Современная математика. Фундаментальные направления. Том 59 (2016). С. 5–34

УДК 517.9

НЕСТАЦИОНАРНАЯ ЗАДАЧА СЛОЖНОГО ТЕПЛООБМЕНА В СИСТЕМЕ ПОЛУПРОЗРАЧНЫХ ТЕЛ С КРАЕВЫМИ УСЛОВИЯМИ ДИФФУЗНОГО ОТРАЖЕНИЯ И ПРЕЛОМЛЕНИЯ ИЗЛУЧЕНИЯ

© 2016 г. **А. А. АМОСОВ**

Аннотация. Рассматривается нестационарная начально-краевая задача, описывающая сложный (радиационно-кондуктивный) теплообмен в системе полупрозрачных тел. Для описания распространения излучения используется уравнение переноса излучения с краевыми условиями диффузного отражения и диффузного преломления излучения. Учтена зависимость интенсивности излучения и оптических свойств тел от частоты излучения. Установлены существование и единственность слабого решения. Доказана теорема сравнения. Выведены априорные оценки слабого решения и получен результат о его регулярности.

СОДЕРЖАНИЕ

Введение

Задачи сложного (радиационно-кондуктивного) теплообмена, в которых необходим одновременный учет распространения тепла излучением и теплопроводностью, возникают в самых разных областях науки и техники. Этим задачам посвящена обширная физическая литература (см., например, [29, 30, 32, 33]).

Результаты работы были получены в рамках выполнения государственного задания Минобрнауки России (задание № 1.756.2014/К) и при частичной финансовой поддержке Совета по грантам при Президенте РФ (проект НШ-2081.2014.1).

Математическая теория этих задач находится пока еще в стадии построения. Краткий обзор результатов о разрешимости задач сложного теплообмена в непрозрачных для излучения материалах по состоянию на 2008 год можно найти, например, в [9]; из более поздних работ в этом направлении отметим статьи [9, 10, 17–20]. Вопросам разрешимости задач радиационно-кондуктивного теплообмена в полупрозрачных средах посвящены работы [1–3, 7, 8, 22–24, 26–28, 31]. Отметим, что в статьях [1–3, 23, 24, 31] уравнение переноса излучения заменено его диффузионным P_1-приближением.

Настоящая статья посвящена исследованию нестационарной задачи, описывающей сложный теплообмен в системе полупрозрачных тел. Для описания распространения излучения используется уравнение переноса излучения с краевыми условиями диффузного отражения и диффузного преломления излучения. Учтена зависимость интенсивности излучения и оптических свойств тел от частоты излучения.

Статья организована следующим образом. В разделе 1 рассматривается исходная физическая постановка решаемой задачи. В разделе 2 вводятся некоторые обозначения и используемые функциональные пространства. В разделе 3 дается формулировка краевой задачи для уравнения переноса излучения с условиями диффузного отражения и диффузного преломления излучения на границах раздела сред и напоминаются нужные для дальнейшего свойства этой задачи. Математическая постановка рассматриваемой задачи $\mathcal{P}_d$ дается в разделе 4. Там же кратко формулируются основные результаты работы, доказательству которых посвящены разделы 5–9. В разделе 5 устанавливаются априорные оценки слабых решений задачи $\mathcal{P}_d$ и вспомогательной задачи $\mathcal{P}_d^{[n]}$. В разделе 6 доказывается теорема об устойчивости слабых решений задачи $\mathcal{P}_d$ по данным, следствиями которой являются теорема сравнения и теорема единственности. В разделе 7 устанавливается существование слабого решения вспомогательной задачи $\mathcal{P}_d^{[n]}$. В разделе 8 приводится доказательство теорем о разрешимости задачи $\mathcal{P}_d$, а в разделе 9 доказывается регулярность слабого решения.

1. Физическая постановка задачи

Рассматривается задача нестационарного радиационно-кондуктивного теплообмена в системе $G = \bigcup\limits_{j=1}^{m} G_j$ полупрозрачных тел, разделенных вакуумом. Каждое из тел G_j является ограниченной областью в $\mathbb{R}^3$ с границей ∂G_j класса C^2; тело G_j заполнено оптически однородным материалом с постоянными значениями коэффициентов поглощения $\varkappa_{j,\nu} > 0$, рассеяния $s_{j,\nu} \geqslant 0$ и показателем преломления $k_{j,\nu} > 1$, зависящими от частоты излучения ν. Предполагается, что тела G_i и G_j попарно не пересекаются, но их границы могут пересекаться для некоторых $i \neq j$.

Искомыми являются функции $u(x,t)$ и $I_\nu(\omega,x,t)$, имеющие физический смысл абсолютной температуры в точке $x \in G$ в момент времени $t \in (0,T)$ и интенсивности излучения на частоте ν, распространяющегося в направлении $\omega \in \Omega$. Здесь $\Omega = \{\omega \in \mathbb{R}^3 \mid |\omega| = 1\}$ — единичная сфера (сфера направлений).

Излучение и поглощение энергии происходят на частотах $\nu \in \mathfrak{N} = \mathcal{N} \cup \{\nu_\ell\} \subset (0,+\infty)$. Множество $\mathcal{N}$ предполагается измеримым. Через ν_ℓ обозначены частоты, соответствующие спектральным линиям с шириной $\Delta\nu_\ell > 0$. Множество $\{\nu_\ell\}$ может быть счетным, конечным или пустым; последнее — в случае, когда спектральные линии отсутствуют. Положим $\varkappa_\nu(x) = \varkappa_{j,\nu}$, $s_\nu(x) = s_{j,\nu}$, $k_\nu(x) = k_{j,\nu}$ для $x \in G_j$, $1 \leqslant j \leqslant m$ и $\nu \in \mathfrak{N}$.

Введем следующие обозначения:

$$Q_T = G \times (0,T), \quad D = \Omega \times G = \bigcup_{j=1}^{m} D_j, \quad D_j = \Omega \times G_j, \quad 1 \leqslant j \leqslant m.$$

Для описания процесса радиационно-кондуктивного теплообмена будем использовать систему, состоящую из уравнения теплопроводности и уравнения переноса излучения:

$$c_p D_t u - \operatorname{div}(\lambda(x,u)\nabla u) + H(x,u) = \int\limits_{\mathcal{N}} \varkappa_\nu \int\limits_{\Omega} I_\nu \, d\omega \, d\nu + \sum_{\ell} \varkappa_{\nu_\ell} \int\limits_{\Omega} I_{\nu_\ell} \, d\omega \, \Delta\nu_\ell + f_0, \ (x,t) \in Q_T, \tag{1.1}$$

$$\omega \cdot \nabla I_\nu + \beta_\nu I_\nu = s_\nu \mathcal{S}_\nu(I_\nu) + \varkappa_\nu k_\nu^2 h_\nu(u), \quad (\omega,x,t) \in D \times (0,T), \quad \nu \in \mathfrak{N}. \tag{1.2}$$

Здесь $c_p(x)$ — коэффициент теплоемкости, $\lambda(x,u)$ — коэффициент теплопроводности, $f_0(x,t)$ — заданная плотность тепловых источников. Функция

$$H(x,u) = 4\pi \int\limits_{\mathcal{N}} \varkappa_\nu(x) k_\nu^2(x) h_\nu(u)\, d\nu + 4\pi \sum_{\ell} \varkappa_{\nu_\ell}(x) k_{\nu_\ell}^2(x) h_{\nu_\ell}(u) \Delta\nu_\ell$$

отвечает плотности излучаемой энергии, а первые два слагаемых в правой части уравнения (1.1) — плотности поглощаемой энергии. Функция

$$h_\nu(u) = \frac{2\nu^2}{c_0^2} \frac{\hbar\nu}{\exp\left(\hbar\nu/(\widehat{k}u)\right) - 1}$$

при $u > 0$ отвечает спектральному распределению Планка; здесь $\hbar > 0$, $\widehat{k} > 0$ — постоянные Планка и Больцмана, c_0 — скорость света в вакууме. Для удобства будем считать функцию h_ν доопределенной при $u \leqslant 0$ так, чтобы $h_\nu(u) = -h_\nu(|u|)$ при $u < 0$ и $h_\nu(0) = 0$. Напомним, что при $u > 0$ справедливо равенство $\pi \int\limits_0^\infty h_\nu(u)\, d\nu = \sigma_0 u^4$, где $0 < \sigma_0$ — постоянная Стефана—Больцмана.

В (1.1) и всюду далее мы используем обозначение D_t для частной производной $\dfrac{\partial}{\partial t}$.

В уравнении (1.2) через $\omega \cdot \nabla I_\nu = \sum\limits_{i=1}^3 \omega_i \dfrac{\partial}{\partial x_i} I_\nu$ обозначена производная функции I_ν по направлению ω. Через $\mathcal{S}_\nu$ обозначен оператор рассеяния

$$\mathcal{S}_\nu(I_\nu)(\omega,x,t) = \frac{1}{4\pi} \int\limits_\Omega \theta_{j,\nu}(\omega' \cdot \omega) I_\nu(\omega',x,t)\, d\omega', \quad (\omega,x) \in D_j \times (0,T), \quad 1 \leqslant j \leqslant m$$

с индикатрисой рассеяния, обладающей следующими свойствами:

$$\theta_{j,\nu} \in L^1(-1,1), \quad \theta_{j,\nu} \geqslant 0, \quad \frac{1}{2} \int\limits_{-1}^{1} \theta_{j,\nu}(\mu)\, d\mu = 1, \quad 1 \leqslant j \leqslant m.$$

Кроме того, $\beta_\nu = \varkappa_\nu + s_\nu$ — это коэффициент экстинкции.

Будем рассматривать $\mathbb{R}^3$ как евклидово пространство с элементами $x = (x_1, x_2, x_3)$ и скалярным произведением $x \cdot y = \sum\limits_{i=1}^3 x_i y_i$.

Обозначим через $n_j(x)$ внешнюю нормаль к границе ∂G_j в точке x, $1 \leqslant j \leqslant m$. Введем множества

$$\Gamma = \bigcup_{j=1}^m \Gamma_j, \quad \Gamma_j = \Omega \times \partial G_j, \quad 1 \leqslant j \leqslant m,$$

$$\Gamma^- = \bigcup_{j=1}^m \Gamma_j^-, \quad \Gamma_j^- = \{(\omega,x) \in \Gamma_j \mid \omega \cdot n_j(x) < 0\}, \quad 1 \leqslant j \leqslant m,$$

$$\Gamma^+ = \bigcup_{j=1}^m \Gamma_j^+, \quad \Gamma_j^+ = \{(\omega,x) \in \Gamma_j \mid \omega \cdot n_j(x) > 0\}, \quad 1 \leqslant j \leqslant m,$$

$$\Gamma^0 = \bigcup_{j=1}^m \Gamma_j^0, \quad \Gamma_j^0 = \{(\omega,x) \in \Gamma_j \mid \omega \cdot n_j(x) = 0\}, \quad 1 \leqslant j \leqslant m.$$

Дополним систему (1.1), (1.2) краевыми условиями

$$\lambda(x,u) \nabla u \cdot n_j(x) = 0, \quad (x,t) \in \partial G_j \times (0,T), \quad 1 \leqslant j \leqslant m, \tag{1.3}$$

$$I_\nu|_{\Gamma^-} = \mathfrak{B}_{d,\nu}(I_\nu|_{\Gamma^+}) + \mathfrak{C}_{d,\nu}(J_{*\nu}), \quad (\omega,x,t) \in \Gamma^- \times (0,T), \quad \nu \in \mathfrak{N} \tag{1.4}$$

и начальным условием

$$u|_{t=0} = u^0, \quad x \in G. \tag{1.5}$$

Условие (1.3) означает отсутствие конвективных тепловых потоков на границах ∂G_j (напомним, что тела G_j разделены вакуумом). Краевое условие (1.4) описывает диффузное отражение и диффузное преломление излучения на границах тел G_j. Определение операторов $\mathfrak{B}_{d,\nu}$ и $\mathfrak{C}_{d,\nu}$ дано в разделе 3.

Заметим, что величина $\omega \cdot n_j(x)$ представляет собой косинус угла между направлением распространения излучения ω и внешней нормалью $n_j(x)$. Таким образом, $I_\nu|_{\Gamma^-}$ и $I_\nu|_{\Gamma^+}$ можно интерпретировать как значения интенсивности входящего в G и выходящего из G излучений. Через $J_{*\nu}$ обозначена интенсивность приходящего извне излучения.

2. Некоторые обозначения и используемые функциональные пространства

Пусть $1 \leqslant p \leqslant \infty$. Через p' будем обозначать сопряженный по Гельдеру показатель такой, что $p' \in [1,\infty]$ и $1/p + 1/p' = 1$.

Пусть E — измеримое множество в $\mathbb{R}^n$, B — банахово пространство. Через $\mathfrak{M}(E;B)$ будем обозначать пространство заданных на E сильно измеримых (измеримых по Бохнеру) функций со значениями в B. Как обычно, положим $\mathfrak{M}(E) = \mathfrak{M}(E;\mathbb{R})$ и $\mathfrak{M}(0,T;B) = \mathfrak{M}((0,T);B)$.

Пусть $z \in L^r(0,T;B)$, где B — банахово пространство, $r \in [1,\infty]$. Введем оператор интегрирования $I_t z(t) = \int\limits_0^t z(s)\,ds$ и разность $\Delta^{(\tau)} z(t) = z(t+\tau) - z(t)$ с параметром $\tau \in (0,T)$. Заметим, что $\Delta^{(\tau)} I_t z(t) = \int\limits_t^{t+\tau} z(s)\,ds$, и обратим внимание на неравенство

$$\big\|\Delta^{(\tau)} I_t z\big\|_{L^{r_1}(0,T-\tau;B)} \leqslant \tau^{1-1/r+1/r_1} \|z\|_{L^r(0,T;B)}, \quad 1 \leqslant r \leqslant r_1 \leqslant \infty. \tag{2.1}$$

2.1. Пространства функций, заданных на G и Q_T.

Будем использовать следующие обозначения:

$$(f,g)_{\widetilde{G}} = \int\limits_{\widetilde{G}} f(x)g(x)\,dx, \quad (f,g)_{\widetilde{Q}} = \int\limits_{\widetilde{Q}} f(x,t)g(x,t)\,dxdt,$$

где $\widetilde{G}$ и $\widetilde{Q}$ — измеримые подмножества множеств G и Q_T соответственно.

Обозначим через $L^{r,q}(Q_T)$ пространство $L^r(0,T;L^q(G))$ (где $r,q \in [1,\infty]$) с нормой

$$\|f\|_{L^{r,q}(Q_T)} = \big\|\|f\|_{L^q(G)}\big\|_{L^r(0,T)}.$$

Напомним, что $L^{r,r}(Q_T) = L^r(Q_T)$, $L^{\infty,\infty}(Q_T) \subset L^\infty(Q_T) \subset L^{\infty,r}(Q_T)$ для всех $r \in [1,\infty)$.

Подчеркнем, что множество $G = \bigcup\limits_{j=1}^m G_j$ не является связным. В связи с этим под $W^{1,2}(G)$ понимается пространство функций

$$W^{1,2}(G) = \{u \in L^2(G) \mid u \in W^{1,2}(G_j), \quad 1 \leqslant j \leqslant m\}$$

(где $W^{1,2}(G_j)$ — классические пространства Соболева) с нормой

$$\|u\|_{W^{1,2}(G)} = \big(\|u\|^2_{L^2(G)} + \|\nabla u\|^2_{L^2(G)}\big)^{1/2}.$$

Следуя [4], введем пространство $V_2(Q_T) = L^2(0,T;W^{1,2}(G)) \cap L^{\infty,2}(Q_T)$ с нормой

$$\|u\|_{V_2(Q_T)} = \|u\|_{L^{\infty,2}(Q_T)} + \|\nabla u\|_{L^2(Q_T)}$$

и пространство $V_2^{1,0}(Q_T) = V_2(Q_T) \cap C([0,T];L^2(G))$.

Известно [4], что для всех показателей, удовлетворяющих условиям

$$r \in [1,\infty], \quad q \in [1,6], \quad 2/r + 3/q \geqslant 3/2, \tag{2.2}$$

справедливо неравенство

$$\|u\|_{L^{r,q}(Q_T)} \leqslant C(G,T)\|u\|_{V_2(Q_T)} \quad \forall\, u \in V_2(Q_T). \tag{2.3}$$

Из неравенства (2.3) следует, что $V_2(Q_T) \subset L^{10/3}(Q_T)$ и, если $|u|^{\gamma-1}u \in V_2(Q_T)$ с $\gamma \geqslant 1$, то $u \in L^{10\gamma/3}(Q_T)$, причем справедлива оценка

$$\|u\|^\gamma_{L^{10\gamma/3}(Q_T)} \leqslant C(G,T)\||u|^{\gamma-1}u\|_{V_2(Q_T)}. \tag{2.4}$$

Пусть v — вещественное число или вещественнозначная функция. Введем срезки $v^{[L,M]} = \max\{L, \min\{v, M\}\}$, где $-\infty \leqslant L < M \leqslant +\infty$ и $v^{[M]} = v^{[-M,M]}$, где $M > 0$. Положим также $v_+ = \max\{v, 0\}$ и $v_- = \max\{-v, 0\}$. Заметим, что $(-v)_+ = v_-$ и $v^{[0,M]} = v_+^{[M]}$, $(-v)_+^{[M]} = v_-^{[M]}$ при $M > 0$.

Пусть $u \in W^{1,2}(G)$, $w \in C^1(\mathbb{R})$, $w' \geqslant 0$. Известно (см., например [21]), что $u^{[L,M]} \in W^{1,2}(G)$, $w(u^{[L,M]}) \in W^{1,2}(G)$, причем $\nabla u^{[L,M]} = \nabla u$, $\nabla w(u^{[L,M]}) = w'(u)\nabla u$ п.в. (почти всюду) на $G^{[L,M]} = \{x \in G \mid L < u(x) < M\}$ и $\nabla u^{[L,M]} = 0$, $\nabla w(u^{[L,M]}) = 0$ п.в. на $G \setminus G^{[L,M]}$.

2.2. Пространства функций, заданных на D и Γ. Через $d\omega$ и $d\sigma(x)$ будем обозначать меры, индуцированные мерой Лебега в $\mathbb{R}^3$ на Ω и ∂G соответственно. Будем предполагать, что на Γ введена мера $d\Gamma(\omega, x) = d\omega\, d\sigma(x)$. Введем на Γ^- и Γ^+ меры

$$\widehat{d}\Gamma^-(\omega, x) = |\omega \cdot n_j(x)|\, d\omega d\sigma(x), \quad (\omega, x) \in \Gamma_j^-, \quad 1 \leqslant j \leqslant m,$$
$$\widehat{d}\Gamma^+(\omega, x) = \omega \cdot n_j(x)\, d\omega d\sigma(x), \quad (\omega, x) \in \Gamma_j^+, \quad 1 \leqslant j \leqslant m.$$

Напомним, что $D = \Omega \times G = \bigcup\limits_{j=1}^{m} D_j$, где $D_j = \Omega \times G_j$, $1 \leqslant j \leqslant m$.

Пусть $1 \leqslant p \leqslant \infty$. Через $L^p(D)$ обозначим банахово пространство заданных на D и измеримых относительно меры $d\omega\, dx$ функций f, обладающих конечной нормой

$$\|f\|_{L^p(D)} = \begin{cases} \Big(\int\limits_D |f(\omega, x)|^p\, d\omega dx\Big)^{1/p}, & 1 \leqslant p < \infty, \\ \operatorname*{ess\,sup}\limits_{(\omega,x)\in D} |f(\omega, x)|, & p = \infty. \end{cases}$$

Обозначим через $\mathcal{W}^p(D)$ банахово пространство функций $f \in L^p(D)$, обладающих обобщенной производной $\omega \cdot \nabla f \in L^p(D)$, оснащенное нормой

$$\|f\|_{\mathcal{W}^p(D)} = \begin{cases} \Big(\|f\|^p_{L^p(D)} + \|\,\omega \cdot \nabla f\|^p_{L^p(D)}\Big)^{1/p}, & 1 \leqslant p < \infty, \\ \max\{\|f\|_{L^\infty(D)}, \|\,\omega \cdot \nabla f\|_{L^\infty(D)}\}, & p = \infty. \end{cases}$$

Пусть $E^\pm$ — измеримое относительно меры $d\Gamma$ подмножество множества $\Gamma^\pm$. Через $\mathfrak{M}_\Gamma(E^\pm)$ будем обозначать множество функций, заданных на $E^\pm$ и измеримых относительно меры $d\Gamma$. Через $\widehat{L}^p(E^\pm)$, где $1 \leqslant p \leqslant \infty$, обозначим банаховы пространства функций $g \in \mathfrak{M}_\Gamma(E^\pm)$, обладающих конечными нормами

$$\|g\|_{\widehat{L}^p(E^\pm)} = \begin{cases} \Big(\int\limits_{E^\pm} |g(\omega, x)|^p\, \widehat{d}\Gamma^\pm(\omega, x)\Big)^{1/p}, & 1 \leqslant p < \infty, \\ \operatorname*{ess\,sup}\limits_{(\omega,x)\in E^\pm} |g(\omega, x)|, & p = \infty. \end{cases}.$$

Определим пространство $L^p_{loc}(\Gamma^\pm)$ как множество всех функций $g \in \mathfrak{M}_\Gamma(\Gamma^\pm)$ таких, что $g \in L^p(K)$ для любого компактного подмножества $K \subset \Gamma^\pm$.

Будем также использовать пространства $\widehat{L}^{1,p}(E^\pm)$, элементами которых являются функции $g \in \mathfrak{M}_\Gamma(E^\pm)$, которые после доопределения нулем на $\Gamma^\pm \setminus E^\pm$ обладают конечными нормами

$$\|g\|_{\widehat{L}^{1,p}(E^\pm)} = \begin{cases} \Bigg(\sum\limits_{j=1}^{m} \int\limits_{\partial G_j} \Big[\int\limits_{\Omega_j^\pm(x)} |g(\omega, x)||\omega \cdot n_j(x)|\, d\omega\Big]^p d\sigma(x)\Bigg)^{1/p}, & 1 \leqslant p < \infty, \\ \max\limits_{1\leqslant j\leqslant m} \operatorname*{ess\,sup}\limits_{x\in\partial G_j} \int\limits_{\Omega_j^\pm(x)} |g(\omega, x)||\omega \cdot n_j(x)|\, d\omega, & p = \infty. \end{cases}$$

Здесь и всюду ниже

$$\Omega_j^+(x) = \{\omega \in \Omega \mid \omega \cdot n_j(x) > 0\}, \quad \Omega_j^-(x) = \{\omega \in \Omega \mid \omega \cdot n_j(x) < 0\}.$$

Ясно, что $\widehat{L}^1(E^\pm) = \widehat{L}^{1,1}(E^\pm)$.

Будем использовать обозначения

$$(f,g)_{E^\pm} = \int\limits_{E^\pm} f(\omega,x) g(\omega,x)\, \widehat{d}\Gamma^\pm(\omega,x),$$

$$(f,g)_D = \int\limits_D f(\omega,x) g(\omega,x)\, d\omega\, dx.$$

Напомним, что для $f \in \mathcal{W}^p(D)$, $1 \leqslant p < \infty$ определены следы $f|_{\Gamma^\pm} \in L^p_{loc}(\Gamma^\pm)$, причем операторы $f \to f|_{\Gamma^\pm}$ являются линейными непрерывными операторами из $\mathcal{W}^p(D)$ в $L^p_{loc}(\Gamma^\pm)$. Сужение следа $f|_{\Gamma^\pm}$ на $\Gamma_j^\pm$ будем обозначать через $f|_{\Gamma_j^\pm}$.

Введем пространства

$$\widehat{\mathcal{W}}^p(D) = \big\{ f \in \mathcal{W}^p(D) \;\big|\; f|_{\Gamma^-} \in \widehat{L}^p(\Gamma^-), \quad f|_{\Gamma^+} \in \widehat{L}^p(\Gamma^+) \big\}, \quad 1 \leqslant p \leqslant \infty.$$

Заметим, что $\widehat{\mathcal{W}}^\infty(D) = \mathcal{W}^\infty(D)$.

Более подробную информацию о свойствах пространств $\mathcal{W}^p(D)$ и следов функций из этих пространств можно найти, например, в [6, 11, 14–16].

3. Краевая задача для уравнения переноса излучения с условиями диффузного отражения и диффузного преломления

В данном разделе дается краткое изложение постановки краевой задачи для уравнения переноса излучения с краевыми условиями диффузного отражения и диффузного преломления. Вывод краевых условий и доказательство используемых свойств задачи приведены в [12, 13].

3.1. Граничные операторы. Пусть ν — фиксированная частота излучения, $\nu \in \mathfrak{N}$.

Напомним, что каждое из тел G_j заполнено оптически однородной средой с коэффициентами поглощения и рассеяния $\varkappa_\nu(x) = \varkappa_{j,\nu} > 0$, $s_\nu(x) = s_{j,\nu} \geqslant 0$ и показателем преломления $k_\nu(x) = k_{j,\nu} > 1$, где $x \in G_j$, $1 \leqslant j \leqslant m$.

Введем операторы $\mathcal{R}_d^+$ и $\mathcal{R}_d^-$ диффузного внешнего отражения и диффузного внутреннего отражения формулами

$$\mathcal{R}^-_{d,\nu}(\varphi)(\omega,x) = \frac{\rho^-_{j,\nu}(x)}{\pi} \int\limits_{\Omega_j^+(x)} \varphi(\omega',x)\, \omega'\cdot n_j(x)\, d\omega', \quad (\omega,x) \in \Gamma_j^-, \quad 1 \leqslant j \leqslant m,$$

$$\mathcal{R}^+_{d,\nu}(\psi)(\omega,x) = \frac{\rho^+_{j,\nu}(x)}{\pi} \int\limits_{\Omega_j^-(x)} \psi(\omega',x)\, |\omega'\cdot n_j(x)|\, d\omega', \quad (\omega,x) \in \Gamma_j^+, \quad 1 \leqslant j \leqslant m.$$

Здесь $\rho^+_{j,\nu}(x)$ и $\rho^-_{j,\nu}(x)$ — отражательные способности поверхности ∂G_j в точке x. Эти величины удовлетворяют неравенствам $0 < \rho^+_{j,\nu}(x) < 1$, $0 < \rho^-_{j,\nu}(x) < 1$ и связаны равенством $\rho^-_{j,\nu}(x) = 1 - \dfrac{1}{k^2_{j,\nu}}(1 - \rho^+_{j,\nu}(x))$.

Мы предполагаем дополнительно, что $\rho^+_{j,\nu}, \rho^-_{j,\nu} \in L^\infty(\partial G_j)$ для всех $1 \leqslant j \leqslant m$ и

$$\overline{\rho}^+_\nu = \max_{1 \leqslant j \leqslant m} \|\rho^+_{j,\nu}\|_{L^\infty(\partial G_j)} < 1.$$

Введем также операторы $\mathcal{P}^-_{d,\nu}$ и $\mathcal{P}^+_{d,\nu}$ диффузного преломления внутрь G и диффузного преломления вне G формулами

$$\mathcal{P}^-_{d,\nu}(\psi)(\omega,x) == \frac{1-\rho^+_{j,\nu}(x)}{\pi} \int\limits_{\Omega_j^-(x)} \psi(\omega',x) |\omega'\cdot n_j(x)|\, d\omega', \quad (\omega,x) \in \Gamma_j^-, \quad 1 \leqslant j \leqslant m,$$

$$\mathcal{P}^+_{d,\nu}(\varphi)(\omega,x) = \frac{1-\rho^-_{j,\nu}(x)}{\pi} \int\limits_{\Omega_j^+(x)} \varphi(\omega',x)\, \omega'\cdot n_j(x)\, d\omega', \; (\omega,x) \in \Gamma_j^+, \quad 1 \leqslant j \leqslant m.$$

Пусть $\partial G_{ij} = \partial G_i \cap \partial G_j \neq \varnothing$ для некоторых $i \neq j$. Заметим, что $n_j(x) = -n_i(x)$. Положим

$$\Gamma_{ij}^- = \Gamma_i^- \cap \Gamma_j^+, \quad \Gamma_{ij}^+ = \Gamma_{ji}^- = \Gamma_i^+ \cap \Gamma_j^-.$$

Введем операторы $\mathcal{R}_{d,ij,\nu}^-$ и $\mathcal{P}_{d,ij,\nu}^-$ формулами

$$\mathcal{R}_{d,ij,\nu}^-(\varphi)(\omega,x) = \frac{\rho_{ij,\nu}^-(x)}{\pi} \int\limits_{\Omega_i^+(x)} \varphi(\omega',x)\,\omega'\cdot n_i(x)\,d\omega', \quad (\omega,x)\in\Gamma_{ij}^-,$$

$$\mathcal{P}_{d,ij,\nu}^-(\psi)(\omega,x) = \frac{1-\rho_{ji,\nu}^-(x)}{\pi} \int\limits_{\Omega_j^+(x)} \psi(\omega',x)\,\omega'\cdot n_j(x)\,d\omega', \quad (\omega,x)\in\Gamma_{ij}^-,$$

где

$$\rho_{ij,\nu}^- = 1 - \frac{(1-\rho_{i,\nu}^-)(1-\rho_{j,\nu}^+)}{1-\rho_{i,\nu}^+\rho_{j,\nu}^+}, \quad 1-\rho_{ji,\nu}^- = (1-\rho_{ij,\nu}^-)\frac{k_{i,\nu}^2}{k_{j,\nu}^2} = \frac{(1-\rho_{i,\nu}^+)(1-\rho_{j,\nu}^-)}{1-\rho_{i,\nu}^+\rho_{j,\nu}^+}.$$

Заметим, что $\rho_{ij,\nu}^- \in L^\infty(\partial G_{ij})$, причем $0 < \rho_{i,\nu}^- < \rho_{ij,\nu}^- < 1$.

Из [12] следует следующее утверждение.

Лемма 3.1.

1. *Для всех $1 \leqslant p \leqslant \infty$ операторы $\mathcal{R}_{d,\nu}^-$ и $\mathcal{R}_{d,\nu}^+$ являются линейными ограниченными операторами из $\widehat{L}^{1,p}(S^+)$ в $\widehat{L}^p(S^-)$ и из $\widehat{L}^{1,p}(S^-)$ в $\widehat{L}^p(S^+)$ соответственно.*
2. *Для всех $1 \leqslant p \leqslant \infty$ операторы $\mathcal{P}_{d,\nu}^-$ и $\mathcal{P}_{d,\nu}^+$ являются линейными ограниченными операторами из $\widehat{L}^{1,p}(S^-)$ в $\widehat{L}^p(S^-)$ и из $\widehat{L}^{1,p}(S^+)$ в $\widehat{L}^p(S^+)$ соответственно.*
3. *Пусть $\partial G_{ij} \neq \varnothing$ при некоторых $i \neq j$. Тогда для всех $1 \leqslant p \leqslant \infty$ операторы $\mathcal{R}_{d,ij,\nu}^-$ и $\mathcal{P}_{d,ij,\nu}^-$ являются линейными ограниченными операторами из $\widehat{L}^{1,p}(\Gamma_{ij}^+)$ в $\widehat{L}^p(\Gamma_{ij}^-)$ и из $\widehat{L}^{1,p}(\Gamma_{ji}^+)$ в $\widehat{L}^p(\Gamma_{ij}^-)$ соответственно.*

Введем множества

$$S_j^- = \{(\omega,x)\in\Gamma_j^- \mid x\in\partial G_j \setminus \bigcup_{i\neq j}\partial G_i\}, \quad S^- = \bigcup_{j=1}^m S_j^-,$$

$$\overset{*}{S}{}^- = \{(\omega,x)\in S^- \mid \{x - t\,\omega \mid t>0\}\cap\overline{G} = \varnothing\}.$$

Пусть $(\omega,x)\in S^-\setminus\overset{*}{S}{}^- = \{(\omega,x)\in S^- \mid \{x-t\,\omega \mid t>0\}\cap\overline{G}\neq\varnothing\}$. Положим

$$\tau^-(\omega,x) = \inf\,\{t>0 \mid x - t\omega\in\overline{G}\}, \quad X^-(\omega,x) = x - \tau^-(\omega,x)\omega$$

и заметим, что $X^-(\omega,x)\in\partial G$, причем $(\omega,X^-(\omega,x))\in\Gamma^+\cup\Gamma^0$.

Введем множество

$$\widetilde{S}^- = \{(\omega,x)\in S^-\setminus\overset{*}{S}{}^- \mid (\omega,X^-(\omega,x))\in\Gamma^+\}$$

и определим оператор трансляции T формулой

$$T\varphi(\omega,x) = \begin{cases}\varphi(\omega,X^-(\omega,x)), & (\omega,x)\in\widetilde{S}^-,\\ 0, & (\omega,x)\in S^-\setminus\widetilde{S}^-.\end{cases}$$

Лемма 3.2 (см. [11,13]). *Пусть $\widetilde{S}^-\neq\varnothing$. Тогда для всех $1\leqslant p\leqslant\infty$ оператор T является линейным ограниченным оператором из $\widehat{L}^p(S^+)$ в $\widehat{L}^p(S^-)$, причем $\|T\|_{\widehat{L}^p(S^+)\to\widehat{L}^p(S^-)} = 1$.*

3.2. Формулировка краевых условий диффузного отражения и преломления. Значения на множествах $\Gamma^\pm$ и $\Gamma_j^\pm$ интенсивности I_ν распространяющегося в G излучения мы будем обозначать через $I_\nu|_{\Gamma^\pm}$ и $I_\nu|_{\Gamma_j^\pm}$ соответственно. Значения на множестве Γ^- интенсивности распространяющегося в вакууме излучения будем обозначать через J_ν.

Для $(\omega,x)\in\overset{*}{S}{}^-$ падающее из вакуума на ∂G излучение J_ν приходит извне и может считаться заданным:

$$J_\nu = J_{*\nu}, \quad (\omega,x)\in\overset{*}{S}{}^-.$$

Для $(\omega, x) \in \widetilde{S}^-$ падающее из вакуума на ∂G излучение J_ν приходит от точки $X^-(\omega, x) \in \partial G$. Оно складывается из диффузно отраженного и диффузно преломленного в точке $X^-(\omega, x)$ излучений:

$$J_\nu = T\mathcal{R}^+_{d,\nu}(J_\nu) + T\mathcal{P}^+_{d,\nu}(I_\nu|_{\Gamma^+}), \quad (\omega, x) \in \widetilde{S}^-.$$

Для $(\omega, x) \in S^-$ входящее в G излучение складывается из диффузно отраженного и диффузно преломленного излучений:

$$I_\nu|_{\Gamma^-} = \mathcal{R}^-_{d,\nu}(I_\nu|_{\Gamma^+}) + \mathcal{P}^-_{d,\nu}(J_\nu), \quad (\omega, x) \in S^-.$$

Пусть $\partial G_{ij} = \partial G_i \cap \partial G_j \neq \varnothing$ для некоторых $i \neq j$. Как показано в [12], условие диффузного отражения-преломления для $(\omega, x) \in \Gamma^-_{ij}$ имеет следующий вид:

$$I_\nu|_{\Gamma^-_i} = \mathcal{R}^-_{d,ij,\nu}(I_\nu|_{\Gamma^+_i}) + \mathcal{P}^-_{d,ij,\nu}(I_\nu|_{\Gamma^+_j}), \quad (\omega, x) \in \Gamma^-_{ij}.$$

3.3. Предварительная формулировка рассматриваемой краевой задачи. Таким образом, рассматриваемая в данном разделе задача на «физическом» уровне строгости может быть сформулирована следующим образом: требуется найти функцию I_ν, определенную на множестве $D = \Omega \times G$, и функцию J_ν, определенную на множестве S^-, которые удовлетворяют уравнению

$$\omega \cdot \nabla I_\nu + \beta_\nu I_\nu = s_\nu \mathcal{S}_\nu(I_\nu) + \varkappa_\nu k^2_\nu F_\nu, \quad (\omega, x) \in D \tag{3.1}$$

и условиям

$$I_\nu|_{\Gamma^-} = \mathcal{R}^-_{d,\nu}(I_\nu|_{\Gamma^+}) + \mathcal{P}^-_{d,\nu}(J_\nu), \quad (\omega, x) \in S^-, \tag{3.2}$$

$$I_\nu|_{\Gamma^-_i} = \mathcal{R}^-_{d,ij,\nu}(I_\nu|_{\Gamma^+_i}) + \mathcal{P}^-_{d,ij,\nu}(I_\nu|_{\Gamma^+_j}), \quad (\omega, x) \in \Gamma^-_{ij}, \quad i \neq j, \tag{3.3}$$

$$J_\nu = T\mathcal{R}^+_{d,\nu}(J_\nu) + T\mathcal{P}^+_{d,\nu}(I_\nu|_{\Gamma^+}), \quad (\omega, x) \in \widetilde{S}^-, \tag{3.4}$$

$$J_\nu = J_{*\nu}, \quad (\omega, x) \in \overset{*}{S}{}^-. \tag{3.5}$$

В [12] показано, что функцию J_ν, входящую в условия (3.4), (3.5), можно исключить из задачи, представив ее в виде

$$J_\nu = \mathcal{B}_{d,\nu}(I_\nu|_{\Gamma^+}) + \mathcal{C}_{d,\nu}(J_{*\nu}),$$

где $\mathcal{B}_{d,\nu} : \widehat{L}^{1,p}(S^+) \to \widehat{L}^{1,p}(S^-)$ и $\mathcal{C}_{d,\nu} : \widehat{L}^{1,p}(\overset{*}{S}{}^-) \to \widehat{L}^{1,p}(S^-)$ — операторы, определяемые сходящимися в $\widehat{L}^{1,p}(S^-)$ рядами

$$\mathcal{B}_{d,\nu}(I_\nu|_{\Gamma^+}) = \sum_{\ell=0}^{\infty} (T\mathcal{R}^+_{d,\nu})^\ell T\mathcal{P}^+_{d,\nu}(I_\nu|_{\Gamma^+}), \quad \mathcal{C}_{d,\nu}(J_{*\nu}) = \sum_{\ell=0}^{\infty} (T\mathcal{R}^+_{d,\nu})^\ell J_{*\nu}.$$

Предполагается, что $I_\nu|_{\Gamma^+} \in \widehat{L}^{1,p}(S^+)$ и $J_{*\nu} \in \widehat{L}^{1,p}(\overset{*}{S}{}^-)$, причем функция $J_{*\nu}$ продолжена нулем на $S^- \setminus \overset{*}{S}{}^-$.

3.4. Краевая задача для уравнения переноса с условиями диффузного отражения-преломления и ее свойства. Исключая из задачи (3.1)–(3.5) функцию $J_\nu = \mathcal{B}_{d,\nu}(I_\nu|_{\Gamma^+}) + \mathcal{C}_{d,\nu}(J_{*\nu})$, приходим к краевой задаче

$$\omega \cdot \nabla I_\nu + \beta_\nu I_\nu = s_\nu \mathcal{S}_\nu(I_\nu) + \varkappa_\nu k^2_\nu F_\nu, \quad (\omega, x) \in D, \tag{3.6}$$

$$I_\nu|_{\Gamma^-} = \mathcal{R}^-_{d,\nu}(I_\nu|_{\Gamma^+}) + \mathcal{P}^-_{d,\nu}\mathcal{B}_{d,\nu}(I_\nu|_{\Gamma^+}) + \mathcal{P}^-_{d,\nu}\mathcal{C}_{d,\nu}(J_{*\nu}), \quad (\omega, x) \in S^-, \tag{3.7}$$

$$I_\nu|_{\Gamma^-_i} = \mathcal{R}^-_{d,ij,\nu}(I|_{\Gamma^+_i}) + \mathcal{P}^-_{d,ij,\nu}(I|_{\Gamma^+_j}), \quad (\omega, x) \in \Gamma^-_{ij}, \quad i \neq j. \tag{3.8}$$

Будем предполагать, что $F_\nu \in L^p(D)$, $J_{*\nu} \in \widehat{L}^{1,p}(\overset{*}{S}{}^-)$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$.

Заметим, что $\Gamma^- = S^- \cup (\bigcup_{i \neq j} \Gamma^-_{ij})$, и введем оператор $\mathfrak{B}_{d,\nu} : \widehat{L}^{1,p}(\Gamma^+) \to \widehat{L}^p(\Gamma^-)$ следующим образом:

$$\mathfrak{B}_{d,\nu}(\varphi)(\omega, x) = \begin{cases} \mathcal{R}^-_{d,\nu}(\varphi)(\omega, x) + \mathcal{P}^-_{d,\nu}\mathcal{B}_{d,\nu}(\varphi)(\omega, x), & (\omega, x) \in S^-, \\ \mathcal{R}^-_{d,ij,\nu}(\varphi_i)(\omega, x) + \mathcal{P}^-_{d,ij,\nu}(\varphi_j)(\omega, x), & (\omega, x) \in \Gamma^-_{ij}, \quad i \neq j, \end{cases}$$

где φ_i и φ_j — сужения функции $\varphi \in \widehat{L}^{1,p}(\Gamma^+)$ на Γ_i^+ и Γ_j^+ соответственно.

Введем также оператор $\mathfrak{C}_{d,\nu} : \widehat{L}^{1,p}(\overset{*}{S}{}^-) \to \widehat{L}^p(\Gamma^-)$ следующим образом:

$$\mathfrak{C}_{d,\nu}(J_{*\nu})(\omega,x) = \begin{cases} \mathcal{P}^-_{d,\nu}\mathcal{C}_{d\nu}(J_{*\nu})(\omega,x), & (\omega,x) \in S^-, \\ 0, & (\omega,x) \in \Gamma^- \setminus S^- \end{cases}$$

и запишем задачу (3.6)–(3.8) в следующей компактной форме:

$$\omega \cdot \nabla I_\nu + \beta_\nu I_\nu = s_\nu \mathcal{S}_\nu(I_\nu) + \varkappa_\nu k_\nu^2 F_\nu, \quad (\omega,x) \in D, \tag{3.9}$$

$$I_\nu|_{\Gamma^-} = \mathfrak{B}_{d,\nu}(I_\nu|_{\Gamma^+}) + \mathfrak{C}_{d,\nu}(J_{*\nu}), \quad (\omega,x) \in \Gamma^-. \tag{3.10}$$

Назовем решением задачи (3.9), (3.10) функцию $I_\nu \in \widehat{\mathcal{W}}^p(D)$, которая удовлетворяет уравнению (3.9) почти всюду на D, а условию (3.10) — почти всюду на Γ^-.

Сформулируем некоторые результаты о свойствах этой задачи, доказанные в [12].

Теорема 3.1. *Пусть $1 \leqslant p \leqslant \infty$ и $I_\nu \in \widehat{\mathcal{W}}^p(D)$ является решением задачи* (3.9), (3.10). *Тогда при $1 \leqslant p < \infty$ справедливы оценки*

$$\|\varkappa_\nu^{1/p} k_\nu^{-2/p'} I_\nu\|_{L^p(D)} \leqslant \Big(\big\|\varkappa_\nu^{1/p} k_\nu^{2/p} F_\nu\big\|^p_{L^p(D)} + \frac{1}{\pi^{p-1}}\|J_{*\nu}\|^p_{\widehat{L}^{1,p}(\overset{*}{S}{}^-)}\Big)^{1/p},$$

$$\|\varkappa_\nu^{-1/p'} k_\nu^{-2/p'}\, \omega \cdot \nabla I_\nu\|_{L^p(D)} \leqslant \frac{2}{1-\varpi_{\max,\nu}}\Big(\big\|\varkappa_\nu^{1/p} k_\nu^{2/p} F_\nu\big\|^p_{L^p(D)} + \frac{1}{\pi^{p-1}}\|J_{*\nu}\|^p_{\widehat{L}^{1,p}(\overset{*}{S}{}^-)}\Big)^{1/p},$$

а при $p = \infty$ — оценки

$$\|k_\nu^{-2} I_\nu\|_{L^\infty(D)} \leqslant \max\big\{\|F_\nu\|_{L^\infty(D)}, \frac{1}{\pi}\|J_{*\nu}\|_{\widehat{L}^{1,\infty}(\overset{*}{S}{}^-)}\big\},$$

$$\|\varkappa^{-1} k_\nu^{-2}\, \omega \cdot \nabla I_\nu\|_{L^\infty(D)} \leqslant \frac{2}{1-\varpi_{\max,\nu}} \max\big\{\|F_\nu\|_{L^\infty(D)}, \frac{1}{\pi}\|J_{*\nu}\|_{\widehat{L}^{1,\infty}(\overset{*}{S}{}^-)}\big\}.$$

Здесь $\varpi_{\max,\nu} = \max\limits_{1\leqslant j\leqslant m} \varpi_{j,\nu} < 1$, *где* $\varpi_{j,\nu} = \dfrac{s_{j,\nu}}{\varkappa_{j,\nu} + s_{j,\nu}}$.

Следствие 3.1. *Если задача* (3.9), (3.10) *имеет решение, то оно единственно.*

Замечание 3.1. В [12] показано также, что из $F_\nu \geqslant 0$, $J_{*\nu} \geqslant 0$ следует, что $I_\nu \geqslant 0$.

Теорема 3.2. *Пусть $F_\nu \in L^p(D)$, $J_{*\nu} \in \widehat{L}^{1,p}(\overset{*}{S}{}^-)$, где $p \in (3/2, \infty]$. Тогда у задачи* (3.9), (3.10) *существует единственное решение $I_\nu \in \widehat{\mathcal{W}}^p(D)$.*

Замечание 3.2. Используемое в данной статье предположение $\partial G_j \in C^2$, $1 \leqslant j \leqslant m$ в некоторых случаях можно ослабить. Так, для $F_\nu \in L^\infty(D)$, $J_{*\nu} \in \widehat{L}^{1,\infty}(\overset{*}{S}{}^-)$ существование и единственность решения $I_\nu \in \mathcal{W}^\infty(D)$ имеют место и в предположении, что $\partial G_j \in C^1$ для $1 \leqslant j \leqslant m$.

Теорема 3.2 не охватывает математически трудный, но физически важный случай $p = 1$, когда данные задачи $F_\nu \in L^1(D)$ и $J_{*\nu} \in \widehat{L}^1(\overset{*}{S}{}^-)$. Следующая теорема содержит результат об однозначной разрешимости рассматриваемой задачи в этом случае при наличии двух дополнительных предположений:

(H_1) Для всех $i \neq j$ множества ∂G_{ij} пусты либо имеют нулевую меру на ∂G;

(H_2) Справедливо неравенство

$$\alpha(x) = \frac{1}{\pi}\int\limits_{\Omega_j^-(x)} \chi_{\widetilde{S}^-}(\omega,x)\,|\omega \cdot n_j(x)|\,d\omega \leqslant \overline{\alpha} < 1 \quad \forall\, x \in \partial G_j, \quad 1 \leqslant j \leqslant m,$$

в котором $\chi_{\widetilde{S}^-}$ — характеристическая функция множества $\widetilde{S}^-$.

Обратим внимание на то, что $\alpha(x) \equiv 0$, если G — выпуклая область.

Теорема 3.3. *Пусть $\partial G_j \in C^1$, $1 \leqslant j \leqslant m$ и выполнены условия (H_1), (H_2). Пусть $F_\nu \in L^p(D)$, $J_{*\nu} \in \widehat{L}^{1,p}(\overset{*}{S}{}^-)$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$. Тогда у задачи* (3.9), (3.10) *существует единственное решение $I_\nu \in \widehat{\mathcal{W}}^p(D)$.*

Предположим теперь, что объемные источники излучения изотропны, т. е. $F_\nu = F_\nu(x)$.

Обозначим через $\mathcal{A}_{d,\nu}$ линейный оператор, ставящий в соответствие функции $F_\nu \in L^p(G)$ решение $I_\nu \in \widehat{\mathcal{W}}^p(D)$ задачи

$$\omega\cdot\nabla I_\nu + \beta_\nu I_\nu = s_\nu \mathcal{S}_\nu(I_\nu) + \varkappa_\nu k_\nu^2 F_\nu, \quad (\omega,x)\in D,$$
$$I_\nu|_{\Gamma^-} = \mathfrak{B}_{d,\nu}(I_\nu|_{\Gamma^+}), \quad (\omega,x)\in\Gamma^-.$$

Через $\mathcal{D}_{d,\nu}$ обозначим линейный оператор, ставящий в соответствие функции $J_{*\nu} \in \widehat{L}^{1,p}(\overset{*}{S}{}^-)$ решение $I_\nu \in \widehat{\mathcal{W}}^p(D)$ задачи

$$\omega\cdot\nabla I_\nu + \beta_\nu I_\nu = s_\nu \mathcal{S}_\nu(I_\nu), \quad (\omega,x)\in D,$$
$$I_\nu|_{\Gamma^-} = \mathfrak{B}_{d,\nu}(I_\nu|_{\Gamma^+}) + \mathfrak{C}_{d,\nu}(J_{*\nu}), \quad (\omega,x)\in\Gamma^-.$$

С использованием введенных операторов решение задачи (3.9), (3.10) может быть представлено в виде

$$I_\nu = \mathcal{A}_{d,\nu}(F_\nu) + \mathcal{D}_{d,\nu}(J_{*\nu}).$$

Введем также операторы

$$\langle\mathcal{A}_{d,\nu}\rangle_\Omega(F_\nu) = \frac{1}{4\pi}\int_\Omega \mathcal{A}_{d,\nu}(F_\nu)\,d\omega, \quad \langle\mathcal{D}_{d,\nu}\rangle_\Omega(J_{*\nu}) = \frac{1}{4\pi}\int_\Omega \mathcal{D}_{d,\nu}(J_{*\nu})\,d\omega,$$

действующие из $L^p(G)$ в $L^p(G)$ и из $\widehat{L}^{1,p}(\overset{*}{S}{}^-)$ в $L^p(G)$ соответственно.

Операторы $\mathcal{A}_{d,\nu}$, $\mathcal{B}_{d,\nu}$, $\langle\mathcal{A}_{d,\nu}\rangle_\Omega$, $\langle\mathcal{B}_{d,\nu}\rangle_\Omega$ определены для $p\in(3/2,\infty]$, а при выполнении условий (H_1), (H_2) — для всех $p\in[1,\infty]$.

Из теоремы 3.1 (с учетом замечания 3.1) следуют оценки

$$\|\varkappa_\nu\langle\mathcal{A}_{d,\nu}\rangle_\Omega(F_\nu)\|_{L^1(G)} \leqslant \|\varkappa_\nu k_\nu^2 F_\nu\|_{L^1(G)} \quad \forall\, F_\nu\in L^p(G), \quad p\in(3/2,\infty], \tag{3.11}$$

$$\|k_\nu^{-2}\langle\mathcal{A}_{d,\nu}\rangle_\Omega(F_\nu)\|_{L^\infty(G)} \leqslant \|F_\nu\|_{L^\infty(G)} \quad \forall\, F_\nu\in L^\infty(G), \tag{3.12}$$

$$0 \leqslant k_\nu^{-2}\langle\mathcal{A}_{d,\nu}\rangle_\Omega(1) \leqslant 1 \tag{3.13}$$

и оценка

$$4\pi\|\varkappa_\nu\langle\mathcal{D}_{d,\nu}\rangle_\Omega(J_{*\nu})\|_{L^p(G)} \leqslant 4^{1/p'}\varkappa_{\max,\nu}^{1/p'} k_{\max,\nu}^{2/p'}\,\|J_{*\nu}\|_{\widehat{L}^{1,p}(\overset{*}{S}{}^-)} \quad \forall\, J_{*\nu}\in\widehat{L}^{1,p}(\overset{*}{S}{}^-), \quad p\in(3/2,\infty], \tag{3.14}$$

где $\varkappa_{\max,\nu} = \max\limits_{1\leqslant j\leqslant m}\varkappa_{j,\nu}$, $k_{\max,\nu} = \max\limits_{1\leqslant j\leqslant m} k_{j,\nu}$.

В [13] установлен следующий результат о самосопряженности оператора $\varkappa_\nu\langle\mathcal{A}_{d,\nu}\rangle_\Omega$.

Теорема 3.4. *Для всех $p,q\in(3/2,\infty]$, $1/p+1/q\leqslant 1$ справедливо тождество*

$$(\varkappa_\nu\langle\mathcal{A}_{d,\nu}\rangle_\Omega(F),v)_G = (F,\varkappa_\nu\langle\mathcal{A}_{d,\nu}\rangle_\Omega(v))_G \quad \forall\, F\in L^p(G), \quad \forall\, v\in L^q(G). \tag{3.15}$$

4. Задача $\mathcal{P}_d$ и формулировка результатов о ее свойствах

4.1. Предположения о данных, оператор $\mathcal{H}_d$ и функция f_*. Будем считать выполненными следующие предположения о данных:

(A_1) *$\varkappa_{\nu,j} > 0$, $s_{\nu,j} \geqslant 0$, $k_{\nu,j} > 1$ для всех $\nu\in\mathfrak{N}$ и $1\leqslant j\leqslant m$. Кроме того, $\varkappa_{\nu,j}, s_{\nu,j}, k_{\nu,j} \in \mathfrak{M}(\mathcal{N})$ для всех $1\leqslant j\leqslant m$.*

(A_2) *$\theta_{j,\nu}\in L^1(-1,1)$, $\theta_{j,\nu}\geqslant 0$, $\dfrac{1}{2}\int\limits_{-1}^{1}\theta_{j,\nu}(\mu)\,d\mu = 1$ для всех $\nu\in\mathfrak{N}$ и $1\leqslant j\leqslant m$; кроме того, $\theta_{j,\nu}\in\mathfrak{M}(\mathcal{N};L^1(-1,1))$ для всех $1\leqslant j\leqslant m$.*

(A_3) *$\rho_{j,\nu}^+\in L^\infty(\partial G_j)$, $0<\rho_{j,\nu}^+$ и $\|\rho_{j,\nu}^+\|_{L^\infty(\partial G_j)} < 1$ для всех $\nu\in\mathfrak{N}$ и $1\leqslant j\leqslant m$; кроме того, $\rho_{j,\nu}^+\in\mathfrak{M}(\mathcal{N};L^\infty(\partial G_j))$ для всех $1\leqslant j\leqslant m$.*

(A_4) *$c_p\in L^\infty(G)$; $0<\underline{c}_p\leqslant c_p(x)\leqslant\overline{c}_p$ для п.в. $x\in G$, где $\underline{c}_p$, $\overline{c}_p$ — постоянные.*

(A_5) *Функция $\lambda(x,u)$ определена на $G\times\mathbb{R}$ и удовлетворяет условиям Каратеодори, т. е. для п.в. $x\in G$ она непрерывна по u, а при любом $u\in\mathbb{R}$ измерима по x. Кроме того, справедливо неравенство*

$$0<\lambda_{\min}\leqslant\lambda(x,u)\leqslant\lambda_{\max}\quad\forall\,(x,u)\in G\times\mathbb{R}\tag{4.1}$$

с некоторыми постоянными $\lambda_{\min}$ и $\lambda_{\max}$.

(A_6) *Функция*

$$H(x,u)=4\pi\int\limits_{\mathcal{N}}\varkappa_\nu(x)k_\nu^2(x)h_\nu(u)\,d\nu+4\pi\sum_\ell\varkappa_{\nu_\ell}(x)k_{\nu_\ell}^2(x)h_{\nu_\ell}(u)\Delta\nu_\ell,\tag{4.2}$$

определена на $G\times\mathbb{R}$ и удовлетворяет неравенству

$$|H(x,u)|\leqslant c_H(|u|^s+1)\quad\forall\,(x,u)\in G\times\mathbb{R}\tag{4.3}$$

с некоторыми постоянными $s>3/2$, $c_H>0$.

(A_7) $u^0\in L^p(G)$ *и* $f_0\in L^{r_0,q_0}(Q_T)$, *где* $p,r_0,q_0\in[1,\infty]$.

(A_8) *Функция $J_{*\nu}$ определена на $\mathfrak{N}\times\overset{*}{S}{}^-\times(0,T)$. Существуют показатели $r_*\in[1,\infty]$ и $q_*\in(3/2,\infty]$ такие, что $J_{*\nu}\in\mathfrak{M}(\mathcal{N}\times(0,T);\widehat{L}^{1,q_*}(\overset{*}{S}{}^-))$ и $J_{*\nu}\in\mathfrak{M}(0,T;\widehat{L}^{1,q_*}(\overset{*}{S}{}^-))$ для всех $\nu\in\{\nu_\ell\}$. Кроме того, конечна величина*

$$|||J_*|||_{r_*,q_*}=4^{1/q_*'}\Big\|\int\limits_{\mathcal{N}}\varkappa_{\max,\nu}^{1/q_*'}k_{\max,\nu}^{2/q_*'}\,\|J_{*\nu}\|_{\widehat{L}^{1,q_*}(\overset{*}{S}{}^-)}\,d\nu+\sum_\ell\varkappa_{\max,\nu_\ell}^{1/q_*'}k_{\max,\nu_\ell}^{2/q_*'}\,\|J_{*\nu_\ell}\|_{\widehat{L}^{1,q_*}(\overset{*}{S}{}^-)}\,\Delta\nu_\ell\Big\|_{L^{r_*}(0,T)}.$$

Заметим, что из непрерывности и монотонности функции $h_\nu(u)$ по u следует непрерывность и монотонность $H(x,u)$ по u. Обратим также внимание на то, что функция $H(x,u)$ удовлетворяет условиям Каратеодори, так как при фиксированном $u\in\mathbb{R}$ она является кусочно постоянной функцией аргумента x.

Для математической формулировки рассматриваемой в статье задачи нам потребуется оператор $\mathcal{H}_d[u]$, задаваемый формулой

$$\mathcal{H}_d[u]=4\pi\int\limits_{\mathcal{N}}\varkappa_\nu\langle\mathcal{A}_{d,\nu}\rangle_\Omega(h_\nu(u))\,d\nu+4\pi\sum_\ell\varkappa_{\nu_\ell}\langle\mathcal{A}_{d,\nu_\ell}\rangle_\Omega(h_{\nu_\ell}(u))\,\Delta_{\nu_\ell}.\tag{4.4}$$

Лемма 4.1. *Пусть выполнены условия (A_1)–(A_3), (A_6) Тогда $\mathcal{H}_d:L^s(G)\to L^1(G)$, причем справедливы оценки*

$$\|\mathcal{H}_d[u]\|_{L^1(G)}\leqslant\|H(\cdot,u)\|_{L^1(G)}\leqslant c_H\||u|^s+1\|_{L^1(G)}\quad\forall\,u\in L^s(G),\tag{4.5}$$

$$\|\mathcal{H}_d[u]-\mathcal{H}_d[\widetilde{u}]\|_{L^1(G)}\leqslant\|H(\cdot,u)-H(\cdot,\widetilde{u})\|_{L^1(G)}\quad\forall\,u,\widetilde{u}\in L^s(G).\tag{4.6}$$

Доказательство. Из непрерывности функции $h_\nu(u)$ по u и очевидной оценки

$$|h_\nu(u)|\leqslant\frac{2\nu^2}{c_0^2}\widehat{k}\,|u|\quad\forall\,u\in\mathbb{R}\tag{4.7}$$

вытекает, что из $u\in L^s(G)$ следует $h_\nu(u)\in L^s(G)$ для всех $\nu\in\mathfrak{N}$. Значит, $\langle\mathcal{A}_{d,\nu}\rangle_\Omega(h_\nu(u))\in L^s(G)$ для всех $\nu\in\mathfrak{N}$.

Покажем, что $\langle\mathcal{A}_{d,\nu}\rangle_\Omega(h_\nu(u))\in\mathfrak{M}(\mathcal{N}\times G)$. Поскольку функция h_ν непрерывна по ν и удовлетворяет оценке (4.7), то $h_\nu(u)\in C(\mathcal{N};L^s(G))$. Поэтому существует последовательность определенных на $\mathcal{N}$ простых функций $\{h_\nu(u)^{(n)}\}_{n=1}^\infty$ со значениями в $L^s(G)$ такая, что $h_\nu(u)^{(n)}\to h_\nu(u)$ в $L^s(G)$ для почти всех $\nu\in\mathcal{N}$.

Из предположений (A_1)–(A_6) для всех $1\leqslant j\leqslant m$ следует существование последовательностей определенных на $\mathcal{N}$ простых функций $\{\varkappa_{\nu,j}^{(n)}\}_{n=1}^\infty$, $\{s_{\nu,j}^{(n)}\}_{n=1}^\infty$, $\{k_{\nu,j}^{(n)}\}_{n=1}^\infty$, последовательности определенных на $\mathcal{N}$ простых функций $\{\theta_{j,\nu}^{(n)}\}_{n=1}^\infty$ со значениями в $L^1(-1,1)$ и последовательности определенных на $\mathcal{N}$ простых функций $\{\rho_{j,\nu}^{+,(n)}\}_{n=1}^\infty$ со значениями в $L^\infty(\partial G_j)$ таких, что: $\varkappa_{\nu,j}^{(n)}\to\varkappa_{\nu,j}$, $s_{\nu,j}^{(n)}\to s_{\nu,j}$, $k_{\nu,j}^{(n)}\to k_{\nu,j}$ для п.в. $\nu\in\mathcal{N}$, $\theta_{j,\nu}^{(n)}\to\theta_{j,\nu}$ в $L^1(-1,1)$ для п.в. $\nu\in\mathcal{N}$ и $\rho_{j,\nu}^{+,(n)}\to\rho_{j,\nu}^+$ в

$L^\infty(\partial G_j)$ для п.в. $\nu \in \mathcal{N}$. Кроме того, можно считать, что $\varkappa_{j,\nu}^{(n)} > 0$, $s_{j,\nu}^{(n)} \geqslant 0$, $k_{j,\nu}^{(n)} > 1$, $\theta_{j,\nu}^{(n)} \geqslant 0$, $\dfrac{1}{2}\int\limits_{-1}^{1} \theta_{j,\nu}^{(n)}(\mu)\,d\mu = 1$, $0 < \rho_j^{+,(n)}$, $\max\limits_{1\leqslant j\leqslant m} \|\rho_j^{+,(n)}\|_{L^\infty(\partial G_j)} < 1$.

Заменяя в задаче (3.9), (3.10) данные $\varkappa_{\nu,j}$, $s_{\nu,j}$, β_ν, $k_{\nu,j}$, $\theta_{j,\nu}$, $\rho_{j,\nu}^+$, F_ν на $\varkappa_{\nu,j}^{(n)}$, $s_{\nu,j}^{(n)}$, $\beta_\nu^{(n)} = \varkappa_\nu^{(n)} + s_\nu^{(n)}$, $k_{\nu,j}^{(n)}$, $\theta_{j,\nu}^{(n)}$, $\rho_{j,\nu}^{+,(n)}$, $h_\nu^{(n)}(u)$ и полагая $J_{*\nu} = 0$, приходим к последовательности задач

$$\omega \cdot \nabla I_\nu^{(n)} + \beta_\nu^{(n)} I_\nu^{(n)} = s_\nu^{(n)} \mathcal{S}_\nu^{(n)}(I_\nu^{(n)}) + \varkappa_\nu^{(n)} (k_\nu^{(n)})^2 h_\nu^{(n)}(u), \quad (\omega, x) \in D,$$
$$I_\nu^{(n)}|_{\Gamma^-} = \mathfrak{B}_{d,\nu}^{(n)}(I_\nu^{(n)}|_{\Gamma^+}), \quad (\omega, x) \in \Gamma^-.$$

Решая эти задачи для всех $n \geqslant 1$ и $\nu \in \mathcal{N}$, получаем последовательность $\{I_\nu^{(n)}\}_{n=1}^\infty$ простых функций, определенных на $\mathcal{N}$ и принимающих значения в $\widehat{\mathcal{W}}^s(D)$.

Из теоремы о непрерывной зависимости решения задачи (3.9), (3.10) от данных, доказанной в [13], следует, что $I_\nu^{(n)} \to \mathcal{A}_{d,\nu}(h_\nu(u))$ в $\mathcal{W}^1(D)$ для почти всех $\nu \in \mathcal{N}$. Таким образом, $\mathcal{A}_{d,\nu}(h_\nu(u)) \in \mathfrak{M}(\mathcal{N}; \mathcal{W}^1(D))$. Как следствие, $\langle \mathcal{A}_{d,\nu} \rangle_\Omega (h_\nu(u)) \in \mathfrak{M}(\mathcal{N}; L^1(G)) \subset \mathfrak{M}(\mathcal{N} \times G)$.

Пользуясь оценкой (3.11) с $F_\nu = h_\nu(u)$, имеем:

$$\|\mathcal{H}_d[u]\|_{L^1(G)} \leqslant 4\pi \int\limits_{\mathcal{N}} \|\varkappa_\nu \langle \mathcal{A}_{d,\nu} \rangle_\Omega (h_\nu(u))\|_{L^1(G)}\,d\nu + 4\pi \sum_\ell \|\varkappa_{\nu_\ell} \langle \mathcal{A}_{d,\nu_\ell} \rangle_\Omega (h_{\nu_\ell}(u)\|_{L^1(G)} \Delta\nu_\ell \leqslant$$
$$\leqslant 4\pi \int\limits_{\mathcal{N}} \|\varkappa_\nu k_\nu^2 h_\nu(u)\|_{L^1(G)}\,d\nu + 4\pi \sum_\ell \|\varkappa_{\nu_\ell} k_{\nu_\ell}^2 h_{\nu_\ell}(u)\|_{L^1(G)} \Delta\nu_\ell =$$
$$= \Big\| 4\pi \int\limits_{\mathcal{N}} \varkappa_\nu k_\nu^2 h_\nu(|u|)\,d\nu + 4\pi \sum_\ell \varkappa_{\nu_\ell} k_{\nu_\ell}^2 h_{\nu_\ell}(|u|) \Delta\nu_\ell \Big\|_{L^1(G)} = \|H(\cdot, |u|)\|_{L^1(G)} \leqslant c_H \||u|^s + 1\|_{L^1(G)}.$$

Аналогично

$$\|\mathcal{H}_d[u] - \mathcal{H}_d[\widetilde{u}]\|_{L^1(G)} \leqslant$$
$$\leqslant 4\pi \int\limits_{\mathcal{N}} \|\varkappa_\nu \langle \mathcal{A}_{d,\nu} \rangle_\Omega (h_\nu(u) - h_\nu(\widetilde{u}))\|_{L^1(G)}\,d\nu + 4\pi \sum_\ell \|\varkappa_{\nu_\ell} \langle \mathcal{A}_{d,\nu_\ell} \rangle_\Omega (h_{\nu_\ell}(u) - h_{\nu_\ell}(\widetilde{u}))\|_{L^1(G)} \Delta\nu_\ell \leqslant$$
$$\leqslant 4\pi \int\limits_{\mathcal{N}} \|\varkappa_\nu k_\nu^2 |h_\nu(u) - h_\nu(\widetilde{u})|\|_{L^1(G)}\,d\nu + 4\pi \sum_\ell \|\varkappa_{\nu_\ell} k_{\nu_\ell}^2 |h_{\nu_\ell}(u) - h_{\nu_\ell}(\widetilde{u})|\|_{L^1(G)} \Delta\nu_\ell =$$
$$= \Big\| 4\pi \int\limits_{\mathcal{N}} \varkappa_\nu k_\nu^2 |h_\nu(u) - h_\nu(\widetilde{u})|\,d\nu + 4\pi \sum_\ell \varkappa_{\nu_\ell} k_{\nu_\ell}^2 |h_{\nu_\ell}(u) - h_{\nu_\ell}(\widetilde{u})| \Delta\nu_\ell \Big\|_{L^1(G)} = \|H(\cdot, u) - H(\cdot, \widetilde{u})\|_{L^1(G)}.$$

Последнее равенство имеет место в силу монотонности $h_\nu(u)$ по u при всех ν. □

Следствие 4.1. *Оператор $\mathcal{H}_d$ является непрерывным оператором, действующим из $L^s(G)$ в $L^1(G)$.*

Следствие 4.2. *Оператор $\mathcal{H}_d$ является непрерывным оператором, действующим из $L^s(Q_T)$ в $L^1(Q_T)$, причем справедливы оценки*

$$\|\mathcal{H}_d[u]\|_{L^1(Q_T)} \leqslant \|H(\cdot, u)\|_{L^1(Q_T)} \leqslant c_H \||u|^s + 1\|_{L^1(Q_T)} \quad \forall\, u \in L^s(Q_T), \tag{4.8}$$
$$\|\mathcal{H}_d[u] - \mathcal{H}_d[\widetilde{u}]\|_{L^1(Q_T)} \leqslant \|H(\cdot, u) - H(\cdot, \widetilde{u})\|_{L^1(Q_T)} \quad \forall\, u, \widetilde{u} \in L^s(Q_T). \tag{4.9}$$

Лемма 4.2. *Справедливы неравенства*

$$\|\mathcal{H}[u]\|_{L^\infty(G)} \leqslant \|H(\cdot, \|u\|_{L^\infty(G)})\|_{L^\infty(G)} \leqslant c_H (\|u\|_{L^\infty(G)}^s + 1) \quad \forall\, u \in L^\infty(G).$$

Доказательство. Пользуясь оценкой (3.12), имеем

$$\|\mathcal{H}[u]\|_{L^\infty(G)} \leqslant \Big\| 4\pi \int\limits_{\mathcal{N}} \varkappa_\nu \langle \mathcal{A}_{d,\nu} \rangle_\Omega (h_\nu(|u|))\,d\nu + 4\pi \sum_\ell \varkappa_{\nu_\ell} \langle \mathcal{A}_{d,\nu_\ell} \rangle_\Omega (h_{\nu_\ell}(|u|)) \Delta\nu_\ell \Big\|_{L^\infty(G)} \leqslant$$
$$\leqslant \Big\| 4\pi \int\limits_{\mathcal{N}} \varkappa_\nu k_\nu^2 h_\nu(\|u\|_{L^\infty(G)})\,d\nu + 4\pi \sum_\ell \varkappa_{\nu_\ell} k_{\nu_\ell}^2 h_{\nu_\ell}(\|u\|_{L^\infty(G)}) \Delta\nu_\ell \Big\|_{L^\infty(G)} =$$
$$= \|H(\cdot, \|u\|_{L^\infty(G)})\|_{L^\infty(G)} \leqslant c_H (\|u\|_{L^\infty(G)}^s + 1).$$

□

Лемма 4.3. *Пусть выполнены условия* (A_1)–(A_3), (A_8). *Тогда функция*

$$f_* = 4\pi \int\limits_{\mathcal{N}} \varkappa_\nu \langle \mathcal{D}_{d,\nu}\rangle_\Omega (J_{*\nu})\, d\nu + 4\pi \sum_\ell \varkappa_{\nu_\ell} \langle \mathcal{D}_{d,\nu_\ell}\rangle_\Omega (J_{*\nu_\ell})\, \Delta\nu_\ell$$

принадлежит пространству $L^{r_*,q_*}(Q_T)$, *причем справедлива оценка*

$$\|f_*\|_{L^{r_*,q_*}(Q_T)} \leqslant |||J_*|||_{r_*,q_*}. \tag{4.10}$$

Доказательство. Из сделанных предположений следует существование последовательности определенных на $\mathcal{N}\times(0,T)$ простых функций $\{J_{*\nu}^{(n)}\}_{n=1}^\infty$ со значениями в $\widehat{L}^{1,q_*}(\overset{*}{S}{}^-)$ и для каждого $\nu\in\{\nu_\ell\}$ — последовательности определенных на $(0,T)$ простых функций $\{J_{*\nu}^{(n)}\}_{n=1}^\infty$ со значениями в $\widehat{L}^{1,q_*}(\overset{*}{S}{}^-)$ таких, что: $J_{*\nu}^{(n)}\to J_{*\nu}$ в $\widehat{L}^{1,q_*}(\overset{*}{S}{}^-)$ для п.в. $(\nu,t)\in\mathcal{N}\times(0,T)$ и $J_{*\nu}^{(n)}\to J_{*\nu}$ в $\widehat{L}^{1,q_*}(\overset{*}{S}{}^-)$ для п.в. $t\in(0,T)$ и всех $\nu\in\{\nu_\ell\}$ при $n\to\infty$.

Заменяя в задаче (3.9), (3.10) данные $\varkappa_{\nu,j}$, $s_{\nu,j}$, β_ν, $k_{\nu,j}$, $\theta_{j,\nu}$, $\rho_{j,\nu}^+$ на те же данные $\varkappa_{\nu,j}^{(n)}$, $s_{\nu,j}^{(n)}$, $\beta^{(n)}$, $k_{\nu,j}^{(n)}$, $\theta_{j,\nu}^{(n)}$, $\rho_{j,\nu}^{+,(n)}$, что и в доказательстве леммы 4.1, полагая $F_\nu=0$ и заменяя $J_{*\nu}$ на $J_{*,\nu}^{(n)}$, приходим к последовательности задач

$$\begin{aligned} &\omega\cdot\nabla I_\nu^{(n)} + \beta_\nu^{(n)} I_\nu^{(n)} = s_\nu^{(n)} \mathcal{S}_\nu^{(n)}(I_\nu^{(n)}), \quad (\omega,x)\in D,\\ &I_\nu^{(n)}|_{\Gamma^-} = \mathfrak{B}_{d,\nu}^{(n)}(I_\nu^{(n)}|_{\Gamma^+}) + \mathfrak{C}_{d,\nu}^{(n)}(J_{*\nu}^{(n)}), \quad (\omega,x)\in\Gamma^-. \end{aligned}$$

Решая эти задачи для всех $n\geqslant 1$ и $\nu\in\mathfrak{N}$, получаем последовательность $\{I_\nu^{(n)}\}_{n=1}^\infty$ простых функций, определенных на $\mathcal{N}\times(0,T)$ и принимающих значения в $\widehat{\mathcal{W}}^{q_*}(D)$, а также для всех $\nu_\ell\subset\{\nu_\ell\}$ — последовательности $\{I_{\nu_\ell}^{(n)}\}_{n=1}^\infty$ простых функций, определенных на $(0,T)$ и принимающих значения в $\widehat{\mathcal{W}}^{q_*}(D)$.

Из [13] следует, что $I_\nu^{(n)}\to\mathcal{D}_{d,\nu}(J_{*\nu})$ в $\mathcal{W}^1(D)$ для п.в. $(\nu,t)\in\mathcal{N}\times(0,T)$ и $I_{\nu_\ell}^{(n)}\to\mathcal{D}_{d,\nu_\ell}(J_{*\nu_\ell})$ в $\mathcal{W}^1(D)$ для п.в. $t\in(0,T)$ и всех $\nu_\ell\in\{\nu_\ell\}$. Таким образом, $\mathcal{D}_{d,\nu}(J_{*\nu})\in\mathfrak{M}(\mathcal{N}\times(0,T);\mathcal{W}^1(D))$ и $\mathcal{D}_{d,\nu_\ell}(J_{*\nu_\ell})\in\mathfrak{M}((0,T);\mathcal{W}^1(D))$, Значит, $\langle\mathcal{D}_{d,\nu}\rangle_\Omega(J_{*\nu})\in\mathfrak{M}(\mathcal{N}\times(0,T);L^1(G))\subset\mathfrak{M}(\mathcal{N}\times Q_T)$ и $\langle\mathcal{D}_{d,\nu_\ell}\rangle_\Omega(J_{*\nu_\ell})\in\mathfrak{M}(0,T;L^1(G))\subset\mathfrak{M}(Q_T)$.

Для завершения доказательства леммы осталось заметить, что в силу оценки (3.14) справедливы неравенства

$$\begin{aligned} &\|f_*\|_{L^{r_*,q_*}(Q_T)}\leqslant\\ &\leqslant \Big\|4\pi\int\limits_{\mathcal{N}} \|\varkappa_\nu\langle\mathcal{D}_{d,\nu}\rangle_\Omega(J_{*\nu})\|_{L^{q_*}(G)}\,d\nu + 4\pi\sum_\ell \|\varkappa_\nu\langle\mathcal{D}_{d,\nu}\rangle_\Omega(J_{*\nu})\|_{L^{q_*}(G)}\Delta\nu_\ell\Big\|_{L^{r_*}(0,T)} \leqslant |||J_*|||_{r_*,q_*}. \end{aligned}$$

□

4.2. Задача $\mathcal{P}_d$ и формулировка результатов об ее свойствах. В силу описанных в разделе 3 результатов входящая в задачу (1.1)–(1.5) неизвестная функция I_ν может быть выражена формулой

$$I_\nu = \mathcal{A}_{d,\nu}(h_\nu(u)) + \mathcal{D}_{d,\nu}(J_{*,\nu}),$$

(т. е. формулой (3.4) с $F_\nu = h_\nu(u)$) и исключена из задачи. Как следствие, исходная задача может быть сведена к следующей задаче, которую далее будем называть задачей $\mathcal{P}_d$:

$$c_p D_t u - \operatorname{div}(\lambda(x,u)\nabla u) + H(x,u) = \mathcal{H}_d[u] + f, \quad (x,t)\in Q_T, \tag{4.11}$$

$$\lambda(x,u)\nabla u\cdot n_j = 0, \quad (x,t)\in\partial G_j\times(0,T), \quad 1\leqslant j\leqslant m, \tag{4.12}$$

$$u(x,0) = u^0(x), \quad x\in G. \tag{4.13}$$

Введем следующие обозначения:

$$a(u,v) = (\lambda(\cdot,u)\nabla u,\nabla v)_G = \int\limits_G \lambda(x,u(x))\nabla u(x)\cdot\nabla v(x)\,dx,$$

$$b(u,v) = (H(\cdot,u)-\mathcal{H}_d[u],v)_G = 4\pi\int\limits_{\mathcal{N}} b_\nu(u,v)\,d\nu + 4\pi\sum_\ell b_{\nu_\ell}(u,v)\Delta\nu_\ell,$$

где

$$b_\nu(u,v) = (\varkappa_\nu k_\nu^2 h_\nu(u), v)_G - (\varkappa_\nu \langle \mathcal{A}_{d,\nu}\rangle_\Omega (h_\nu(u)), v)_G.$$

Введем пространства функций

$$\mathcal{V}(Q_T) = V_2(Q_T) \cap C([0,T]; L^1(G)) \cap L^s(Q_T), \quad V = W^{1,2}(G) \cap L^\infty(G).$$

Наряду с пространством $C_0^\infty[0,T]$ бесконечно дифференцируемых финитных на $[0,T]$ функций мы будем использовать пространство $C_*^\infty[0,T]$ функций $\eta \in C^\infty[0,T]$ таких, что $\eta(t) = 0$ для всех $t \in [T-\delta, T]$, где $\delta = \delta(\eta) \in (0,T]$.

Функцию $u \in \mathcal{V}(Q_T)$ назовем *слабым решением задачи* $\mathcal{P}_d$, если она удовлетворяет интегральному тождеству

$$-\int_0^T (c_p u(t), v)_G \frac{d}{dt}\eta(t)\,dt + \int_0^T a(u(t), v)\eta(t)\,dt + \int_0^T b(u(t), v)\eta(t)\,dt =$$

$$= (c_p u^0, v)_G \cdot \eta(0) + \int_0^T (f(t), v)_G \eta(t)\,dt \quad \forall\, v \in V, \quad \forall\, \eta \in C_*^\infty[0,T]. \quad (4.14)$$

Сформулируем теперь кратко основные результаты статьи.

Теорема 4.1. *Пусть выполнены условия* (A_1)–(A_8) *и пусть показатели* p, r_0, q_0, r_*, q_**, входящие в условия* (A_7), (A_8)*, дополнительно таковы, что*

$$p \in [2,\infty), \quad 2/r_0 + 3/q_0 \leqslant 2 + 3/p, \quad 2/r_* + 3/q_* \leqslant 2 + 3/p, \quad (4.15)$$

и пусть u — *слабое решение задачи* $\mathcal{P}_d$*. Тогда* $|u|^{\gamma-1}u \in V_2(Q_T)$ *для всех* $\gamma \in [1, p/2]$*, причем справедлива оценка*

$$\| |u|^{\gamma-1}u \|_{V_2(Q_T)}^{1/\gamma} \leqslant C(\|u^0\|_{L^p(G)} + \|f_0\|_{L^{r_0,q_0}(Q_T)} + \||J_*\||_{r_*,q_*}). \quad (4.16)$$

Здесь и всюду ниже через C (с индексами или без) обозначаются различные положительные постоянные, которые могут зависеть от G, T, $\underline{c}_p$, $\overline{c}_p$, $\lambda_{\min}$, $\lambda_{\max}$ и p, r_0, q_0, r_*, q_*.

Теорема 4.2. *Пусть выполнены условия* (A_1)–(A_8) *и пусть показатели* p, r_0, q_0, r_*, q_**, входящие в условия* (A_7), (A_8)*, дополнительно таковы, что*

$$p = \infty, \quad 2/r_0 + 3/q_0 < 2, \quad 2/r_* + 3/q_* < 2, \quad (4.17)$$

и пусть u — *слабое решение задачи* $\mathcal{P}_d$*. Тогда* $u \in L^\infty(Q_T)$*, причем справедлива оценка*

$$\|u\|_{L^\infty(Q_T)} \leqslant M_\infty = C(\|u^0\|_{L^\infty(G)} + \|f_0\|_{L^{r_0,q_0}(Q_T)} + \||J_*\||_{r_*,q_*}). \quad (4.18)$$

Поскольку по физическому смыслу задачи u — это абсолютная температура, важно показать, что при естественных предположениях на данные эта величина неотрицательна. Справедлив следующий результат.

Теорема 4.3. *Пусть выполнены условия* (A_1)–(A_8) *и пусть* u — *слабое решение задачи* $\mathcal{P}_d$*. Если* $u^0 \geqslant 0$ *и* $f \geqslant 0$*, то* $u \geqslant 0$.

Справедлива следующая теорема об устойчивости слабых решений задачи $\mathcal{P}_d$ по данным.

Теорема 4.4. *Пусть выполнены условия* (A_1)–(A_6) *и дополнительное условие*

(A_9) *Функция* λ *удовлетворяет следующему условию Гельдера по переменной* u:

$$|\lambda(x, u+v) - \lambda(x,u)| \leqslant L v^{1/2} \quad \forall\,(x,u) \in G \times \mathbb{R}, \quad \forall\, v \in [0,1],$$

где L — *положительная постоянная.*

Пусть u^1, u^2 — *два слабых решения задачи* $\mathcal{P}_d$*, отвечающие данным* $u^{0,1}, u^{0,2} \in L^1(G)$ *и* $f^1, f^2 \in L^1(Q_T)$*. Тогда справедливы оценки*

$$\|c_p(u^1 - u^2)_+\|_{C([0,T];L^1(G))} \leqslant \|c_p(u^{0,1} - u^{0,2})_+\|_{L^1(G)} + \|(f^1 - f^2)_+\|_{L^1(Q_T)}, \quad (4.19)$$

$$\|c_p(u^1 - u^2)_-\|_{C([0,T];L^1(G))} \leqslant \|c_p(u^{0,1} - u^{0,2})_-\|_{L^1(G)} + \|(f^1 - f^2)_-\|_{L^1(Q_T)} \quad (4.20)$$

и оценка

$$\|c_p(u^1 - u^2)\|_{C([0,T];L^1(G))} \leqslant \|c_p(u^{0,1} - u^{0,2})\|_{L^1(G)} + \|f^1 - f^2\|_{L^1(Q_T)}. \tag{4.21}$$

Очевидными следствиями теоремы 4.4 являются следующие два результата.

Теорема 4.5 (теорема единственности). *Пусть выполнены условия* (A_1)–(A_9). *Если слабое решение задачи* $\mathcal{P}_d$ *существует, то оно единственно.*

Теорема 4.6 (теорема сравнения). *Пусть выполнены условия* (A_1)–(A_6), (A_9). *Пусть* u^1, u^2 — *два слабых решения задачи* $\mathcal{P}_d$, *отвечающие данным* $u^{0,1}, u^{0,2} \in L^1(G)$ *и* $f^1, f^2 \in L^1(Q_T)$. *Если* $u^{0,1} \leqslant u^{0,2}$ *и* $f^1 \leqslant f^2$, *то* $u^1 \leqslant u^2$.

Справедливы следующие результаты о разрешимости задачи $\mathcal{P}_d$.

Теорема 4.7. *Пусть выполнены условия теоремы* 4.2. *Тогда у задачи* $\mathcal{P}_d$ *существует слабое решение* $u \in V_2^{1,0}(Q_T) \cap L^\infty(Q_T)$.

Теорема 4.8. *Пусть выполнены условия теоремы* 4.1, *условие* (A_9) *и пусть* $p \geqslant 3s/5$. *Тогда у задачи* $\mathcal{P}_d$ *существует слабое решение и оно единственно.*

Сформулируем результат о регулярности слабого решения задачи $\mathcal{P}_d$ в предположении, что в одной из областей G_j коэффициент λ удовлетворяет следующему условию:

(A_{10}) $\lambda(x,u) = \lambda_j(u)$ *для всех* $x \in G_j$, *причем функция* λ_j *удовлетворяет следующему условию Гельдера:*

$$|\lambda_j(u+v) - \lambda_j(u)| \leqslant Lv^{1/2} \quad \forall\, u \in \mathbb{R}, \quad \forall\, v \in [0,1],$$

где L — *положительная постоянная.*

Обозначим через u_j сужение слабого решения u задачи $\mathcal{P}_d$ на $Q_{jT} = G_j \times (0,T)$ и положим $\Lambda_j(u) = \int\limits_0^u \lambda_j(s)\,ds$. Заметим, что при выполнении условия (A_{10}) справедливо равенство $\lambda_j(u_j)\nabla u_j = \nabla\Lambda_j(u_j)$.

Назовем слабое решение u задачи $\mathcal{P}_d$ *регулярным* в области G_j, если $D_t u_j \in L^2(Q_{jT})$, $\Lambda_j(u_j) \in L^2(0,T;W^{2,2}(G_j))$, уравнение

$$c_p D_t u_j - \operatorname{div}(\lambda_j(u_j)\nabla u_j) + H(x,u_j) = \mathcal{H}_d[u] + f, \quad (x,t) \in Q_{jT} \tag{4.22}$$

выполняется в $L^2(Q_{jT})$, а краевое условие

$$\lambda_j(u_j)\nabla u_j \cdot n_j = 0, \quad (x,t) \in \partial G_j \times (0,T) \tag{4.23}$$

выполняется в $L^2(0,T;W^{1/2,2}(\partial G_j))$.

Теорема 4.9. *Пусть выполнены условия теоремы* 4.2. *Пусть для некоторого* j, $1 \leqslant j \leqslant m$, *выполнено условие* (A_{10}) *и дополнительно* $u^0 \in W^{1,2}(G_j)$. *Тогда слабое решение задачи* $\mathcal{P}_d$ *регулярно в области* G_j *и справедлива оценка*

$$\begin{aligned}\|D_t u_j\|_{L^2(Q_{jT})} + \|\Lambda_j(u_j)\|_{L^2(0,T;W^{2,2}(G_j))} \leqslant \\ \leqslant C\Big(\|\nabla u^0\|_{L^2(G_j)} + \|u^0\|^s_{L^\infty(G)} + \|f_0\|^s_{L^{r_0,q_0}(Q_T)} + \||J_*\||^s_{r_*,q_*} + 1\Big)\end{aligned} \tag{4.24}$$

с постоянной C, *зависящей от* G, T, $\underline{c}_p$, $\overline{c}_p$, $\lambda_{\min}$, $\lambda_{\max}$, r_0, q_0, r_*, q_* *и* c_H.

Справедливость теорем 4.1–4.9 следует из результатов разделов 5–9.

5. Априорные оценки слабых решений задач $\mathcal{P}_d$ и $\mathcal{P}_d^{[n]}$

Для доказательства разрешимости задачи $\mathcal{P}_d$ нам потребуется вспомогательная задача $\mathcal{P}_d^{[n]}$, которая отличается от задачи $\mathcal{P}_d$ только тем, что в ее формулировке функция $h_\nu(u)$ заменена на $h_\nu(u^{[n]})$, где $0 < n$ — параметр. Напомним, что $u^{[n]} = \max\{-n, \min\{u,n\}\}$.

Функцию $u \in V_2^{1,0}(Q_T)$ назовем *слабым решением задачи* $\mathcal{P}_d^{[n]}$, если она удовлетворяет интегральному тождеству

$$-\int_0^T (c_p u(t), v)_G \frac{d}{dt}\eta(t)\,dt + \int_0^T a(u(t), v)\eta(t)\,dt + \int_0^T b(u^{[n]}(t), v)\eta(t)\,dt = (c_p u^0, v)_G \cdot \eta(0) +$$

$$= \int_0^T (f(t), v)_G \eta(t)\,dt \quad \forall\, v \in W_2^1(G), \quad \forall\, \eta \in C_*^\infty[0,T]. \quad (5.1)$$

Выведем априорные оценки слабых решений задачи $\mathcal{P}_d$ и задачи $\mathcal{P}_d^{[n]}$, считая выполненными условия (A_1)–(A_8).

Важную роль в дальнейшем играет следующее утверждение.

Лемма 5.1. *Пусть* $\widetilde{w}$ — *заданная на* $\mathbb{R}$ *неубывающая непрерывная ограниченная функция такая, что* $\widetilde{w}(0) = 0$. *Тогда для всех* $\nu \in \mathfrak{N}$, $n > 0$ *справедливы неравенства*

$$b_\nu(u, \widetilde{w}(u)) \geqslant 0, \quad b_\nu(u^{[n]}, \widetilde{w}(u)) \geqslant 0 \quad \forall\, u \in L^s(G). \quad (5.2)$$

Доказательство. Пусть сначала u — простая функция вида $u(x) = \sum_{i=1}^N u_i \chi_i(x)$, где χ_i — характеристические функции измеримых попарно непересекающихся множеств E_i, $1 \leqslant i \leqslant N$ таких, что $G = \bigcup_{i=1}^N E_i$. Заметим, что

$$b_\nu(u, \widetilde{w}(u)) = (\varkappa_\nu k_\nu^2 h_\nu(u) - \varkappa_\nu \langle \mathcal{A}_{d,\nu}\rangle_\Omega (h_\nu(u)), \widetilde{w}(u))_G =$$
$$= (\varkappa_\nu k_\nu^2 h_\nu(u)[1 - k_\nu^{-2}\langle \mathcal{A}_{d,\nu}\rangle_\Omega(1)], \widetilde{w}(u))_G + (\varkappa_\nu h_\nu(u)\langle \mathcal{A}_{d,\nu}\rangle_\Omega(1) - \varkappa_\nu \langle \mathcal{A}_{d,\nu}\rangle_\Omega(h_\nu(u)), \widetilde{w}(u))_G.$$

Первое слагаемое в правой части этого равенства неотрицательно, потому что $h_\nu(u)\widetilde{w}(u) \geqslant 0$ и $1 - k_\nu^{-2}\langle \mathcal{A}_{d,\nu}\rangle_\Omega(1) \geqslant 0$ (см. (3.13)). Поэтому

$$b_\nu(u, \widetilde{w}(u)) \geqslant (h_\nu(u)\widetilde{w}(u), \varkappa_\nu \langle \mathcal{A}_{d,\nu}\rangle_\Omega(1))_G - (\varkappa_\nu \langle \mathcal{A}_{d,\nu}\rangle_\Omega(h_\nu(u)), \widetilde{w}(u))_G.$$

Пользуясь свойством (3.15) самосопряженности оператора $\varkappa_\nu \langle \mathcal{A}_{d,\nu}\rangle_\Omega$ и элементарными формулами

$$h(u) = \sum_{i=1}^N h(u_i)\chi_i, \quad \widetilde{w}(u) = \sum_{i=1}^N \widetilde{w}(u_i)\chi_i, \quad 1 = \sum_{j=1}^N \chi_j,$$

имеем:

$$2\, b_\nu(u, \widetilde{w}(u)) \geqslant (h_\nu(u)\widetilde{w}(u), \varkappa_\nu \langle \mathcal{A}_{d,\nu}\rangle_\Omega(1))_G + (\varkappa_\nu \langle \mathcal{A}_{d,\nu}\rangle_\Omega(1), h_\nu(u)\widetilde{w}(u))_G -$$
$$-(\varkappa_\nu \langle \mathcal{A}_{d,\nu}\rangle_\Omega(h_\nu(u)), \widetilde{w}(u))_G - (h_\nu(u), \varkappa_\nu \langle \mathcal{A}_{d,\nu}\rangle_\Omega(\widetilde{w}(u)))_G =$$
$$= \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N h_\nu(u_i)\widetilde{w}(u_i)(\chi_i, \varkappa_\nu \langle \mathcal{A}_{d,\nu}\rangle_\Omega(\chi_j))_G + \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N h_\nu(u_j)\widetilde{w}(u_j)(\varkappa_\nu \langle \mathcal{A}_{d,\nu}\rangle_\Omega(\chi_i), \chi_j)_G -$$
$$- \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N h_\nu(u_i)\widetilde{w}(u_j)(\varkappa_\nu \langle \mathcal{A}_{d,\nu}\rangle_\Omega(\chi_i), \chi_j)_G - \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N h_\nu(u_j)\widetilde{w}(u_i)(\chi_j, \varkappa_\nu \langle \mathcal{A}_{d,\nu}\rangle_\Omega(\chi_i))_G =$$
$$= \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N [h_\nu(u_i) - h_\nu(u_j)][\widetilde{w}(u_i) - \widetilde{w}(u_j)](\varkappa_\nu \langle \mathcal{A}_{d,\nu}\rangle_\Omega(\chi_i), \chi_j)_G \geqslant 0.$$

Последнее неравенство следует из монотонности функций h_ν, $\widetilde{w}$ и неотрицательности функции $\langle \mathcal{A}_{d,\nu}\rangle_\Omega(\chi_i)$.

Пусть теперь $u \in L^s(G)$. Построим последовательность простых функций $\{u^{(k)}\}_{k=1}^\infty$ такую, что $u^{(k)} \to u$ в $L^s(G)$ при $k \to \infty$. В силу доказанного выше $b_\nu(u^{(k)}, \widetilde{w}(u^{(k)})) \geqslant 0$.

Заметим, что $\sup\limits_{u \in \mathbb{R}} |h'_\nu(u)| < \infty$. Поэтому $h_\nu(u^{(k)}) \to h_\nu(u)$ в $L^s(G)$ и, как следствие, $\langle \mathcal{A}_{d,\nu}\rangle_\Omega(u^{(k)}) \to \langle \mathcal{A}_{d,\nu}\rangle_\Omega(u)$ в $L^1(G)$. Кроме того, $\widetilde{w}(u^{(k)}) \to \widetilde{w}(u)$ $*$-слабо в $L^\infty(G)$. Поэтому

$$b_\nu(u, \widetilde{w}(u)) = \lim_{k \to \infty} b_\nu(u^{(k)}, \widetilde{w}(u^{(k)})) \geqslant 0.$$

Первое из неравенств (5.2) доказано. Аналогично доказывается и второе неравенство. □

Следствие 5.1. *Пусть w — заданная на $\mathbb{R}$ неубывающая непрерывная функция такая, что $w(0)=0$. Тогда для всех $n>0$, $M>0$ справедливы неравенства*

$$b(u, w(u^{[0,M]})) \geqslant 0, \quad b(u^{[n]}, w(u^{[0,M]})) \geqslant 0 \quad \forall\, u \in L^s(G). \tag{5.3}$$

Доказательство. Взяв $\widetilde{w}(u) = w(u^{[0,M]})$ в лемме 5.1, имеем:

$$b(u, w(u^{[0,M]}) = 4\pi \int\limits_{\mathcal{N}} b_\nu(u, w(u^{[0,M]}))\, d\nu + 4\pi \sum_\ell b_{\nu_\ell}(u, w(u^{[0,M]}))\, \Delta\nu_\ell \geqslant 0,$$

$$b(u^{[n]}, w(u^{[0,M]})) = 4\pi \int\limits_{\mathcal{N}} b_\nu(u^{[n]}, w(u^{[0,M]}))\, d\nu + 4\pi \sum_\ell b_{\nu_\ell}(u^{[n]}, w(u^{[0,M]}))\, \Delta\nu_\ell \geqslant 0.$$

□

Справедливо следующее утверждение.

Лемма 5.2. *Пусть функция $u \in V_2(Q_T)$ удовлетворяет интегральному тождеству*

$$-\int_0^T (c_p u(t), v)_G \frac{d}{dt}\eta(t)\, dt = \int_0^T (F(t), \nabla v)_G\, \eta(t)\, dt + \sum_{k=1}^K \int_0^T (f_k(t), v)_G\, \eta(t)\, dt$$
$$\forall\, v \in W_2^1(G), \quad \forall\, \eta \in C_0^\infty[0,T], \tag{5.4}$$

где $F \in L^2(0,T;(L^2(G))^3)$, $f_k \in L^{r_k,q_k}(Q_T)$, $1 \leqslant k \leqslant K$ с показателями $r_k \in [1,\infty]$, $q_k \in [6/5,\infty]$, удовлетворяющими условию $2/r_k + 3/q_k \leqslant 7/2$. Тогда $u \in C([0,T];L^2(G))$.

Это утверждение при $c_p = \mathrm{const} > 0$ является стандартным для теории параболических уравнений. В случае, когда c_p удовлетворяет условию (A_4), его доказательство можно найти, например, в [10, лемма 4.1].

Напомним, что

$$u^0_+ = \max\{u^0, 0\}, \quad u^0_- = \max\{-u, 0\}, \quad f_+ = \max\{f, 0\}, \quad f_- = \max\{-f, 0\},$$
$$u_+ = \max\{u, 0\}, \quad u_- = \max\{-u, 0\}.$$

Лемма 5.3. *Пусть функция $u \in V_2(Q_T) \cap C([0,T];L^1(G))$ удовлетворяет интегральному тождеству*

$$-\int_0^T (c_p u(t), v)_G \frac{d}{dt}\eta(t)\, dt = \int_0^T (F(t), \nabla v)_G\, \eta(t)\, dt + \int_0^T (g(t), v)_G\, \eta(t)\, dt \ \ \forall\, v \in V, \ \ \forall\, \eta \in C_0^\infty[0,T], \tag{5.5}$$

в котором $F \in L^2(0,T;(L^2(G))^3)$, $g \in L^1(Q_T)$. Пусть $w \in C^1(\mathbb{R})$, $w' \geqslant 0$, $w(0)=0$ и $W^{(M)}(u) = \int\limits_0^u w(s_+^{[M]})\, ds$, где $M>0$. Тогда для всех $t \in [0,T]$ справедливы равенства

$$\|c_p W^{(M)}(u_+(t))\|_{L^1(G)} = \|c_p W^{(M)}(u_+(0))\|_{L^1(G)} + (F, \nabla w(u_+^{[M]}))_{Q_t} + (g, w(u_+^{[M]}))_{Q_t},$$
$$\|c_p W^{(M)}(u_-(t))\|_{L^1(G)} = \|c_p W^{(M)}(u_-(0))\|_{L^1(G)} - (F, \nabla w(u_-^{[M]}))_{Q_t} - (g, w(u_-^{[M]}))_{Q_t}.$$

Доказательство этой леммы содержится в [10].

Лемма 5.4. *Пусть u — слабое решение задачи $\mathcal{P}_d$ или слабое решение задачи $\mathcal{P}_d^{[n]}$. Пусть $U \in C^1(\mathbb{R})$, $U' \geqslant 0$, $w(u) = \int\limits_0^u (U'(s))^2\, ds$, $W(u) = \int\limits_0^u w(s)\, ds$.*

Тогда для всех $t \in [0,T]$ справедливы неравенства

$$\|c_p W(u_+^{[M]}(t))\|_{L^1(G)} + \lambda_{\min} \|\nabla U(u_+^{[M]})\|^2_{L^2(Q_t)} \leqslant \|c_p W(u_+^0)\|_{L^1(G)} + (f_+, w(u_+^{[M]}))_{Q_t}, \tag{5.6}$$

$$\|c_p W(u_-^{[M]}(t))\|_{L^1(G)} + \lambda_{\min} \|\nabla U(u_-^{[M]})\|^2_{L^2(Q_t)} \leqslant \|c_p W(u_-^0)\|_{L^1(G)} + (f_-, w(u_-^{[M]}))_{Q_t}. \tag{5.7}$$

Доказательство. В силу определения слабого решения задачи $\mathcal{P}_d$ функция u удовлетворяет тождеству (5.5) с $F(t) = -\lambda(\cdot, u(t))\nabla u(t)$, $g(t) = -H(\cdot, u(t)) + \mathcal{H}_d[u(t)] + f(t)$.

Положим $W^{(M)}(u) = \int\limits_0^u w(s_+^{[M]})\,ds$. Пользуясь неравенствами

$$W(u_+^{[M]}) \leqslant W^{(M)}(u_+) \leqslant W(u_+), \quad W(u_-^{[M]}) \leqslant W^{(M)}(u_-) \leqslant W(u_-)$$

и леммой 5.3, приходим к справедливым для всех $t \in [0,T]$ неравенствам

$$\begin{aligned} &\|c_p W(u_+^{[M]}(t))\|_{L^1(G)} + (\lambda(\cdot,u)\nabla u, \nabla w(u_+^{[M]}))_{Q_t} + (H(\cdot,u) - \mathcal{H}_d[u], w(u_+^{[M]}))_{Q_t} \leqslant \\ &\quad \leqslant \|c_p W^{(M)}(u_+^0)\|_{L^1(G)} + (f, w(u_+^{[M]}))_{Q_t} \leqslant \|c_p W(u_+^0)\|_{L^1(G)} + (f_+, w(u_+^{[M]}))_{Q_t}, \end{aligned} \tag{5.8}$$

$$\begin{aligned} &\|c_p W(u_-^{[M]}(t))\|_{L^1(G)} + (\lambda(\cdot,u)\nabla u, \nabla w(u_-^{[M]}))_{Q_t} - (H(\cdot,u) - \mathcal{H}_d[u], w(u_-^{[M]}))_{Q_t} \leqslant \\ &\quad \leqslant \|c_p W^{(M)}(u_-^0)\|_{L^1(G)} + (f, w(u_-^{[M]}))_{Q_t} \leqslant \|c_p W(u_-^0)\|_{L^1(G)} + (f_-, w(u_-^{[M]}))_{Q_t}. \end{aligned} \tag{5.9}$$

Заметим, что

$$\begin{aligned} &(\lambda(\cdot,u)\nabla u, \nabla w(u_+^{[M]}))_{Q_t} = (\lambda(\cdot,u)\nabla u, (U'(u))^2 \nabla u_+^{[M]})_{Q_t} = \\ &= (\lambda(\cdot,u)\nabla U(u_+^{[M]}), \nabla U(u_+^{[M]}))_{Q_t} \geqslant \lambda_{\min} \|\nabla U(u_+^{[M]})\|^2_{L^2(Q_t)}. \end{aligned}$$

Аналогично

$$(\lambda(\cdot,u)\nabla u, \nabla w(u_-^{[M]}))_{Q_t} \geqslant \lambda_{\min} \|\nabla U(u_-^{[M]})\|^2_{L^2(Q_t)}.$$

Кроме того, в силу следствия 5.1 справедливы неравенства

$$(H(\cdot,u) - \mathcal{H}_d[u], w(u_+^{[M]}))_{Q_t} = \int\limits_0^t b(u(t'), w(u_+^{[M]}(t')))\,dt' \geqslant 0,$$

$$-(H(\cdot,u) - \mathcal{H}_d[u], w(u_-^{[M]}))_{Q_t} = \int\limits_0^t b(-u(t'), w((-u)^{[0,M]}(t')))\,dt' \geqslant 0.$$

Поэтому из неравенств (5.8) и (5.9) следуют неравенства (5.6) и (5.7).

Совершенно аналогично устанавливаются неравенства (5.6) и (5.7) для слабого решения задачи $\mathcal{P}_d^{[n]}$. Единственное отличие состоит в том, что в неравенствах (5.8), (5.9) следует заменить $H(\cdot,u) - \mathcal{H}_d[u]$ на $H(\cdot,u^{[n]}) - \mathcal{H}_d[u^{[n]}]$ и воспользоваться справедливыми в силу следствия 5.1 неравенствами

$$(H(\cdot,u^{[n]}) - \mathcal{H}_d[u^{[n]}], w(u_+^{[M]}))_{Q_t} = \int\limits_0^t b(u^{[n]}(t'), w(u_+^{[M]}(t')))\,dt' \geqslant 0,$$

$$-(H(\cdot,u^{[n]}) - \mathcal{H}_d[u^{[n]}], w(u_-^{[M]}))_{Q_t} = \int\limits_0^t b((-u)^{[n]}(t'), w((-u)^{[0,M]}(t')))\,dt' \geqslant 0.$$

□

Следствие 5.2. *Пусть выполнены условия леммы* 5.4 *и функция* U *нечетна. Тогда для всех* $t \in [0,T]$ *справедливо неравенство*

$$\|c_p W(u^{[M]}(t))\|_{L^1(G)} + \lambda_{\min}\|\nabla U(u^{[M]})\|^2_{L^2(Q_t)} \leqslant \|c_p W(u^0)\|_{L^1(G)} + (|f|, w(|u^{[M]}|))_{Q_t}. \tag{5.10}$$

Теорема 5.1. *Пусть u — слабое решение задачи $\mathcal{P}_d$ или слабое решение задачи $\mathcal{P}_d^{[n]}$.*
Если $u^0 \geqslant 0$ и $f \geqslant 0$, то $u \geqslant 0$. Если $u^0 \leqslant 0$ и $f \leqslant 0$, то $u \leqslant 0$.

Доказательство. Пусть $u^0 \geqslant 0$ и $f \geqslant 0$. Тогда $u_-^0 = 0$ и $f_- = 0$. Воспользуемся неравенством (5.7) с $U(u) = u$, $w(u) = u$, $W(u) = \dfrac{1}{2}u^2$ и получим неравенство

$$\frac{1}{2}\|c_p^{1/2} u_-^{[M]}(t)\|^2_{L^2(G)} + \lambda_{\min}\|\nabla u_-^{[M]}\|^2_{L^2(Q_t)} \leqslant 0 \qquad \forall\, t \in [0,T],$$

из которого следует, что $u_-^{[M]} = 0$ для всех $M > 0$. Следовательно $u_- = 0$, т. е. $u \geqslant 0$.

Пусть $u^0 \leqslant 0$ и $f \leqslant 0$. Тогда $u^0_+ = 0$ и $f_+ = 0$. Воспользовавшись неравенством (5.6), приходим к неравенству

$$\frac{1}{2}\|c_p^{1/2}u_+^{[M]}(t)\|^2_{L^2(G)} + \lambda_{\min}\|\nabla u_+^{[M]}\|^2_{L^2(Q_t)} \leqslant 0 \qquad \forall\ t \in [0,T],$$

из которого следует, что $u_+ = 0$, т. е. $u \leqslant 0$. □

Следствие 5.3. *Справедлива теорема* 4.3.

Следствие 5.4. *Если* $u^0 = 0$ *и* $f = 0$, *то* $u = 0$.

Теорема 5.2. *Пусть для показателей* p, r_0, q_0, r_*, q_*, *входящих в условия* (A_7), (A_8), *выполнены предположения* (4.15) *и пусть* u — *слабое решение задачи* $\mathcal{P}_d$ *или слабое решение задачи* $\mathcal{P}_d^{[n]}$. *Тогда* $|u|^{\gamma-1}u \in V_2(Q_T)$ *для всех* $\gamma \in [1, p/2]$, *причем справедлива оценка* (4.16).

Доказательство. Пусть $\gamma \in [1, p/2]$. Положим

$$U_\gamma(u) = |u|^{\gamma-1}u, \quad w_\gamma(u) = \int\limits_0^u (U_\gamma'(s))^2\, ds = \frac{\gamma^2}{2\gamma-1}|u|^{2\gamma-2}u,$$

$$W_\gamma(u) = \int\limits_0^u w_\gamma(s)\, ds = \frac{\gamma}{2(2\gamma-1)}|u|^{2\gamma}.$$

Поскольку

$$\frac{1}{4}(U_\gamma(u))^2 \leqslant W_\gamma(u) \leqslant \frac{1}{2}(U_\gamma(u))^2, \quad |w_\gamma(u)| \leqslant \gamma|U_\gamma(u)|^{2-1/\gamma},$$

то из неравенства (5.10) с учетом оценки (4.10) следует неравенство

$$\|U_\gamma(u^{[M]})\|^2_{V_2(Q_T)} \leqslant C\big(\|u^0\|^{2\gamma}_{L^{2\gamma}(G)} + \\ + \gamma\|f_0\|_{L^{r_0,q_0}(Q_T)}\|U_\gamma(u^{[M]})\|^{2-1/\gamma}_{L^{\overline{r}_0,\overline{q}_0}(Q_T)} + \gamma\||J_*\||_{r_*,q_*}\|U_\gamma(u^{[M]})\|^{2-1/\gamma}_{L^{\overline{r}_*,\overline{q}_*}(Q_T)}\big). \quad (5.11)$$

Здесь $\overline{r}_0 = (2-1/\gamma)r_0'$, $\overline{q}_0 = (2-1/\gamma)q_0'$, $\overline{r}_* = (2-1/\gamma)r_*'$, $\overline{q}_* = (2-1/\gamma)q_*'$. Несложно проверить, что эти показатели в роли r, q удовлетворяют условиям (2.2). Используя неравенство (2.3), выводим из (5.11) равномерную по $M > 0$ оценку

$$\||u^{[M]}|^{\gamma-1}u^{[M]}\|^{1/\gamma}_{V_2(Q_T)} \leqslant C\left(\|u^0\|_{L^p(G)} + \|f_0\|_{L^{r_0,q_0}(Q_T)} + \||J_*\||_{r_*,q_*}\right). \quad (5.12)$$

Поскольку $u^{[M]} \to u$ в $L^2(0,T; W^{1,2}(G))$ при $M \to \infty$, то из (5.12) следует, что $|u|^{\gamma-1}u \in V_2(Q_T)$ и справедлива оценка (4.16). □

Следствие 5.5. *Справедлива теорема* 4.1.

Теорема 5.3. *Пусть для показателей* p, r_0, q_0, r_*, q_*, *входящих в условия* (A_7), (A_8), *выполнены предположения* (4.17) *и пусть* u — *слабое решение задачи* $\mathcal{P}_d$ *или слабое решение задачи* $\mathcal{P}_d^{[n]}$. *Тогда* $u \in L^\infty(Q)$ *и справедлива оценка* (4.18)

Доказательство. Положим $A = \|u^0\|_{L^\infty(G)} + \|f_0\|_{L^{r_0,q_0}(Q_T)} + \||J_*\||_{r_*,q_*}$.

Если $A = 0$, то $u = 0$ в силу следствия 5.4 и доказываемое утверждение очевидно.

Пусть $A > 0$. Поделим на $A^{2\gamma}$ обе части неравенства (5.11), полученного при доказательстве теоремы 5.2, и получим неравенство

$$\|U_\gamma(\overline{u}^{[n]})\|^2_{V_2(Q_T)} \leqslant C\|\overline{u}^0\|^{2\gamma}_{L^{2\gamma}(G)} + \\ + C\gamma\big(\|\overline{f}_0\|_{L^{r_0,q_0}(Q_T)}\|U_\gamma(\overline{u}^{[n]})\|^{2-1/\gamma}_{L^{\overline{r}_0,\overline{q}_0}(Q_T)} + \|\overline{J}_*\|_{r_*,q_*}\|U_\gamma(\overline{u}^{[n]})\|^{2-1/\gamma}_{L^{\overline{r}_*,\overline{q}_*}(Q_T)}\big), \quad (5.13)$$

в котором $\overline{u} = u/A$, $\overline{u}^0 = u^0/A$, $\overline{f}_0 = f_0/A$, $\overline{J}_* = J_*/A$, $n = M/A$.

Учитывая, что

$$\|\overline{u}^0\|_{L^\infty(G)} + \|\overline{f}_0\|_{L^{r_0,q_0}(Q_T)} + \|\overline{J}_*\|_{r_*,q_*} = 1,$$

и загрубляя неравенство (5.13), приходим к оценке

$$\|U_\gamma(\overline{u}^{[n]})\|^2_{V_2(Q_T)} \leqslant C_1\gamma\Big[\|U_\gamma(\overline{u}^{[n]})\|^2_{L^{2r_0',2q_0'}(Q_T)} + \|U_\gamma(\overline{u}^{[n]})\|^2_{L^{2r_*',2q_*'}(Q_T)} + 1\Big].$$

В силу предположения (4.17) без ограничения общности можно считать, что с некоторым $\delta \in (0,1)$ выполнены неравенства $2/r_0 + 3/q_0 \leqslant 2 - 3\delta$, $2/r_* + 3/q_* \leqslant 2 - 3\delta$.

Положим $\gamma = \gamma_k = (1+\delta)^k$, $k \geqslant 0$ и получим неравенство

$$\|U_{\gamma_k}(\overline{u}^{[n]})\|^2_{V_2(Q_T)} \leqslant C_1\gamma_k\Big[\|U_{\gamma_{k-1}}(\overline{u}^{[n]})\|^{2(1+\delta)}_{L^{\widetilde{r}_0,\widetilde{q}_0}(Q_T)} + \|U_{\gamma_{k-1}}(\overline{u}^{[n]})\|^{2(1+\delta)}_{L^{\widetilde{r}_*,\widetilde{q}_*}(Q_T)} + 1\Big], \quad k \geqslant 1,$$

в котором $\widetilde{r}_0 = 2(1+\delta)r_0'$, $\widetilde{q}_0 = 2(1+\delta)q_0'$, $\widetilde{r}_* = 2(1+\delta)r_*'$, $\widetilde{q}_* = 2(1+\delta)q_*'$.

Несложно проверить, что эти показатели в роли r, q удовлетворяют условиям (2.2). Используя оценку (2.3), приходим к неравенству

$$\|\,|\overline{u}^{[n]}|^{\gamma_k-1}\overline{u}^{[n]}\|^2_{V_2(Q_T)} \leqslant C_2\gamma_k\Big[\|\,|\overline{u}^{[n]}|^{\gamma_k-2}\overline{u}^{[n]}\|^{2(1+\delta)}_{V_2(Q_T)} + 1\Big], \quad k \geqslant 1,$$

из которого для $y_k = \|\,|\overline{u}^{[n]}|^{\gamma_k-1}\overline{u}^{[n]}\|^{2/\gamma_k}_{V_2(Q_T)} + 1$ следует неравенство

$$y_k \leqslant C_3^{1/\gamma_k}(1+\delta)^{k/\gamma_k}y_{k-1}, \quad k \geqslant 1.$$

Итерируя это неравенство, имеем

$$y_k \leqslant C_4 y_0 = C_3^{\mu}(1+\delta)^{\rho}y_0, \quad k \geqslant 1,$$

где

$$\mu = \sum_{\ell=1}^{\infty}\frac{1}{\gamma_\ell} = \sum_{\ell=1}^{\infty}\frac{1}{(1+\delta)^\ell}, \quad \rho = \sum_{\ell=1}^{\infty}\frac{\ell}{\gamma_\ell} = \sum_{\ell=1}^{\infty}\frac{\ell}{(1+\delta)^\ell},$$
$$y_0 = \|\overline{u}^{[n]}\|^2_{V_2(Q_T)} + 1 \leqslant \overline{y}_0 = \|\overline{u}\|^2_{V_2(Q_T)} + 1.$$

Таким образом,

$$\|\overline{u}^{[n]}\|_{L^{2\gamma_k}(Q_T)} \leqslant \sqrt{T}\|\,|\overline{u}^{[n]})|^{\gamma_k-1}\overline{u}^{[n]}\|^{1/\gamma_k}_{V_2(Q_T)} \leqslant \sqrt{Ty_k} \leqslant C_5\big(\|\overline{u}\|_{V_2(Q_T)} + 1\big), \quad k \geqslant 1.$$

Предельный переход при $k \to \infty$ дает оценку

$$\|\overline{u}^{[n]}\|_{L^\infty(Q_T)} \leqslant C_5\big(\|\overline{u}\|_{V_2(Q_T)} + 1\big) \quad \forall n \geqslant 1.$$

Из нее следует, что $u \in L^\infty(Q_T)$ и верна оценка

$$\|u\|_{L^\infty(Q_T)} \leqslant C_5\big(\|u\|_{V_2(Q_T)} + A\big).$$

Принимая во внимание оценку (4.16) с $\gamma = 1$, приходим к неравенству (4.18). $\square$

Следствие 5.6. *Справедлива теорема* 4.2.

6. Доказательство теоремы 4.4

Приведенное в этом разделе доказательство использует некоторые идеи предложенного в [25] метода доказательства теорем сравнения для квазилинейных эллиптических уравнений. Для задач радиационно-кондуктивного теплообмена специальные варианты этого метода были использованы в [9, 10].

Положим

$$\Delta u = u^1 - u^2, \quad \Delta u^0 = u^{0,1} - u^{0,2}, \quad \Delta f = f^1 - f^2,$$
$$\Delta u_+ = \max\{\Delta u, 0\}, \quad \Delta u^0_+ = \max\{\Delta u^0, 0\}, \quad \Delta f_+ = \max\{\Delta f, 0\},$$
$$\Delta u_- = \max\{-\Delta u, 0\}, \quad \Delta u^0_- = \max\{-\Delta u^0, 0\}, \quad \Delta f_- = \max\{-\Delta f, 0\}$$

и введем множества

$$Q_T^{(+)} = \{(x,t) \in Q_T \mid \Delta u(x,t) > 0\}, \quad Q_T^{(-)} = \{(x,t) \in Q_T \mid \Delta u(x,t) \leqslant 0\},$$
$$Q_T^{\delta} = \{(x,t) \in Q_T \mid \Delta u(x,t) \geqslant \delta\},$$

где $0 < \delta < 1$, δ — параметр. Введем функцию $v^\delta = \delta^{-1}\Delta u_+^{[\delta]} = \min\{\delta^{-1}\Delta u_+, 1\}$. Заметим, что $0 \leqslant v^\delta \leqslant 1$, причем $v^\delta(x,t) = 0$ для $(x,t) \in Q_T^{(-)}$, $v^\delta(x,t) = 1$ для $x \in Q_T^{\delta}$ и $\lim\limits_{\delta\to 0} v^\delta(x,t) = 1$ для $(x,t) \in Q_T^{(+)}$.

Вычитая из тождества (4.14), отвечающего определению решения u^1, аналогичное тождество, отвечающее определению решения u^2, замечаем, что функция Δu в роли u удовлетворяет тождеству (5.5) с

$$F = \lambda(\cdot, u^2)\nabla u^2 - \lambda(\cdot, u^1)\nabla u^1, \quad g = -H(\cdot, u^1) + H(\cdot, u^2) + \mathcal{H}_d[u^1] - \mathcal{H}_d[u^2] + \Delta f.$$

Воспользуемся леммой 5.3 с $w(u) = \delta^{-1}u$, $M = \delta$, $W^{(\delta)}(u) = \delta^{-1}\int\limits_0^u s_+^{[\delta]}\,ds$.

Из неравенства (5.6) с учетом неравенств

$$W^{(\delta)}(\Delta u_+^0) \leqslant \Delta u_+^0, \quad 0 \leqslant w(\Delta u_+^{[\delta]}) = v^\delta \leqslant 1$$

следует, что

$$\begin{aligned} &\|c_p W^{(\delta)}(\Delta u_+(t))\|_{L^1(G)} + (\lambda(\cdot, u^1)\nabla u^1 - \lambda(\cdot, u^2)\nabla u^2, \nabla v^\delta)_{Q_t} + I_t[b(u^1, v^\delta) - b(u^2, v^\delta)] \leqslant \\ &\leqslant \|c_p W^{(\delta)}(\Delta u_+^0)\|_{L^1(G)} + (\Delta f_+, v^\delta)_{Q_t} \leqslant \|c_p \Delta u_+^0\|_{L^1(G)} + \|\Delta f_+\|_{L^1(Q_t)} \quad \forall\, t \in (0, T]. \end{aligned} \tag{6.1}$$

Воспользуемся тем, что $\nabla v^\delta = \delta^{-1}\nabla(u^1 - u^2)$ почти всюду на $Q_T^{(+)} \setminus Q_T^\delta$ и $\nabla v^\delta = 0$ почти всюду на $Q_T^{(-)} \cup Q_T^\delta$. Используя предположения (A_5), (A_9), имеем:

$$\begin{aligned} &(\lambda(\cdot, u^1)\nabla u^1 - \lambda(\cdot, u^2)\nabla u^2, \nabla v^\delta)_{Q_t} = \\ &\qquad = \delta(\lambda(\cdot, u^1)\nabla v^\delta, \nabla v^\delta)_{Q_t} + ([\lambda(\cdot, u^1) - \lambda(\cdot, u^2)]\nabla u^2, \nabla v^\delta)_{Q_t^{(+)} \setminus Q_t^\delta} \geqslant \\ &\geqslant \delta\,\lambda_{\min}\|\nabla v^\delta\|^2_{L^2(Q_t)} - L\delta^{1/2}\|\nabla u^2\|_{L^2(Q_t^{(+)} \setminus Q_t^\delta)}\|\nabla v^\delta\|_{L^2(Q_t)} \geqslant -\frac{L^2}{4\lambda_{\min}}\|\nabla u^2\|^2_{L^2(Q_t^{(+)} \setminus Q_t^\delta)}. \end{aligned} \tag{6.2}$$

Введем функции

$$\Delta h_\nu(x, t) = h_\nu(u^1(x, t)) - h_\nu(u^2(x, t)), \quad \Delta H(x, t) = H(x, u^1(x, t)) - H(x, u^2(x, t)).$$

Учитывая, что $\Delta h_\nu > 0$ на $Q_t^{(+)}$, $\Delta h_\nu \leqslant 0$ на $Q_t^{(-)}$, верно равенство

$$b_\nu(u^1, v^\delta) - b_\nu(u^2, v^\delta) = (\varkappa_\nu k_\nu^2 \Delta h_\nu - \varkappa_\nu \langle \mathcal{A}_{d,\nu}\rangle_\Omega(\Delta h_\nu), v^\delta)_G = (\varkappa_\nu k_\nu^2 \Delta h_\nu, v^\delta - k_\nu^{-2}\langle \mathcal{A}_{d,\nu}\rangle_\Omega(v^\delta))_G$$

(мы воспользовались свойством (3.15) самосопряженности оператора $\varkappa_\nu\langle \mathcal{A}_{d,\nu}\rangle_\Omega$) и справедливы неравенства

$$0 \leqslant k_\nu^{-2}\langle \mathcal{A}_{d,\nu}\rangle_\Omega(v^\delta) \leqslant k_\nu^{-2}\langle \mathcal{A}_{d,\nu}\rangle_\Omega(1) \leqslant 1,$$

имеем

$$\begin{aligned} I_t[b_\nu(u^1, v^\delta) - b_\nu(u^2, v^\delta)] &= (\varkappa_\nu k_\nu^2 \Delta h_\nu, v^\delta - k_\nu^{-2}\langle \mathcal{A}_{d,\nu}\rangle_\Omega(v^\delta))_{Q_t} = \\ = (\varkappa_\nu k_\nu^2 \Delta h_\nu, v^\delta &- k_\nu^{-2}\langle \mathcal{A}_{d,\nu}\rangle_\Omega(v^\delta))_{Q_t^{(+)}} - (\varkappa_\nu \Delta h_\nu, \langle \mathcal{A}_{d,\nu}\rangle_\Omega(v^\delta))_{Q_t^{(-)}} \geqslant \\ \geqslant (\varkappa_\nu k_\nu^2 \Delta h_\nu, v^\delta &- k_\nu^{-2}\langle \mathcal{A}_{d,\nu}\rangle_\Omega(1))_{Q_t^{(+)}} \geqslant (\varkappa_\nu k_\nu^2 \Delta h_\nu, v^\delta - 1)_{Q_t^{(+)}} = \\ = (\varkappa_\nu k_\nu^2 \Delta h_\nu, v^\delta &- 1)_{Q_t^{(+)} \setminus Q_t^\delta} \geqslant -\|\varkappa_\nu k_\nu^2 \Delta h_\nu\|_{L^1(Q_t^{(+)} \setminus Q_t^\delta)}. \end{aligned}$$

Таким образом,

$$\begin{aligned} I_t[b(u^1, v^\delta) - b(u^2, v^\delta)] &= 4\pi\int\limits_{\mathcal{N}} I_t[b_\nu(u^1, v^\delta) - b_\nu(u^2, v^\delta)]\,d\nu + 4\pi\sum_\ell I_t[b_{\nu_\ell}(u^1, v^\delta) - b_{\nu_\ell}(u^2, v^\delta)]\,\Delta\nu_\ell \geqslant \\ &\geqslant -4\pi\int\limits_{\mathcal{N}} \|\varkappa_\nu k_\nu^2 \Delta h_\nu\|_{L^1(Q_t^{(+)} \setminus Q_t^\delta)}\,d\nu - 4\pi\sum_\ell \|\varkappa_{\nu_\ell} k_{\nu_\ell}^2 \Delta h_{\nu_\ell}\|_{L^1(Q_t^{(+)} \setminus Q_t^\delta)}\,\Delta\nu_\ell = \\ &= -\Big\|4\pi\int\limits_{\mathcal{N}} \varkappa_\nu k_\nu^2 \Delta h_\nu\,d\nu + 4\pi\sum_\ell \varkappa_{\nu_\ell} k_{\nu_\ell}^2 \Delta h_{\nu_\ell}\Delta\nu_\ell\Big\|_{L^1(Q_t^{(+)} \setminus Q_t^\delta)} = -\|\Delta H\|_{L^1(Q_t^{(+)} \setminus Q_t^\delta)}. \end{aligned} \tag{6.3}$$

Из неравенства (6.1) с учетом оценок (6.2), (6.3) следует, что

$$\|c_p W^{(\delta)}(\Delta u_+(t))\|_{L^1(G)} - \frac{L^2}{4\lambda_{\min}}\|\nabla u^2\|^2_{L^2(Q_t^{(+)}\setminus Q_t^\delta)} - \|\Delta H\|_{L^1(Q_t^{(+)}\setminus Q_t^\delta)} \leqslant \leqslant \|c_p \Delta u_+^0\|_{L^1(G)} + \|\Delta f_+\|_{L^1(Q_t)} \quad \forall t \in (0,T]. \quad (6.4)$$

Поскольку $\Delta u_+ - \delta \leqslant W^{(\delta)}(\Delta u_+) \leqslant \Delta u_+$, то $\|c_p W^{(\delta)}(\Delta u_+(t))\|_{L^1(G)} \to \|c_p \Delta u_+(t)\|_{L^1(G)}$ при $\delta \to 0$. Второе и третье слагаемые в левой части (6.4) стремится к нулю при $\delta \to 0$, так как meas $(Q_t^{(+)} \setminus Q_t^\delta) \to 0$.

Переходя к пределу в (6.4), выводим неравенство

$$\|c_p \Delta u_+(t)\|_{L^1(G)} \leqslant \|c_p \Delta u_+^0\|_{L^1(G)} + \|\Delta f_+\|_{L^1(Q_t)} \quad \forall\, t \in (0,T]. \quad (6.5)$$

Совершенно аналогично доказывается неравенство

$$\|c_p \Delta u_-(t)\|_{L^1(G)} \leqslant \|c_p \Delta u_-^0\|_{L^1(G)} + \|\Delta f_-\|_{L^1(Q_t)} \quad \forall\, t \in (0,T]. \quad (6.6)$$

Складывая (6.5) и (6.6), приходим к неравенству

$$\|c_p \Delta u(t)\|_{L^1(G)} \leqslant \|c_p \Delta u^0\|_{L^1(G)} + \|\Delta f\|_{L^1(Q_t)} \quad \forall\, t \in (0,T]. \quad (6.7)$$

Из неравенств (6.5)–(6.7) следуют оценки (4.19)–(4.21).

7. Разрешимость вспомогательной задачи $\mathcal{P}_d^{[n]}$

Теорема 7.1. *Пусть выполнены условия* (A_1)–(A_8). *Пусть показатели* p, q_0, r_0, p_*, q_*, *входящие в условия* (A_7), (A_8), *таковы, что*:

$$p = 2, \quad r_0, r_* \in [1,2], \quad q_0, q_* \in [6/5, 2], \quad 2/r_0 + 3/q_0 = 7/2, \quad 2/r_* + 3/q_* = 7/2. \quad (7.1)$$

Тогда у задачи $\mathcal{P}_d^{[n]}$ *существует слабое решение* $u \in V_2^{1,0}(Q_T)$.

Доказательство. Возьмем в $W^{1,2}(G)$ базис $\{e_\ell\}_{\ell=1}^\infty$, ортонормированный в $L^2(G)$ с весом c_p. Как нетрудно видеть, можно считать, что $e_\ell \in V = W^{1,2}(G) \cap L^\infty(G)$ для всех $\ell \geqslant 1$. Положим $V_k = \text{span}\ \{e_1, \ldots, e_k\}$, $k \geqslant 1$. Будем искать приближенное решение задачи $\mathcal{P}_d^{[n]}$ в виде $u^{(k)}(t) = \sum\limits_{\ell=1}^{k} d_\ell^{(k)}(t) e_\ell$, определяя коэффициенты $d_\ell^{(k)}$ из системы уравнений метода Галеркина:

$$\Big(c_p \frac{d}{dt} u^{(k)}(t), v\Big)_G + a(u^{(k)}(t), v) + b((u^{(k)})^{[n]}(t), v) = (f(t), v)_G \quad \forall v \in V_k, \quad (7.2)$$

$$u^{(k)}(0) = u^{0,k} = \sum_{\ell=1}^{k} (c_p u^0, e_\ell)_G e_\ell.$$

Заметим, что $u^{0,k} \to u^0$ в $L^2(G)$ при $k \to \infty$, причем $\|c_p^{1/2} u^{0,k}\|_{L^2(G)} \leqslant \|c_p^{1/2} u^0\|_{L^2(G)}$.

Существование локального по t решения $u^{(k)}$ следует из теоремы Каратеодори. То, что решение $u^{(k)}$ определено на всем интервале $(0,T)$, следует из глобальной по времени априорной оценки

$$\|u^{(k)}\|_{V_2(Q_T)} \leqslant C_1 \left(\|u^0\|_{L^2(G)} + \|f_0\|_{L^{r_0,q_0}(Q_T)} + \|f_*\|_{L^{r_*,q_*}(Q_T)} \right). \quad (7.3)$$

Для того, чтобы получить эту оценку, подставим в (7.2) $v = u^{(k)}(t)$, воспользуемся условием (A_5), справедливым в силу следствия 5.1 неравенством $0 \leqslant b((u^{(k)})^{[n]}, u^{(k)})$ и получим неравенство

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|c_p^{1/2} u^{(k)}(t)\|^2_{L^2(G)} + \lambda_{\min}\|\nabla u^{(k)}(t)\|^2_{L^2(G)} \leqslant (f_0(t), u^{(k)}(t))_G + (f_*(t), u^{(k)}(t))_G.$$

Интегрируя его и используя неравенство Гельдера, выводим на $(0,T)$ неравенство

$$\frac{1}{2}\|c_p^{1/2} u^{(k)}(t)\|^2_{L^2(G)} + \lambda_{\min}\|\nabla u^{(k)}\|^2_{L^2(Q_t)} \leqslant \frac{1}{2}\|c_p^{1/2} u^0\|^2_{L^2(G)} + + \|f_0\|_{L^{r_0,q_0}(Q_T)} \|u^{(k)}\|_{L^{r_0',q_0'}(Q_T)} + \|f_*\|_{L^{r_*,q_*}(Q_T)} \|u^{(k)}\|_{L^{r_*',q_*'}(Q_T)} \quad (7.4)$$

с показателями $r_0', r_*' \in [2, \infty]$, $q_0', q_*' \in [2, 6]$, которые в силу предположения (7.1) удовлетворяют равенствам $2/r_0' + 3/q_0' = 3/2$, $2/r_*' + 3/q_*' = 3/2$. Применяя неравенство (2.3), приходим от (7.4) к оценке (7.3).

Выведем еще одну оценку. Применяя к (7.2) оператор $\Delta^{(\tau)} I_t$ и учитывая оценку (2.1) и следующую из леммы 4.2 оценку

$$|b((u^{(k)})^{[n]}, v)| \leqslant \big(\|H(\cdot, (u^{(k)})^{[n]})\|_{L^\infty(G)} + \|\mathcal{H}[(u^{(k)})^{[n]}]\|_{L^\infty(G)}\big)\|v\|_{L^1(G)} \leqslant$$
$$\leqslant 2\|H(\cdot, n)\|_{L^\infty(G)}\|v\|_{L^1(G)} \leqslant 2c_H(n^s + 1)\|v\|_{L^1(G)},$$

имеем

$$(c_p \Delta^{(\tau)} u^{(k)}(t), v)_G = \Delta^{(\tau)} I_t \Big[-a(u^{(k)}, v) - b((u^{(k)})^{[n]}, v) + (f, v)_G\Big] \leqslant$$
$$\leqslant \lambda_{\max} \Delta^{(\tau)} I_t \|\nabla u^{(k)}\|_{L^2(G)} \|\nabla v\|_{L^2(G)} + 2\tau c_H(n^s + 1)\|v\|_{L^1(G)} +$$
$$+ \Delta^{(\tau)} I_t \|f_0\|_{L^{q_0}(G)} \|v\|_{L^{q_0'}(G)} + \Delta^{(\tau)} I_t \|f_*\|_{L^{q_*}(G)} \|v\|_{L^{q_*'}(G)}.$$

Взяв $v = \Delta^{(\tau)} u^{(k)}(t)$, проинтегрировав полученное неравенство по t от 0 до $T - \tau$ и воспользовавшись неравенством (2.1), получим

$$\underline{c}_p \|\Delta^{(\tau)} u^{(k)}\|^2_{L^2(Q_{T-\tau})} \leqslant 2\tau \lambda_{\max} \|\nabla u^{(k)}\|^2_{L^2(Q_T)} + 4\tau c_H(n^s + 1)\|u^{(k)}\|_{L^1(Q_T)} +$$
$$+ 2\tau \|f_0\|_{L^{r_0, q_0}(Q_T))} \|u^{(k)}\|_{L^{r_0', q_0'}(Q_T)} + 2\tau \|f_*\|_{L^{r_*, q_*}(Q_T)} \|u^{(k)}\|_{L^{r_*', q_*'}(Q_T)}.$$

Принимая во внимание оценку (7.3), приходим к неравенству

$$\|\Delta^{(\tau)} u^{(k)}\|_{L^2(Q_{T-\tau})} \leqslant C_2 \tau^{1/2} (\|u^0\|_{L^2(G)} + \|f_0\|_{L^{r_0, q_0}(Q_T)} + \|f_*\|_{L^{r_*, q_*}(Q_T)} + n^s + 1). \tag{7.5}$$

В силу оценки (7.3) существуют функция $u \in V_2(Q_T)$ и подпоследовательность $\{u^{(k_\ell)}\}_{\ell=1}^\infty$ такие, что $u^{(k_\ell)} \to u$ слабо в $L^2(0, T; W^{1,2}(G))$ и $*-$слабо в $L^\infty(0, T; L^2(G))$.

Оценки (7.3), (7.5) в силу критерия Рисса предкомпактности в $L^2(Q_T)$ позволяют выделить подпоследовательность такую, что $u^{(k_\ell)} \to u$ сильно в $L^2(Q_T)$ и п.в. в Q_T.

Заметим, что $\lambda(\cdot, u^{(k_\ell)}) \nabla u^{(k_\ell)} \to \lambda(\cdot, u) \nabla u$ слабо в $L^2(Q_T)$ и поэтому $a(u^{(k_\ell)}, v) \to a(u, v)$ слабо в $L^1(0, T)$ для всех $v \in W^{1,2}(G)$.

Как нетрудно видеть, $(u^{(k_\ell)})^{[n]} \to u^{[n]}$ в $L^s(Q_T)$. Как следствие, $H(\cdot, (u^{(k_\ell)})^{[n]}) \to H(\cdot, u^{[n]})$ и $\mathcal{H}_d[(u^{(k_\ell)})^{[n]}] \to \mathcal{H}_d[u^{[n]}]$ в $L^1(Q_T)$. Поэтому $b((u^{(k_\ell)})^{[n]}, v) \to b(u^{[n]}, v)$ сильно в $L^1(0, T)$ для всех $v \in L^\infty(G)$.

Возьмем произвольную функцию $\eta \in C_*^\infty[0, T]$. Умножим (7.2) на $\eta(t)$ и проинтегрируем результат по t от 0 до T:

$$-\int_0^T (c_p u^{(k)}(t), v)_G \frac{d}{dt}\eta(t)\, dt + \int_0^T a(u^{(k)}(t), v)\eta(t)\, dt + \int_0^T b((u^{(k)})^{[n]}(t), v)\eta(t)\, dt =$$
$$= (c_p u^{0,k}, v)_G \cdot \eta(0) + \int_0^T (f(t), v)_G \eta(t)\, dt.$$

Переходя в этом тождестве к пределу при $k = k_\ell \to \infty$, устанавливаем справедливость тождества (5.1) для произвольной функции $v \in \bigcup\limits_{k=1}^\infty V_k$. Поскольку множество $\bigcup\limits_{k=1}^\infty V_k$ всюду плотно в $W^{1,2}(G)$, то справедливо тождество (5.1).

Как нетрудно видеть, функция u удовлетворяет тождеству (5.4) с

$$F(t) = -\lambda(\cdot, u(t))\nabla u(t) \in L^2(0, T; [L^2(G)]^3), \quad f_1(t) = f_0(t) \in L^{r_0, q_0}(Q_T),$$
$$f_2(t) = f_*(t) \in L^{r_*, q_*}(Q_T), \quad f_3(t) = \mathcal{H}_d[u^{[n]}(t)] - H(\cdot, u^{[n]}(t)) \in L^\infty(Q_T) \subset L^{1,2}(Q_T) \text{ и } K = 3.$$

Поэтому в силу леммы 5.2 справедливо свойство $u \in C([0, T]; L^2(G))$. Таким образом, $u \in V_2^{1,0}(Q_T)$. □

8. Разрешимость задачи $\mathcal{P}_d$

Приведем доказательство теорем 4.7 и 4.8 о разрешимости задачи $\mathcal{P}_d$.

Доказательство теоремы 4.7. В силу теорем 7.1 и 5.3 для всякого $n > 0$ существует функция $u \in V_2^{1,0}(Q_T) \cap L^\infty(Q_T)$, являющаяся слабым решением задачи $\mathcal{P}_d^{[n]}$ и удовлетворяющая оценке (4.18). Возьмем $n > M_\infty$. Ясно, что $u \in \mathcal{V}(Q_T)$ и $u^{[n]} = u$. Поэтому слабое решение задачи $\mathcal{P}_d^{[n]}$ одновременно является и слабым решением задачи $\mathcal{P}_d$.

Теорема доказана. $\square$

Доказательство теоремы 4.8. Пусть $L < 0 < M$ — целые числа. Поскольку $(u^0)^{[L,M]} \in L^\infty(G)$, $f_0^{[L,M]}, f_*^{[L,M]} \in L^\infty(Q_T) \subset L^{\infty,2}(Q_T)$, то в силу теоремы 4.7 задача $\mathcal{P}_d$ с $(u^0)^{[L,M]}$, $f_0^{[L,M]}$ и $f_*^{[L,M]}$ в роли u^0, f_0 и f_* имеет слабое решение $u^{(L,M)}$, удовлетворяющее тождеству

$$-\int_0^T (c_p u^{(L,M)}(t), v)_G \frac{d}{dt}\eta(t)\,dt + \int_0^T a(u^{(L,M)}(t), v)\eta(t)\,dt + \int_0^T b(u^{(L,M)}(t), v)\eta(t)\,dt =$$

$$= (c_p (u^0)^{[L,M]}, v)_G \cdot \eta(0) + \int_0^T (f_0^{[L,M]}(t) + f_*^{[L,M]}(t), v)_G \eta(t)\,dt \quad \forall\, v \in V, \quad \forall\, \eta \in C_*^\infty[0,T]. \quad (8.1)$$

В силу теоремы 4.1 для всех $\gamma \in [1, p/2]$ справедлива равномерная по параметрам L и M оценка

$$\||u^{(L,M)}|^{\gamma-1} u^{(L,M)}\|_{V_2(Q_T)}^{1/\gamma} \leqslant C\big(\|u^0\|_{L^p(G)} + \|f_0\|_{L^{r_0,q_0}(Q_T)} + \||J_*\||_{r_*,q_*}\big). \quad (8.2)$$

Поскольку по условию $p \geqslant 3s/5$, то следствием этой оценки с $\gamma = p/2$ и неравенства (2.4) является оценка

$$\|u^{(L,M)}\|_{L^s(Q_T)} \leqslant C\big(\|u^0\|_{L^p(G)} + \|f_0\|_{L^{r_0,q_0}(Q_T)} + \||J_*\||_{r_*,q_*}\big). \quad (8.3)$$

Поскольку $(u^0)^{[L,M]} \leqslant (u^0)^{[L,M+1]}$, $f_0^{[L,M]} \leqslant f_0^{[L,M+1]]}$ и $f_*^{[L,M]} \leqslant f_*^{[L,M+1]}$ для всех $M \geqslant 1$, то в силу теоремы 4.6 справедливо неравенство $u^{(L,M)} \leqslant u^{(L,M+1)}$.

Из оценки (8.3) в силу теоремы Фату следует, что существует функция $u^{(L)} \in L^s(Q_T)$ такая, что $u^{(L,M)} \to u^{(L)}$ п.в. на Q_T и сильно в $L^s(Q_T)$ при $M \to \infty$.

Из оценки (8.2) с $\gamma = 1$ следует, что $u^{(L)} \in V_2(Q_T)$ и $u^{(L,M)} \to u^{(L)}$ слабо в $L^2(0,T; W^{1,2}(G))$ и $*$-слабо в $L^\infty(0,T; L^2(G))$.

Предельный переход при $M \to \infty$ в оценках (8.2) с $\gamma = 1$ и (8.3) приводит к неравенствам

$$\|u^{(L)}\|_{V_2(Q_T)} \leqslant C\big(\|u^0\|_{L^p(G)} + \|f_0\|_{L^{r_0,q_0}(Q_T)} + \||J_*\||_{r_*,q_*}\big), \quad (8.4)$$

$$\|u^{(L)}\|_{L^s(Q_T)} \leqslant C\big(\|u^0\|_{L^p(G)} + \|f_0\|_{L^{r_0,q_0}(Q_T)} + \||J_*\||_{r_*,q_*}\big). \quad (8.5)$$

Так как $\nabla u^{(L,M)} \to \nabla u^{(L)}$ слабо в $L^2(Q_T)$, $\lambda(\cdot, u^{(L,M)}) \to \lambda(\cdot, u^{(L)})$ п.в. на Q_T и $*$-слабо в $L^\infty(Q_T)$, то $a(u^{(L,M)}, v) \to a(u^{(L)}, v)$ слабо в $L^1(0,T)$ при $M \to \infty$ для всех $v \in W^{1,2}(G)$.

Поскольку $u^{(L,M)} \to u^{(L)}$ в $L^s(Q_T)$, то $H(\cdot, u^{(L,M)}) \to H(\cdot, u^{(L)})$ и $\mathcal{H}_d[u^{(L,M)}] \to \mathcal{H}_d[u^{(L)}]$ в $L^1(Q_T)$. Как следствие, $b(u^{(L,M)}, v) \to b(u^{(L)}, v)$ в $L^1(0,T)$ для всех $v \in L^\infty(Q_T)$.

Переходя к пределу при $M \to \infty$ в тождестве (8.1) и учитывая, что $(u^0)^{[L,M]} \to (u^0)^{[L,\infty]}$ в $L^1(G)$, $f_0^{[L,M]} \to f_0^{[L,\infty]}$ и $f_*^{[L,M]} \to f_*^{[L,\infty]}$ в $L^1(Q_T)$, приходим к тождеству

$$-\int_0^T (c_p u^{(L)}(t), v)_G \frac{d}{dt}\eta(t)\,dt + \int_0^T a(u^{(L)}(t), v)\eta(t)\,dt + \int_0^T b(u^{(L)}(t), v)\eta(t)\,dt =$$

$$= (c_p (u^0)^{[L,\infty]}, v)_G \cdot \eta(0) + \int_0^T (f_0^{[L,\infty]}(t) + f_*^{[L,\infty]}(t), v)_G \eta(t)\,dt \quad \forall\, v \in V, \quad \forall\, \eta \in C_*^\infty[0,T]. \quad (8.6)$$

Из теоремы 4.4 для всех $M, N \geqslant 1$ следует оценка

$$\|c_p(u^{(L,M)} - u^{(L,N)})\|_{C([0,T];L^1(G))} \leqslant \|c_p((u^0)^{(L,M)} - (u^0)^{(L,N)})\|_{L^1(G)} + \\ + \|f_0^{[L,M]} - f_0^{[L,N]}\|_{L^1(Q_T)} + \|f_*^{[L,M]} - f_*^{[L,N]}\|_{L^1(Q_T)}, \quad (8.7)$$

говорящая о фундаментальности последовательности $\{u^{(L,M)}\}_{M=1}^{\infty}$ в $C([0,T];L^1(G))$. Значит, $u^{(L)} \in C([0,T];L^1(G))$. Таким образом, функция $u^{(L)}$ является слабым решением задачи $\mathcal{P}_d$, отвечающим данным $(u^0)^{[L,\infty]}$, $f_0^{[L,\infty]}$ и $f_*^{[L,\infty]}$ в роли u^0, f_0 и f_*.

Из неравенств $(u^0)^{[L-1,\infty]} \leqslant (u^0)^{[L,\infty]}$, $f_0^{[L-1,\infty]} \leqslant f_0^{[L,\infty]}$, $f_*^{[L-1,\infty]} \leqslant f_*^{[L,\infty]}$ в силу теоремы 4.6 следует, что $u^{(L-1)} \leqslant u^{(L)}$. Сходимость при $L \to -\infty$ снова носит монотонный характер, причем из оценок (8.4), (8.5) следует, что существует функция $u \in V_2(Q_T) \cap L^s(Q_T)$ такая, что $u^{(L)} \to u$ слабо в $L^2(0,T;W^{1,2}(G))$, $*$-слабо в $L^\infty(0,T;L^2(G))$, сильно в $L^s(Q_T)$ и п.в. на Q_T при $L \to -\infty$. Как следствие, $a(u^{(L)}, v) \to a(u,v)$ слабо в $L^1(0,T)$ и $b(u^{(L)}, v) \to b(u,v)$ сильно в $L^1(0,T)$ для всех $v \in V$.

Предельный переход при $L \to -\infty$ в тождестве (8.6) дает тождество (4.14).

Из теоремы 4.4 для всех $L, N \leqslant -1$ следует, что

$$\|c_p(u^{(L)} - u^{(N)})\|_{C([0,T];L^1(G))} \leqslant \|c_p((u^0)^{[L,\infty]} - (u^0)^{[N,\infty]})\|_{L^1(G)} + \\ + \|f_0^{[L,\infty]} - f_0^{[N,\infty]}\|_{L^1(Q_T)} + \|f_*^{[L,\infty]} - f_*^{[N,\infty]}\|_{L^1(Q_T)}.$$

Таким образом, последовательность $\{u^{(L)}\}_{L=-1}^{-\infty}$ фундаментальна в $C([0,T];L^1(G))$. Поэтому $u \in C([0,T];L^1(G))$.

Существование слабого решения доказано. Единственность следует из теоремы 4.5. □

9. Регулярность слабого решения

Доказательство теоремы 4.9. Пусть u — слабое решение задачи $\mathcal{P}_d$, а u_j — сужение u на $Q_{jT} = G_j \times (0,T)$. Положим $F = \mathcal{H}_d(u) - H(\cdot, u_j) + f_0 + f_*$. Из теоремы 4.2 следует, что $u \in L^\infty(Q_T)$ и верна оценка (4.18). Как следствие, $F \in L^2(Q_{jT})$, причем

$$\|F\|_{L^2(Q_{jT})} \leqslant C\left(\|u^0\|^s_{L^\infty(G)} + \|f_0\|^s_{L^{q_0,r_0}(Q_T)} + |||J_*|||^s_{q_*,r_*} + 1\right). \quad (9.1)$$

Заметим, что функция u_j удовлетворяет интегральному тождеству

$$-\int_0^T (c_p u_j, v)_{G_j} \frac{d}{dt}\eta(t)\,dt + \int_0^T (\nabla\Lambda_j(u_j(t)), \nabla v)_{G_j}\eta(t)\,dt = \\ = (c_p u^0, v)_{G_j}\eta(0) + \int_0^T (F(t), v)_{G_j}\eta(t)\,dt \quad \forall v \in W^{1,2}(G_j), \quad \forall \eta \in C_*^\infty[0,T], \quad (9.2)$$

т. е. является слабым решением задачи

$$c_p D_t u_j - \Delta\Lambda_j(u_j) = F, \quad (x,t) \in Q_{jT}, \quad (9.3)$$

$$\nabla\Lambda_j(u_j) \cdot n_j = 0, \quad (x,t) \in \partial G_j \times (0,T), \quad (9.4)$$

$$u_j|_{t=0} = u^0, \quad x \in G_j. \quad (9.5)$$

Заметим, что слабое решение этой задачи единственно. Это следует из теоремы 4.5 в частном случае, когда $G = G_j$ и $H(x,u) = 0$, $\mathcal{H}_d[u] = 0$, т. е. $\mathfrak{N} = \varnothing$.

Выведем дополнительные оценки решения задачи (9.3)–(9.5), используя нелинейный вариант метода Галеркина. Возьмем в $W^{1,2}(G_j)$ ортонормированный базис $\{e_\ell\}_{\ell=1}^\infty$. Положим $V_k = \operatorname{span}\{e_1, \dots, e_k\}$, $k \geqslant 1$. Будем искать приближенное решение $u^{(k)}$ задачи такое, что $U^{(k)}(t) =$

$\Lambda_j(u^{(k)}(t)) = \sum\limits_{\ell=1}^{k} d_\ell^{(k)}(t)e_\ell$, определяя коэффициенты $d_\ell^{(k)}$ из системы уравнений метода Галеркина:

$$\big(c_p D_t u^{(k)}(t), v\big)_{G_j} + (\nabla U^{(k)}(t), \nabla v)_{G_j} = (F(t), v)_{G_j} \quad \forall\, v \in V_k, \tag{9.6}$$

$$U^{(k)}(0) = \sum\limits_{\ell=1}^{k} (\Lambda_j(u^0), e_\ell)_{W^{1,2}(G_j)} e_\ell. \tag{9.7}$$

Заметим, что $U^{(k)}(0) \to \Lambda_j(u^0)$ в $W^{1,2}(G_j)$, $u^{(k)}(0) \to u^0$ в $W^{1,2}(G_j)$ при $k \to \infty$, причем $\|U^{(k)}(0)\|_{W^{1,2}(G_j)} \leqslant \|\Lambda_j(u^0)\|_{W^{1,2}(G_j)} \leqslant \lambda_{\max}\|u^0\|_{W^{1,2}(G_j)}$.

Как нетрудно видеть, $c_p(x)D_t u^{(n)} = \alpha(x, U^{(n)})D_t U^{(n)}$, где

$$\alpha(x, U) = c_p(x)/\lambda(\Lambda_j^{-1}(U)) \geqslant \alpha_{\min} = \underline{c}_p/\lambda_{\max}.$$

Система уравнений (9.6) может быть записана в виде

$$\mathbf{A}(\mathbf{d}^{(k)}(t))\frac{d}{dt}\mathbf{d}^{(k)}(t) + \mathbf{B}\mathbf{d}^{(k)}(t) = \mathbf{F}(t),$$

где $\mathbf{d}^{(k)} = (d_1^{(k)}, d_2^{(k)}, \ldots, d_k^{(k)})^T$, $\mathbf{A}(\mathbf{d})$ — самосопряженная матрица с непрерывными по $\mathbf{d} = (d_1, d_2, \ldots, d_k)^T$ элементами $a_{i\ell}(\mathbf{d}) = \Big(\alpha\big(\cdot, \sum\limits_{s=1}^{k} d_s e_s\big)e_i, e_\ell\Big)_{G_j}$, $\mathbf{B}$ — матрица с элементами $b_{i\ell} = (\nabla e_i, \nabla e_\ell)_G$, а $\mathbf{F}(t) = \big((F(t), e_1)_{G_j}, (F(t), e_2)_{G_j}, \ldots, (F(t), e_k)_{G_j}\big)^T$.

Матрица $\mathbf{A}(\mathbf{d})$ невырождена, так как

$$\sum_{i=1}^{k}\sum_{\ell=1}^{k} a_{i\ell}(\mathbf{d}^{(k)})\xi_i\xi_\ell = \Big(\alpha\Big(\cdot, \sum_{s=1}^{k} d_s^{(k)} e_s\Big)\sum_{i=1}^{k}\xi_i e_i, \sum_{\ell=1}^{k}\xi_\ell e_\ell\Big)_{G_j} \geqslant \alpha_{\min}\Big\|\sum_{i=1}^{k}\xi_i e_i\Big\|^2_{L^2(G_j)}.$$

Поэтому существование локального по времени решения задачи (9.6), (9.7) следует из теоремы Каратеодори. Разрешимость на всем интервале $(0, T)$ следует из априорной оценки

$$\|D_t U^{(k)}\|_{L^2(Q_{jT})} + \|\nabla U^{(k)}\|_{C([0,T];(L^2(G_j))^3)} \leqslant C\Big(\|u^0\|_{W^{1,2}(G_j)} + \|F\|_{L^2(Q_{jT})}\Big). \tag{9.8}$$

Докажем справедливость этой оценки. Взяв $v = D_t U^{(k)}$ в (9.6), получим

$$(\alpha(\cdot, U^{(k)})D_t U^{(k)}, D_t U^{(k)})_{G_j} + \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\nabla U^{(k)}\|^2_{L^2(G_j)} = (F, D_t U^{(k)})_{G_j}.$$

Интегрируя это равенство по t, имеем:

$$\alpha_{\min}\|D_t U^{(k)}\|^2_{L^2(Q_{jt})} + \frac{1}{2}\|\nabla U^{(k)}(t)\|^2_{L^2(G_j)} \leqslant \frac{1}{2}\|\nabla U^{(k)}(0)\|^2_{L^2(G_j)} + (F, D_t U^{(k)})_{Q_{jt}} \leqslant$$
$$\leqslant \frac{1}{2}\lambda_{\max}\|\nabla u^0\|^2_{L^2(G_j)} + \|F\|_{L^2(Q_{jt})}\|D_t U^{(k)}\|_{L^2(Q_{jt})} \quad \forall\, t \in (0, T).$$

Из полученного неравенства следуют оценка (9.8) и оценка

$$\|D_t u^{(k)}\|_{L^2(Q_{jT})} + \|\nabla u^{(k)}\|_{C([0,T];(L^2(G_j))^3)} \leqslant C\left(\|\nabla u^0\|_{L^2(G_j)} + \|F\|_{L^2(Q_{jT})}\right).$$

Из доказанных оценок следует, что существуют функция $\widetilde{u} \in W^{1,2}(Q_{jT})$ и подпоследовательность $\{u^{(k_m)}\}_{m=1}^{\infty}$ такие, что $\Lambda_j(\widetilde{u}) \in L^\infty(0, T; W^{1,2}(G_j))$, $u^{(k_m)} \to \widetilde{u}$ сильно в $L^2(Q_{jT})$, $\Lambda_j(u^{(k_m)}) \to \Lambda_j(\widetilde{u})$ $*$-слабо в $L^\infty(0, T; W^{1,2}(G_j))$ и $D_t u^{(k_m)} \to D_t\widetilde{u}$ слабо в $L^2(Q_{jT})$ при $m \to \infty$. Кроме того, справедлива оценка

$$\|D_t\widetilde{u}\|_{L^2(Q_{jT})} \leqslant C\Big(\|\nabla u^0\|_{L^2(G_j)} + \|F\|_{L^2(Q_{jT})}\Big). \tag{9.9}$$

Умножив (9.6) скалярно в $L^2(0, T)$ на произвольную функцию $\eta \in C_*^\infty[0, T]$ и перейдя к пределу при $k = k_m \to \infty$, получим тождество

$$\int\limits_0^T (c_p D_t\widetilde{u}(t), v)_{G_j}\eta(t)\,dt + \int\limits_0^T (\nabla\Lambda_j(\widetilde{u}(t)), \nabla v)_{G_j}\eta(t)\,dt = \int\limits_0^T (F(t), v)_{G_j}\eta(t)\,dt \quad \forall\, \eta \in C_*^\infty[0, T], \tag{9.10}$$

справедливое для всех $v \in \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} V_k$, а следовательно — и для всех $v \in W^{1,2}(G_j)$. Как следствие, функция $\widetilde{u}$ в роли u_j удовлетворяет тождеству (9.2). Поскольку слабое решение задачи (9.3)–(9.5) единственно, функция $\widetilde{u}$ совпадает с u_j.

Из (9.10) теперь следует, что для п.в. $t \in (0,T)$ справедливо тождество

$$(\nabla\Lambda_j(u_j(t)), \nabla v)_{G_j} = (F(t) - c_p D_t u_j(t), v)_{G_j} \quad \forall\, v \in W^{1,2}(G_j),$$

т. е. для п.в. $t \in (0,T)$ функция $\Lambda_j(u_j(t))$ является слабым решением задачи Неймана

$$-\Delta\Lambda_j(u_j(t)) = F(t) - c_p D_t u(t), \quad x \in G_j, \tag{9.11}$$

$$\nabla\Lambda_j(u_j(t)) \cdot n_j = 0, \quad x \in \partial G_j. \tag{9.12}$$

Поскольку $F(t) - c_p D_t u_j(t) \in L^2(G_j)$, то в силу известных результатов теории эллиптических уравнений [5] справедливо свойство $\Lambda_j(u_j(t)) \in W^{2,2}(G_j)$, уравнение (9.11) выполнено в $L^2(G_j)$, краевое условие (9.12) выполнено в $W^{1/2,2}(\partial G_j)$ и верна оценка

$$\left\| \Lambda_j(u_j(t)) - \frac{1}{\text{meas } G_j} \int\limits_{G_j} \Lambda_j(u_j(t))\, dx \right\|_{W^{2,2}(G_j)} \leqslant C(G_j) \|F(t) - c_p D_t u_j(t)\|_{L^2(G_j)}.$$

Таким образом, $\Lambda_j(u_j) \in L^2(0,T; W^{2,2}(G_j))$ и справедлива оценка

$$\|\Lambda_j(u_j)\|_{L^2(0,T;W^{2,2}(G_j))} \leqslant C(\|F\|_{L^2(Q_{jT})} + \|D_t u_j\|_{L^2(Q_{jT})} + \|u_j\|_{L^2(Q_{jT})}). \tag{9.13}$$

Для завершения доказательства теоремы осталось соединить оценки (9.9), (9.13) и (9.1) и учесть, что $\Delta\Lambda_j(u_j) = \operatorname{div}(\nabla\Lambda_j(u_j)) = \operatorname{div}(\lambda_j(u)\nabla u)$. □

Результаты работы были получены в рамках выполнения государственного задания Минобрнауки России (задание №1.756.2014/К) и при частичной финансовой поддержке Совета по грантам при Президенте РФ (проект НШ-2081.2014.1).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Гренкин Г. В., Чеботарев А. Ю.* Нестационарная задача сложного теплообмена// Журн. выч. мат. и мат. физ. — 2014. — *54*, № 11. — С. 1806–1816.
2. *Ковтанюк А. Е., Чеботарев А. Ю.* Стационарная задача сложного теплообмена// Журн. выч. мат. и мат. физ. — 2014. — *54*, № 4. — С. 711–719.
3. *Ковтанюк А. Е., Чеботарев А. Ю.* Стационарная задача свободной конвекции с радиационным теплообменом// Дифф. уравн. — 2014. — *50*, № 12. — С. 1590.
4. *Ладыженская О. А., Солонников В. А., Уральцева Н. Н.* Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. — М.: Наука, 1967.
5. *Михайлов В. П.* Дифференциальные уравнения в частных производных. — М.: Наука, 1976.
6. *Agoshkov V. I.* Boundary value problems for transport equations: functional spaces, variational statements, regularity of solutions. — Boston—Basel—Berlin: Birkhauser, 1998.
7. *Amosov A. A.* The solvability of a problem of radiation heat transfer// Soviet Phys. Dokl. — 1979. — *24*, № 4. — С. 261–262.
8. *Amosov A. A.* The limit connection between two problems of radiation heat transfer// Soviet Phys. Dokl. — 1979. — *24*, № 6. — С. 439–441.
9. *Amosov A. A.* Stationary nonlinear nonlocal problem of radiative-conductive heat transfer in a system of opaque bodies with properties depending on radiation frequency// J. Math. Sci. (N. Y.) — 2010. — *164*, № 3. — С. 309–344.
10. *Amosov A. A.* Nonstationary nonlinear nonlocal problem of radiative-conductive heat transfer in a system of opaque bodies with properties depending on the radiation frequency// J. Math. Sci. (N. Y.) — 2010. — *165*, № 1. — С. 1–41.
11. *Amosov A. A.* Boundary value problem for the radiation transfer equation with reflection and refraction conditions// J. Math. Sci. (N. Y.) — 2013. — *191*, № 2. — С. 101–149.
12. *Amosov A. A.* Boundary value problem for the radiation transfer equation with diffuse reflection and refraction conditions// J. Math. Sci. (N. Y.) — 2013. — *193*, № 2. — С. 151–176.
13. *Amosov A. A.* Some properties of boundary value problem for radiative transfer equation with diffuse reflection and refraction conditions// J. Math. Sci. (N. Y.) — 2015. — *207*, № 2. — С. 118–141.

14. *Cessenat M.* Théorèmes de trace L^p pour des espaces de fonctions de la neutronique// C. R. Acad. Sci., Paris Sér. I — 1984. — *299.* — C. 831–834.
15. *Cessenat M.* Théorèmes de trace pour des espaces de fonctions de la neutronique// C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I. — 1985. — *300.* — C. 89–92.
16. *Dautray R., Lions J.-L.* Mathematical analysis and numerical methods for science and technology. Vol. 6: Evolution problems II. — Berlin: Springer, 2000.
17. *Druet P.-E.* Weak solutions to a stationary heat equation with nonlocal radiation boundary condition and right-hand side in L_p $(p \geqslant 1)$// Math. Methods Appl. Sci. — 2009. — *32*, № 32. — C. 135–166.
18. *Druet P.-E.* Existence for the stationary MHD equations coupled to heat transfer with nonlocal radiation effects// Czechoslovak Math. J. — 2009. — *59.* — C. 791–825.
19. *Druet P.-E.* Existence of weak solution to time-dependent MHD equations coupled to heat transfer with nonlocal radiation boundary conditions// Nonlinear Anal. Real World Appl. — 2009. — *10.* — C. 2914–2936.
20. *Druet P.-E.* Weak solutions to a time-dependent heat equation with nonlocal radiation boundary condition and arbitrary p-summable right-hand side// Appl. Math. — 2010. — *55*, № 2. — C. 111–149.
21. *Gilbarg D., Trudinger N.* Elliptic partial differential equations of second order. — Berlin: Springer, 1983.
22. *Kelley C. T.* Existence and uniqueness of solutions of nonlinear systems of conductive-radiative heat transfer equations// Transport Theory Statist. Phys. — 1996. — *25*, № 2. — C. 249–260.
23. *Kovtanyuk A. E., Chebotarev A. Yu., Botkin N. D.* Unique solvability of a steady-state complex heat transfer model// Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul. — 2015. — *20*, № 3. — C. 776–784.
24. *Kovtanyuk A. E., Chebotarev A. Yu., Botkin N. D., Hoffmann K.-H.* The unique solvability of a complex 3D heat transfer problem// J. Math. Anal. Appl. — 2014. — *409.* — C. 808–815.
25. *Křižek M., Liu L.* On a comparison principle for a quasilinear elliptic boundary value problem of a nonmonotone type// Appl. Math. — 1996. — *24*, № 1. — C. 97–107.
26. *Laitinen M. T.* Asymptotic analysis of conductive-radiative heat transfer// Asymptot. Anal. — 2002. — *29.* — C. 323–342.
27. *Laitinen M. T., Tiihonen T.* Integro-differential equation modelling heat transfer in conducting, radiating and semitransparent materials// Math. Methods Appl. Sci. — 1998. — *21.* — C. 375–392.
28. *Laitinen M., Tiihonen T.* Conductive-radiative heat transfer in grey materials// Quart. Appl. Math. — 2001. — *59.* — C. 737–768.
29. *Modest F. M.* Radiative heat transfer. — Amsterdam, etc.: Academic Press, 2003.
30. *Necati Özişik M.* Radiative transfer and interactions with conduction and convection. — New York, etc.: Willey & Sons, 1973.
31. *Pinnau R.* Analysis of optimal boundary control for radiative heat transfer modelled by SP_1 system// Commun. Math. Sci. — 2007. — *5*, № 4. — C. 951–969.
32. *Siegel R., Howell J. R.* Thermal radiation heat transfer. — New York—London: CRC Press, 2001.
33. *Sparrow E. M., Cess R. D.* Radiation heat transfer. — New York: Hemisphere Pub. Corp., 1978.

А. А. Амосов
Национальный исследовательский университет «Московский энергетический институт»
111250, Москва, ул. Красноказарменная, д. 14
E-mail: AmosovAA@mpei.ru

UDC 517.9

Nonstationary Problem of Complex Heat Transfer in a System of Semitransparent Bodies with Radiation Diffuse Reflection and Refraction Boundary-Value Conditions

© 2016 **A. A. Amosov**

Abstract. We consider a nonstationary initial-boundary value problem describing complex (radiative-conductive) heat transfer in a system of semitransparent bodies. To describe radiation propagation, we use the transport equation with radiation diffuse reflection and refraction boundary-value conditions. We take into account that the radiation intensity and optical properties of bodies depend on the radiation frequency. The unique solvability of a weak solution is established. The comparison theorem is proved. A priori estimates of a weak solution are obtained as well as its regularity.

REFERENCES

1. G. V. Grenkin and A. Yu. Chebotarev, “Nestatsionarnaya zadacha slozhnogo teploobmena” [A nonstationary problem of complex heat transfer], *Zhurn. Vych. Mat. i Mat. Fiz.* [J. Comput. Math. Math. Phys.], 2014, **54**, No. 11, 1806–1816 (in Russian).
2. A. E. Kovtanyuk and A. Yu. Chebotarev, “Statsionarnaya zadacha slozhnogo teploobmena” [Steady-state problem of complex heat transfer], *Zhurn. Vych. Mat. i Mat. Fiz.* [J. Comput. Math. Math. Phys.], 2014, **54**, No. 4, 711–719 (in Russian).
3. A. E. Kovtanyuk and A. Yu. Chebotarev, “Statsionarnaya zadacha svobodnoy konvektsii s radiatsionnym teploobmenom” [Stady-state problem of free convection with radiative heat transfer], *Diff. Uravn.* [Diff. Equ.], 2014, **50**, No. 12, 1590 (in Russian).
4. O. A. Ladyzhenskaya, V. A. Solonnikov, and N. N. Ural’tseva, *Lineynye i kvazilineynye uravneniya parabolicheskogo tipa* [Linear and Quasilinear Equations of Parabolic Type], Nauka, Moscow, 1967 (in Russian).
5. V. P. Mikhajlov, *Differentsial’nye uravneniya v chastnykh proizvodnykh* [Partial Differential Equations], Nauka, Moscow, 1976 (in Russian).
6. V. I. Agoshkov, *Boundary Value Problems for Transport Equations: Functional Spaces, Variational Statements, Regularity of Solutions*, Birkhauser, Boston—Basel—Berlin, 1998.
7. A. A. Amosov, “The solvability of a problem of radiation heat transfer,” *Soviet Phys. Dokl.*, 1979, **24**, No. 4, 261–262.
8. A. A. Amosov, “The limit connection between two problems of radiation heat transfer,” *Soviet Phys. Dokl.*, 1979, **24**, No. 6, 439–441.
9. A. A. Amosov, “Stationary nonlinear nonlocal problem of radiative-conductive heat transfer in a system of opaque bodies with properties depending on radiation frequency,” *J. Math. Sci. (N. Y.)*, 2010, **164**, No. 3, 309–344.
10. A. A. Amosov, “Nonstationary nonlinear nonlocal problem of radiative-conductive heat transfer in a system of opaque bodies with properties depending on the radiation frequency,” *J. Math. Sci. (N. Y.)*, 2010, **165**, No. 1, 1–41.
11. A. A. Amosov, “Boundary value problem for the radiation transfer equation with reflection and refraction conditions,” *J. Math. Sci. (N. Y.)*, 2013, **191**, No. 2, 101–149.
12. A. A. Amosov, “Boundary value problem for the radiation transfer equation with diffuse reflection and refraction conditions,” *J. Math. Sci. (N. Y.)*, 2013, **193**, No. 2, 151–176.
13. A. A. Amosov, “Some properties of boundary value problem for radiative transfer equation with diffuse reflection and refraction conditions,” *J. Math. Sci. (N. Y.)*, 2015, **207**, No. 2, 118–141.
14. M. Cessenat, “Théorèmes de trace L^p pour des espaces de fonctions de la neutronique,” *C. R. Acad. Sci., Paris Sér. I*, 1984, **299**, 831–834.
15. M. Cessenat, “Théorèmes de trace pour des espaces de fonctions de la neutronique,” *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I.*, 1985, **300**, 89–92.
16. R. Dautray and J.-L. Lions, *Mathematical Analysis and Numerical Methods for Science and Technology. Vol.* 6: *Evolution Problems* II, Springer, Berlin, 2000.
17. P.-E. Druet, “Weak solutions to a stationary heat equation with nonlocal radiation boundary condition and right-hand side in L_p $(p \geqslant 1)$,” *Math. Methods Appl. Sci.*, 2009, **32**, No. 32, 135–166.
18. P.-E. Druet, “Existence for the stationary MHD equations coupled to heat transfer with nonlocal radiation effects,” *Czechoslovak Math. J.*, 2009, **59**, 791–825.
19. P.-E. Druet, “Existence of weak solution to time-dependent MHD equations coupled to heat transfer with nonlocal radiation boundary conditions,” *Nonlinear Anal. Real World Appl.*, 2009, **10**, 2914–2936.
20. P.-E. Druet, “Weak solutions to a time-dependent heat equation with nonlocal radiation boundary condition and arbitrary p-summable right-hand side,” *Appl. Math.*, 2010, **55**, No. 2, 111–149.

21. D. Gilbarg and N. Trudinger, *Elliptic Partial Differential Equations of Second Order*, Springer, Berlin, 1983.
22. C. T. Kelley, "Existence and uniqueness of solutions of nonlinear systems of conductive-radiative heat transfer equations," *Transport Theory Statist. Phys.*, 1996, **25**, No. 2, 249–260.
23. A. E. Kovtanyuk, A. Yu. Chebotarev, and N. D. Botkin, "Unique solvability of a steady-state complex heat transfer model," *Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul.*, 2015, **20**, No. 3, 776–784.
24. A. E. Kovtanyuk, A. Yu. Chebotarev, N. D. Botkin, and K.-H. Hoffmann, "The unique solvability of a complex 3D heat transfer problem," *J. Math. Anal. Appl.*, 2014, **409**, 808–815.
25. M. Křižek and L. Liu, "On a comparison principle for a quasilinear elliptic boundary value problem of a nonmonotone type," *Appl. Math.*, 1996, **24**, No. 1, 97–107.
26. M. T. Laitinen, "Asymptotic analysis of conductive-radiative heat transfer," *Asymptot. Anal.*, 2002, **29**, 323–342.
27. M. T. Laitinen and T. Tiihonen, "Integro-differential equation modelling heat transfer in conducting, radiating and semitransparent materials," *Math. Methods Appl. Sci.*, 1998, **21**, 375–392.
28. M. Laitinen and T. Tiihonen, "Conductive-radiative heat transfer in grey materials," *Quart. Appl. Math.*, 2001, **59**, 737–768.
29. F. M. Modest, *Radiative Heat Transfer*, Academic Press, Amsterdam, etc., 2003.
30. M. Necati Özişik, Radiative Transfer and Interactions with Conduction and Convection. — New York, etc.: Willey & Sons, 1973.
31. R. Pinnau, "Analysis of optimal boundary control for radiative heat transfer modelled by SP_1 system," *Commun. Math. Sci.*, 2007, **5**, No. 4, 951–969.
32. R. Siegel and J. R. Howell, *Thermal Radiation Heat Transfer*, CRC Press, New York—London, 2001.
33. E. M. Sparrow and R. D. Cess, *Radiation Heat Transfer*, Hemisphere Pub. Corp., New York, 1978.

A. A. Amosov
National Research University "Moscow Power Engineering Institute,"
14, Krasnokazarmennaya st., 111250 Moscow, Russia
E-mail: AmosovAA@mpei.ru