58 = 0,02 > 0$, и в силу теоремы 3.2 при $n \rightarrow \infty$ решения возмущенных задач (3.18) сходятся в $\dot{H}^1(Q)$ к u_{lim} — решению предельной задачи (3.19) с разностным оператором $(R_{\text{lim}} u)(x) = u(x) + 0,18(u(x+1) + u(x-1))$.

Минимальное собственное значение λ_{\min}^{100} ($n = 100$) матрицы R_M^n : $\lambda_{\min}^{100} = 0,02 > 0$. На рис. 8 представлены графики решений $u_{\text{lim}}(x)$ и $u_{100}(x)$, $f(x) = -10$.

2. Пусть коэффициенты $a_0 = 1$, $a_\varepsilon = 0,62$, $b_1 = -0,4$. Последовательность разностных операторов примет вид:

$$(R^n u)(x) = u(x) + 0,62(u(x+1+1/n) + u(x-1-1/n)) - 0,4(u(x+1) + u(x-1)).$$

Неравенство (3.20) не выполнено: $1 - 0,4 - 0,62 = -0,02 < 0$. При достаточно больших n появляются отрицательные собственные значения матриц R_M^n разностных операторов. Так, $\lambda_{\min}^{100} = -0,2 < 0$. При этом существует $u_{\text{lim}} \in \dot{H}^1(Q)$ — решение предельной задачи (3.19) с разностным оператором

$$(R_{\text{lim}} u)(x) = u(x) + 0,22(u(x+1) + u(x-1)).$$

На рис. 9 представлены графики решений $u_{\text{lim}}(x)$ и $u_{100}(x)$. Последовательность решений $u_n(x)$ при $n \rightarrow \infty$ расходится в пространстве $\dot{H}^1(0, 2)$.

Приведенные примеры иллюстрируют резкое изменение характера поведения семейства решений краевых задач при небольших изменениях коэффициентов разностных операторов в окрестности критических значений. Это говорит о том, что полученные в статье условия равномерной положительной определенности семейства возмущенных дифференциально-разностных операторов и условия возможности осуществления предельного перехода являются точными.

4. РАЗНОСТНЫЕ ОПЕРАТОРЫ С НЕСОИЗМЕРИМЫМИ СДВИГАМИ

Рассмотрим разностный оператор $R^\tau : L_2(\mathbb{R}) \rightarrow L_2(\mathbb{R})$

$$(R^\tau u)(x) = a_0 u(x) + a_\tau (u(x+\tau) + u(x-\tau)) + (Bu)(x), \quad (4.1)$$

где $B : L_2(\mathbb{R}) \rightarrow L_2(\mathbb{R})$ — разностный оператор

$$(Bu)(x) = \sum_{k=1}^{N-1} b_k(u(x+k) + u(x-k)),$$

a_0, a_τ, b_k — вещественные постоянные, τ — иррациональное, $0 < \tau < N$. В общем случае это означает наличие в разностном операторе R^τ несоизмеримых сдвигов. Назовем оператор R^τ *иррациональным*. Введем оператор $R_Q^\tau : L_2(Q) \rightarrow L_2(Q)$, $R_Q^\tau = P_Q R^\tau I_Q$, где $Q = (0, N)$.

Получим условия положительной определенности оператора R_Q^τ . Исследуем также вопрос аппроксимации этого оператора последовательностью операторов с соизмеримыми сдвигами (*рациональными* операторами).

Рассмотрим сначала случай малых $\tau \in (0; 0,5)$. Зададим τ с помощью дихотомии отрезка $[0, 1]$ (опираясь на лемму Кантора о вложенных отрезках). Поставим τ в соответствие последовательность $T = (T_1, T_2, T_3, \dots, T_n, \dots)$, $T_i = 0$ или 1. Если на n -м шаге при делении отрезка пополам τ попадает в левую половину, полагаем $T(n) := 0$, если в правую, то $T(n) := 1$. Получаем число τ в двоичной системе: $\tau = 0, T_1 T_2 \dots T_n \dots$. Обозначим $\tau(0) := 0$, $\tau(n) := \tau(n-1) + T(n)/2^n$. Так как $\tau \in (0; 0,5)$, то $T(1) = 0$. Последовательность $\tau(n) \in \mathbb{Q}$ фундаментальна и $\tau(n) \rightarrow \tau, n \rightarrow \infty$. Изменению $\tau(n)$ соответствует номер $k(n) := 2k(n-1) + T(n)$, $k(0) := 0$. При этом $\tau(n) = k(n)/2^n$.

Рассмотрим последовательность рациональных разностных операторов $R^n : L_2(\mathbb{R}) \rightarrow L_2(\mathbb{R})$,

$$\begin{aligned} (R^n u)(x) &= a_0 u(x) + a_\tau (u(x + \tau(n)) + u(x - \tau(n))) + (Bu)(x) = \\ &= a_0 u(x) + a_\tau \left(u\left(x + \frac{k(n)}{2^n}\right) + u\left(x - \frac{k(n)}{2^n}\right) \right) + (Bu)(x). \end{aligned} \quad (4.2)$$

Введем соответствующие операторы $R_Q^n : L_2(Q) \rightarrow L_2(Q)$, $R_Q^n = P_Q R^n I_Q$.

Получим достаточные условия равномерной по $n \in \mathbb{N}$ положительной определенности всей совокупности рациональных разностных операторов $\{R_Q^n\}_{n \in \mathbb{N}}$ (и соответствующих им дифференциально-разностных операторов), а, следовательно, и возможности перехода к пределу при $n \rightarrow \infty$.

Для оценки введем контрольный разностный оператор $R^C : L_2(\mathbb{R}) \rightarrow L_2(\mathbb{R})$,

$$(R^C u)(x) = \tilde{a} u(x) + (Bu)(x).$$

Рассмотрим также оператор $R_Q^C : L_2(Q) \rightarrow L_2(Q)$, $R_Q^C = P_Q R^C I_Q$. Так же как и в разделе 2, оценим спектр последовательности операторов $\{R_Q^n\}_{n \in \mathbb{N}}$ через спектр контрольного оператора R_Q^C , подобрав соответствующий коэффициент \tilde{a} .

Контрольная матрица R_M^C определена как в разделе 2 по формуле (2.7). Оператору R_Q^n соответствует умножение на матрицу R_M^n размерности $N2^n \times N2^n$:

$$R_M^n = A^{n, k(n)} + B^{2^n}.$$

Матрицы $B^{2^n} = \|B_{ij}\|_{i,j=1,\dots,N}$ состоят из клеток $B_{ij} = E^{2^n} r_{ij}$, где E^{2^n} — единичные матрицы размерности 2^n , r_{ij} — элементы матрицы R_M^C . Матрицы $A^{n, k(n)} = \|\alpha_{ij}\|_{i,j=1,\dots,N2^n}$ таковы, что $a_{ii} = a_0$, $a_{i, i+k(n)} = a_\tau$, $a_{ij} = a_{ji}$, остальные $a_{ij} = 0$.

Доказательство следующей леммы 4.1 аналогично доказательству леммы 2.2. Отличие в том, что размерность матриц на каждом шаге удваивается, и класс теплицевых матриц $A^{n, k(n)}$, $n \in \mathbb{N}$, меняется от шага к шагу. Однако если $T(n) = 0$, то при переходе от $n-1$ к n класс не меняется.

Лемма 4.1. *Если при $\tilde{a} := a_0 - 2|a_\tau|$ контрольная матрица R_M^C положительно определена, то матрицы $\{R_M^n\}_{n \in \mathbb{N}}$ равномерно по n положительно определены, т. е., если c — минимальное собственное значение матрицы R_M^C и $c > 0$, то для всех $x \in \mathbb{R}^{N2^n}$, $n \in \mathbb{N}$,*

$$(R_M^n x, x)_{N2^n} \geq c(x, x)_{N2^n}.$$

Доказательство. Матрицы $A^{n, k(n)}$, $n \in \mathbb{N}$, принадлежат, вообще говоря, к разным классам теплицевых матриц за счет «плывающей» побочной диагонали, состоящей из элементов a_τ . Однако при этом для всех этих матриц символы $f_n(\lambda) = a_0 + 2a_\tau \cos(\lambda k(n))$ имеет одну и ту же нижнюю грань $\tilde{a} = m := \inf_{\lambda} f_n(\lambda) = a_0 - 2|a_\tau|$. Следовательно, все собственные значения τ_{np} множества матриц $\{A^{n, k(n)}\}_{n \in \mathbb{N}}$ удовлетворяют неравенству $\tau_{np} \geq m$. Далее доказательство повторяет доказательство леммы 2.2. \square

Замечание 4.1. В отличие от случая леммы 2.2 это условие не является необходимым. Оно тем ближе к необходимому, чем меньше τ .

Получим теперь условия положительной определенности иррациональных разностных операторов R_Q^τ для произвольного $\tau: 0 < \tau < N$. Разделим N с остатком на $\tau: N = \tau k + \theta, k$ — натуральное, $0 < \theta \leq \tau$.

Так же как в разделе 2, построим разбиение области $Q = (0, N)$ на два класса непересекающихся подобластей. Первый класс состоит из областей: $Q_{11} = (0, \theta), Q_{12} = (\tau, \tau + \theta), \dots, Q_{1i} = (i\tau, i\tau + \theta), \dots, Q_{1k} = (ik, N)$. Второй класс областей: $Q_{21} = (\theta, \tau), Q_{22} = (\tau + \theta, 2\tau), \dots, Q_{2i} = ((i-1)\tau + \theta, i\tau), \dots, Q_{2k} = ((k-1)\tau + \theta, k\tau)$.

Введем вспомогательный разностный оператор $R^a: L_2(\mathbb{R}) \rightarrow L_2(\mathbb{R})$,

$$(R^a u)(x) = a_0 u(x) + a_\tau (u(x + \tau) + u(x - \tau)).$$

В силу леммы 2.1 действие оператора $R_Q^a: L_2(Q) \rightarrow L_2(Q)$, $R_Q^a = P_Q R^a I_Q$ сводится к умножению на матрицы R_1, R_2 : $R_1 = \|r_{ij}\|_{i,j=1}^{k+1}$, $r_{ii} = a_0$, $r_{i,i+1} = r_{i+1,i} = a_\tau$, $i = 1, \dots, k$, остальные элементы матрицы равны нулю. Матрица R_2 размерности $k \times k$ — это матрица R_1 без последней строки и столбца. Спектр оператора R_Q^a также в силу леммы 2.1 совпадает со спектром матрицы R_1 . Обозначим λ_{\min} — минимальное собственное значение матрицы R_1 . Тогда для любого $u \in L_2(Q)$

$$(R_Q^a u, u)_{L_2(Q)} \geq \lambda_{\min} (u, u)_{L_2(Q)}. \quad (4.3)$$

Введем контрольный разностный оператор $R_Q^C = P_Q R^C I_Q: L_2(Q) \rightarrow L_2(Q)$, где $R^C: L_2(\mathbb{R}) \rightarrow L_2(\mathbb{R})$ разностный оператор

$$(R^C u)(x) = \tilde{a} u(x) + (Bu)(x), \quad \tilde{a} = \lambda_{\min}. \quad (4.4)$$

Действию оператора R_Q^C , как и в разделе 2, соответствует умножение на матрицу R_M^C , определенную формулой (2.7). Доказательство следующей теоремы аналогично доказательству теоремы 2.3.

Теорема 4.1. Если оператор R_Q^C (матрица R_M^C) является положительно определенным, то оператор R_Q^τ также положительно определен.

Замечание 4.2. Для оператора R^τ с произвольным иррациональным τ можно методом, изложенным ранее, построить аппроксимирующую последовательность рациональных операторов

$$(R^n u)(x) = a_0 u(x) + a_\tau (u(x + \tau_n) + u(x - \tau_n)) + (Bu)(x), \quad (4.5)$$

где $\tau_n \in \mathbb{Q}$, $\tau_n \rightarrow \tau$, $n \rightarrow \infty$. Начиная с некоторого номера N_τ , матрицы соответствующих операторов $R_Q^n = P_Q R^n I_Q$ совпадают с матрицами R_1, R_2 , следовательно, условия положительной определенности иррационального и аппроксимирующих рациональных операторов совпадают.

Замечание 4.3. Теорема 4.1 верна также и для малых τ . Но в этом случае размерности матриц R_1, R_2 велики и вычисление их собственных значений трудоемкая задача, удобнее применять для оценки положительной определенности лемму 4.1.

5. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО-РАЗНОСТНЫЕ УРАВНЕНИЯ С НЕСОИЗМЕРИМЫМИ СДВИГАМИ

Рассмотрим краевую задачу для дифференциально-разностного уравнения

$$-(R_Q^\tau u'(x))' = f(x), \quad x \in Q, \quad (5.1)$$

где $R_Q^\tau = P_Q R^\tau I_Q: L_2(Q) \rightarrow L_2(Q)$, R^τ — иррациональный разностный оператор, определенный формулой (4.1), $f \in L_2(Q)$.

Обобщенное решение $u_\tau \in \dot{H}^1(Q)$ краевой задачи (5.1) будем понимать в смысле определения 3.1: если для любого $v \in \dot{H}^1(Q)$ выполнено интегральное тождество

$$(R_Q^\tau u'_\tau, v')_{L_2(Q)} = (f, v)_{L_2(Q)}. \quad (5.2)$$

Рассмотрим также последовательность рациональных краевых задач

$$-(R_Q^n u'_n(x))' = f(x), \quad x \in Q, \quad n \in \mathbb{N}, \quad (5.3)$$

где $R_Q^n = P_Q R^n I_Q$, а разностные операторы R^n определяются формулой (4.5).

Решения $u_n \in \dot{H}^1(Q)$, $n \in \mathbb{N}$ задач (5.3) также определяется интегральными тождествами

$$(R_Q^n u'_n, v')_{L_2(Q)} = (f, v)_{L_2(Q)}, \quad \forall v \in \dot{H}^1(Q) \quad (5.4)$$

Теорема 5.1. Пусть контрольный оператор R_Q^C (контрольная матрица R_M^C) положительно определен. Тогда существует единственное решение $u_\tau \in \dot{H}^1(Q)$ задачи (5.1) и начиная с некоторого $N_\tau \in \mathbb{N}$ при $n > N_\tau$ решения $u_n \in \dot{H}^1(Q)$ рациональных задач (5.3). При этом последовательность решений $\{u_n\}_{n=1}^\infty$ фундаментальна в $\dot{H}^1(Q)$ и $u_n \rightarrow u_\tau \in \dot{H}^1(Q)$ при $n \rightarrow \infty$ в пространстве $\dot{H}^1(Q)$.

Доказательство аналогично доказательству теоремы 3.1 и опирается на лемму 4.1 и теорему 4.1.

Пример 5.1. Рассмотрим краевую задачу (5.1) с разностным оператором

$$(R^\tau u)(x) = a_0 u(x) + a_\tau (u(x + \tau) + u(x - \tau)) + b_1 (u(x + 1) + u(x - 1)), \quad (5.5)$$

где $0 < \tau < 0,5$, τ — иррациональное, $Q = (0, 2)$, $f(x) = -10$.

Матрица R_M^C , как и в примере 3.1, задается формулой (3.10), а условие ее положительной определенности

$$a_0 - 2|a_\tau| - |b_1| > 0. \quad (5.6)$$

В силу леммы 4.1 это достаточное условие финальной (при $n \rightarrow \infty$) равномерной положительной определенности семейства рациональных операторов R_Q^n , $n \in \mathbb{N}$, $R_Q^n = P_Q R^n I_Q$,

$$(R^n u)(x) = a_0 u(x) + a_\tau (u(x + \tau(n)) + u(x - \tau(n))) + b_1 (u(x + 1) + u(x - 1)),$$

где $\tau(n) \rightarrow \tau$, $n \rightarrow \infty$, $\tau(n) \in \mathbb{Q}$.

1. Пусть $\tau = \sqrt{2}/16$. В двоичной системе $\tau = 0,00001011\dots$, $\tau(7) = 5/128$, $\tau(8) = 11/256 = 11/2^8$. Для коэффициентов $a_0 = 1$, $a_\tau = 0,1$, $b_1 = 0,79$ условие теоремы 4.1 ($2a_\tau + b_1 = 0,99 < a_0 = 1$) выполнено. Минимальное собственное значение λ_{\min}^C матрицы R_M^C : $\lambda_{\min}^C = 0,01 > 0$.

Последовательность рациональных разностных операторов положительно определена, последовательность решений рациональных краевых задач существует, фундаментальна в $\dot{H}^1(Q)$ и сходится к решению предельной задачи $u_\tau \in \dot{H}^1(Q)$. В программной среде Maple реализован алгоритм, изложенный в разделе 4, рациональные задачи решаются аналитически, методом сведения их к нелокальным задачам [5].

На рис. 10 приведены графики решений u_7, u_8 краевых задач (5.4). На рис. 11 приведены графики соответствующих обобщенных производных этих решений. Минимальное собственное значение λ_{\min}^8 матрицы R_M^8 : $\lambda_{\min}^8 = 0,0105 > \lambda_{\min}^C = 0,01$.

2. Пусть $a_0 = 1$, $a_\tau = 0,33$, $b_1 = 0,34$. Достаточное условие (5.6) положительной определенности рациональных операторов нарушается ($2a_\tau + b_1 = 1,01 > a_0 = 1$); при этом оказывается, что оно близко к необходимому: у разностных операторов появляются отрицательные собственные значения: $\lambda_{\min}^8 = -0,08 < 0$. В этом случае последовательность решений u_n , $n \rightarrow \infty$, расходится как в пространстве $\dot{H}^1(0, 2)$, так и в $L_2(0, 2)$.

На рис. 12 приведены графики решений u_7, u_8 краевых задач (5.3), на рис. 13 графики u'_7, u'_8 .

Пример 5.2. Пусть теперь в разностном операторе R^τ из примера 5.1 иррациональный сдвиг τ таков, что $0,7 < \tau < 1$. Обозначим $\theta := 2 - 2\tau$. Для оператора $R_Q^a = P_Q R^a I_Q : L_2(Q) \rightarrow L_2(Q)$, $(R^a u)(x) = a_0 u(x) + a_\tau (u(x + \tau) + u(x - \tau))$ по алгоритму, описанному в разделе 4, построим разбиение области Q на два класса подобластей: $Q_{11} = (0, \theta)$, $Q_{12} = (\tau, \tau + \theta)$, $Q_{13} = (2\tau, 2\tau + \theta)$; $Q_{21} = (\theta, \tau)$, $Q_{22} = (\tau + \theta, 2\tau)$. В силу леммы 2.1 первому классу областей соответствуют умножение на матрицу

$$R_1 = \begin{pmatrix} a_0 & a_\tau & 0 \\ a_\tau & a_0 & a_\tau \\ 0 & a_\tau & a_0 \end{pmatrix}.$$

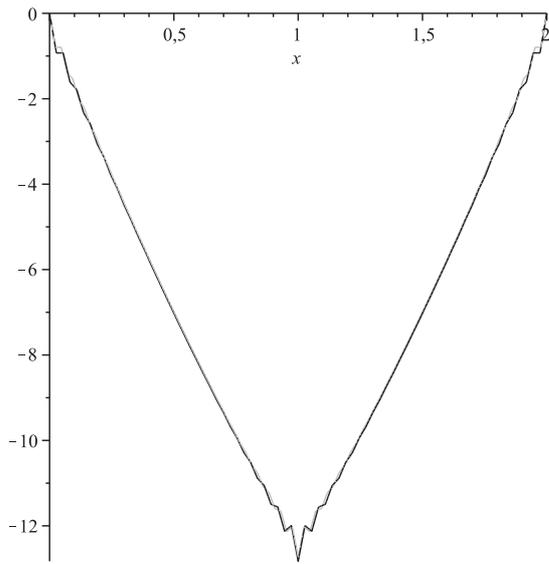


Рис. 10. Графики решений u_7, u_8 рациональных задач из примера 5.1. Последовательность решений сходится в $\dot{H}^1(Q)$.

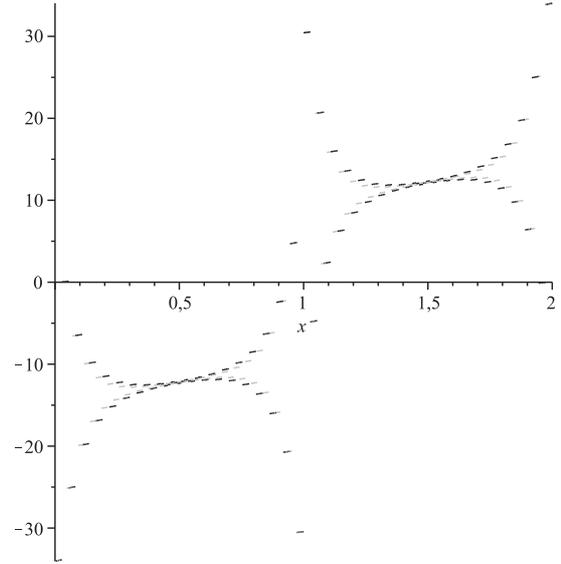


Рис. 11. Графики обобщенных производных u'_7, u'_8 решений из примера 5.1. Сходимость в $\dot{H}^1(Q)$.

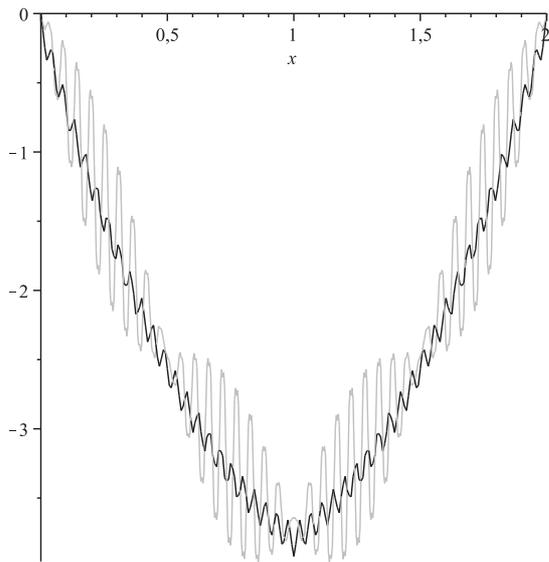


Рис. 12. Графики решений u_7, u_8 рациональных задач из примера 5.1. Случай расходимости решений.

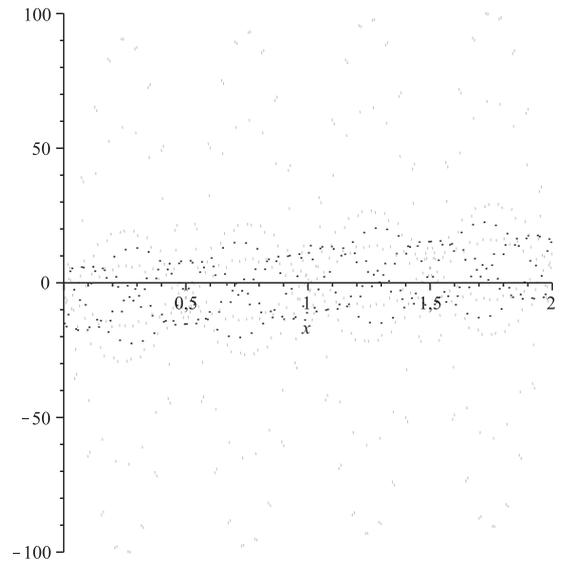


Рис. 13. Графики обобщенных производных u'_7, u'_8 решений из примера 5.1. Случай расходимости решений.

Ее собственные значения $\lambda_1 = a_0, \lambda_2 = a_0 + \sqrt{2}|a_\tau|, \lambda_3 = a_0 - \sqrt{2}|a_\tau|$. Второму классу областей соответствует умножение на матрицу

$$R_2 = \begin{pmatrix} a_0 & a_\tau \\ a_\tau & a_0 \end{pmatrix}.$$

Ее собственные значения $\lambda_4 = a_0 + |a_\tau|, \lambda_5 = a_0 - |a_\tau|$. Минимальное собственное значение $\lambda_{\min} := \min_{1 \leq i \leq 5} \lambda_i = \lambda_3 = a_0 - \sqrt{2}|a_\tau|$. Оператор R^C примет вид

$$(R^C u)(x) = (a_0 - \sqrt{2}|a_\tau|)u(x) + b_1(u(x+1) + u(x-1)).$$

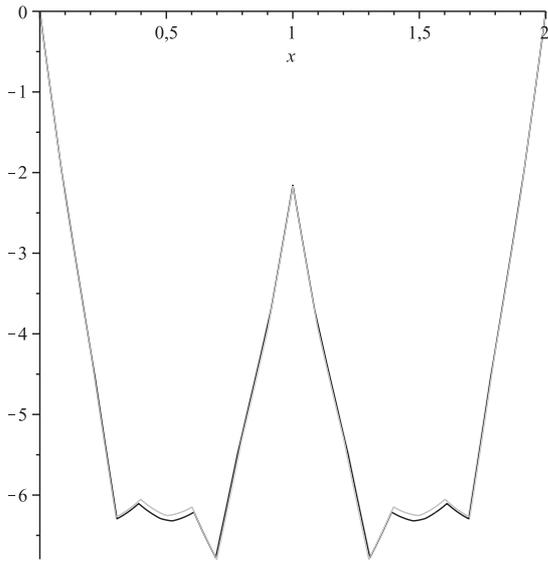


Рис. 14. Графики решений u_7, u_8 рациональных задач из примера 5.2. Последовательность решений сходится в $\dot{H}^1(Q)$.

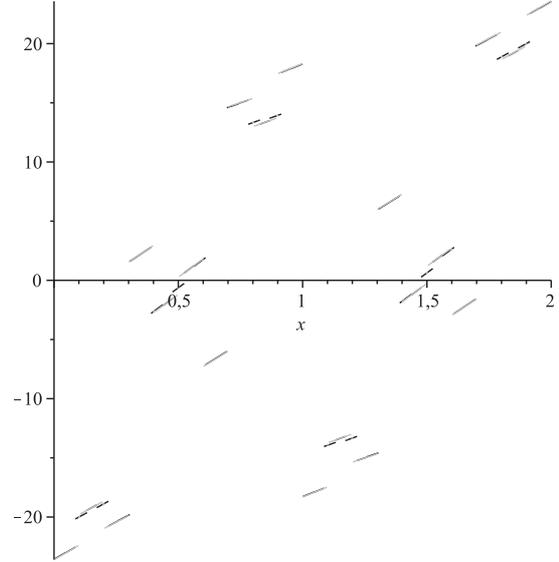


Рис. 15. Графики обобщенных производных u'_7, u'_8 решений рациональных задач из примера 5.2. Сходимость решений в $\dot{H}^1(Q)$.

Действию оператора $R_Q^C = P_Q R^C I_Q : L_2(Q) \rightarrow L_2(Q)$ соответствует умножение на матрицу

$$R_M^C = \begin{pmatrix} a_0 - \sqrt{2}|a_\tau| & b_1 \\ b_1 & a_0 - \sqrt{2}|a_\tau| \end{pmatrix}.$$

Критерий ее положительной определенности:

$$a_0 - \sqrt{2}|a_\tau| - |b_1| > 0. \tag{5.7}$$

Следовательно, в силу теоремы 4.1 это достаточное условие положительной определенности оператора R_Q^T .

Если для оценки оператора R_Q^T использовать стандартный символ, основанный на преобразовании Фурье, то достаточным условием положительной определенности R_Q^T будет:

$$a_0 - 2|a_\tau| - 2|b_1| > 0.$$

Значения параметров $a_0 = 1, a_\tau = \frac{1}{2\sqrt{2}}, b_1 = -\frac{1}{2}$ в данной задаче являются критическими:

$$a_0 - \sqrt{2}|a_\tau| - |b_1| = 0.$$

1. Пусть $\tau = \sqrt{2}/2$. В двоичной системе $\tau = 0,10110101\dots$. Тогда $\tau(7) = 45/64, \tau(8) = 181/256 = 181/2^8$. Мелкость разбиения $1/256$. Для коэффициентов разностного оператора: $a_0 = 1, a_\tau = \frac{1}{2\sqrt{2}}, b_1 = -\frac{1}{2} + 0,05$ условие (5.7) теоремы 5.1 выполнено: $\sqrt{2}|a_\tau| + |b_1| = 0,95 < a_0 = 1$. Следовательно, последовательность рациональных разностных операторов положительно определена, последовательность решений u_n рациональных краевых задач фундаментальна в $\dot{H}^1(Q)$ и сходится при $n \rightarrow \infty$ к решению $u_\tau \in \dot{H}^1(Q)$ предельной задачи (5.1).

На рис. 14 приведены графики решений u_7, u_8 рациональных краевых задач. На рис. 15 приведены графики обобщенных производных этих решений.

2. Пусть в операторе R^T коэффициенты $a_0 = 1, a_\tau = \frac{1}{2\sqrt{2}}, b_1 = -\frac{1}{2} - 0,02$. В этом случае $\sqrt{2}|a_\tau| + |b_1| = 1,02 > a_0 = 1$ и условие (4.2) не выполнено. Оператор R_Q^C имеет отрицательные собственные значения. У операторов R_Q^n также появляются отрицательные собственные значения. Последовательность решений u_n рациональных краевых задач расходится в $\dot{H}^1(Q)$. На рис. 16 приведены графики решений u_7, u_8 краевых задач (5.4), на рис. 17 приведены графики u'_7, u'_8 .

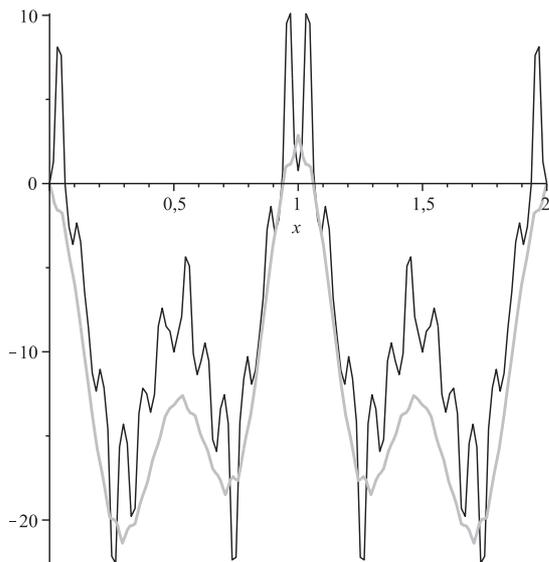


Рис. 16. Графики решений u_7 , u_8 рациональных задач из примера 5.2. Случай расходимости решений.

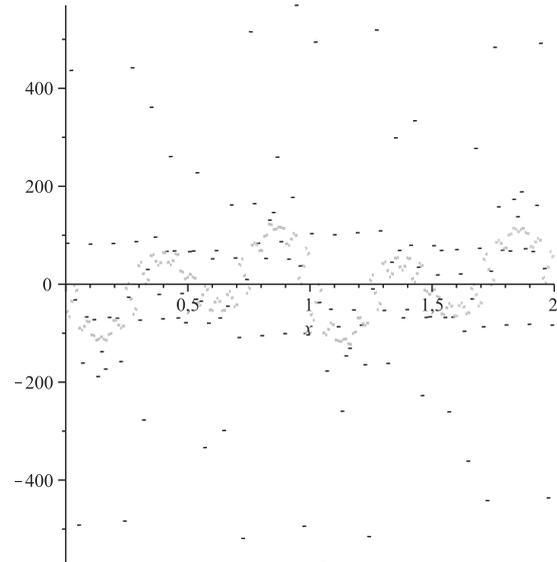


Рис. 17. Графики обобщенных производных u'_7 , u'_8 решений рациональных задач из примера 5.2. Случай расходимости решений.

Замечание 5.1. Результаты компьютерного моделирования демонстрируют, что даже при небольших изменениях коэффициентов, приводящих к нарушению выполнения полученного в статье условия положительной определенности, могут появляться отрицательные собственные значения рациональных операторов и последовательность рациональных решений расходятся. Полученные в статье достаточные условия положительной определенности операторов с несоизмеримыми сдвигами близки к необходимым.

Замечание 5.2. Теоремы 4.1, 5.1 можно обобщить на случай нескольких несоизмеримых отклонений. Результаты статьи также обобщаются на случай дифференциально-разностных уравнений для функций многих переменных.

Автор выражает благодарность Л. Е. Россовскому и А. Л. Скубачевскому за постановку задачи, полезные обсуждения результатов работы и ряд ценных советов, способствующих ее развитию.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Каменский А. Г. Краевые задачи для уравнений с формально симметричными дифференциально-разностными операторами// Дифф. уравн. — 1976. — 12, № 5. — С. 815–824.
2. Каменский Г. А., Мышкис А. Д. К постановке краевых задач для дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом и несколькими старшими членами// Дифф. уравн. — 1974. — 12, № 3. — С. 409–418.
3. Россовский Л. Е. Эллиптические функционально-дифференциальные уравнения со сжатием и растяжением аргументов неизвестной функции// Соврем. мат. Фундам. направл. — 2014. — 54. — С. 3–138.
4. Gray R. M. Toeplitz and circulant matrices: A review// Found. Trends Commun. Inf. Theory — 2006. — 12, № 3. — С. 155–239.
5. Skubachevskii A. L. Elliptic functional differential equations and applications. — Basel—Boston—Berlin: Birkhauser, 1997.
6. Skubachevskii A. L. Bifurcation of periodic solutions for nonlinear parabolic functional differential equations arising in optoelectronics// Nonlinear Anal. — 1998. — 32, № 2. — С. 261–278.

Е. П. Иванова

Российский университет дружбы народов, кафедра прикладной математики

Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет), кафедра дифференциальных уравнений

E-mail: elpaliv@yandex.ru

Continuous Dependence of Solutions of Boundary-Value Problems for Differential-Difference Equations on Shifts of the Argument

© 2016 E. P. Ivanova

Abstract. We consider boundary-value problems for differential-difference operators with perturbations in shifts of the argument. We prove that the family of differential-difference operators is positive definite uniformly with respect to the shifts of the argument. Solutions of such problems depend continuously on these shifts. We consider the coercivity problem for differential-difference operators c with incommensurable shifts of the argument and study the approximation of such operators by rational operators.

REFERENCES

1. A. G. Kamenskiy, “Kraevye zadachi dlya uravneniy s formal’no simmetrichnymi differentsial’no-raznostnymi operatorami” [Boundary-value problems for equations with formally symmetric differential-difference operators], *Diff. uravn.* [Diff. Equations], 1976, **12**, No. 5, 815–824 (in Russian).
2. G. A. Kamenskiy and A. D. Myshkis, “K postanovke kraevykh zadach dlya differentsial’nykh uravneniy s otklonyayushchimsya argumentom i neskol’kimi starshimi chlenami” [On posing of boundary-value problems with delayed argument and several higher-order terms], *Diff. uravn.* [Diff. Equations], 1974, **12**, No. 3, 409–418 (in Russian).
3. L. E. Rossovskiy, “Ellipticheskie funktsional’no-differentsial’nye uravneniya so szhatiem i rastyazheniem argumentov neizvestnoy funktsii” [Elliptic functional differential equations with contraction and dilatation of arguments of the unknown function], *Sovrem. mat. Fundam. napravl.* [Contemp. Math. Fundam. Directions], 2014, **54**, 3–138 (in Russian).
4. R. M. Gray, “Toeplitz and circulant matrices: A review,” *Found. Trends Commun. Inf. Theory*, 2006, **12**, No. 3, 155–239.
5. A. L. Skubachevskii, *Elliptic Functional Differential Equations and Applications*, Birkhauser, Basel—Boston—Berlin, 1997.
6. A. L. Skubachevskii, “Bifurcation of periodic solutions for nonlinear parabolic functional differential equations arising in optoelectronics,” *Nonlinear Anal.*, 1998, **32**, No. 2, 261–278.

E. P. Ivanova

Department of Applied Mathematics, Peoples’ Friendship University of Russia, Moscow, Russia

Department of Differential Equations, Moscow Aviation Institute (National Research University),
Moscow, Russia

E-mail: elpaliv@yandex.ru