Современная математика. Фундаментальные направления. Том 59 (2016). С. 53–73

УДК 517.956.4

О СКОРОСТИ СТАБИЛИЗАЦИИ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ ПАРАБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ С МЛАДШИМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

© 2016 г. **В. Н. ДЕНИСОВ**

Аннотация. Для параболического уравнения в полупространстве $\overline{D} = \mathbb{R}^N \times [0, \infty)$, $N \geqslant 3$, рассматривается задача Коши

$$L_1 u \equiv Lu + c(x,t)u - u_t = 0, \quad (x,t) \in D,$$
$$u(x,0) = u_0(x), \quad x \in \mathbb{R}^N.$$

В зависимости от оценок на коэффициент $c(x,t)$ уравнения доказана степенная либо экспоненциальная скорость стабилизации к нулю решения задачи Коши равномерно по x на каждом компакте K в $\mathbb{R}^N$ для произвольной ограниченной непрерывной в $\mathbb{R}^N$ начальной функции $u_0(x)$.

СОДЕРЖАНИЕ

1. Введение

В настоящей работе будут изучены два случая близких к окончательным достаточных условий, налагаемых на младший коэффициент $c(x,t)$ параболического уравнения, которые гарантируют стабилизацию к нулю с определенной скоростью решения соответствующей задачи Коши равномерно относительно x на каждом компакте K в $\mathbb{R}^N$, $N \geqslant 3$, при любой ограниченной и непрерывной начальной функции.

В первом случае, когда

$$c(x,t) \leqslant -\frac{\alpha^2}{r^2}$$

при больших r, мы получим степенную скорость стабилизации к нулю решения задачи Коши.

Во втором случае, когда

$$c(x,t) \leqslant -\frac{\alpha^2}{r^{2k}}, \quad 0 < k < \frac{1}{2}$$

при больших r, мы получим экспоненциальную скорость стабилизации к нулю соответствующей задачи Коши.

В полупространстве $\overline{D} = \mathbb{R}^N \times [0, \infty)$ рассмотрим задачу Коши при $N \geqslant 3$:

$$L_1 u \equiv Lu + c(x,t)u - u_t = 0, \quad (x,t) \in D, \tag{1.1}$$

$$u(x,0) = u_0(x), \quad x \in \mathbb{R}^N, \tag{1.2}$$

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, грант № 15-01-00471.

где

$$Lu = \sum_{i,k=1}^{N} a_{ik}(x,t)u_{x_i x_k}. \tag{1.3}$$

Предполагается, что:

1. Коэффициенты уравнения (1.1) действительны, $a_{ik} = a_{ki}$, $(i,k = 1,\dots,N)$, и существуют положительные постоянные λ_0, λ_1,такие, что

$$\lambda_0^2 = \inf_{D,|\xi|=1} \sum_{i,k=1}^{N} a_{ik}(x,t)\xi_i\xi_k, \lambda_1^2 = \sup_{D,|\xi|=1} \sum_{i,k=1}^{N} a_{ik}(x,t)\xi_i\xi_k, \tag{1.4}$$

   где

$$|\xi| = \sqrt{\xi_1^2 + \dots + \xi_N^2}, \forall (x,t) \in D.$$

2. Коэффициенты уравнения (1.1) непрерывны, ограничены и удовлетворяют условию Гельдера (см. [11, с. 92, неравенства (4.14), (4.15)]).
3. Коэффициент $c(x,t)$ неположителен в D и удовлетворяет условию (C), т. е. найдется постоянная $\alpha > 0$ такая, что

$$c(x,t) \leqslant a_\alpha(r) = -\alpha^2 \min(1, r^{-2}), \tag{1.5}$$

   где $r = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_N^2}$.
4. Начальная функция $u_0(x)$ непрерывна и ограничена в $\mathbb{R}^N$:

$$|u_0(x)| \leqslant M, \tag{1.6}$$

Задача Коши (1.1), (1.2) изучалась во многих работах (см. например [8, 11, 15]).

При сделанных здесь предположениях существует и единственно классическое ограниченное решение задачи (1.1), (1.2) (см. [11, с. 78, теорема 4]).

Изучению скорости стабилизации решения параболических уравнений посвящено значительное число работ [4–6, 8, 11, 15]. В работе [11, с. 181] методом барьеров, основанным на принципе максимума, установлено, что для ограниченной начальной функции $u_0(x)$ решение задачи Коши (1.1), (1.2) с ограниченными коэффициентами удовлетворяет неравенству

$$|u(x,t)| \leqslant M \exp(-at), a > 0, t > 0, \tag{1.7}$$

равномерно по x во всем $\mathbb{R}^N$, если младший коэффициент уравнения (1.1) удовлетворяет неравенству

$$c(x,t) \leqslant -\alpha^2. \tag{1.8}$$

Отметим, что в работах [4–6] были получены другие оценки стремления к нулю при $t \to \infty$ решения задачи Коши и краевых задач, однако при этом от начальной функции $u_0(x)$ требовалось, чтобы $u_0(x)$ была достаточно гладкой и финитной [4, с. 5], или чтобы $u_0(x)$ была ограниченной и непрерывной и существовал интеграл [6, с. 44]:

$$\int_{\mathbb{R}^N} u_0(x)dx < \infty.$$

Целью настоящей работы является существенное ослабление условия (1.8) на коэффициент $c(x,t)$ уравнения и установление степенной либо экспоненциальной скорости стабилизации к нулю решения задачи Коши (1.1), (1.2), равномерно по x на каждом компакте K в $\mathbb{R}^N$ для произвольной ограниченной непрерывной в $\mathbb{R}^N$ начальной функции $u_0(x)$. Методы доказательства основаны на построении антибарьеров [18] с точной оценкой на бесконечности с учетом поведения коэффициентов при больших $|x|$ и не использует оценок фундаментального решения задачи Коши.

Будем говорить, что решение задачи Коши (1.1), (1.2) стабилизируется к нулю в точке $x \in \mathbb{R}^N$ (равномерно относительно x на каждом компакте K в $\mathbb{R}^N$), если существует предел

$$\lim_{t\to\infty} u(x,t) = 0 \tag{1.9}$$

в точке $x \in \mathbb{R}^N$ (равномерно относительно x на каждом компакте K в $\mathbb{R}^N$).

Стабилизация решения задачи Коши для параболических уравнений второго порядка для различных классов начальных функций изучалась в работах [7, 9, 10].

С обзором работ по стабилизации решений параболических уравнений можно ознакомиться в работе [8]. Много интересной информации по параболическим уравнениям содержится в [2].

Из теоремы 3, доказанной в работе [10], следует справедливость утверждения:

Теорема 1.1. *Если при некотором $\alpha > 0$ выполнены условия (C) на коэффициент $c(x,t)$, то для любой ограниченной непрерывной начальной функции $u_0(x)$ решение задачи* (1.1), (1.2) *стабилизируется к нулю равномерно относительно x на каждом компакте K в $\mathbb{R}^N$.*

Как показано в работе [7], это утверждение является точным, т. е. нельзя заменить компакт K в этой теореме на все пространство $\mathbb{R}^N$.

2. Формулировка результатов

Если при

$$\alpha^2 > \lambda_1^2(S-1), S = \frac{(N-1)\lambda_1^2 + \lambda_0^2}{\lambda_0^2}, \tag{2.1}$$

для коэффициента $c(x,t)$ выполнено условие (C), то для любой ограниченной непрерывной в $\mathbb{R}^N$ начальной функции $u_0(x)$ для решения задачи Коши (1.1), (1.2) *справедливо неравенство*

$$|u(x,t)| \leqslant Mt^{-\frac{\lambda_1(\alpha)}{3}}, M > 0, t > t_1 > 0, \tag{2.2}$$

равномерно относительно x на каждом компакте K в $\mathbb{R}^N$, где

$$\lambda_1(\alpha) = \frac{2 - S + \sqrt{D}_1}{2}, D_1 = (2-S)^2 + 4\overline{\alpha}^2 \tag{2.3}$$

$$\overline{\alpha} = \frac{\alpha}{\lambda_1}, M = M(K, \alpha, \lambda_0, \lambda_1)$$

Рассмотрим задачу Коши (1.1), (1.2), когда $Lu = \Delta u$ — оператор Лапласа, т. е.

$$\Delta u + c(x,t)u - u_t = 0 \text{ в } D, \tag{2.4}$$

$$u(x,t) = u_0(x), x \in \mathbb{R}^N, \tag{2.5}$$

где для $c(x,t)$ выполнены те же условия (C), что в задаче (1.1), (1.2), $u_0(x)$ — произвольная непрерывная ограниченная функция.

Имеет место следующий результат.

Теорема 2.1. *Если при*

$$\alpha^2 > (N-1)$$

для коэффициента $c(x,t)$ выполнено условие (C), то для любой ограниченной непрерывной в $\mathbb{R}^N$ начальной функции $u_0(x)$ для решения задачи Коши (2.4), (2.5) *справедливо неравенство*

$$|u(x,t)| \leqslant Mt^{-\frac{\lambda_1(\alpha)}{3}}, t > t_1 > 0,$$

равномерно относительно x на каждом компакте K в $\mathbb{R}^N$, где

$$\lambda_1(\alpha) = \frac{2 - N + \sqrt{D}_1}{2}, D_1 = (2-N)^2 + 4\alpha^2,$$

$$M = M(K, \alpha).$$

Доказательство теоремы 2.1 аналогично доказательству теоремы 1.1, ибо в случае $L = \Delta$ имеем $\lambda_1^2 = \lambda_0^2 = 1$ и тогда $S = N$.

Замечание 2.1. Теорема 1.1 уточняет теорему 3 из нашей работы [10].

Замечание 2.2. Нельзя усилить утверждение теоремы 1.1, заменив компакт K на все пространство $\mathbb{R}^N$.

Замечание 2.3. Из формулы (2.3) следует

$$\lim_{\alpha\to\infty}\lambda_1(\alpha)=+\infty. \tag{2.6}$$

Поэтому из оценки (2.2) в теореме 1.1 и (2.6) вытекает, что решение задачи Коши (1.1), (1.2) стабилизируется к нулю с произвольно большой степенной скоростью при $\alpha\to\infty$ равномерно относительно x на каждом компакте K в $\mathbb{R}^N$ и при любой непрерывной ограниченной функции $u_0(x)$.

В полупространстве $\overline{D}=\mathbb{R}^N\times[0,\infty)$, $N\geqslant 3$ рассмотрим задачу Коши

$$L_1u=\Delta u+(b,\nabla u)+c(x,t)u-u_t=0,\quad (x,t)\in D, \tag{2.7}$$

$$u(x,0)=u_0(x),\quad x\in\mathbb{R}^N, \tag{2.8}$$

где

$$(b,\nabla u)=\sum_{i=1}^N b_i(x,t)u_{x_i}.$$

Мы предполагаем, что

1. Коэффициенты уравнения (2.7) действительны, непрерывны и ограничены в $\mathbb{R}^N$ и удовлетворяют условию Гельдера, и в частности:

$$\sum_{i=1}^N|b_i(x,t)|\leqslant B, B>0,(x,t)\in D. \tag{2.9}$$

2. Коэффициенты $b_i(x,t)(i=1,\dots,N)$ удовлетворяют условию (B): существует постоянная $B>0$ такая, что

$$\Big|\sum_{i=1}^N b_i(x,t)x_i\Big|\leqslant B,|x|>1,t>0. \tag{2.10}$$

3. Коэффициент $c(x,t)$ удовлетворяет условию (C_1), существуют $\alpha>0$ и k: $0<k<1/2$ такие, что

$$c(x,t)\leqslant b_\alpha(r)=-\alpha^2\min(1,r^{-2k}). \tag{2.11}$$

4. Начальная функция $u_0(x)$ непрерывна и ограничена в $\mathbb{R}^N$, т. е. выполняется неравенство (1.6).

Теорема 2.2. *Если $u(x,t)$ — решение задачи Коши* (2.7), (2.8) *с произвольной непрерывной и ограниченной начальной функцией $u_0(x)$, удовлетворяющей неравенству* (1.6), *коэффициенты $b_i(x,t)$ $(i=1,\dots,N)$ удовлетворяют условию (B)*(2.10) *при $B_1<N$, коэффициент $c(x,t)$ удовлетворяет условию (C_1) при $0<k<1/2$ и любом $\alpha>0$, то для решения задачи Коши* (2.7), (2.8) *справедливо неравенство*

$$|u(x,t)|\leqslant M_1\exp(-bt^{\frac{1}{n}}),t\geqslant t_1>0, \tag{2.12}$$

равномерно по x на каждом компакте K, где

$$M_1=M_1(K),b=b(k,K,\lambda_0,\lambda_1,\alpha)$$

$$\frac{1}{n}=\frac{1-2k}{3-2k}.$$

Теорема 2.2 является точной в том смысле, что в утверждении нельзя заменить компакт K на все $\mathbb{R}^N$.

3. Вспомогательные утверждения

Вначале построим в области D стационарное решение $\Gamma_\alpha(r)$ неравенства

$$L_2\Gamma_\alpha(r) \equiv \sum_{i,k=1}^{N} a_{ik}(x,t)\Gamma_{\alpha x_i x_k} + a_\alpha(r)\Gamma_\alpha \leqslant 0 \text{ в } D, \tag{3.1}$$

$$r = \sqrt{x_1^2 + \ldots + x_N^2},$$

в котором коэффициент $a_\alpha(r)$ определен по формуле (1.5)

Отметим, что коэффициент $a_\alpha(r)$ непрерывен в $\mathbb{R}^N$ и удовлетворяет условию Гельдера.

Лемма 3.1. *Пусть выполняются условия* (C) *на* $c(x,t)$, *тогда существует функция* $\Gamma = \Gamma_\alpha(r)$ *такая, что*

$$\Gamma_\alpha(r) > 0, \quad r \geqslant 0, \quad \Gamma'_\alpha(r) \geqslant 0, \quad L_2\Gamma_\alpha(r) \leqslant 0 \text{ в } D$$

и справедливо неравенство

$$\Gamma(r) > \frac{C_1}{2} r^{\lambda_1(\alpha)}, r \geqslant r_1 > 1, \tag{3.2}$$

где

$$\lambda_1(\alpha) = \frac{2 - S + \sqrt{D}}{2}, \quad D = (2-S)^2 + 4\overline{\alpha}^2,$$

$$S = \frac{(N-1)\lambda_1^2 + \lambda_0^2}{\lambda_0^2}, \quad \overline{\alpha} = \frac{\alpha}{\lambda_1}, C_1 > 0.$$

Доказательство. Применяя формулы

$$\Gamma'_{x_i} = \frac{x_i}{r}\Gamma', \quad \Gamma''_{x_i x_k} = \frac{x_i x_k}{r^2}\Big[\Gamma'' - \frac{\Gamma'}{r}\Big],$$

$$\Gamma''_{x_i x_i} = \frac{x_i^2}{r^2}\Big[\Gamma'' - \frac{\Gamma'}{r}\Big] + \frac{\Gamma'}{r},$$

получим равенство (см. (3.1)):

$$L_2\Gamma_\alpha = Q\Big\{\Big[\Gamma''_\alpha - \frac{\Gamma'_\alpha}{r}\Big] + \frac{\Gamma'_\alpha}{r}\frac{\sum\limits_{i=1}^{N} a_{ii}}{Q} + \frac{a_\alpha(r)\Gamma_\alpha}{Q}\Big\}, \tag{3.3}$$

где

$$Q = Q(x,t) = \sum_{i,k=1}^{N} a_{ik}(x,t)\frac{x_i x_k}{r^2}.$$

Из определения постоянных λ_0^2, λ_1^2 в (1.4) следует, что

$$\lambda_0^2 \leqslant Q(x,t) \leqslant \lambda_1^2 \text{ в } D, \qquad \frac{\sum\limits_{i=1}^{N} a_{ii}}{Q} \leqslant \frac{(N-1)\lambda_1^2 + \lambda_0^2}{\lambda_0^2} \text{ в } D. \tag{3.4}$$

При $r \leqslant 1$ и $t > 0$ из (3.3) и (3.4) получим

$$L_2\Gamma_\alpha \leqslant \lambda_1^2\Big[\Gamma''_\alpha + \frac{(S-1)}{r}\Gamma'_\alpha - \overline{\alpha}^2\Gamma_\alpha\Big],$$

где

$$S = \frac{(N-1)\lambda_0^2 + \lambda_1^2}{\lambda_0^2}, \quad \overline{\alpha} = \frac{\alpha}{\lambda_1}.$$

Полагая в последнем неравенстве $\Gamma_\alpha = Z_\alpha(r)$, где $Z_\alpha(r)$ — решение следующей задачи:

$$Z''_\alpha(r) + \frac{(S-1)}{r}Z'_\alpha(r) - \overline{\alpha}^2 Z_\alpha(r) = 0, \quad 0 < r \leqslant 1, \tag{3.5}$$

$$Z_\alpha(0) = 1, \quad Z'_\alpha(0) = 0, \tag{3.6}$$

получим неравенство:

$$L_2\Gamma_\alpha(r) \leqslant 0, \quad 0 < r \leqslant 1, \quad t > 0. \tag{3.7}$$

Из теории функций Бесселя [3, с. 91] следует, что решение задачи (3.5), (3.6) существует, единственно и представимо в виде:

$$Z_\alpha(r) = q_1(S)\frac{I_{\frac{S-2}{2}}(r\overline{\alpha})}{(r\overline{\alpha})^{\frac{S-2}{2}}}, \quad q_1(S) = 2^{\frac{S-2}{2}}\Gamma\Big(\frac{S}{2}\Big), \tag{3.8}$$

где $\Gamma(S)$ — функция Эйлера, $I_\nu(r)$ — модифицированная функция Бесселя первого рода. Из представления (3.8) и формул [3, п. 3.71] следует, что $Z_\alpha(r) > 0$, $Z'_\alpha(r) > 0$, при $r > 0$

$$b_0(\overline{\alpha}) = Z_\alpha(1) = q(S)\alpha^{\frac{2-S}{2}} I_{\frac{S-2}{2}}(\overline{\alpha} > 0),$$

$$b_1(\overline{\alpha}) = Z'_\alpha(1) = q(S)\overline{\alpha}^{2-\frac{S}{2}} I_{\frac{S}{2}}(\overline{\alpha}) > 0. \tag{3.9}$$

Так как

$$a_\alpha(r) = \frac{-\overline{\alpha}^2}{r^2}, \overline{\alpha} = \frac{\alpha}{\lambda_1}$$

при $r \geqslant 1$, то, применяя в (3.3) все неравенства (3.4), будем иметь при $r > 1$

$$L_2\Gamma_\alpha(r) \leqslant \lambda_1^2\Big[\Gamma''_\alpha + \frac{(S-1)}{r}\Gamma'_\alpha - \frac{\overline{\alpha}^2}{r^2}\Gamma_\alpha\Big]. \tag{3.10}$$

где

$$\overline{\alpha} = \frac{\alpha}{\lambda_1}.$$

Из неравенств (3.4) очевидно следует, что коэффициенты в правой части неравенства (3.10) не зависят от t.

Рассмотрим для функции $Y_\alpha(r)$ задачу:

$$Y''_\alpha(r) + \frac{(S-1)}{r}Y'_\alpha(r) - \frac{\overline{\alpha}^2}{r^2}Y_\alpha(r) = 0, \quad r > 1, \tag{3.11}$$

$$Y_\alpha(1) = b_0(\overline{\alpha}), \quad Y'_\alpha(1) = b_1(\overline{\alpha}), \tag{3.12}$$

где были использованы обозначения (3.9) для $b_0(\overline{\alpha})$ и $b_1(\overline{\alpha})$. Уравнение (3.11) является уравнением Эйлера [1], поэтому будем искать его решение в виде $Z_\alpha(r) = r^\lambda$. Дважды дифференцируя r^λ по r и вставляя в уравнение (3.11), получим определяющее уравнение:

$$\lambda^2 + (S-2) - \overline{\alpha}^2 = 0,$$

которое имеет корни:

$$\lambda_1 = \frac{2-S+\sqrt{D_1}}{2} > 0, \lambda_2 = \frac{2-S-\sqrt{D_1}}{2} < 0, D_1 = (2-S)^2 + 4\overline{\alpha}^2.$$

Решение уравнения (3.11) представляет собой сумму линейно независимых решений r^{λ_1} и r^{λ_2} с коэффициентами C_1 и C_2, т. е.

$$Y_\alpha(r) = C_1 r^{\lambda_1(\alpha)} + C_2 r^{\lambda_2(\alpha)}, r \geqslant 1. \tag{3.13}$$

Коэффициенты C_1 и C_2 в (3.13) определяются из системы уравнений:

$$b_0(\overline{\alpha}) = Z_\alpha(1) = C_1 + C_2,$$

$$b_1(\overline{\alpha}) = Z'_\alpha(1) = \lambda_1 C_1 + \lambda_2 C_2,$$

которая имеет решение

$$C_1 = \frac{b_0(\overline{\alpha})\lambda_2 - b_1(\overline{\alpha})}{\lambda_2 - \lambda_1} > 0, C_2 = \frac{b_1(\overline{\alpha}) - b_0(\overline{\alpha})\lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1}. \tag{3.14}$$

Таким образом, полагая в (3.10)

$$\Gamma_\alpha(r) = \begin{cases} Y_\alpha(r) \text{ при } r \geqslant 1, \\ Z_\alpha(r), 0 \leqslant r \leqslant 1, \end{cases} \tag{3.15}$$

мы получим в силу (3.7), (3.10) неравенство

$$L_2\Gamma_\alpha(r) \leqslant 0 \text{ в } D. \tag{3.16}$$

Очевидно, что функция (3.15) непрерывна и имеет непрерывные первые и вторые производные. В самом деле, непрерывность функции и указанных производных при $r \neq 1$ очевидна, а при $r = 1$ по построению справедливы «условия склейки» (3.12). Поэтому из непрерывности коэффициентов уравнений (3.5) и (3.11) при $r = 1$ и условий (3.12) следует, что

$$Z''_\alpha(1) = Y''_\alpha(1) = \overline{\alpha}^2,$$

т. е. следует непрерывность и вторых производных у функции (3.15).

Учитывая неравенство $C_1 > 0$ из представления (3.13) и отрицательность $\lambda_2 < 0$, получим, что найдется постоянная $r_1 > 1$ такая, что справедливо неравенство

$$\Gamma_\alpha(r) > \frac{C_1}{2} r^{\lambda_1(\alpha)} \text{ при } r \geqslant r_1, \tag{3.17}$$

из которого и (3.16) следует, что функция (3.15) является антибарьером [18], т. е. справедливо неравенство (3.16) и справедливы соотношения:

$$\Gamma > 0, \Gamma \to +\infty, r \to +\infty.$$

□

Рассмотрим функцию

$$p(r) = \Big(\frac{r^2}{4h^2} - 1\Big) \text{ при } r \leqslant h. \tag{3.18}$$

Лемма 3.2. *Функция* (3.18) *обладает следующими свойствами*:

1. $-1 \leqslant p(r) \leqslant$ *при* $r \leqslant 2h$ $(h > 0)$,
2. $-1 \leqslant p(r) \leqslant -\dfrac{3}{4}$ *при* $r \leqslant h$,
3. $Lp(r) + \lambda p(r) \geqslant 0$ *при* $r \leqslant h$, *где* $\lambda = \dfrac{N\lambda_0^2}{2h^2}$.

Доказательство. Докажем свойство 3. Учитывая формулы

$$p_{x_i}(r) = \frac{x_i}{2h^2}, p_{x_i x_k}(r) = 0, p_{x_i x_k}(r) = \frac{1}{2h^2}$$

и неравенства (3.4)

$$Lp(r) + \lambda p(r) = \frac{\sum\limits_{i=1}^{N} a_{ii}(x,t)}{2h^2} + \lambda\Big(\frac{r^2}{4h^2} - 1\Big) \geqslant \frac{N\lambda_0^2}{2h^2} - \lambda = 0,$$

получаем доказательство свойства 3.

Свойства 1 и 2 очевидны. Лемма 3.2 доказана. □

Вводим функцию

$$P_1(x,t) = p(r)e^{-\lambda t}, \tag{3.19}$$

где $r \leqslant h$, $t > 0$, $\lambda = \dfrac{N\lambda_0^2}{2h^2}$, $p(r)$ — функция (3.18).

Лемма 3.3. *Функция* (3.17) *обладает следующими свойствами*:

$$LP_1(x,t) \geqslant \frac{\partial P_1(x,t)}{\partial t} \text{ \textit{при} } r \leqslant h, t > 0, \tag{3.20}$$

$$P_1(x,0) = p(r), \text{ \textit{при} } r \leqslant h,$$

существует предел

$$\lim_{t\to\infty} P_1(x,t) = 0$$

равномерно относительно x *в шаре* $r \leqslant h$.

Доказательство. В силу формулы (3.19) существование предела очевидно. Докажем справедливость неравенства (3.20).

Применяя свойства функции (3.18) из леммы 3.2, будем иметь:

$$LP_1(x,t) - \frac{\partial P_1(x,t)}{\partial t} \geqslant e^{-\lambda t}(-\lambda p(r) + \lambda p(r)) = 0,$$

где

$$\lambda = \frac{N\lambda_0^2}{2h^2},$$

$p(r)$ — функция (3.18). Лемма 3.3 доказана. □

Так как функция $u_0(x)$ ограничена:

$$|u_0(x)| \leqslant M,$$

то, заменяя в уравнении (1.1) решение $u(x,t)$, отвечающее функции $u_0(x)$, по формуле

$$u_1(x,t) = \frac{u(x,t)}{M},$$

мы приходим к задаче Коши

$$Lu_1(x,t) + c(x,t)u_1(x,t) = \frac{\partial u_1}{\partial t}(x,t) \text{ в } D,$$

$$u_1(x,t) = u_1(x), x \in \mathbb{R}^N,$$

где для начальной функции $u_1(x) = \dfrac{u_0(x)}{M}$ справедливо неравенство:

$$|u_1(x)| = |\frac{u_0(x)}{M}| \leqslant 1.$$

Используя этот простой факт и принцип максимума [11, с. 24], получаем, что для доказательства теоремы 1.1 достаточно установить для решения задачи Коши

$$LV + a_\alpha(r)V - V_t = 0 \text{ в } D, \tag{3.21}$$

$$V(x,t) = 1, x \in \mathbb{R}^N, \tag{3.22}$$

оценку вида (2.2), (2.3), т. е. оценку

$$|V(x,t)| \leqslant M_1 t^{-\frac{\lambda_1(\alpha)}{3}},$$

где

$$\lambda_1(\alpha) = \frac{2 - S + \sqrt{D}_1}{2},$$

$$D_1 = (2-S)^2 + 4\overline{\alpha}^2, \overline{\alpha} = \frac{\alpha}{\lambda_1}.$$

4. Доказательство теоремы 1.1

Фиксируем произвольный компакт K в $\mathbb{R}^N$ и выберем число $l > 1$ так, чтобы компакт K содержался в замкнутом шаре:

$$\overline{B}_l = \{|x| \leqslant l\}.$$

В шаре $\overline{B}_l$ функция $\Gamma_\alpha(r)$ из леммы 3.1 в силу известной теоремы Вейерштрасса [1, с. 90] достигает максимального значения $\Gamma(l)$.

Так как $\Gamma_\alpha(r) > 0$, то эту функцию можно нормировать:

$$\overline{\Gamma}_\alpha(r) = \frac{\Gamma_\alpha(r)}{\Gamma_\alpha(l)}.$$

Ясно, что $\overline{\Gamma}_\alpha(r) \leqslant 1$ при $r \leqslant l$.

Для выбранного $l > 0$ фиксируем произвольное $\varepsilon > 0$ из неравенства

$$0 < \varepsilon < \Gamma(l). \tag{4.1}$$

Затем для фиксированного $\varepsilon > 0$ выберем $\delta > 0$, полагая $\delta = \varepsilon$, тогда

$$\delta\overline{\Gamma}(r) \leqslant \varepsilon \text{ при } r \leqslant l. \tag{4.2}$$

Введем функцию
$$W(x,t)=\delta\overline{\Gamma}(r)-V(x,t), \tag{4.3}$$
где
$$\overline{\Gamma}(r)=\frac{\Gamma_\alpha(r)}{\Gamma_\alpha(l)},$$
$\Gamma_\alpha(r)$ определена по формуле (3.15), а функция $V(x,t)$ — решение задачи (3.21), (3.22).

При выбранном $l>1$ выберем $h>r_1>l$, где r_1 из (3.17), так, чтобы выполнялось неравенство:
$$W(x,t)|_{|x|=h}>0, \text{ для всех } t>0. \tag{4.4}$$
Такой выбор $h>r_1>l$ всегда возможен, ибо функция $V(x,t)$ очевидно ограничена: $V(x,t)\leqslant 1$, а функция $\overline{\Gamma}(r)$ в силу (3.17) является неограниченно растущей функцией при $r\to+\infty$.

Так как в силу неравенства (3.17)
$$\delta\overline{\Gamma}(h)>\frac{C_1}{2}h^{\lambda_1(\alpha)}\frac{\varepsilon}{\Gamma_\alpha(l)},$$
то для обеспечения неравенства (4.4) при всех $t>0$ достаточно выбрать h из условия
$$\frac{C_1}{2}\frac{\varepsilon h^{\lambda_1(\alpha)}}{\Gamma_\alpha(l)}=1, \tag{4.5}$$
ибо тогда $V(x,t)\leqslant 1$, а $\delta\overline{\Gamma}(h)>1$ и (4.4) заведомо выполняется.

Для фиксированного $\varepsilon>0$ решим уравнение (4.5) относительно h, при этом получим
$$h=\Big(\frac{2\Gamma_\alpha(l)}{C_1}\Big)^{\frac{1}{\lambda_1}}\varepsilon^{-\frac{1}{\lambda_1}}. \tag{4.6}$$

Отметим, что
$$\lim_{\varepsilon\to+0}h(\varepsilon)=+\infty.$$

Очевидно, что функция $W(x,t)$ удовлетворяет соотношениям
$$LW+a_\alpha(r)W-\frac{\partial W}{\partial t}\leqslant 0, \quad |x|<h, \quad t>0, \tag{4.7}$$
$$W|_{|x|=h}>0 \text{ для всех } t>0, \tag{4.8}$$
$$W(x,0)=\delta\overline{\Gamma}(r)-1, \quad r<h. \tag{4.9}$$

Введем функцию
$$\varphi(r)=\delta\overline{\Gamma}(r)-1, \quad \overline{\Gamma}(r)=\frac{\Gamma_\alpha(r)}{\Gamma_\alpha(l)}. \tag{4.10}$$

Из неравенств (4.1) и (4.2) следует, что функция $\varphi(r)$ является отрицательной при $r\leqslant l$ и что при $r=h$ в силу выбора $h>0$ из условия (4.5) следует, что $\varphi(h)>0$.

В силу непрерывности функции (4.10) имеет смысл следующее представление для этой функции:
$$\varphi(r)=\varphi^-(r)+\varphi^+(r) \text{ при } r\leqslant h,$$
где
$$\varphi^-(r)=\frac{\varphi(r)-|\varphi(r)|}{2}=\min(0,\varphi(r))\leqslant 0,$$
$$\varphi^+(r)=\frac{\varphi(r)+|\varphi(r)|}{2}=\max(0,\varphi(r))\geqslant 0.$$

Рассмотрим функцию $q(x,t)$, которая удовлетворяет соотношениям
$$Lq(x,t)+a_\alpha(r)q(x,t)-q_t(x,t)=0, r<h, t>0, \tag{4.11}$$
$$q(x,t)|_{|x|=h}=0, t>0, \tag{4.12}$$
$$q(x,0)=\varphi^-(r)=\min(0,\varphi(r)), \tag{4.13}$$
где $\varphi(r)$ — функция (4.10).

Лемма 4.1. *Для функций* $W(x,t)$ *из* (4.3) *и* $q(x,t)$ *из* (4.11)–(4.13) *справедливо неравенство*
$$W(x,t)\geqslant q(x,t) \text{ при } |x|\leqslant h, t>0. \tag{4.14}$$

Доказательство. Рассмотрим функцию

$$k(x,t) = W(x,t) - q(x,t). \tag{4.15}$$

Учитывая соотношения (4.7)–(4.9) для функции $W(x,t)$ и соотношения (4.11)–(4.13) для функции $q(x,t)$, будем иметь

$$Lk(x,t) + a_\alpha(r)k(x,t) - \frac{\partial k}{\partial t}(x,t) \leqslant 0, \quad r < h, \quad t > 0, \tag{4.16}$$

$$k(x,t)|_{|x|=h} > 0, \quad t > 0, \tag{4.17}$$

$$k(x,0) = \varphi(r) - \varphi^-(r) = \varphi^+(r) = \max(0, \varphi(r)) > 0. \tag{4.18}$$

Из (4.16)–(4.18) и принципа максимума [11, теорема 1, с. 15] вытекает, что $k(x,t) \geqslant 0$ при $r < h$ и $t > 0$. Лемма 4.1 доказана. □

Лемма 4.2. *Существует постоянная $A > 0$ такая, что функция $q(x,t)$ из* (4.11)–(4.13) *и функция*

$$P_2(x,t) = AP_1(x,t), \tag{4.19}$$

где $P_1(x,t)$ — функция (3.19)*, удовлетворяет неравенству*

$$q(x,t) \geqslant P_2(x,t) \text{ при } r < h, t > 0. \tag{4.20}$$

Доказательство. Рассмотрим функцию

$$m(x,t) = q(x,t) - P_2(x,t). \tag{4.21}$$

Выберем число $A > 0$ так, чтобы выполнялось неравенство

$$m(x,0) = \varphi^-(r) - Ap(r) \geqslant 0 \text{ при } r < h.$$

Такой выбор числа $A > 0$ возможен, так как функция $p(r)$ из (3.18) удовлетворяет свойству 2 из леммы 3.2, а функция $\varphi^-(r)$(4.13) ограничена снизу на множестве $r < h$ числом $\nu < 0$:

$$0 \geqslant \varphi^-(r) \geqslant \min_{|x| \leqslant h} \varphi^-(r) = \nu = \Big(\frac{\varepsilon}{\Gamma_\alpha(l)} - 1\Big). \tag{4.22}$$

В самом деле, полагая $A = -\dfrac{4}{3}\nu$, где $\nu = \Big(\dfrac{\varepsilon}{\Gamma(l)} - 1\Big)$ и учитывая неравенство (4.22) и свойство 2 из леммы 3.2 $-1 \leqslant p(r) \leqslant -\dfrac{3}{4}$, будем иметь

$$Ap(r) = -\frac{4}{3}\nu p(r) \leqslant -\frac{4}{3}\nu(-\frac{3}{4}) = \nu \leqslant \varphi^-(r) \leqslant 0 \tag{4.23}$$

при $r \leqslant h$.

Из леммы 3.3 и леммы 4.2 вытекает, что функция (4.19) удовлетворяет соотношениям

$$\Delta P_2(x,t) - \frac{\partial P_2(x,t)}{\partial t} > 0 \text{ при } r < h, t > 0, \tag{4.24}$$

$$P_2(x,t)|_{|x|=h} < 0, t > 0, \tag{4.25}$$

$$P_2(x,0) = Ap(r) \text{ при } r < h, A = \frac{-4}{3}\Big(\frac{\varepsilon}{\Gamma_\alpha(l)} - 1\Big). \tag{4.26}$$

где $p(r)$ — функция (3.18). Из (4.11) и (4.24) следует, что функция (4.21) удовлетворяет неравенству

$$L(q(x,t) - P_2(x,t)) + a_\alpha(r)(q(x,t) - P_2(x,t)) +$$
$$+ a_\alpha(r)P_2(x,t) - \frac{\partial}{\partial t}(q(x,t) - P_2(x,t)) \leqslant 0 \text{ при } r < h, t > 0.$$

Используя введенное нами обозначение (4.21), перепишем последнее неравенство в виде:

$$Lm(x,t) + a_\alpha(r)m(x,t) - \frac{\partial m(x,t)}{\partial t} \leqslant -a_\alpha(r)P_2(x,t) \leqslant 0, \tag{4.27}$$

при $|x| < h, t > 0$.

В силу (4.12) и (4.25) при $|x| = h$ справедливо неравенство

$$m(x,t)|_{|x|=h} > 0, t > 0, \tag{4.28}$$

и в силу (4.23) при $t = 0$ справедливо неравенство

$$m(x,0) = \varphi^-(r) - Ap(r) \geqslant 0, r < h. \tag{4.29}$$

Из (4.27)–(4.29) и принципа максимума [11, теорема 1, с. 15] следует, что

$$m(x,t) \geqslant 0 \text{ при } r < h, t > 0.$$

Лемма 4.2 доказана. □

Из неравенств (4.14) и (4.20) следует, что

$$P_2(x,t) \leqslant q(x,t) \leqslant W(x,t) \text{ при } r < h, t > 0, \tag{4.30}$$

где $W(x,t)$ — функция (4.3), $q(x,t)$ — функция из (4.11)–(4.13),

$$P_2(x,t) = Ap(r)e^{-\frac{N\lambda_0^2}{2h^2}t},$$

$p(r)$ — функция (3.18),

$$A = -\frac{4}{3}\nu > 0.$$

Учитывая (4.3), перепишем неравенство (4.30) в следующем виде:

$$V(x,t) \leqslant \delta\overline{\Gamma}(r) - P_2(x,t) \text{ при } r < h, t > 0. \tag{4.31}$$

Рассмотрим неравенство (4.31) при $r \leqslant l$, тогда в силу (4.2) имеем неравенство

$$\delta\overline{\Gamma}(r) < \varepsilon, r \leqslant l. \tag{4.32}$$

Поэтому из (4.31) и (4.32) следует

$$V(x,t) < \varepsilon - Ap(r)e^{-\frac{N\lambda_0^2}{2h^2}t}, r \leqslant l. \tag{4.33}$$

Учитывая в (4.33) очевидное неравенство

$$0 < -Ap(r) \leqslant \frac{4}{3}(1 - \frac{\varepsilon}{\Gamma(l)}) \leqslant \frac{4}{3},$$

для фиксированного $\varepsilon > 0$ выберем t_1 из условия

$$\frac{4}{3}e^{-\frac{N\lambda_0^2}{2h^2}t_1} = \varepsilon.$$

Тогда при $\forall t > t_1$ неравенство

$$\frac{4}{3}e^{-\frac{N\lambda_0^2 t}{2h^2}} < \varepsilon. \tag{4.34}$$

будет тем более справедливым, и кроме того:

$$\frac{N\lambda_0^2}{2h^2}t_1 = \ln\frac{4}{3\varepsilon}. \tag{4.35}$$

Следовательно,

$$t_1 = \frac{2h^2}{N\lambda_0^2}\ln\frac{4}{3\varepsilon}. \tag{4.36}$$

Далее учитываем, что в силу (4.6) для h справедливо равенство

$$h^2 = \Big(\frac{2\Gamma_\alpha(l)}{C_1}\Big)^{\frac{2}{\lambda_1}}\varepsilon^{-\frac{2}{\lambda_1}}. \tag{4.37}$$

Из (4.36) и (4.37) вытекает, что

$$t_1 = F\varepsilon^{-\frac{2}{\lambda_1}}\ln\frac{4}{3\varepsilon},$$

где

$$F = \Big(\frac{2\Gamma_\alpha(l)}{C_1}\Big)^{\frac{2}{\lambda_1}}\frac{2}{N\lambda_0^2}. \tag{4.38}$$

Из правила Лопиталя [12, с. 168] очевидно вытекает, что для любого фиксированного s_1 из интервала $0 < s_1 < 1$ существует предел

$$\lim_{\varepsilon\to+0} \varepsilon^{s_1} \ln \frac{4}{3\varepsilon} = 0.$$

Поэтому, очевидно, справедливо неравенство

$$\ln \frac{4}{3\varepsilon} < \frac{1}{\varepsilon^{s_1}} \tag{4.39}$$

при $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ и S_1 из интервала $0 < S_1 < 1$.

При этом из (4.36)–(4.39) получим

$$t_1 \varepsilon^{+\frac{2}{\lambda_1(\alpha)}+s_1} \leqslant F. \tag{4.40}$$

Пусть α удовлетворяет неравенству (2.1), тогда легко проверить, что выполняется неравенство

$$\lambda_1(\alpha) > 1.$$

Полагая в (4.40)

$$s_1 = \frac{1}{\lambda_1(\alpha)},$$

где α — из неравенства (2.1), получим неравенство

$$t_1 \varepsilon^{\frac{3}{\lambda_1(\alpha)}} \leqslant F. \tag{4.41}$$

Из неравенства (4.41) следует, что

$$\varepsilon < t_1^{-\frac{\lambda_1(\alpha)}{3}} F_1, \tag{4.42}$$

где

$$F_1 = F^{\frac{\lambda_1(\alpha)}{3}}.$$

Из (4.33), (4.34) и (4.42) вытекает, что

$$V(x,t) < 2\varepsilon < M_1 t^{\frac{-\lambda_1(\alpha)}{3}}, \quad M_1 = 2F_1$$

при

$$\alpha^2 > \lambda_1^2(S-1) \quad \forall t > t_1,$$

равномерно относительно x на каждом компакте K в $\mathbb{R}^N$. Теорема 1.1 доказана.

5. Доказательство вспомогательных утверждений для теоремы 2.2

В области D мы построим стационарное решение $\Gamma = \Gamma_\alpha(r)$ неравенства

$$L_1\Gamma_\alpha = \Delta\Gamma_\alpha + \sum_{i=1}^{N} b_i(x,t)\Gamma_{\alpha x_i} + b_\alpha(r)\Gamma_\alpha \leqslant 0, \tag{5.1}$$

где $b_\alpha(r)$ — функция (2.11), такое, что

$$\Gamma_\alpha(r) > 0, \Gamma'_\alpha(r) \geqslant 0, \Gamma''_\alpha(r) \geqslant 0$$

и

$$\Gamma_\alpha(r) \sim C \exp\Big\{\frac{\alpha^2}{B(1-2k)}(r^{1-2k}-1)\Big\} \tag{5.2}$$

при $r \to \infty$, где $C > 0, 0 < k < 1/2$.

Применяя формулы

$$\Gamma'_{x_i} = \frac{x_i}{r}\Gamma',$$

$$\Gamma''_{x_i x_i} = \frac{x_i^2}{r^2}\Big[\Gamma'' - \frac{\Gamma'}{r}\Big] + \frac{\Gamma'}{r},$$

мы получим

$$L_1\Gamma_\alpha = \Gamma''_\alpha + \frac{N-1}{r}\Gamma'_\alpha + \sum_{i=1}^{N}(b_i x_i)\frac{\Gamma'_\alpha}{r} + b_\alpha(r)\Gamma_\alpha. \tag{5.3}$$

При $r \leqslant 1$ и $t > 0$ из (5.3) и (2.9) следует неравенство

$$L_1\Gamma_\alpha \leqslant \Gamma''_\alpha + \frac{N-1+B}{r}\Gamma'_\alpha - \alpha^2\Gamma,$$

где L_1 — оператор в (5.1).

Если ввести обозначение

$$S = N + B \tag{5.4}$$

и положить затем $\Gamma_\alpha(r) = Z_\alpha(r)$, где $Z_\alpha(r)$ — решение задачи

$$Z''_\alpha(r) + \frac{(S-1)}{r}Z'_\alpha(r) - \alpha^2 Z_\alpha(r) = 0, \quad r \leqslant 1, \tag{5.5}$$

$$Z_\alpha(0) = 1, \quad Z'_\alpha(0) = 0, \tag{5.6}$$

то мы получим из последнего неравенства и (5.5), что

$$L_1\Gamma_\alpha(r) \leqslant 0, \quad r \leqslant 1, \quad t > 0, \tag{5.7}$$

где оператор L_1 — из (5.1).

Отметим, что с точностью до переобозначения (5.4) и замены $\overline{\alpha}$ на α задача (5.5), (5.6) совпадает с задачей (3.5), (3.6). Поэтому для решения задачи (5.5), (5.6) справедливы те же формулы (3.8), (3.9) с заменой $\overline{\alpha}$ на α, так как $\lambda_1 = 1$.

Так как при $r \geqslant 1$ имеем $b_\alpha(r) = -\alpha^2(r^{-2k})$, то учитывая, что в силу условия (2.9)

$$\sup_D \sum_{i=1}^N |b_i(x,t)||\frac{x_i}{r}| \leqslant B,$$

мы получим неравенство

$$L_1\Gamma_\alpha \leqslant [\Gamma''_\alpha + \frac{N-1}{r}\Gamma'_\alpha + B\Gamma'_\alpha - \alpha^2 r^{-2k}\Gamma_\alpha], \tag{5.8}$$

где L_1 — из (5.1).

Для функции $y_\alpha(r)$ при $r \geqslant 1$ рассмотрим задачу

$$y''_\alpha(r) + \frac{N-1}{r}y'_\alpha(r) + By'_\alpha(r) - \alpha^2 y_\alpha(r) r^{-2k} = 0, \quad r > 1, \tag{5.9}$$

$$y_\alpha(1) = b_0(\alpha), \quad y'_\alpha(1) = b_1(\alpha). \tag{5.10}$$

Ясно из [1], что задача (5.9), (5.10) имеет единственное решение.

Полагая в (5.8) $\Gamma_\alpha(r) = y_\alpha(r)$, где $y_\alpha(r)$ — решение задачи (5.9), (5.10), мы получим из (5.9) и (5.7) неравенство

$$L_1\Gamma_\alpha(r) \leqslant 0 \text{ в } D, \tag{5.11}$$

где

$$\Gamma = \Gamma_\alpha(r) = \begin{cases} z_\alpha(r) \text{ при } 0 \leqslant r \leqslant 1, \\ y_\alpha(r) \text{ при } r \geqslant 1. \end{cases} \tag{5.12}$$

Замечание 5.1. Очевидно, что функция (5.12) непрерывна и имеет непрерывные первые и вторые производные. В самом деле, непрерывность функций и указанных производных при $r \neq 1$ очевидна, а при $r = 1$ по построению справедливы «условия склейки» (5.10). Поэтому из непрерывности коэффициентов уравнений (5.5) и (5.9) при $r = 1$ условия (5.10) получим, что

$$z''_\alpha(1) = y''_\alpha(1) = \alpha^2,$$

т. е. следует непрерывность и вторых производных у функции (5.12).

Лемма 5.1. *Решение* $y_\alpha(r)$ *задачи* (5.9), (5.10) *обладает при* $r > 1$ *следующими свойствами*:

1. $y_\alpha(r) > 0$,
2. $y'_\alpha(r) > 0$,
3. $y_\alpha(r) \to +\infty$, $r \to \infty$,

4. *выполнено равенство*

$$y_\alpha(r) = C_1 \exp\left(\frac{\alpha^2}{B(1-2k)}(r^{1-2k}-1) + \frac{(N-1)(N-3)}{4B}\Big(1-\frac{1}{r}\Big)\right)[1+\varepsilon(r)], \tag{5.13}$$

где $C_1 > 0$, $\lim\limits_{r\to\infty}\varepsilon(r) = 0$,

5. $L_1\Gamma_\alpha(r) \leqslant 0$.

Доказательство. Из уравнения (5.9) и условий (5.10) получаем

$$y''_\alpha(1) = \alpha^2 y_\alpha(1) = \alpha^2 > 0.$$

В силу непрерывности $y_\alpha(r)$ при $r > 1$ отсюда следует, что $y'_\alpha(r) > 0$ в некоторой правой окрестности точки $r = 1$. Тогда $y_\alpha(r) > 1$ при всех $r > 1$. Пусть это не так, тогда $y_\alpha(r) < 1$ в некоторой точке $r_2 > 1$ и функция $y_\alpha(r)$ достигает максимума в некоторой точке r_1 из интервала $(1, r_2)$. Поэтому в этой точке справедливо следующее:

$$y_\alpha(r_1) > 0, \quad y'_\alpha(r_1) = 0, \quad y''_\alpha(r_1) \leqslant 0.$$

Но тогда в точке $r = r_1$, очевидно, не выполняется уравнение (5.9). Полученное противоречие доказывает, что $y_\alpha(r) > 1 > 0$ при $r > 1$. Так как $y'_\alpha(r) > 0$ в некоторой точке $r_3 > 1$ и $y_\alpha(r_3) > 0$, то $y_\alpha(r)y'_\alpha(r) > 0$ при $r > r_3$ в силу известного свойства решений уравнения (5.6) с отрицательным младшим коэффициентом [13, с. 165]. Свойства 1 и 2 леммы 5.1 доказаны.

Докажем свойство 3. Легко видеть из (5.9), что $\Gamma''_\alpha(r) \geqslant 0$ при $r \geqslant r_0 > 1$.

Так как $\Gamma''_\alpha(r) = y''_\alpha(r) \geqslant 0$ при $r \geqslant r_0 > 1$, то $y'_\alpha(r)$ не убывает по r. Отсюда легко получаем справедливость свойства 3 в лемме 5.1, ибо

$$y_\alpha(r) \geqslant y_\alpha(r_0) + y'_\alpha(r_0)(r-r_0)) \to +\infty, \text{ при } r \to +\infty$$

Докажем асимптотическую формулу (5.13). Сделав замену в (5.9)

$$y_\alpha(r) = V(r) r^{\frac{1-N}{2}} e^{-\frac{B(r-1)}{2}},$$

мы получим, что функция $V(r)$ является решением задачи

$$V'' - V\Big(\alpha^2 r^{-2k} + \frac{B^2}{4} + \frac{P}{r^2} + \frac{Q}{r}\Big) = 0, \quad r > 1, \tag{5.14}$$

$$V(1) = b_0(\alpha), \quad V'(1) = b_1(\alpha) + b_0(\alpha)\frac{N-1+B}{2} = b_2, \tag{5.15}$$

где

$$P = \frac{(N-1)(N-3)}{4}, \quad Q = \frac{B(N-1)}{2},$$

постоянные $b_0(\alpha)$ и $b_1(\alpha)$ — из (3.9) с заменой $\overline{\alpha}$ на α. Пусть

$$q(r) = \frac{B^2}{4} + \alpha^2 r^{-2k} + \frac{P}{r^2} + \frac{Q}{r}, \quad r > 1, \tag{5.16}$$

тогда задачу (5.14), (5.15) можно записать в виде

$$V''(r) - q(r)V(r) = 0, \quad r > 1, \tag{5.17}$$

$$V(1) = b_0(\alpha), \quad V'(1) = b_2 = \frac{N-1+B}{2} b_0(\alpha) + b_1(\alpha). \tag{5.18}$$

Ясно, что $q(r) > 0$ для $r > 1$, $q'(r)$ — непрерывная функция при $r \geqslant 1$, и легко видеть, что

$$\int\limits_1^\infty |\beta(r)|dr < \infty,$$

где

$$\beta(r) = \frac{1}{8}\frac{q''(r)}{q^{\frac{3}{2}}(r)} - \frac{5}{32}\frac{(q'(r))^2}{q^{\frac{5}{2}}(r)},$$

и существует предел

$$\lim_{r\to\infty}\frac{q'(r)}{q^{\frac{3}{2}}(r)} = 0.$$

Поэтому мы можем применить известные формулы Грина—Лиувилля для решений уравнения (5.17) (см. [13, 14, 16]). Согласно этим формулам уравнение (5.17) имеет фундаментальную систему решений $t_1(r)$, $t_2(r)$ таких, что

$$t_{1,2}(r) = q^{\frac{-1}{4}}(r)\exp\{\pm S(r)\}[1+\varepsilon_{1,2}(r)], \tag{5.19}$$

где

$$\varepsilon_{1,2}(r) \to 0, r \to \infty,$$

$$S(r) = \int\limits_1^r \sqrt{q(\tau)}d\tau,$$

и эту асимптотику можно дифференцировать

$$t'_{1,2}(r) = \pm q^{\frac{1}{4}}(r)\exp\{\pm S(r)\}[1+\varepsilon_{3,4}(r)], \tag{5.20}$$

$$\varepsilon_{3,4}(r) \to 0 \text{ при } r \to \infty,$$

Применяя формулу Остроградского—Лиувилля и формулы (5.19), (5.20), мы получаем

$$t_1(r)t'_2(r) - t_2(r)t'_1(r) = -2. \tag{5.21}$$

Поэтому решения $t_1(r)$ и $t_2(r)$ являются независимыми.

Так как $\lim\limits_{r\to\infty}\int\limits_1^r \sqrt{q(\tau)}d\tau = +\infty$, то решение $t_1(r)$ монотонно возрастает и

$$\lim_{r\to\infty} t_1(r) = +\infty, \tag{5.22}$$

в то время как $t_2(r)$ является монотонно убывающим и

$$\lim_{r\to\infty} t_2(r) = 0. \tag{5.23}$$

Мы ищем решение задачи (5.17), (5.18) в виде:

$$V(r) = C_1 t_1(r) + C_2 t_2(r), \tag{5.24}$$

при $r \geqslant 1$, где постоянные C_1 и C_2 определяются из системы

$$b_0(\alpha) = C_1 t_1(1) + C_2 t_2(1),$$

$$b_2 = C_1 t'_1(1) + C_2 t'_2(1),$$

с ненулевым детерминантом Вронского (5.21).

Очевидно, что

$$C_1 > 0. \tag{5.25}$$

В противном случае $C_1 < 0$, и мы получили бы тогда, что

$$\Gamma_\alpha(r) = y_\alpha(r) = V(r) r^{\frac{1-N}{2}} \exp\left\{\frac{-B}{2}(r-1)\right\} \to -\infty \text{ при } r \to \infty,$$

что противоречит свойству 4 в лемме 5.1.

Таким образом, из (5.24), (5.25), (5.23), (5.22) вытекает, что $V(r) \sim C_1 t_1(r)$ при $r \to +\infty$.

Подставляя (5.16) в (5.19), мы получим из (5.24) искомую формулу (5.13).

Свойство 5 доказано в (5.11). Лемма 5.1 доказана. □

Рассмотрим функцию

$$d(r) = (1 - \frac{r^2}{4h^2}) \text{ при } r \leqslant h, h > 0. \tag{5.26}$$

Лемма 5.2. *Если постоянная B в условии (B)(2.10) удовлетворяет неравенству*

$$B < N, \tag{5.27}$$

то функция (5.26) удовлетворяет неравенству

$$Ld(r) = \Delta d(r) + \sum_{i=1}^N b_i(x,t) d_{x_i}(r) + b_\alpha(r) d(r) + \lambda d(r) \leqslant 0, r \leqslant h, \tag{5.28}$$

где

$$\lambda = \frac{N - B}{2h^2},$$

$$\frac{3}{4} \leqslant d(r) \leqslant 1 \text{ } \textit{при } r \leqslant h.$$

Доказательство. Учитывая формулы

$$(d(r))'_{x_i} = -\frac{x_i}{2h^2}, \quad (d(r))''_{x_i x_i} = -\frac{1}{2h^2},$$

и условия (B), получим:

$$Ld(r) = -\frac{N}{2h^2} - \frac{\sum\limits_{i=1}^{N} b_i x_i}{2h^2} + b_\alpha(r)d(r) + \lambda d(r) \leqslant -\frac{N - B}{2h^2} + \lambda = 0.$$

Мы здесь учли, что в $b_\alpha(r)d(r) \leqslant 0, d(r) \leqslant 1$.

Неравенство (5.28) доказано. Неравенства $\frac{3}{4} \leqslant d(r) \leqslant 1$ очевидны.

Лемма 5.2 доказана. □

Рассмотрим функцию

$$G_1(x,t) = d(r)e^{-\lambda t}, \tag{5.29}$$

где $r \leqslant h, t > 0, \lambda_1$ — из (5.29), $d(r)$ — функция (5.26).

Лемма 5.3. *Если постоянная B в условии* (B)(2.10) *удовлетворяет неравенству* (5.27)*, то функция* (5.29) *удовлетворяет соотношениям*

$$\Delta G_1 + \sum_{i=1}^{N} b_i(x,t) G_{1x_i} + b_\alpha(r) G_1 \leqslant \frac{\partial G_1}{\partial t}, r \leqslant h, t > 0, \tag{5.30}$$

$$G_1(x,0) = d(r), r \leqslant h, \tag{5.31}$$

где $d(r)$ — функция (5.26).

Доказательство. Докажем (5.30), так как (5.31) очевидно. Применяя неравенство (5.28) и формулу (5.29), получим

$$\Delta G_1 + \sum_{i=1}^{N} b_i(x,t) G_{1x_i} + b_\alpha(r) G_1 \leqslant -\lambda G_1 = \frac{\partial G_1}{\partial t}, r \leqslant h, t > 0.$$

Лемма 5.3 доказана. □

6. Доказательство теоремы 2.2

Фиксируем произвольный компакт K в $\mathbb{R}^N$, выберем $l > 1$ так, чтобы замкнутый шар $\overline{B_l} = (|x| \leqslant l)$ содержал компакт внутри. По теореме Вейерштрасса [12, с. 90] функция $\Gamma_\alpha(r)$(5.12) достигает максимума $\Gamma(l)$ в шаре $\overline{B_l}$. Так как $\Gamma_\alpha(r) > 0$, то нормируем эту функцию, полагая:

$$\overline{\Gamma}(r) = \frac{\Gamma_\alpha(r)}{\Gamma_\alpha(l)}. \tag{6.1}$$

Ясно, что $\overline{\Gamma}(r) \leqslant 1$ при $r \leqslant l$. Для фиксированного $l > 1$ фиксируем произвольное ε из интервала $0 < \varepsilon < \Gamma(l)$.

Для фиксированного выше $\varepsilon > 0$ выберем $\delta > 0$, полагая

$$\delta = \varepsilon. \tag{6.2}$$

Тогда очевидно

$$\delta\overline{\Gamma}(r) \leqslant \varepsilon \text{ при } r \leqslant l. \tag{6.3}$$

Рассмотрим задачу Коши

$$L_2 V \equiv \Delta V + \sum_{i=1}^{N} b_i(x,t) V_{x_i} + b_\alpha(r) V - V_t = 0, \tag{6.4}$$

где $b_\alpha(r)$ — функция (2.11),

$$V(x,0)=1, x\in\mathbb{R}^N. \tag{6.5}$$

Из принципа максимума [11, с. 28] и однородности линейных уравнений (1.1) и (6.4) вытекает, что для доказательства теоремы 2.2 достаточно установить для решения задачи Коши (6.4), (6.5) оценки вида (2.12), т. е.

$$|V(x,t)|\leqslant M_1\exp\left(-bt^{\frac{1}{n}}\right), \tag{6.6}$$

$$t\geqslant t_1, b=b(k,K,\lambda_0,\lambda_1,\alpha), M_1=M(K), \frac{1}{n}=\frac{1-2k}{3-2k}, \tag{6.7}$$

равномерно относительно x на компакте K в $\mathbb{R}^N$.

Рассмотрим функцию

$$W(x,t)=\delta\overline{\Gamma}_\alpha(r)-V(x,t), \tag{6.8}$$

где $\overline{\Gamma_\alpha}(r)$ — функция (6.1), $V(x,t)$ — решение задачи (6.4), (6.5).

Из оценки (5.13) и формулы (5.12) следует, что при некотором $r_l\geqslant l$ справедлива при $r\geqslant r_l$ оценка

$$\delta\overline{\Gamma_\alpha}(r)\geqslant\frac{\varepsilon}{2}\frac{C_1}{\Gamma(l)}\exp\left(ar^S\right), \tag{6.9}$$

где

$$a=\frac{\alpha^2}{(1-2k)B},\quad S=1-2k.$$

Для $\varepsilon>0$ выберем $h>r_l>l$ так, чтобы

$$W(x,t)|_{|x|=h}>0, \text{ для всех } t>0. \tag{6.10}$$

Такой выбор h возможен, так как функция $V(x,t)$ является ограниченной:$V(x,t)\leqslant 1$, а функция $\delta\overline{\Gamma}_\alpha(r)$ является неограниченно возрастающей при $r\to\infty$. В силу (6.9) достаточно выбрать $h=h(\varepsilon)$ из условия

$$\frac{C_1\varepsilon}{2\Gamma(l)}\exp\left(ah^S\right)=1. \tag{6.11}$$

Из (6.11) получим

$$ah^S=\ln\frac{B_2}{\varepsilon}, \tag{6.12}$$

где

$$B_2=\frac{2\Gamma(l)}{C_1}>0, a=\frac{\alpha^2}{(1-2k)B}, S=1-2k.$$

Из (6.12) получим

$$h^2(\varepsilon)=a^{-\frac{2}{S}}\left(\ln\frac{B_2}{\varepsilon}\right)^{\frac{2}{S}}. \tag{6.13}$$

Очевидно, что при этом функция (6.8) удовлетворяет соотношениям

$$L_2W(x,t)\leqslant 0, |x|<h, t>0, \tag{6.14}$$

$$W(x,t)|_{|x|=h}>0, t>0, \tag{6.15}$$

$$W(x,0)=\delta\overline{\Gamma}_\alpha(r)-1, |x|<h, \tag{6.16}$$

где L_2 — оператор, определенный в (6.4).

Рассмотрим функцию

$$G_2(x,t)=AG_1(x,t), |x|<h, t>0, \tag{6.17}$$

где $A<0$ мы выберем ниже, $G_1(x,t)$ — функция (5.29) из леммы 5.2. Докажем, что если выбрать достаточно большое отрицательное A, то мы получим неравенство

$$W(x,t)\geqslant G_2(x,t), |x|\leqslant h, t>0. \tag{6.18}$$

Для доказательства (6.18) введем функцию

$$g(x,t)=W(x,t)-G_2(x,t), \tag{6.19}$$

где $W(x,t)$ — функция (6.8), $G_2(x,t)$ — функция (6.17). Из (5.30), (6.14) и (6.17) следует неравенство

$$L_2g(x,t)\leqslant 0, \text{ при } |x|<h, t>0. \tag{6.20}$$

При $|x|<h$ из (6.10), (5.29) и того, что $A<0$, следует неравенство
$$g(x,t)|_{|x|=h}>0, \text{ для всех } t>0. \tag{6.21}$$
При $t=0$ из (6.16) и (6.19) получаем
$$g(x,0)=\delta\overline{\Gamma}_\alpha(r)-1-Ad(r), \tag{6.22}$$
где $d(r)$ — функция (5.26).

Функция $\overline{\Gamma}_\alpha(r)$ возрастает в силу леммы 5.1 и удовлетворяет неравенству
$$\delta\overline{\Gamma}_\alpha(r)-1>\delta\overline{\Gamma}_\alpha(0)-1=\frac{\varepsilon}{\Gamma\alpha(l)}-1.$$
Выберем $A<0$ из условия
$$q(x,0)\geqslant 0, \text{ при } |x|<h. \tag{6.23}$$
Учитывая неравенство $1\geqslant d(r)\geqslant\dfrac{3}{4}$, получим
$$-Ad(r)\geqslant-\frac{3}{4}A.$$
Отсюда следует
$$\delta\overline{\Gamma}_\alpha(r)-1-Ad(r)>\left(\frac{\varepsilon}{\Gamma\alpha(l)}-1\right)-\frac{3}{4}A=0.$$
Поэтому при $A=-\dfrac{4}{3}\Big(1-\dfrac{\varepsilon}{\Gamma(l)}\Big)<0$ получим неравенство (6.23). Из (6.20), (6.21), (6.23) и принципа максимума [11, с. 15] следует справедливость неравенства (6.18).

Запишем неравенство (6.18) в следующем виде:
$$V(x,t)\leqslant\delta\overline{\Gamma}(r)-G_2(x,t), \quad |x|<h, \quad t>0. \tag{6.24}$$
Пусть $|x|\leqslant l$, тогда первое слагаемое в (6.24) удовлетворяет неравенству (6.3). Для оценки второго слагаемого в (6.24) используем неравенства
$$-A=\frac{4}{3}(1-\frac{\varepsilon}{\Gamma\alpha(l)})<\frac{4}{3}, \quad d(r)\leqslant 1.$$
Для фиксированного $\varepsilon>0$ найдем $t_1=t_1(\varepsilon)>0$ из условия
$$\frac{4}{3}\exp(-\lambda_1 t_1)=\frac{4}{3}\frac{\varepsilon}{B_2}, \tag{6.25}$$
где $\lambda=\dfrac{N-B}{2h^2}>0, B_2>0$ — постоянная из (6.12).

Тогда при любом $t>t_1$ тем более выполняется неравенство
$$-G_2<\frac{4}{3}\exp(-\lambda t)<\frac{4}{3B_2}\varepsilon. \tag{6.26}$$
Решая уравнение (6.25) относительно t_1, получим
$$t_1=\frac{2h^2}{N-B}\ln\frac{B_2}{\varepsilon}. \tag{6.27}$$
Учитывая равенство (6.13) в (6.27), получаем:
$$t_1=\frac{2}{N-B}\ln\left(\frac{B_2}{\varepsilon}\right)^{1+\frac{2}{S}}a^{-\frac{2}{S}}, \tag{6.28}$$
где
$$S=1-2k, \quad a=\frac{\alpha^2}{(1-2k)B}, \quad B_2 \text{ — постоянная в (6.12).}$$
Вводя обозначения:
$$m_1=1+\frac{2}{S}, \quad B_3=\frac{N-B}{2}a^{\frac{2}{S}},$$
запишем (6.28) в виде:
$$B_3^{\frac{1}{m_1}}t_1^{\frac{1}{m_1}}=\ln\frac{B_2}{\varepsilon}, \quad \frac{1}{m_1}=\frac{1-2k}{3-2k}.$$

Отсюда из тождества $\ln(\exp(B_3^{\frac{1}{m_1}} t_3^{\frac{1}{m_1}})) = \ln\dfrac{B_2}{\varepsilon}$ получим

$$\varepsilon = B_2 \exp(-B_3^{\frac{1}{m_1}} t_1^{\frac{1}{m_1}}). \tag{6.29}$$

Из неравенств (6.3) и (6.26), (6.24) получим

$$|V(x,t)| < \varepsilon\Big(1 + \frac{4}{3B_2}\Big) \text{ при } t > t_1.$$

Поэтому из (6.29) и последнего неравенства получаем

$$|V(x,t)| \leqslant M_1 \exp(-bt^{\frac{1-2k}{3-2k}}), \quad t > t_1,$$

где

$$M_1 = B_2\Big(1 + \frac{4}{3B_2}\Big), \quad b = B_3^{\frac{1}{m_1}}.$$

Теорема 2.2 доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Айнс Э.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. — М.: Факториал Пресс, 2005.
2. *Богачев В. И., Крылов Н. В., Рекнер М., Шапошников С. В.* Уравнения Фоккера—Планка—Колмогорова. — М.—Ижевск: НИЦ Регулярная и хаотическая динамика, 2013.
3. *Ватсон Г.* Теория бесселевых функций. Т. 1. — М.: Иностранная литература, 1949.
4. *Гущин А. К.* Некоторые оценки решений краевых задач для уравнения теплопроводности в неограниченной области// Тр. МИАН, — 1967. — 91, С. 5–18.
5. *Гущин А. К.* О стабилизации решения параболического уравнения// Тр. МИАН. — 1968. — *103.* — С. 51–57.
6. *Гущин А. К.* О скорости стабилизации решения краевой задачи для параболического уравнения// Сиб. мат. ж. — 1969. — *10*, № 1. — С. 43–57.
7. *Денисов В. Н.* О стабилизации решения задачи Коши для параболического уравнения с младшим коэффициентом// Дифф. уравн. — 2003. — *39*, № 4. — С. 506–515.
8. *Денисов В. Н.* О поведении решений параболических уравнений при больших значениях времени// Усп. мат. наук — 2005. — *60*, № 4. — С. 145–212.
9. *Денисов В. Н.* Достаточные условия стабилизации решения задачи Коши для недивергентного параболического уравнения с младшими коэффициентами// Соврем. мат. Фундам. направл. — 2010. — *36.* — С. 61–71.
10. *Денисов В. Н.* Стабилизация решения задачи Коши для недивергентного параболического уравнения// Соврем. мат. и ее прилож. — 2012. — *78.* — С. 17–49.
11. *Ильин А. М., Калашников А. С., Олейник О. А.* Линейные уравнения второго порядка параболического типа// Тр. сем. им. И. Г. Петровского. — 2001. — *17.* — С. 9–193.
12. *Кудрявцев Л. Д.* Математический анализ. Т. 1. — М.: Высшая школа, 1970.
13. *Сансоне Дж.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. Т. 1. — М.: Иностранная литература, 1953.
14. *Федорюк М. В.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. — М.: Наука, 1985.
15. *Фридман А.* Уравнения с частными производными параболического типа. — М.: Мир, 1968.
16. *Marić V.* Regular variation and differential equations. — Berlin: Springer, 2000.
17. *Marić V., Tomić M.* On Liouville Green (WKB) approximation for second order linear differential equations// Differ. Integral Equ. — 1988. — *1*, № 3. — С. 299–304.
18. *Meyers N., Serrin J.* The exterior Dirichlet problem for second order elliptic partial differential equations// J. Math. Mech. — 1960. — *9*, № 4. — С. 513–538.

Василий Николаевич Денисов
Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова
E-mail: vdenisov2008@yandex.ru

UDC 517.956.4

On the Stabilization Rate of Solutions of the Cauchy Problem for a Parabolic Equation with Lower-Order Terms

© 2016 **V. N. Denisov**

Abstract. For a parabolic equation in the half-space $\overline{D} = \mathbb{R}^N \times [0, \infty)$, $N \geqslant 3$, we consider the Cauchy problem

$$L_1 u \equiv Lu + c(x,t)u - u_t = 0, \quad (x,t) \in D,$$
$$u(x,0) = u_0(x), \quad x \in \mathbb{R}^N.$$

Depending on estimates on the coefficient $c(x,t)$, we establish power or exponential rate of stabilization of solutions of the Cauchy problem равномерно по x на каждом компакте K в $\mathbb{R}^N$ для произвольной ограниченной непрерывной в $\mathbb{R}^N$ начальной функции $u_0(x)$.

REFERENCES

1. E. Ayns, *Obyknovennye differentsial'nye uravneniya* [Ordinary Differential Equations], Faktorial Press, Moscow, 2005 (in Russian).
2. V. I. Bogachev, N. V. Krylov, M. Rekner, and S. V. Shaposhnikov, *Uravneniya Fokkera–Planka–Kolmogorova* [Fokker–Planck–Kolmogorov Equations], NITs Regulyarnaya i khaoticheskaya dinamika, Moscow–Izhevsk, 2013 (in Russian).
3. G. Vatson, *Teoriya besselevykh funktsiy. T. 1* [Bessel Functions Theory. V. 1], Inostrannaya literatura, Moscow, 1949 (in Russian).
4. A. K. Gushchin, "Nekotorye otsenki resheniy kraevykh zadach dlya uravneniya teploprovodnosti v neogranichennoy oblasti" [Some estimates of solutions of boundary-value problems for the heat conduction equation in unbounded domain], *Tr. MIAN* [Proc. Steklov Math. Inst.], 1967, **91**, 5–18 (in Russian).
5. A. K. Gushchin, "O stabilizatsii resheniya parabolicheskogo uravneniya" [On stabilization of solutions of a parabolic equation] *Tr. MIAN* [Proc. Steklov Math. Inst.], 1968, **103**, 51–57 (in Russian).
6. A. K. Gushchin, "O skorosti stabilizatsii resheniya kraevoy zadachi dlya parabolicheskogo uravneniya" [On the stabilization rate of solutions of the boundary-value problem for a parabolic equation], *Sib. mat. zh.* [Siberian Math. J.], 1969, **10**, № 1, 43–57 (in Russian).
7. V. N. Denisov, "O stabilizatsii resheniya zadachi Koshi dlya parabolicheskogo uravneniya s mladshim koeffitsientom" [On the stabilization of solutions of the Cauchy problem for a parabolic equation with a lower-order term], *Diff. uravn.* [Differ. Equ.], 2003, **39**, № 4, 506–515 (in Russian).
8. V. N. Denisov, "O povedenii resheniy parabolicheskikh uravneniy pri bol'shikh znacheniyakh vremeni" [On the behavior of solutions of parabolic equations at large time values], *Usp. mat. nauk* [Progress Math. Sci.], 2005, **60**, № 4, 145–212 (in Russian).
9. V. N. Denisov, "Dostatochnye usloviya stabilizatsii resheniya zadachi Koshi dlya nedivergentnogo parabolicheskogo uravneniya s mladshimi koeffitsientami" [Sufficient conditions for stabilization of solutions of the Cauchy problem for a nondivergent parabolic equation with lower-order terms], *Sovrem. mat. Fundam. napravl.* [Contemporary Math. Fundam. Directions], 2010, **36**, 61–71 (in Russian).
10. V. N. Denisov, "Stabilizatsiya resheniya zadachi Koshi dlya nedivergentnogo parabolicheskogo uravneniya" [Stabilization of solutions of the Cauchy problem for a nondivergent parabolic equation], *Sovrem. mat. i ee prilozh.* [Contemporary Math. Appl.], 2012, **78**, 17–49 (in Russian).
11. A. M. Il'in, A. S. Kalashnikov, and O. A. Oleynik, "Lineynye uravneniya vtorogo poryadka parabolicheskogo tipa" [Linear second-order equations of parabolic type], *Tr. sem. im. I. G. Petrovskogo* [Proc. I. G. Petrovskii Semin.], 2001, **17**, 9–193 (in Russian).
12. L. D. Kudryavtsev, *Matematicheskiy analiz. T. 1* [Mathematical Analysis. V. 1], Vysshaya shkola, Moscow, 1970 (in Russian).
13. Dzh. Sansone, *Obyknovennye differentsial'nye uravneniya. T. 1* [Ordinary Differential Equations. V. 1], Inostrannaya literatura, Moscow, 1953 (in Russian).
14. M. V. Fedoryuk, *Obyknovennye differentsial'nye uravneniya* [Ordinary Differential Equations], Nauka, Moscow, 1985 (in Russian).

15. A. Fridman, *Uravneniya s chastnymi proizvodnymi parabolicheskogo tipa* [Partial Derivative Equations of Parabolic Type], Mir, Moscow, 1968 (in Russian).
16. V. Marić, *Regular variation and differential equations*, Springer, Berlin, 2000.
17. V. Marić and M. Tomić, "On Liouville Green (WKB) approximation for second order linear differential equations," *Differ. Integral Equ.*, 1988, **1**, № 3, 299–304.
18. N. Meyers and J. Serrin, "The exterior Dirichlet problem for second order elliptic partial differential equations," *J. Math. Mech.*, 1960, **9**, № 4, 513–538.

Vasiliy N. Denisov
M. V. Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia
E-mail: vdenisov2008@yandex.ru