

УСТОЙЧИВОСТЬ РЕШЕНИЙ НАЧАЛЬНО-КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ АЭРОГИДРОУПРУГОСТИ

© 2016 г. П. А. ВЕЛЬМИСОВ, А. В. АНКИЛОВ

Аннотация. При разработке устройств и деталей, взаимодействующих с потоком газа или жидкости, необходимо решать задачи, связанные с исследованием устойчивости, необходимой для их надежной работы. Определение устойчивости упругого тела, принятое в данной работе, соответствует идее устойчивости динамических систем Ляпунова. На основе предложенной нелинейной математической модели исследована динамическая устойчивость упругого элерона крыла, учитывая случайный дозвуковой поток газа или жидкости (в идеальной модели несжимаемой среды). Также рассмотрена нелинейная математическая модель устройства вибрационной техники, которое предназначено для ускорения технологических процессов, например, процесса перемешивания. Работа этих устройств основана на колебаниях упругих элементов в течении газа или жидкости. Рассмотрена динамическая устойчивость упругого элемента, расположенного на одной из стенок канала с дозвуковым потоком газа или жидкости (в модели идеальной сжимаемой среды). Обе модели описываются двумя нелинейными системами дифференциальных уравнений для неизвестных функций — потенциала скорости газа и деформации упругого элемента. Из конструкции функционала получаются достаточные условия устойчивости, накладывающие ограничения на скорость свободного потока воздуха, изгибную жесткость упругого элемента и другие параметры механической системы. Приведены примеры построения областей устойчивости для конкретных параметров механических систем.

СОДЕРЖАНИЕ

1. Введение	35
2. Математическая модель крыла с упругим элероном	36
3. Исследование устойчивости упругого элерона	38
4. Пример крыла	43
5. Математическая модель колеблющегося устройства	44
6. Исследование устойчивости колеблющегося упругого элемента	45
7. Пример колеблющегося элемента	48
8. Заключение	48
Список литературы	49

1. ВВЕДЕНИЕ

При разработке и эксплуатации конструкций, устройств и механизмов различного назначения, взаимодействующих с воздушным потоком или жидкостью, важной задачей является обеспечение надежности их функционирования и долговечности. Аналогичные задачи характерны для различных инженерных отраслей. В частности, эти задачи возникают в ракетостроении, самолетостроении, инструментарии, в разработке антенных систем, высотных конструкций с большой поверхностью и т. д. Важным значением для расчета конструкций, взаимодействующих с воздушным потоком, является устойчивость деформируемых элементов, так как при воздействии потока оно может нарушаться. Примерами потери динамической устойчивости являются: вибрация крыла самолета; вибрация пластин и полок в потоке, например вибрация обшивки самолета или ракеты; вибрация лопастей турбины и винтов; отклонения проводов, труб, подвесных мостов и т. д.

С другой стороны, явления вибрации при аэрогидродинамическом воздействии, являющиеся нежелательными для одних устройств, для других устройств необходимы. Примерами таких устройств в технике являются устройства для ускорения технологических процессов, например,

приготовления однородных смесей, в частности для подвода смазочно-охлаждающей жидкости в рабочую зону [6].

Таким образом, при разработке конструкций и устройств, взаимодействующих с воздушным потоком, необходимо решать задачи, связанные с исследованием устойчивости, требуемой для их надежной работы и долговечности.

Устойчивость упругих тел, взаимодействующих с воздушным потоком, рассматривалась в последнее десятилетие во многих теоретических и экспериментальных работах. Среди последних работ о динамике, устойчивости и вибрации частей самолета, включая профиль крыла, следует отметить работы российских ученых [5, 13, 14, 19, 23] и др., а также зарубежных [17, 18, 20, 21, 24, 26] и т. д. Большая часть этих работ посвящена аналитическому и численному исследованию аэроупругих колебаний профиля крыла в сверхзвуковом потоке воздуха. Для случая дозвукового потока в основном использовались численные методы. Среди недавних работ по динамике и устойчивости длинных трубопроводов и их частей во время протекания в них жидкости или газа следует отметить работы [9–11, 15, 16, 22, 25] и многие другие. Среди работ авторов настоящей статьи, посвященных динамике и устойчивости упругих элементов, взаимодействующих с воздушным потоком, отметим монографии [1–4, 7, 8].

Определение устойчивости упругого тела, принятое в данной работе, соответствует идее устойчивости динамических систем Ляпунова. Задача может быть сформулирована следующим образом: для всевозможных значений параметров, характеризующих систему «жидкость — твердое тело» (основными параметрами являются скорость потока, прочность и инерционные характеристики тела, сжимающее и растягивающее усилие, сила трения) малые деформации тел в начальный момент времени $t = 0$ (т. е. малые отклонения от положения равновесия) будут соответствовать малым деформациям в любой момент времени $t > 0$.

2. МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ КРЫЛА С УПРУГИМ ЭЛЕРОНОМ

Пусть в плоскости, в которой происходят совместные колебания упругого элерона и дозвукового потока идеального газа (жидкости), отрезок $[a, b]$ оси Ox соответствует крылу, а отрезок $[b, c]$ — элерону (рис. 2.1).

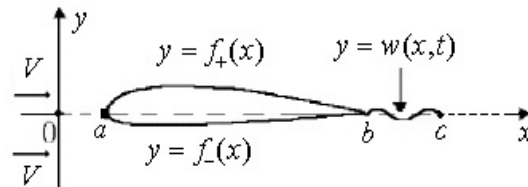


Рис. 2.1. Профиль крыла.

В бесконечно удаленной точке скорость газа равна V и направлена вдоль оси Ox . Предположим также, что отклонение (напряжение) упругого элерона и возмущение однородного набегающего потока малы.

Введем обозначения $u(x, t)$ и $w(x, t)$ для деформаций упругого элерона в направлении осей Ox и Oy соответственно; $\phi(x, y, t)$ — потенциал скорости возмущенного потока.

Предложенная математическая модель задается следующими уравнениями и краевыми условиями: потенциал скорости удовлетворяет уравнению Лапласа

$$\Delta\phi \equiv \phi_{xx} + \phi_{yy} = 0, \quad (x, y) \in G = \mathbb{R}^2 \setminus [a, c], \quad (2.1)$$

линеаризованные граничные условия

$$\phi_y^\pm(x, 0, t) = \lim_{y \rightarrow \pm 0} \phi_y(x, y, t) = Vf'_\pm(x), \quad x \in (a, b), \quad (2.2)$$

$$\phi_y^\pm(x, 0, t) = \dot{w}(x, t) + Vw'(x, t), \quad x \in (b, c), \quad (2.3)$$

условие отсутствия возмущений в бесконечно удаленной точке

$$|\nabla\phi|_\infty^2 \equiv (\phi_x^2 + \phi_y^2 + \phi_t^2)_\infty = 0. \quad (2.4)$$

Уравнение колебаний упругого элерона имеет вид

$$\begin{cases} -EF \left(u'(x, t) + \frac{1}{2}w'^2(x, t) \right)' + M\ddot{u}(x, t) = 0, \\ -EF \left[w'(x, t) \left(u'(x, t) + \frac{1}{2}w'^2(x, t) \right) \right]' + EJw''''(x, t) + M\ddot{w}(x, t) + \beta_0 w(x, t - \tau) + \\ + \beta_1 \dot{w}(x, t) + \beta_2 \dot{w}''''(x, t) = \rho(\phi_t^+(x, 0, t) - \phi_t^-(x, 0, t)) + \rho V(\phi_x^+(x, 0, t) - \phi_x^-(x, 0, t)), \\ x \in (b, c). \end{cases} \quad (2.5)$$

Нижние индексы x, y, t означают частные производные по x, y, t ; штрих и точка — частные производные по x и t соответственно; ρ — плотность газа; $EJ = Eh^3/(12(1 - \nu^2))$ — изгибная жесткость элерона; h — толщина элерона; $M = h\rho_{pl}$ — линейная масса элерона; $F = h/(1 - \nu^2)$; E, ρ_{pl} — модуль упругости и линейная плотность элерона; ν — коэффициент Пуассона; β_2, β_1 — коэффициенты внутреннего и внешнего торможения; β_0 — коэффициент жесткости основы (сжимаемого слоя); τ — время задержки реакции основы; $f_{\pm}(x)$ — функции, описывающие форму верхней (+) и нижней (−) недеформируемой части поверхности профиля.

Используя методы теории функции комплексной переменной [4], решение задачи (2.1)–(2.5) можно свести к изучению системы уравнений для неизвестной функции смещения (u, w) элерона:

$$\begin{cases} -EF \left(u'(x, t) + \frac{1}{2}w'^2(x, t) \right)' + M\ddot{u}(x, t) = 0, \\ -EF \left[w'(x, t) \left(u'(x, t) + \frac{1}{2}w'^2(x, t) \right) \right]' + EJw''''(x, t) + M\ddot{w}(x, t) + \beta_0 w(x, t - \tau) + \\ + \beta_1 \dot{w}(x, t) + \beta_2 \dot{w}''''(x, t) = -\frac{\rho}{\pi} \int_b^c [\ddot{w}(x_1, t) + V\dot{w}'(x_1, t)] K(x_1, x) dx_1 - \\ - \frac{V\rho}{\pi} \int_b^c [\dot{w}(x_1, t) + Vw'(x_1, t)] \frac{\partial K(x_1, x)}{\partial x} dx_1 + \frac{V^2\rho}{\pi} \int_a^b [f'_+(x_1) + f'_-(x_1)] G(x_1, x) dx_1, \\ x \in (b, c), \end{cases} \quad (2.6)$$

где

$$K(x_1, x) = 2 \ln \left| \frac{\sqrt{(x-a)(c-x_1)} + \sqrt{(x_1-a)(c-x)}}{\sqrt{(x-a)(c-x_1)} - \sqrt{(x_1-a)(c-x)}} \right|,$$

$$G(x_1, x) = \frac{\sqrt{(x-a)(c-x)} + \sqrt{(x_1-a)(c-x_1)}}{\sqrt{(x-a)(c-x)}(x-x_1)}, \quad x_1 \neq x.$$

Пусть профиль крыла симметричный, т. е. $f_+(x) = -f_-(x)$ (это имеет место для киля самолета с эластичным рулем (рис. 2.2)).

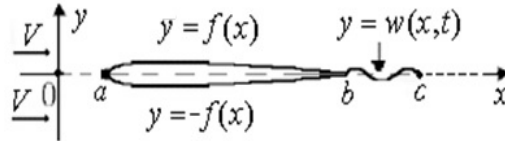


Рис. 2.2. Профиль киля самолета.

В этом случае система (2.6) будет однородной:

$$\begin{cases} -EF \left(u'(x, t) + \frac{1}{2}w'^2(x, t) \right)' + M\ddot{u}(x, t) = 0, \\ -EF \left[w'(x, t) \left(u'(x, t) + \frac{1}{2}w'^2(x, t) \right) \right]' + EJw''''(x, t) + M\ddot{w}(x, t) + \beta_0 w(x, t - \tau) + \\ + \beta_1 \dot{w}(x, t) + \beta_2 \dot{w}''''(x, t) = -\frac{\rho}{\pi} \int_b^c [\ddot{w}(x_1, t) + V\dot{w}'(x_1, t)] K(x_1, x) dx_1 - \\ - \frac{V\rho}{\pi} \int_b^c [\dot{w}(x_1, t) + Vw'(x_1, t)] \frac{\partial K(x_1, x)}{\partial x} dx_1, \quad x \in (b, c). \end{cases} \quad (2.7)$$

Краевые условия на концах элерона при $x = b$ и $x = c$ имеют вид:

$$\begin{aligned} w(b, t) = 0, \quad w''(b, t) = \alpha w'(b, t), \quad u(b, t) = 0, \\ w''(c, t) = 0, \quad w'''(c, t) = 0, \quad u'(c, t) + \frac{1}{2}w'^2(c, t) = 0, \end{aligned} \quad (2.8)$$

что соответствует упругому соединению левого конца и свободному правому концу. Число α — коэффициент жесткости упругого соединения между крылом и элероном.

3. ИССЛЕДОВАНИЕ УСТОЙЧИВОСТИ УПРУГОГО ЭЛЕРОНА

Получим достаточные условия устойчивости решений интегро-дифференциальных уравнений (2.7) по отношению к возмущению начальных условий.

Введем функционал

$$\begin{aligned} \Phi(t) = & \int_b^c \left\{ M(\dot{u}^2 + \dot{w}^2) + EJw''^2 + EF \left(u' + \frac{1}{2}w'^2 \right)^2 + \beta_0 w^2 + \right. \\ & \left. + \beta_0 \int_{t-\tau}^t dt_1 \int_{t_1}^t \dot{w}^2(x, s) ds \right\} dx + \alpha EJw'^2(b, t) + I(t) + J(t), \end{aligned} \quad (3.1)$$

где

$$\begin{aligned} I(t) &= \frac{\rho}{\pi} \int_b^c dx \int_b^c \dot{w}(x, t) \dot{w}(x_1, t) K(x_1, x) dx_1, \\ J(t) &= -\frac{\rho V^2}{\pi} \int_b^c dx \int_b^c w'(x, t) w'(x_1, t) K(x_1, x) dx_1. \end{aligned}$$

Найдем производную Φ по t . В силу равенства $w(x, t - \tau) = w(x, t) - \int_{t-\tau}^t \dot{w}(x, s) ds$ для функций $w(x, t)$ и $u(x, t)$, удовлетворяющих уравнениям (2.7), выражение для $\dot{\Phi}(t)$ имеет вид:

$$\begin{aligned} \dot{\Phi}(t) = & 2 \int_b^c \left\{ EF \dot{u} \left(u' + \frac{1}{2}w'^2 \right)' + EF \dot{w} \left[w' \left(u' + \frac{1}{2}w'^2 \right) \right]' - EJ \dot{w} w'''' - \beta_0 \dot{w} w + \right. \\ & + \beta_0 \dot{w} \int_{t-\tau}^t \dot{w}(x, s) ds - \beta_1 \dot{w}^2 - \beta_2 \dot{w} w'''' - \frac{\rho}{\pi} \dot{w}(x, t) \int_b^c (\ddot{w}(x_1, t) + V \dot{w}'(x_1, t)) K(x_1, x) dx_1 - \\ & - \frac{V\rho}{\pi} \dot{w}(x, t) \int_b^c (\dot{w}(x_1, t) + V w'(x_1, t)) \frac{\partial K(x_1, x)}{\partial x} dx_1 + EJ w'' \dot{w} + EF \dot{u}' \left(u' + \frac{1}{2}w'^2 \right) + \\ & \left. + EF w' \dot{w}' \left(u' + \frac{1}{2}w'^2 \right) + \beta_0 w \dot{w} + \frac{\beta_0 \tau}{2} \dot{w}^2(x, t) - \frac{\beta_0}{2} \int_{t-\tau}^t \dot{w}^2(x, s) ds \right\} dx + \\ & + 2\alpha EJ w'(b, t) \dot{w}'(b, t) + \dot{I}(t) + \dot{J}(t). \end{aligned} \quad (3.2)$$

Интегрируя по частям и учитывая (2.8), получим

$$\begin{aligned} \int_b^c \dot{w} w'''' dx &= \dot{w} w''''|_b^c - \int_b^c \dot{w}' w'''' dx = -\dot{w}' w''''|_b^c + \int_b^c \dot{w}'' w'' dx = \alpha \dot{w}'(b, t) w'(b, t) + \int_b^c \dot{w}'' w'' dx, \\ \int_b^c \dot{w} w'''' dx &= \alpha \dot{w}'^2(b, t) + \int_b^c \dot{w}''^2 dx, \\ \int_b^c \dot{u} \left(u' + \frac{1}{2}w'^2 \right)' dx &= \dot{u} \left(u' + \frac{1}{2}w'^2 \right)|_b^c - \int_b^c \dot{u}' \left(u' + \frac{1}{2}w'^2 \right) dx = - \int_b^c \dot{u}' \left(u' + \frac{1}{2}w'^2 \right) dx, \end{aligned}$$

$$\int_b^c \dot{w} \left[w' \left(u' + \frac{1}{2} w'^2 \right) \right]' dx = \dot{w} w' \left(u' + \frac{1}{2} w'^2 \right) \Big|_b^c - \int_b^c \dot{w}' w' \left(u' + \frac{1}{2} w'^2 \right) dx = - \int_b^c \dot{w}' w' \left(u' + \frac{1}{2} w'^2 \right) dx.$$

Меняя порядок интегрирования, снова интегрируем по частям:

$$\begin{aligned} \int_b^c dx \int_b^c \dot{w}(x, t) \dot{w}(x_1, t) \frac{\partial K(x_1, x)}{\partial x} dx_1 &= \int_b^c dx_1 \int_b^c \dot{w}(x, t) \dot{w}(x_1, t) \frac{\partial K(x_1, x)}{\partial x} dx = \\ &= \int_b^c \dot{w}(x, t) \dot{w}(x_1, t) K(x_1, x) \Big|_b^c dx_1 - \int_b^c dx_1 \int_b^c \dot{w}'(x, t) \dot{w}(x_1, t) K(x_1, x) dx = \\ &= - \int_b^c dx \int_b^c \dot{w}'(x_1, t) \dot{w}(x, t) K(x_1, x) dx_1, \end{aligned}$$

где в последнем равенстве переменные интегрирования x и x_1 переставлены друг с другом, так как $K(x_1, x) = K(x, x_1)$.

Аналогично получаем

$$\int_b^c dx \int_b^c \dot{w}(x, t) w'(x_1, t) \frac{\partial K(x_1, x)}{\partial x} dx_1 = - \int_b^c dx \int_b^c \dot{w}'(x, t) w'(x_1, t) K(x_1, x) dx_1.$$

Подставляя данные соотношения в (3.2), имеем

$$\begin{aligned} \dot{\Phi}(t) &= \int_b^c \left\{ 2\beta_0 \dot{w} \int_{t-\tau}^t \dot{w}(x, s) ds + \beta_0 \tau \dot{w}^2(x, t) - \beta_0 \int_{t-\tau}^t \dot{w}^2(x, s) ds - 2\beta_1 \dot{w}^2 - 2\beta_2 \dot{w}''^2 \right\} dx - \\ &\quad - \frac{2\rho}{\pi} \int_b^c \left\{ \dot{w}(x, t) \int_b^c \ddot{w}(x_1, t) K(x_1, x) dx_1 \right\} dx + \\ &\quad + \frac{2\rho V^2}{\pi} \int_b^c \left\{ \dot{w}'(x, t) \int_b^c w'(x_1, t) K(x_1, x) dx_1 \right\} dx - \\ &\quad - 2\beta_2 \alpha \dot{w}''^2(b, t) + \dot{I} + \dot{J}. \end{aligned} \tag{3.3}$$

Используя неравенство $2ab \leq a^2 + b^2$, получаем, что $2\dot{w}(x, t) \dot{w}(x, s) \leq \dot{w}^2(x, t) + \dot{w}^2(x, s)$. Подставляя эту оценку в (3.3), окончательно находим

$$\begin{aligned} \dot{\Phi}(t) &\leq \int_b^c \left\{ 2\beta_0 \tau \dot{w}^2(x, t) - 2\beta_1 \dot{w}^2 - 2\beta_2 \dot{w}''^2 \right\} dx - 2\beta_2 \alpha \dot{w}''^2(b, t) - \\ &\quad - \frac{2\rho}{\pi} \int_b^c \left\{ \dot{w}(x, t) \int_b^c \ddot{w}(x_1, t) K(x_1, x) dx_1 \right\} dx + \\ &\quad + \frac{2\rho V^2}{\pi} \int_b^c \left\{ \dot{w}'(x, t) \int_b^c w'(x_1, t) K(x_1, x) dx_1 \right\} dx + \dot{I} + \dot{J}. \end{aligned} \tag{3.4}$$

Преобразуем интеграл $\dot{I}(t)$:

$$\dot{I}(t) = \frac{d}{dt} \frac{\rho}{\pi} \int_b^c dx \int_b^c \dot{w}(x, t) \dot{w}(x_1, t) K(x_1, x) dx_1 = \frac{\rho}{\pi} \int_b^c dx \int_b^c \ddot{w}(x, t) \dot{w}(x_1, t) K(x_1, x) dx_1 +$$

$$+ \frac{\rho}{\pi} \int_b^c dx \int_b^c \dot{w}(x, t) \ddot{w}(x_1, t) K(x_1, x) dx_1.$$

Так как $K(x_1, x) = K(x, x_1)$, то, меняя сначала порядок интегрирования, а затем переменные x_1 и x , получаем:

$$\frac{\rho}{\pi} \int_b^c dx \int_b^c \dot{w}(x_1, t) \ddot{w}(x, t) K(x_1, x) dx_1 = \frac{\rho}{\pi} \int_b^c dx \int_b^c \dot{w}(x, t) \ddot{w}(x_1, t) K(x_1, x) dx_1.$$

Для $\dot{I}(t)$ получается следующее выражение:

$$\dot{I}(t) = \frac{2\rho}{\pi} \int_b^c dx \int_b^c \dot{w}(x, t) \ddot{w}(x_1, t) K(x_1, x) dx_1. \quad (3.5)$$

Аналогично преобразованиям $\dot{I}(t)$ получаем выражение для $\dot{J}(t)$

$$\dot{J}(t) = -\frac{2\rho V^2}{\pi} \int_b^c dx \int_b^c \dot{w}'(x, t) w'(x_1, t) K(x_1, x) dx_1. \quad (3.6)$$

Подставляя (3.5) и (3.6) в правую часть (3.4), получаем

$$\dot{\Phi}(t) \leq 2 \int_b^c \{ \beta_0 \tau \dot{w}^2(x, t) - \beta_1 \dot{w}^2 - \beta_2 \dot{w}''^2 \} dx - 2\beta_2 \alpha \dot{w}''^2(b, t). \quad (3.7)$$

Рассмотрим краевую задачу для уравнения $\psi^{IV}(x) = \mu\psi(x)$, $x \in [b, c]$ с краевыми условиями (2.8). Эта задача самосопряженная и полностью определена при условии

$$\alpha \geq 0. \quad (3.8)$$

Действительно, интегрируя по частям, легко убеждаемся, что

$$\int_b^c u(x) v^{IV}(x) dx = \int_b^c v(x) u^{IV}(x) dx, \quad \int_b^c u(x) u^{IV}(x) dx > 0,$$

для произвольных функций $u(x)$ и $v(x)$, которые удовлетворяют рассматриваемым краевым условиям и имеют на $[b, c]$ непрерывные производные четвертого порядка. Для функции $\dot{w}(x, t)$ запишем неравенство Рэлея [12]:

$$\int_b^c \dot{w}(x, t) \dot{w}^{IV}(x, t) dx \geq \mu_1 \int_b^c \dot{w}(x, t) \dot{w}(x, t) dx,$$

где μ_1 — наименьшее собственное значение рассматриваемой краевой задачи. Интегрируя по частям, перепишем это неравенство в виде

$$\int_b^c \dot{w}''^2(x, t) dx + \alpha \dot{w}''^2(b, t) \geq \mu_1 \int_b^c \dot{w}^2(x, t) dx. \quad (3.9)$$

Таким образом, учитывая (3.9), неравенство (3.7) примет вид

$$\dot{\Phi}(t) \leq -\frac{2}{\mu_1} \int_b^c (\beta_1 + \mu_1 \beta_2 - \beta_0 \tau) \dot{w}''^2 dx. \quad (3.10)$$

Пусть выполнено условие

$$\beta_0 \tau - \beta_1 - \mu_1 \beta_2 \leq 0, \quad (3.11)$$

тогда $\dot{\Phi}(t) \leq 0$. Интегрируя от 0 до t , получим:

$$\Phi(t) \leq \Phi(0). \quad (3.12)$$

В [3] доказана следующая теорема.

Теорема 3.1. *Предположим, что:*

1. функция $f(x)$ непрерывна при $x \in [a, c]$;
2. функция $K(x_1, x, c)$ определена и непрерывна по x и x_1 при $x \in [a, c]$, $x_1 \in [a, c]$ (за исключением, может быть, линии $x = x_1$) и интегрируема на этом множестве;
3. функция $K(x_1, x, c)$ непрерывно дифференцируема по c и выполняется равенство $\frac{\partial K}{\partial d} = \phi(x, d) \cdot \phi(\tau, d)$;
4. для всех $\alpha \in (c, d]$, $x, \tau \in (c, \alpha)$ выполняется равенство $K(\alpha, x, \alpha) = K(x_1, \alpha, \alpha) = 0$;
5. $\lim_{c \rightarrow a} \int_a^c dx \int_a^c K(x_1, x, c) dx_1 = 0$.

Тогда повторный (собственный или несобственный) интеграл неотрицателен:

$$\int_a^c dx \int_a^c f(x)f(x_1)K(x_1, x, c)dx_1 \geq 0,$$

а также

$$\int_a^c dx \int_a^c f(x)f(x_1)K(x_1, x, c)d\tau = \int_a^c \left(\int_a^\alpha f(x)\phi(x, \alpha)dx \right)^2 d\alpha.$$

Теорема 3.1 будет применена к функции

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \in [a, b]; \\ \dot{w}(x, t_0), & x \in [b, c]. \end{cases}$$

Ядро $K(x_1, x, c) = \ln \left| \frac{\sqrt{(x-a)(c-x_1)} + \sqrt{(x_1-a)(c-x)}}{\sqrt{(x-a)(c-x_1)} - \sqrt{(x_1-a)(c-x)}} \right|$, где в качестве параметра берется c , удовлетворяет условиям теоремы 3.1:

1. $\frac{\partial K}{\partial c} = \frac{\sqrt{(x-a)(x_1-a)}}{(c-a)\sqrt{(c-x)(c-x_1)}} = \frac{\sqrt{x-a}}{\sqrt{(c-a)(c-x)}} \frac{\sqrt{x_1-a}}{\sqrt{(c-a)(c-x_1)}} = \phi(x, c) \cdot \phi(x_1, c)$;
2. $K(c, x, c) = \ln \left| \frac{\sqrt{c-x}}{\sqrt{c-x}} \right| = 0$, $K(x_1, c, c) = \ln \left| \frac{\sqrt{c-x_1}}{\sqrt{c-x_1}} \right| = 0 \quad \forall x, x_1 \in (a, c)$;
3. так как ядро $K(x_1, x, c) \in [0, +\infty)$ при $x \in [b, c]$, $x_1 \in [b, c]$ и оно интегрируемо на этом множестве, то по теореме о среднем существуют числа $\theta_1 \neq \theta_2$, $0 < \theta_1, \theta_2 < 1$, такие что

$$\begin{aligned} \lim_{c \rightarrow a} \int_a^c dx \int_a^c \ln \left| \frac{\sqrt{(x-a)(c-x_1)} + \sqrt{(x_1-a)(c-x)}}{\sqrt{(x-a)(c-x_1)} - \sqrt{(x_1-a)(c-x)}} \right| dx_1 = \\ = \lim_{c \rightarrow a} (c-a)^2 \ln \left| \frac{\sqrt{\theta_2(1-\theta_1)} + \sqrt{\theta_1(1-\theta_2)}}{\sqrt{\theta_2(1-\theta_1)} - \sqrt{\theta_1(1-\theta_2)}} \right| = 0. \end{aligned}$$

Тогда в силу теоремы 3.1 несобственный интеграл неотрицателен:

$$\int_a^c dx \int_a^c f(x)f(x_1)K(x_1, x, c)dx_1 = \int_a^c \left(\int_a^\alpha \frac{\sqrt{x-a}f(x)}{\sqrt{(\alpha-a)(\alpha-x)}} dx \right)^2 d\alpha \geq 0.$$

Подставляя функцию $f(x)$, получаем

$$\int_b^c dx \int_b^c \dot{w}(x, t_0)\dot{w}(x_1, t_0)K(x_1, x)dx_1 \geq 0.$$

В силу неотрицательности интеграла при любом $t = t_0$

$$\int_b^c dx \int_b^c \dot{w}(x, t)\dot{w}(x_1, t)K(x_1, x)dx_1 \geq 0. \quad (3.13)$$

Аналогично

$$\int_b^c dx \int_b^c w'(x, t)w'(x_1, t)K(x_1, x)dx_1 \geq 0. \quad (3.14)$$

Продолжим исследование функционала. Принимая во внимание выражение (3.1) и неравенства (3.13), (3.14), правую и левую части в (3.12) оценим следующим образом:

$$\Phi(t) \geq \int_b^c EJw''^2 dx - \frac{\rho V^2}{\pi} \int_b^c dx \int_b^c w'(x, t)w'(x_1, t)K(x_1, x)dx_1 + \alpha EJw'^2(b, t), \quad (3.15)$$

$$\begin{aligned} \Phi(0) \leq & \int_b^c \left\{ M(\dot{u}_0^2 + \dot{w}_0^2) + EJw_0''^2 + EF \left(u_0' + \frac{1}{2}w_0'^2 \right)^2 + \beta_0 w_0^2 \right\} dx + \\ & + \frac{\rho}{\pi} \int_b^c dx \int_b^c \dot{w}(x, 0)\dot{w}(x_1, 0)K(x_1, x)dx_1 + \alpha EJw'^2(b, 0), \end{aligned} \quad (3.16)$$

где использованы следующие обозначения: $\dot{w}_0 = \dot{w}(x, 0)$, $u_0' = u'(x, 0)$, $w_0 = w(x, 0)$, $\dot{u}_0 = \dot{u}(x, 0)$, $w_0' = w'(x, 0)$, $w_0'' = w''(x, 0)$.

Используя неравенства $2ab \leq a^2 + b^2$, $-2ab \geq -(a^2 + b^2)$, симметричность и неотрицательность ядра $K(x_1, x)$, и краевые условия (2.8), получим:

$$\int_b^c dx \int_b^c \dot{w}(x, 0)\dot{w}(x_1, 0)K(x_1, x)dx_1 \leq \int_b^c dx \int_b^c \dot{w}^2(x, 0)K(x_1, x)dx_1 \leq \int_b^c K_0 \dot{w}^2(x, 0)dx,$$

$$K_0 = \sup_{x \in (b, c)} \int_b^c K(x_1, x)dx_1.$$

Аналогично

$$\int_b^c dx \int_b^c w'(x, t)w'(x_1, t)K(x_1, x)dx_1 \leq \int_b^c K_0 w'^2(x, t)dx.$$

Учитывая эту оценку, неравенства (3.15) и (3.16) принимают вид

$$\Phi(t) \geq \int_b^c \left\{ EJw''^2 - \frac{\rho V^2 K_0}{\pi} w'^2 \right\} dx + \alpha EJw'^2(b, t), \quad (3.17)$$

$$\Phi(0) \leq \int_b^c \left\{ \left(M + \frac{\rho K_0}{\pi} \right) \dot{w}_0^2 + M \dot{u}_0^2 + EJw_0''^2 + EF \left(u_0' + \frac{1}{2}w_0'^2 \right)^2 + \beta_0 w_0^2 \right\} dx + \alpha EJw'^2(b, 0). \quad (3.18)$$

В силу неравенства Коши—Буняковского

$$\int_b^c w''^2(x, t)dx \geq \frac{2}{(c-b)^2} \int_b^c (w'(x, t) - w'(b, t))^2 dx, \quad (3.19)$$

$$w^2(x, t) \leq (c-b) \int_b^c w'^2(x, t)dx. \quad (3.20)$$

Используя (3.19), из (3.17) получаем

$$\Phi(t) \geq \int_b^c \left\{ \frac{2\pi EJ - \rho K_0 V^2 (c-b)^2}{\pi(c-b)^2} w'^2(x, t) - \frac{4EJ}{(c-b)^2} w'(x, t)w'(b, t) + \frac{(2 + \alpha(c-b))EJ}{(c-b)^2} w'^2(b, t) \right\} dx. \quad (3.21)$$

В силу критерия Сильвестра квадратичная форма от $w'(x, t)$, $w'(b, t)$ положительно определена, если выполнено следующее условие:

$$V^2 < \frac{2\pi\alpha EJ}{(c-b)\rho K_0(2 + \alpha(c-b))}. \quad (3.22)$$

Тогда в силу (3.20), (3.21) получаем

$$\Phi(t) \geq \frac{(2EJ\pi - \rho K_0 V^2 (c-b)^2)(2 + \alpha(c-b)) - 4EJ\pi}{\pi(c-b)^3(2 + \alpha(c-b))} w'^2(x, t). \quad (3.23)$$

Таким образом, из (3.12), (3.18) и (3.23) получаем неравенство

$$w^2(x, t) \leq \frac{\pi(c-b)^3(2 + \alpha(c-b))}{(2EJ\pi - \rho K_0 V^2 (c-b)^2)(2 + \alpha(c-b)) - 4EJ\pi} \times \left(\int_b^c \left\{ \left(M + \frac{\rho K_0}{\pi} \right) \dot{w}_0^2 + M \dot{w}_0^2 + EJ w_0''^2 + EF \left(u_0' + \frac{1}{2} w_0'^2 \right)^2 + \beta_0 w_0^2 \right\} dx + \alpha EJ w'^2(b, 0) \right),$$

из которого вытекает следующая теорема.

Теорема 3.2. Пусть выполнены условия (3.8), (3.11), (3.22). Тогда решение $w(x, t)$ системы уравнений (2.7) устойчиво по отношению к возмущениям начальных данных \dot{w}_0 , w_0 , w_0' , w_0'' , \dot{u}_0 , u_0' , если функция $w(x, t)$ удовлетворяет краевым условиям (2.8).

4. ПРИМЕР КРЫЛА

Приведем пример механической системы. Предположим, что крыло находится в воздушном потоке ($\rho = 1$), и элерон сделан из алюминия ($E = 7 \cdot 10^{10}$, $\rho_{pl} = 8480$). Другие параметры механической системы: $a = 0$; $b = 3$; $c = 4$; $\nu = 0,31$; $\beta_0 = 4$; $\beta_1 = 0,4$; $\beta_2 = 0,4$; $\alpha = 0,1$ (все значения приводятся в системе СИ).

Для неравенства (3.22) построена область устойчивости (выделена серым цветом) в плоскости «толщина элерона h — скорость потока V » (рис. 4.1).

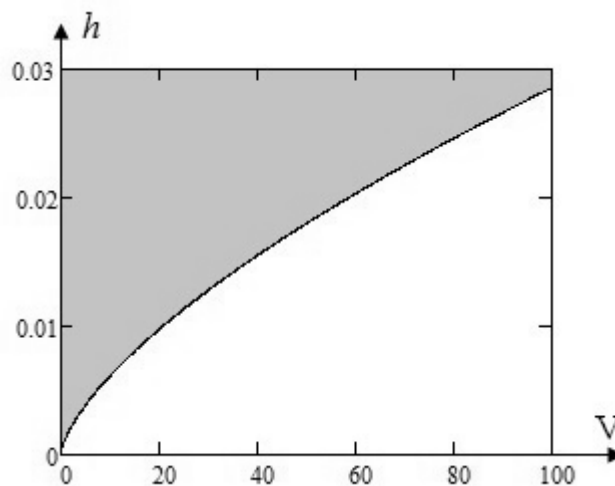


Рис. 4.1. Область устойчивости в плоскости (h, V) .

5. МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ КОЛЕБЛЮЩЕГОСЯ УСТРОЙСТВА

Рассмотрим плоский поток в прямоугольном канале $J = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x < x_0, 0 < y < y_0\}$. Скорость невозмущенного равномерного потока равна V и направлена вдоль оси Ox . Часть стенки $y = y_0$ при $x \in [b, c]$ упругая (рис. 5.1).

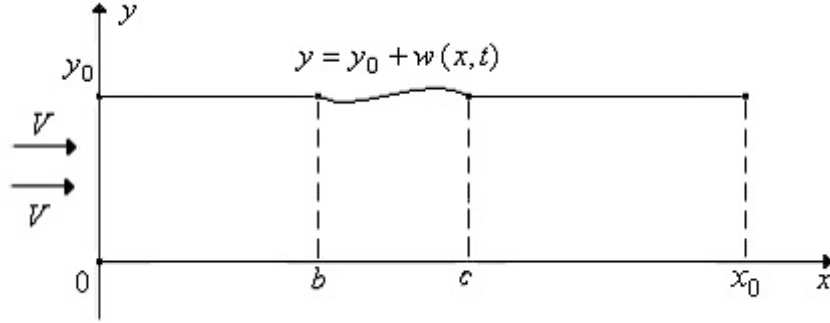


Рис. 5.1. Стенка канала, содержащая деформируемый элемент.

Введем обозначения: $u(x, t)$ and $w(x, t)$ — деформация упругого элемента стенки канала в направлении осей Ox и Oy соответственно; $\phi(x, y, t)$ — потенциал скорости возмущенного потока.

Сформулируем математическую постановку задачи. Потенциал скорости удовлетворяет уравнению

$$\phi_{tt}(x, y, t) + 2V\phi_{xt}(x, y, t) + V^2\phi_{xx}(x, y, t) = a^2(\phi_{xx}(x, y, t) + \phi_{yy}(x, y, t)), \quad (x, y) \in J, \quad t \geq 0 \quad (5.1)$$

(что соответствует модели идеально сжимаемой среды), условия непротекания стенок канала

$$\phi_y(x, y_0, t) = \dot{w}(x, t) + Vw'(x, t), \quad x \in (b, c), \quad t \geq 0, \quad (5.2)$$

$$\phi_y(x, y_0, t) = 0, \quad x \in (0, b] \cup [c, x_0), \quad t \geq 0, \quad (5.3)$$

$$\phi_y(x, 0, t) = 0, \quad x \in (0, x_0), \quad t \geq 0 \quad (5.4)$$

и условия на входе и выходе канала

$$\phi(0, y, t) = \phi_1(y, t), \quad \phi(x_0, y, t) = \phi_2(y, t), \quad y \in (0, y_0).$$

так как уравнение (5.1) линейное, для исследования устойчивости без ограничения общности можно считать, что $\phi_1 = \phi_2 = 0$. Тогда эти условия примут вид

$$\phi(0, y, t) = 0, \quad \phi(x_0, y, t) = 0, \quad y \in (0, y_0), \quad t \geq 0. \quad (5.5)$$

Условия (5.5) выполнены для достаточно длинного канала, это условия отсутствия возмущений в граничных областях.

Аэродинамическое воздействие на упругий элемент имеет вид

$$P(x, t) = -\rho(\phi_t(x, y_0, t) + V\phi_x(x, y_0, t)), \quad x \in (b, c), \quad t \geq 0. \quad (5.6)$$

Нелинейная модель колебаний упругого тела с продольной и поперечной компонентами деформации элемента приближается упругой пластиной с учетом влияния действия силы P :

$$\begin{cases} -EF \left(u'(x, t) + \frac{1}{2}w'^2(x, t) \right)' + M\ddot{u}(x, t) = 0, \\ -EF \left[w'(x, t) \left(u'(x, t) + \frac{1}{2}w'^2(x, t) \right) \right]' + EJw''''(x, t) + M\ddot{w}(x, t) + \\ + N(t)w''(x, t) + \beta_2w''''(x, t) + \beta_1\dot{w}(x, t) + \beta_0w(x, t) = P(x, t). \end{cases} \quad (5.7)$$

Здесь $N(t)$ — сжимающая ($N > 0$) или растягивающая ($N < 0$) силы элемента; a — скорость звука в невозмущенном потоке газа ($a > V$).

Сжимающая (растягивающая) сила элемента $N(t)$ может зависеть от времени. Например, при нестационарном нагреве элемента $N(t)$ имеет следующий вид:

$$N(t) = N_0 + N_T, \quad N_T = -\frac{T_0}{1-\nu}, \quad T_0 = E\alpha_T \int_{-h/2}^{h/2} T(z, t) dz,$$

где α_T — коэффициент линейного температурного роста, $T(z, t)$ — закон изменения температуры в зависимости от толщины элемента, N_0 — константа силы, возникающей при фиксации элемента.

Краевые условия на концах элемента в точках $x = b$ и $x = c$ можно записать в виде:

1. жесткое защемление (рис. 5.2(a)):

$$w(x, t) = w'(x, t) = u(x, t) = 0; \quad (5.8)$$

2. шарнирное закрепление (рис. 5.2(b)):

$$w(x, t) = w''(x, t) = u(x, t) = 0; \quad (5.9)$$

3. жесткое подвижное защемление (рис. 5.2(c)):

$$w(x, t) = w'(x, t) = u'(x, t) = 0; \quad (5.10)$$

4. шарнирное подвижное закрепление (рис. 5.2(d)):

$$w(x, t) = w''(x, t) = u'(x, t) + \frac{1}{2}w'^2(x, t) = 0. \quad (5.11)$$

(a) (b) (c) (d)

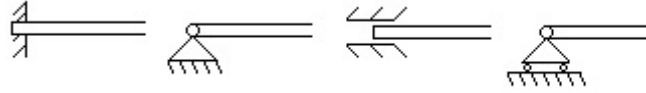


Рис. 5.2. Способы фиксации.

Таким образом, соответствующая задача (5.1)–(5.11) содержит три неизвестные функции — деформации упругого элемента и стенки канала $u(x, t)$ и $w(x, t)$ и потенциал скорости жидкости (газа) $\phi(x, y, t)$.

6. ИССЛЕДОВАНИЕ УСТОЙЧИВОСТИ КОЛЕБЛЮЩЕГОСЯ УПРУГОГО ЭЛЕМЕНТА

Исследуем устойчивость по Ляпунову нулевого решения $\phi(x, y, t) \equiv 0$, $w(x, t) \equiv 0$, $u(x, t) \equiv 0$ системы (5.1)–(5.11).

Введем функционал

$$\begin{aligned} \Phi(t) = & \iint_J (\phi_t^2(x, y, t) + (a^2 - V^2)\phi_x^2(x, y, t) + a^2\phi_y^2(x, y, t)) dx dy - 2a^2V \int_b^c \phi(x, y_0, t) w'(x, t) dx \\ & + \frac{a^2}{\rho} \int_b^c \left(EF \left(u'(x, t) + \frac{1}{2}w'^2(x, t) \right)^2 + M (\dot{u}^2(x, t) + \dot{w}^2(x, t)) + EJw''^2(x, t) \right. \\ & \left. - N(t)w'^2(x, t) + \beta_0w^2(x, t) \right) dx. \end{aligned} \quad (6.1)$$

Для функций $\phi(x, y, t)$, $u(x, t)$, $w(x, t)$, удовлетворяющих уравнениям (5.1) и (5.6), (5.7) и условиям (5.2)–(5.5), (5.8)–(5.11), производная Φ по t имеет вид

$$\dot{\Phi}(t) = -\frac{2a^2}{\rho} \int_b^c \left(\beta_2 \dot{w}''^2(x, t) + \beta_1 \dot{w}^2(x, t) - \frac{1}{2} \dot{N}(t) w'^2(x, t) \right) dx. \quad (6.2)$$

Рассмотрим краевую задачу для уравнений $\psi'''' = -\lambda\psi''$, $\psi'''' = \mu\psi$, $x \in (b, c)$ с краевыми условиями (5.8)–(5.11) относительно функции $w(x, t)$. Эти задачи самосопряженные и полностью определены. Используя неравенство Рэлея [12] для $w(x, t)$, получим оценку

$$\int_b^c \dot{w}''^2(x, t) dx \geq \mu_1 \int_b^c \dot{w}^2(x, t) dx, \int_b^c w''^2(x, t) dx \geq \lambda_1 \int_b^c w'^2(x, t) dx, \int_b^c w''^2(x, t) dx \geq \mu_1 \int_b^c w^2(x, t) dx, \quad (6.3)$$

где λ_1, μ_1 — наименьшие собственные значения соответствующих краевых задач.

Используя первое неравенство в (6.3), получаем

$$\dot{\Phi}(t) \leq -\frac{2a^2}{\rho} \int_b^c \left((\beta_2\mu_1 + \beta_1)\dot{w}^2(x, t) - \frac{1}{2}\dot{N}(t)w'^2(x, t) \right) dx. \quad (6.4)$$

Пусть выполнены условия

$$\beta_2\mu_1 + \beta_1 \geq 0, \quad \dot{N}(t) > 0, \quad (6.5)$$

тогда из (6.4) следует, что $\dot{\Phi}(t) \leq 0$. Интегрируя от 0 до t , получаем неравенство

$$\Phi(t) \leq \Phi(0). \quad (6.6)$$

Оценим функционал с краевыми условиями (5.8)–(5.11).

Оценим $\Phi(0)$ сверху, используя неравенства (6.3) и очевидное неравенство $-2ab \leq a^2 + b^2$:

$$\begin{aligned} \Phi(0) &\leq \iint_J (\phi_{t0}^2 + (a^2 - V^2)\phi_{x0}^2 + a^2\phi_{y0}^2) dx dy + a^2 \int_b^c \phi^2(x, y_0, 0) dx + \\ &+ \frac{a^2}{\rho} \int_b^c \left(M(\dot{u}_0^2 + \dot{w}_0^2) + EF \left(u'_0 + \frac{1}{2}w_0'^2 \right)^2 + \left(EJ + \frac{|N(0)| + \rho V^2}{\lambda_1} + \frac{\beta_0}{\mu_1} \right) w_0''^2 \right) dx = \Omega. \end{aligned} \quad (6.7)$$

Здесь использованы следующие обозначения: $\phi_{t0} = \phi_t(x, y, 0)$, $\phi_{x0} = \phi_x(x, y, 0)$, $\phi_{y0} = \phi_y(x, y, 0)$, $\dot{u}_0 = \dot{u}(x, 0)$, $u'_0 = u'(x, 0)$, $\dot{w}_0 = \dot{w}(x, 0)$, $w_0 = w(x, 0)$, $w'_0 = w'(x, 0)$, $w_0'' = w''(x, 0)$.

Оценим $\Phi(t)$ снизу:

$$\begin{aligned} \Phi(t) &\geq \iint_J (\phi_t^2(x, y, t) + (a^2 - V^2)\phi_x^2(x, y, t) + a^2\phi_y^2(x, y, t)) dx dy - \\ &- 2a^2V \int_b^c \phi(x, y_0, t)w'(x, t) dx + \frac{a^2}{\rho} \int_b^c (\lambda_1 EJ - N)w'^2(x, t) dx. \end{aligned} \quad (6.8)$$

Рассмотрим краевую задачу $\psi'' = -\eta\psi$, $x \in (0, x_0)$, с условиями $\psi(0) = 0$, $\psi(x_0) = 0$. Используя неравенство Рэлея для функции $\phi(x, y, t)$, получим

$$\iint_J \phi_x^2(x, y, t) dx dy \geq \frac{\pi^2}{x_0^2} \iint_J \phi^2(x, y, t) dx dy. \quad (6.9)$$

Применяя неравенство Коши—Буняковского, имеем

$$\iint_J \phi_y^2(x, y, t) dx dy \geq \frac{2}{y_0^2} \iint_J (\phi(x, y_0, t) - \phi(x, y, t))^2 dx dy. \quad (6.10)$$

Применяя (6.9) и (6.10) к (6.8), получаем неравенство

$$\begin{aligned} \Phi(t) &\geq \iint_J \left(\frac{2a^2}{y_0^2} (\phi(x, y_0, t) - \phi(x, y, t))^2 + \phi_t^2(x, y, t) + (a^2 - V^2) \frac{\pi^2}{x_0^2} \phi^2(x, y, t) \right) dx dy - \\ &- 2a^2V \int_b^c \phi(x, y_0, t)w'(x, t) dx + \frac{a^2}{\rho} \int_b^c (\lambda_1 EJ - N(t))w'^2(x, t) dx. \end{aligned} \quad (6.11)$$

Рассмотрим функцию $f(x, t) = \begin{cases} 0, & x \in (0, b), \\ w'(x, t), & x \in (b, c), \\ 0, & x \in (c, x_0), \end{cases}$ тогда из (6.11) получаем неравенство

$$\begin{aligned} \Phi(t) \geq \iint_J \left[\phi_t^2(x, y, t) + \left((a^2 - V^2) \frac{\pi^2}{x_0^2} + \frac{2a^2}{y_0^2} \right) \phi^2(x, y, t) - \frac{4a^2}{y_0^2} \phi(x, y_0, t) \phi(x, y, t) + \right. \\ \left. + \frac{2a^2}{y_0^2} \phi^2(x, y_0, t) - \frac{2a^2 V}{y_0} \phi(x, y_0, t) f(x, t) + \frac{a^2 (\lambda_1 E J - N(t))}{\rho y_0} f^2(x, t) \right] dx dy. \end{aligned} \quad (6.12)$$

Введем следующие обозначения:

$$d_{11} = \frac{(a^2 - V^2)\pi^2}{x_0^2} + \frac{2a^2}{y_0^2}, \quad d_{22} = d_{12} = \frac{2a^2}{y_0^2}, \quad d_{23} = \frac{V}{y_0^2}, \quad d_{33}(t) = \frac{a^2 (\lambda_1 E J - N(t))}{\rho y_0}. \quad (6.13)$$

Рассмотрим квадратичную форму относительно $\phi(x, y, t)$, $\phi(x, y_0, t)$, $f(x, t)$ в (6.12), с матрицей

$$\begin{pmatrix} d_{11} & d_{12} & 0 \\ d_{12} & d_{22} & d_{23} \\ 0 & d_{21} & d_{33}(t) \end{pmatrix}.$$

По критерию Сильвестра мы можем написать условие положительной определенности этой формы

$$N(t) < \lambda_1 E J - \frac{V^2 x_0^2 \rho y_0}{2(a^2 - V^2)\pi^2} \left(\frac{(a^2 - V^2)\pi^2}{x_0^2} + \frac{2a^2}{y_0^2} \right). \quad (6.14)$$

Используя метод Лагранжа, приведем квадратичную форму в (6.12) к каноническому виду:

$$\Phi(t) \geq \frac{\Delta_3 y_0}{\Delta_2} \int_b^c w'^2(x, t) dx, \quad \Phi(t) \geq \frac{\Delta_3}{d_{22} d_{33} - d_{23}^2} \iint_J \phi^2(x, y, t) dx dy. \quad (6.15)$$

Используя неравенство Коши—Буняковского, получим оценку

$$w^2(x, t) \leq (c - b) \int_b^c w'^2(x, t) dx,$$

и тогда первое неравенство в (6.15) примет вид

$$\Phi(t) \geq \frac{\Delta_3 y_0}{\Delta_2 (c - b)} w^2(x, t). \quad (6.16)$$

Учитывая (6.6), (6.7), (6.15), (6.16), получаем неравенства

$$w^2(x, t) \leq \frac{\Delta_2 (c - b)}{\Delta_3 y_0} \Omega, \quad \iint_J \phi^2(x, y, t) dx dy \leq \frac{d_{22} d_{33} - d_{23}^2}{\Delta_3} \Omega. \quad (6.17)$$

Из (6.17) вытекает следующая теорема.

Теорема 6.1. Пусть выполнены условия (6.5), (6.14). Тогда решение $w(x, t)$ задачи (5.1)–(5.11) устойчиво, и решение $\phi(x, y, t)$ системы уравнений (5.1)–(5.11) устойчиво в среднем (в интегральном смысле) по отношению к возмущениям начальных данных ϕ_{t0} , ϕ_{x0} , ϕ_{y0} , $\phi(x, y_0, 0)$, \dot{u}_0 , u'_0 , \dot{w}_0 , w'_0 , w''_0 .

Замечание 6.1. Если ввести функцию $\Phi_1(t) = e^{-\gamma t} \Phi(t)$, где γ — положительный числовой параметр, то можно ослабить второе условие (6.5) на убывание функции $N(t)$.

Замечание 6.2. Рассмотренная задача может быть обобщена на случай переменной толщины элемента или неоднородного материала, т. е. когда коэффициенты системы (5.7) являются функциями от x .

Замечание 6.3. Предложенный метод исследования устойчивости допускает наличие нелинейных членов во втором уравнении (5.7)

$$f(x, t, w) + g(x, t, w, \dot{w}) - w'' \left(\mu \int_b^c w'^2 dx + \nu \frac{\partial}{\partial t} \int_b^c w'^2 dx \right),$$

где f, g — нелинейные компоненты реакции основы (или иных внешних воздействий); нелинейные интегральные слагаемые учитывают влияние нелинейной продольной силы (μ, ν — постоянные). В этом случае условия устойчивости должны быть дополнены следующим:

$$\int_0^w f(x, t, z) dz \geq 0, \quad \int_0^w \frac{\partial f(x, t, z)}{\partial t} dz \leq 0, \quad \dot{w}g(x, t, w, \dot{w}) \geq 0, \quad \mu \geq 0, \quad \nu \geq 0.$$

Кроме того, система уравнений (5.7) должна быть однородной. Это выполнено в частности, если

$$f(x, t, 0) + g(x, t, 0, 0) = 0.$$

Замечание 6.4. На основе построения функционалов вида (6.1) можно получить условия динамической устойчивости для произвольного числа упругих элементов, расположенных на верхней и нижней стенках.

7. ПРИМЕР КОЛЕБЛЮЩЕГОСЯ ЭЛЕМЕНТА

Рассмотрим пример механической системы. Рабочая среда — воздух ($\rho = 1$), пластина изготовлена из алюминия ($E = 7 \cdot 10^{10}$, $\rho_{pl} = 8480$). Другие параметры механической системы: $a = 331$, $x_0 = 5$, $y_0 = 0,1$, $b = 2$, $c = 3$, $h = 0,005$, $\nu = 0,31$, $EJ = Eh^3/(12(1 - \nu^2)) = 806,7$. Пусть концы упругой пластины закреплены шарнирно, тогда при этих параметрах $\lambda_1 = \pi^2$. Все значения приведены в системе СИ.

Для неравенства (6.14) построены области устойчивости (серый регион) на плоскости «сила N — скорость потока V » (рис. 7.1).

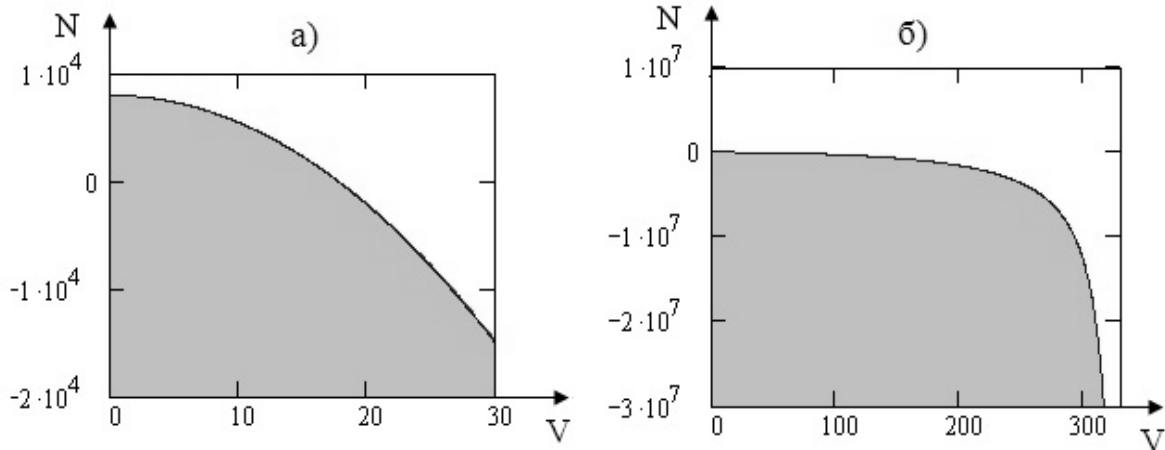


Рис. 7.1. Области устойчивости на плоскости (N, V) .

На рис. 7.1(a) скорость $V \in [0, 30]$, на рис. 7.1(b) — $V \in [0, a]$. Из неравенства (6.14) следует, что линия $V = a$ является асимптотой границы области устойчивости. Это видно на рис. 7.1(b).

8. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Основываясь на предложенной математической модели потока вокруг крыла с упругим элероном в дозвуковом течении жидкости или газа (в модели идеальной несжимаемой среды), получены достаточные условия динамической устойчивости элерона. Эти условия накладывают ограничения на скорость потока воздуха, изгибную жесткость упругого элерона и другие параметры механической системы. Рассмотрен случай упругого закрепления на одном конце и свободного второго

конца упругого элерона. Для конкретных примеров механических систем построена область устойчивости на плоскости двух параметров (h, V).

На примере предложенной математической модели колеблющегося устройства в виде канала с упругим элементом получены достаточные условия динамической устойчивости упругого элемента канала с дозвуковой скоростью потока жидкости или газа (в модели идеальной сжимаемой среды). Условия накладывают ограничения на скорость газа, сжимающую (растягивающую) силу элемента, изгибную жесткость упругого элемента и другие параметры механической системы. Приведены примеры построения области устойчивости для конкретных параметров механической системы. Для конкретных примеров механических систем построены области устойчивости на плоскости параметров (N, V).

Работа выполнена в рамках программы Министерства науки и образования РФ № 2014/232.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Анкилов А. В., Вельмисов П. А. Устойчивость вязкоупругих элементов стенок проточных каналов. — Ульяновск: УлГТУ, 2000.
2. Анкилов А. В., Вельмисов П. А., Горбоконенко В. Д., Покладова Ю. В. Математическое моделирование механической системы «трубопровод — датчик давления». — Ульяновск: УлГТУ, 2008.
3. Анкилов А. В., Вельмисов П. А. Динамика и устойчивость упругих пластин при аэрогидродинамическом воздействии. — Ульяновск: УлГТУ, 2009.
4. Анкилов А. В., Вельмисов П. А. Математическое моделирование в задачах динамической устойчивости деформируемых элементов конструкций при аэрогидродинамическом воздействии. — Ульяновск: УлГТУ, 2013.
5. Ванько В. И., Марчевский И. К., Щеглов И. К. Численно-аналитический метод исследования устойчивости положений равновесия профиля в потоке// Вестн. МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Естеств. науки. — 2011. — 5. — С. 3–10.
6. Вельмисов П. А., Горшков Г. М., Рябов Г. К. Гидродинамический излучатель. — Патент РФ 2062662, В06В1/18, В06В1/20. — Заявка № 5038746/28, подана 20.07.1992, опубл. 27.06.1996. — Ульяновский гос. техн. ун-т, 1996.
7. Вельмисов П. А., Киреев С. В. Математическое моделирование в задачах статически неустойчивых упругих элементов конструкций при аэрогидродинамическом воздействии. — Ульяновск: УлГТУ, 2011.
8. Вельмисов П. А., Молгачев А. А. Математическое моделирование в задачах динамической устойчивости вязкоупругих элементов проточных каналов. — Ульяновск: УлГТУ, 2012.
9. Дободейч И. А., Барметов Ю. П. К расчету нестационарных течений сжимаемой жидкости в трубопроводе// Изв. вузов. Авиационная техника. — 2006. — 1. — С. 18–21.
10. Звягин А. В. Движение вязкой жидкости в канале с упругими стенками// Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Мат. Мех. — 2005. — 1. — С. 50–54.
11. Ершов Б. А., Кутеева Г. А. Колебания идеальной жидкости в прямоугольном сосуде с упругой вставкой на стенке. Учет внутреннего трения в материале вставки// Вестн. СПбУ. Сер. 1. — 2005. — 2. — С. 86–94.
12. Коллатц Л. Задачи на собственные значения. — М.: Наука, 1968.
13. Наумова Н. В., Ершов Б. А., Иванов Д. Н. Деформация упругой сферической оболочки, закрепленной по экватору, в потоке вязкой несжимаемой жидкости// Вестн. СПбУ. Сер. 3. — 2011. — 3. — С. 124–130.
14. Овчинников В. В., Попов В. М., Филимонов С. В. Применение расширенной гипотезы гармоничности для расчета флаттерных характеристик самолета// Научн. вестн. Моск. гос. техн. ун-та гражд. авиации. — 2013. — 195. — С. 93–100.
15. Соколов В. Г., Березнев А. В. Уравнения движения криволинейного участка трубопровода с потоком жидкости// Изв. вузов. Нефть и газ. — 2004. — 6. — С. 76–80.
16. Соколов В. Г., Разов И. О. Параметрические колебания и динамическая устойчивость магистральных газопроводов при наземной прокладке// Вестн. гражд. инженеров. — 2014. — 2. — С. 65–68.
17. Balakrishnan A. V. Toward a mathematical theory of aeroelasticity// В сб.: System modeling and optimization, Proc. 21st IFIP TC7 Conf., Sophia Antipolis, France, July 21–25, 2003. — Boston: Kluwer Academic Publishers, 2005. — С. 1–24.
18. Bendiksen O. O., Seber G. Fluid-structure interactions with both structural and fluid nonlinearities// J. Sound Vibr. — 2008. — 315, № 3. — С. 664–684.

19. *Dimitrienko Yu. I., Koryakov M. N., Zakharov A. A., Stroganov A. S.* Computational modeling of conjugated gasdynamic and thermomechanical processes in composite structures of high speed aircraft// *Math. Model. Num. Methods.* — 2014. — 2, № 3-3 (3). — С. 3–24.
20. *Florea R., Hall K. C., Dowell E. H.* Analysis of eigenvalues and reduced order model of nonstationary transonic potential flow of profiles to define the boundaries of flutter// *J. Aircraft.* — 2000. — 3 (37). — С. 454–462.
21. *Masahide Ya., Koji I., Takejumi U., Itsuma Yu.* Shock-stall-flutter of a two-dimensional airfoil// *AIAA Journal.* — 2004. — 2 (42). — С. 215–219.
22. *Mogilevich L. I., Popova A. A., Popov V. A.* On the dynamic interaction of an elastic cylindrical shell with a fluid laminar stream inside in application to pipeline transportation// *Sci. Tech. Transport.* — 2007. — 2. — С. 69–72.
23. *Plyusnin A. V.* Boundary-element method modelling of inside and outside nonstationary interaction of aircraft body and liquid// *Math. Model. Num. Methods.* — 2014. — 2, № 2-2 (2). — С. 77–100.
24. *Soltani N., Esfahanian V., Haddadpour H.* Analytical prediction of panel flutter using unsteady potential flow// *J. Aircraft.* — 2003. — 40, № 4. — С. 805–807.
25. *Paidoussis M. P.* The canonical problem of the fluid-conveying pipe and radiation of the knowledge gained to other dynamics problems across applied mechanics// *J. Sound Vibr.* — 2008. — 3 (310). — С. 462–492.
26. *Wu X.-Sh., Wu J.-Sh.* Numerical method for the calculation of the swept wing flutter// *Trans. Beijing Inst. Tech.* — 2007. — 5 (27). — С. 385–389.

П. А. Вельмисов

Ульяновский государственный технический университет

432027, г. Ульяновск, ул. Северный Венец, д. 32

E-mail: velmisov@ulstu.ru

А. В. Анкилов

Ульяновский государственный технический университет

432027, г. Ульяновск, ул. Северный Венец, д. 32

E-mail: ankil@ulstu.ru

UDC 533.6.013.42

Stability of Solutions of Initial Boundary Value Problems of Aerohydroelasticity

© 2016 П. А. Velmisov, A. V. Ankilov

Abstract. At designing structures and devices interacting with the flow of gas or liquid, it is necessary to solve the problems associated with the investigation of the stability required for their functioning and operational reliability. The definition of stability of an elastic body, taken in the article, corresponds to the Lyapunov's concept of stability of dynamical system. On the base of a proposed nonlinear mathematical model the dynamic stability of the elastic aileron of the wing taking into account the incident subsonic flow of gas or liquid (in an ideal model of a incompressible environment) is investigated. Also a nonlinear mathematical model of the device relating to the vibration technique, which is intended for intensification of technological processes, for example, the process of mixing is considered. The action of these devices is based on the oscillations of elastic elements at the flowing around a of gas or liquid flow. The dynamic stability of the elastic element, located on one wall of the flow channel with the subsonic flow of gas or liquid (in an ideal model of a compressible environment) is investigated. The both models is described by coupled nonlinear system of differential equations for the unknown functions — the potential of the gas velocity and deformation of the elastic element. On the basis of the construction of functionals, the sufficient conditions of the stability, impose restrictions on the free-stream velocity of the gas, the flexural stiffness of the elastic element, and other parameters of the mechanical system is obtained. The examples of construction of the stability regions for particular parameters of the mechanical system are presented.

REFERENCES

1. A. V. Ankilov and P. A. Velmisov, *Ustoychivost' vyazkouprugikh elementov stenok protochnykh kanalov* (Stability of Viscoelastic Elements of Walls of Flowing Channels), UIGTU [Ul'yanovsk State Tech. Univ.], Ul'yanovsk, 2000 (in Russian).
2. A. V. Ankilov, P. A. Velmisov, V. D. Gorbokononko, and Yu. V. Pokladova, *Matematicheskoe modelirovanie mekhanicheskoy sistemy "truboprovod-datchik davleniya"* [Mathematical Modeling of Mechanical System "Pipeline-Pressure Sensor"], UIGTU [Ul'yanovsk State Tech. Univ.], Ul'yanovsk, 2008 (in Russian).
3. A. V. Ankilov and P. A. Velmisov, *Dinamika i ustoychivost' uprugikh plastin pri aerogidrodinamicheskom vozdeystvii* [Dynamics and Stability of Elastic Plates at Aerohydrodynamic Influence], UIGTU [Ul'yanovsk State Tech. Univ.], Ul'yanovsk, 2009 (in Russian).
4. A. V. Ankilov and P. A. Velmisov, *Matematicheskoe modelirovanie v zadachakh dinamicheskoy ustoychivosti deformiruemyykh elementov konstruksiy pri aerogidrodinamicheskom vozdeystvii* [Mathematical Modelling in Problems of Dynamic Stability of Deformable Elements of Constructions at Aerohydrodynamic Influence], UIGTU [Ul'yanovsk State Tech. Univ.], Ul'yanovsk, 2013 (in Russian).
5. V. I. Van'ko, I. K. Marchevskii, and G. A. Shcheglov, "Chislenno-analiticheskiy metod issledovaniya ustoychivosti polozheniy ravnovesiya profilya v potoke" [Numerical and analytical method for studying the stability of airfoil equilibrium positions in flow] *Vestn. MGTU im. N. E. Baumana. Ser. Estestv. Nauki* [Bull. Bauman Moscow State Tech. Univ. Ser. Nat. Sci.], 2011, **5**, 3–10 (in Russian).
6. P. A. Velmisov, G. M. Gorshkov, and G. K. Ryabov, "Gidrodinamicheskiy izluchatel" [Hydrodynamic radiator] *Patent* 2062662, Russian Federation, MPK6 V 06 V 1/18, 1/20, Applicant and patentee: Ulyanovsk State Tech. Univ., No. 5038746/28, claimed 20.07.92, published 27.06.96, bulletin No. 18, 1996 (in Russian).
7. P. A. Velmisov and S. V. Kireev, *Matematicheskoe modelirovanie v zadachakh staticheskoi neustoychivyykh uprugikh elementov konstruksiy pri aerogidrodinamicheskom vozdeystvii* [Mathematical Modeling in Problems of Static Instability of Elastic Elements of Constructions at Aerohydrodynamic Influence], UIGTU [Ul'yanovsk State Tech. Univ.], Ul'yanovsk, 2011 (in Russian).
8. P. A. Velmisov and A. A. Molgachev, *Matematicheskoe modelirovanie v zadachakh dinamicheskoy ustoychivosti vyazkouprugikh elementov protochnykh kanalov* [Mathematical Modeling in Problems of Dynamic Stability of Viscoelastic Elements of Flowing Channels], UIGTU [Ul'yanovsk State Tech. Univ.], Ul'yanovsk, 2012 (in Russian).
9. Yu. P. Barmetov and I. A. Dobrodeich, "K raschetu nestatsionarnyykh techeniy szhimaemoy zhidkosti v truboprovode" [To calculation of nonstationary currents of the compressed liquid in the pipeline] *Izv. vuzov. Aviatsionnaya tekhnika* [Bull. Higher Schools. Aviation Tech.], 2006, **1**, 18–21 (in Russian).
10. A. V. Zvyagin, "Dvizhenie vyazkoy zhidkosti v kanale s uprugimi stenkami" [The movement of viscous liquid in the channel with elastic boundaries] *Vestn. Mosk. un-ta. Ser. 1. Mat. Mekh.* [Bull. Moscow State Univ. Ser. 1], 2005, **1**, 50–54 (in Russian).
11. B. A. Ershov and G. A. Kuteeva, "Kolebaniya ideal'noy zhidkosti v pryamougol'nom sosude s uprugoy vstavkoy na stenke. Uchet vnutrennego treniya v materiale vstavki" [Fluctuations of ideal liquid in a rectangular vessel with an elastic insert on a wall. The accounting of internal friction in insert material] *Vestn. SPbU. Ser. 1* [Bull. St. Petersburg Univ. Ser. 1], 2005, **2**, 86–94 (in Russian).
12. L. Kollatc, *Zadachi na sobstvennyye znacheniya* [Problems on Eigenvalues], Nauka, Moscow, 1968 (in Russian).
13. N. V. Naumova, V. A. Ershov, and D. N. Ivanov, "Deformatsiya uprugoy sfericheskoy obolochki, zakreplennoy po ekvatoru, v potoke vyazkoy neszhimaemoy zhidkosti" [Deformation of elastic spherical shell, fixed at the equator, in the flow of a viscous incompressible fluid] *Vestn. SPbU. Ser. 3* [Bull. St. Petersburg Univ. Ser. 3], 2011, **3**, 124–130 (in Russian).
14. V. V. Ovchinnicov, V. M. Popov, and S. V. Filimonov, "Primenenie rasshirennoy gipotezy garmonichnosti dlya rascheta flatternykh kharakteristik samoleta" [Application of the extended hypothesis of harmonicity for the calculation of flutter characteristics of the aircraft] *Nauchn. vestn. Mosk. gos. tekhn. un-ta grazhd. aviatsii* [Sci. Bull. Moscow State Tech. Univ. Civil Aviation], 2013, **195**, 93–100 (in Russian).
15. V. G. Sokolov and A. V. Bereznev, "Uravneniya dvizheniya krivolinyenogo uchastka truboprovoda s potokom zhidkosti" [The equations of the movement of a curvilinear site of the pipeline with a liquid stream] *Izv. vuzov. Neft' i gaz* [Bull. Higher Schools. Oil and Gas], 2004, **6**, 76–80 (in Russian).
16. V. G. Sokolov and I. O. Razov, "Parametricheskie kolebaniya i dinamicheskaya ustoychivost' magistral'nykh gazoprovodov pri nazemnoy prokladke" [Parametrical vibrations and dynamic stability of long-distance gas

- pipelines at above-ground laying] *Vestn. grazhd. inzhenerov* [Bull. Civil Engineers], 2014, **2** (43), 65–68 (in Russian).
17. A. V. Balakrishnan, "Toward a mathematical theory of aeroelasticity," In: *System modeling and optimization*, Proc. 21st IFIP TC7 Conf., Sophia Antipolis, France, July 21–25, 2003, 1–24, Kluwer Academic Publishers, Boston, 2005.
 18. O. O. Bendiksen and G. Seber, "Fluid-structure interactions with both structural and fluid nonlinearities," *J. Sound Vibr.*, 2008, **315**, No. 3, 664–684.
 19. Yu. I. Dimitrienko, M. N. Koryakov, A. A. Zakharov, and A. S. Stroganov, "Computational modeling of conjugated gasdynamic and thermomechanical processes in composite structures of high speed aircraft," *Math. Model. Num. Methods*, 2014, **2**, No. 3-3 (3), 3–24.
 20. R. Florea, K. C. Hall, and E. H. Dowell, "Analysis of eigenvalues and reduced order model of nonstationary transonic potential flow of profiles to define the boundaries of flutter," *J. Aircraft*, 2000, **3** (37), 454–462.
 21. Ya. Masahide, I. Koji, U. Takefumi, and Yu. Itsuma, "Shock-stall-flutter of a two-dimensional airfoil," *AIAA Journal*, 2004, **2** (42), 215–219.
 22. L. I. Mogilevich, A. A. Popova, and V. A. Popov, "On the dynamic interaction of an elastic cylindrical shell with a fluid laminar stream inside in application to pipeline transportation," *Sci. Tech. Transport*, 2007, **2**, 69–72.
 23. A. V. Plyusnin, "Boundary-element method modelling of inside and outside nonstationary interaction of aircraft body and liquid," *Math. Model. Num. Methods*, 2014, **2**, No. 2-2 (2), 77–100.
 24. N. Soltani, V. Esfahanian, and H. Haddadpour, "Analytical prediction of panel flutter using unsteady potential flow," *J. Aircraft*, 2003, **40**, No. 4, 805–807.
 25. M. P. Paidoussis, "The canonical problem of the fluid-conveying pipe and radiation of the knowledge gained to other dynamics problems across applied mechanics," *J. Sound Vibr.*, 2008, **3** (310), 462–492.
 26. X.-Sh. Wu and J.-Sh. Wu, "Numerical method for the calculation of the swept wing flutter," *Trans. Beijing Inst. Tech.*, 2007, **5** (27), 385–389.

P. A. Velmisov
 Ulyanovsk State Technical University,
 32 Severny Venets str., 432027 Ulyanovsk, Russia
 E-mail: velmisov@ulstu.ru

A. V. Ankilov
 Ulyanovsk State Technical University,
 32 Severny Venets str., 432027 Ulyanovsk, Russia
 E-mail: ankil@ulstu.ru