Современная математика. Фундаментальные направления. Том 68, № 3 (2022). С. 522–552
Contemporary Mathematics. Fundamental Directions. ISSN 2413-3639 (Print)

DOI: 10.22363/2413-3639-2022-68-3-522-552 УДК 517.982+517.984.48

МОДЕЛИ САМОСОПРЯЖЁННЫХ И УНИТАРНЫХ ОПЕРАТОРОВ В ПРОСТРАНСТВАХ ПОНТРЯГИНА

© 2022 г. **В. А. ШТРАУС**

Аннотация. Статья представляет собой переработанный текст лекций, прочитанных автором на КРОМШ-2019 и посвящённых сравнению различных подходов к построению модельного представления самосопряжённых и унитарных операторов, действующих в пространствах Понтрягина. Базой для двух из этих моделей служит регуляризованное интегральное представление Крейна—Лангера числовой последовательности, порождённой степенями самосопряжённого (в смысле пространств Понтрягина) оператора. Приводится схема вывода как этого представления, так и спектральной функции соответствующего оператора. В обеих моделях (одна из которых принадлежит автору настоящей работы) оператор реализуется как оператор умножения на независимую переменную, но пространство функций, в которых он действует, для каждой из моделей своё. Третья модель, принадлежащая В. С. Шульману, использует понятие квазивектора.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Введение

В хорошо известной монографии Коложоары и Фойаша (см. [31, гл. 5, следствие 5.7]) отмечается, что унитарные и самосопряжённые операторы в пространствах Понтрягина представляют собой примеры обобщённых спектральных операторов. С этой точки зрения теория операторов в пространствах Понтрягина и Крейна оказывается естественным полигоном, на котором могут быть проверены различные методы, используемые в общей теории линейных операторов. Одним из этих методов является метод модельного представления операторов как действующих в подходящем функциональном пространстве операторов умножения на скалярные функции. Построение таких моделей для произвольных самосопряжённых и унитарных операторов в пространствах Понтрягина — основная цель этих заметок.

1. Некоторые базовые понятия и результаты

В самой общей постановке (см. [2,6]) *пространство с индефинитной метрикой* можно определить как (комплексное) линейное пространство $\mathcal{L}$ с заданной на нём эрмитовой полуторалинейной формой (внутренним эрмитовым произведением) $Q(x,y)$, причём такой, что соответствующая квадратичная форма $q(x) := Q(x,x)$ является знаконеопределённой (т. е. $Q(x,x)$ принимает положительные, отрицательные и нулевое значения). В случае конечномерного пространства $\mathcal{L}$ используется также (см. [17]) термин *псевдоунитарное пространство.* Вместе с тем возможна и такая ситуация, когда на $\mathcal{L}$ задаётся вещественнозначная функция $q(x)$, прямо или даже косвенно (таковы, например, банаховы J_ν-пространства — см. [2]) не связанная с какой-либо квадратичной формой. В этом контексте представляет интерес вопрос о том, какие вещественнозначные функции (не обязательно знакопеременные) порождаются полуторалинейными формами.

Теорема 1.1. *Пусть $q(x)$ — вещественнозначная функция, заданная на линейном пространстве $\mathcal{L}$. Функция $q(x)$ тогда и только тогда порождается некоторой квадратичной формой, когда $q(x)$ удовлетворяет следующим условиям*:

$$\left.\begin{array}{ll}\textbf{a.} & q(\alpha x) = |\alpha|^2 q(x),\ x \in \mathcal{L},\ \alpha \in \mathbb{C},\\ \textbf{b.} & \text{для любых } x,y \in \mathcal{L} \text{ выражение } q(x+\lambda y) \text{ определяет}\\ & \text{функцию, непрерывную по переменной } \lambda \in \mathbb{C},\\ \textbf{c.} & \text{для функции } q(\cdot) \text{ верно тождество параллелограмма}\\ & q(x+y)+q(x-y) = 2\big(q(x)+q(y)\big).\end{array}\right\} \tag{1.1}$$

Доказательство. Необходимость условий (1.1) очевидна, поэтому мы остановимся только на их достаточности. Положим (в теории полуторалинейных и квадратичных форм такое представление называют тождеством поляризации)

$$Q(x,y) = \frac{1}{4}\sum_{m=0}^{3} i^m q(x+i^m y). \tag{1.2}$$

Проверим аддитивность введённой формы. В соответствии с (1.2) имеем

$$Q(x+y,z) = \frac{1}{4}\sum_{m=0}^{3} i^m q(x+y+i^m z).$$

Применение тождества параллелограмма даёт два возможных представления

$$q(x+y+i^m z) = 2\big(q(x+i^m z)+q(y)\big) - q(x-y+i^m z)$$

и

$$q(x+y+i^m z) = 2\big(q(y+i^m z)+q(z)\big) - q(-x+y+i^m z),$$

первое из которых ведёт к $Q(x,z)$, а второе — к $Q(y,z)$. Итак,

$$Q(x+y,z) = \frac{1}{2}\sum_{m=0}^{3} i^m q(x+i^m z) - \frac{1}{4}\sum_{m=0}^{3} i^m q(x-y+i^m z) = 2\cdot Q(x,z) - \frac{1}{4}\sum_{m=0}^{3} i^m q(x-y+i^m z),$$

$$Q(x+y,z) = \frac{1}{2}\sum_{m=0}^{3} i^m q(y+i^m z) - \frac{1}{4}\sum_{m=0}^{3} i^m q(-x+y+i^m z) =$$

$$= 2\cdot Q(y,z) - \frac{1}{4}\sum_{m=0}^{3} i^m q(-x+y+i^m z) = 2\cdot Q(y,z) + \frac{1}{4}\sum_{m=0}^{3} i^{(m+2)} q(x-y+i^{(m+2)} z).$$

Тем самым аддитивность доказана.

Однородность введённой формы по первому аргументу в случае положительного рационального множителя следует из аддитивности, а для положительного вещественного множителя доказывается предельным переходом. Остальные пункты проверяются непосредственно. □

Обычно пространство с индефинитной метрикой снабжается той или иной топологией. В частности, пусть $\mathcal{H}$ — сепарабельное гильбертово пространство со скалярным произведением $(\cdot,\cdot)_{\mathcal{H}}$. Пространство $\mathcal{H}$ называется *гильбертовым пространством с индефинитной метрикой*, если оно дополнительно оснащено непрерывной эрмитовой полуторалинейной формой $[\cdot,\cdot]$ такой, что соответствующая квадратичная форма знакопеременна. Заметим, что именно внутреннее произведение $[\cdot,\cdot]$ является для нас основным, а вот гильбертово скалярное произведение играет вспомогательную роль и может меняться на топологически ему эквивалентное. В силу непрерывности внутреннее произведение может быть представлено в форме $[\cdot,\cdot]=(G\cdot,\cdot)_{\mathcal{H}}$, где G — так называемый *оператор Грама*, который необходимо является ограниченным. Кроме того, эрмитовость внутреннего произведения влечёт за собой самосопряжённость G как оператора в гильбертовом пространстве. Такие пространства с индефинитной метрикой обычно называют гильбертовыми пространствами с G-метрикой (см. [1]). Теория операторов в них сравнительно бедна результатами и, возможно, ещё ждёт своих исследователей. Намного более развитой является теория операторов в гильбертовых пространствах с G-метрикой в случае ограниченно обратимого оператора Грама (т. е. в регулярных гильбертовых пространствах с G-метрикой [1]).

Предложение 1.1. *Гильбертово пространство $\mathcal{H}$ с G-метрикой будет регулярным тогда и только тогда, когда для любого действующего на всём $\mathcal{H}$ непрерывного линейного функционала f найдётся такой вектор y_f, что*

$$fx=[x,y_f],\quad x\in\mathcal{H}. \tag{1.3}$$

Доказательство. Если G ограниченно обратим, то представление (1.3) следует непосредственно из теоремы Рисса об общем виде непрерывного линейного функционала в гильбертовом пространстве (см., например, [20, гл. II, § 3, п. 30]). Обратно, пусть для любого f имеет место представление (1.3). Возьмём произвольный вектор z_f и положим $fx=(x,z_f)$, откуда в силу (1.3) найдётся такой y_f, что $(x,Gy_f-z_f)=0$ и, следовательно, $Gy_f=z_f$. Тогда в силу самосопряжённости G его ядро тривиально, а из теоремы о замкнутом графике следует, что оператор G^{-1} ограничен. $\square$

Гильбертово скалярное произведение в регулярном гильбертовом пространстве с G-метрикой может быть заменено топологически эквивалентным ему произведением так, что $[\cdot,\cdot]=(J\cdot,\cdot)$, где $J=P_+-P_-$, P_+ и P_- — (гильбертовы) ортопроекторы, $P_++P_-=I$. Последнее равенство влечёт равенство $P_+(P_++P_-)=P_+$, откуда следует

$$P_+P_-=0\quad\text{и}\quad P_-P_+=0. \tag{1.4}$$

Положим $\mathcal{H}_+=P_+\mathcal{H}$, $\mathcal{H}_-=P_-\mathcal{H}$. В силу (1.4) подпространства $\mathcal{H}_+$ и $\mathcal{H}_-$ образуют прямую сумму и, кроме того, ортогональны в смысле внутреннего произведения $[\cdot,\cdot]$. Разложение $\mathcal{H}=\mathcal{H}_+[\dot{+}]\mathcal{H}_-$ называется *каноническим разложением*, а оператор J — *канонической симметрией.* Пространства с индефинитной метрикой, в которых оператор Грама является канонической симметрией, называется *J-пространством*, или *пространством Крейна.* В этих заметках мы будем предполагать, что $\mathcal{H}$ является пространством Крейна или его частным случаем — пространством Понтрягина: J-пространство называется *пространством Понтрягина*, или *пространством* Π_κ, если $\dim\mathcal{H}_-=\kappa<\infty$ (возможен альтернативный вариант $\dim\mathcal{H}_+=\kappa<\infty$, но мы его использовать не будем).

Вектор $0\neq x\in\mathcal{H}$ называется *положительным*, *неотрицательным* или *нейтральным*, если, соответственно, $[x,x]>0$, $[x,x]\geqslant 0$ или $[x,x]=0$. Аналогично определяются отрицательные и неположительные векторы. Два вектора $x,y\in\mathcal{H}$ называются *J-ортогональными* ($x[\perp]y$), если $[x,y]=0$, аналогично вводятся определения J-ортогональных множеств, J-ортогонального дополнения и т. п. J-ортогональное дополнение к множеству $X\subset\mathcal{H}$ обозначается $X^{[\perp]}$. Термин *подпространство* у нас всегда обозначает замкнутое линейное многообразие, а линейное многообразие, которое может быть незамкнутым, называется *линеалом.* Линеал называется *положительным*, если все его ненулевые векторы положительны, аналогично определяются отрицательные, неотрицательные и т. п. линеалы. Положительное подпространство называется *максимальным положительным*, если оно не является собственным подпространством другого положительного подпространства. Аналогично определяются максимальные отрицательные, максимальные неположительные и т. п. подпространства. Далее, подпространство $\mathcal{L}\subset\mathcal{H}$ называется *невырожденным*, если $\mathcal{L}\cap\mathcal{L}^{[\perp]}=\{0\}$, в противном случае подпространство $\mathcal{L}$ называется вырожденным. Если $\mathcal{L}$ является вырожденным подпространством, то подпространство $\mathcal{L}\cap\mathcal{L}^{[\perp]}$ называется *изотропной частью* $\mathcal{L}$. Если $\mathcal{L}$ — невырожденное подпространство, то можно образовать J-ортогональную прямую сумму $\mathcal{L}[\dot{+}]\mathcal{L}^{[\perp]}$. В общем случае эта сумма плотна в J-пространстве, но не совпадает с ним, если же $\mathcal{L}[\dot{+}]\mathcal{L}^{[\perp]} = \mathcal{H}$, то подпространство $\mathcal{L}$ называется *проекционно полным.*

Предложение 1.2. *Подпространство $\mathcal{L}$ является проекционно полным тогда и только тогда, когда оно является регулярным гильбертовым G-пространством, на котором внутреннее произведение — это $[\cdot,\cdot]|_{\mathcal{L}}$.*

Доказательство. Пусть подпространство $\mathcal{L}$ проекционно полно, а f — заданный на $\mathcal{L}$ произвольный непрерывный линейный функционал. В силу теоремы Хана—Банаха можно считать, что f доопределён на всём $\mathcal{H}$. Тогда в силу предложения 1.1 найдётся такой вектор $y_f \in \mathcal{H}$, что $fx = [x, y_f]$, $x \in \mathcal{H}$. Вектор y_f можно представить в виде $y_f = y_f^{(1)} + y_f^{(2)}$, где $y_f^{(1)} \in \mathcal{L}$, $y_f^{(2)} \in \mathcal{L}^{[\perp]}$. Тогда для $x \in \mathcal{L}$ верно $fx = [x, y_f^{(1)}]$. Обратно, пусть $\mathcal{L}$ регулярно как гильбертово G-пространство, а y — произвольный вектор. Тогда выражение $fx = [x, y]$ задаёт на $\mathcal{L}$ непрерывный линейный функционал, и в силу предложения 1.1 найдётся такой вектор $y_{\mathcal{L}} \in \mathcal{L}$, что $fx = [x, y_{\mathcal{L}}]$ для любого $x \in \mathcal{L}$. Прямая проверка показывает, что $(y - y_{\mathcal{L}}) \in \mathcal{L}^{[\perp]}$. ☐

Заметим, что в пространстве Π_κ подпространство является проекционно полным тогда и только тогда, когда оно невырождено. Все определения, равно как и большинство упомянутых результатов и их доказательства, а также дальнейшее описание геометрии J-пространств можно найти в монографии [3] и лекциях [4, 5]. Мы будем придерживаться стандартных обозначений в случае понятий, связанных с гильбертовой структурой на $\mathcal{H}$ (ортогональность, ортогональное дополнение, ортогональная сумма и т. п.).

Все операторы, упомянутые в этой работе, полагаются, если только прямо не оговорено противное, линейными и ограниченными, символами $\sigma(A)$ и $\rho(A)$ обозначаются, соответственно, спектр и множество регулярных точек (в другой терминологии — резольвентное множество) оператора A. Итак, пусть $A\colon \mathcal{H} \mapsto \mathcal{H}$ — некоторый оператор. Оператор A^c называется *J-сопряжённым* (J-с.) к оператору A, если $[Ax, y] = [x, A^c y]$ для всех $x, y \in \mathcal{H}$. Отметим, что спектры операторов A и A^c расположены симметрично относительно вещественной оси (т. е. $\lambda \in \sigma(A) \Rightarrow \bar{\lambda} \in \sigma(A^c)$). Оператор A называется *J-самосопряжённым* (J-с.с.), если $A = A^c$. Заметим, что часть спектра J-с.с. оператора может быть невещественной, а собственным значениям оператора могут соответствовать нетривиальные жордановы цепочки из собственных и присоединённых векторов, причём это верно не только для операторов в пространстве Крейна, но и в псевдоунитарном пространстве (см. [3–5, 17]).

Замечание 1.1. Структура пространства Крейна позволяет переформулировать в терминах внутреннего произведения $[\cdot,\cdot]$ многие результаты, обычно формулируемые в терминах гильбертова скалярного произведения. Приведём два примера.

1. Пусть $\langle x, y\rangle$ — дополнительная непрерывная полуторалинейная форма, заданная в пространстве Крейна $\mathcal{H}$. Тогда найдётся такой оператор D, что $\langle x, y\rangle = [Dx, y]$, если форма $\langle x, y\rangle$ — эрмитова, то D — J-с.с. оператор, а если соответствующая квадратичная форма $\langle x, x\rangle$ неотрицательна, то D — J-неотрицательный оператор.
2. Если C — J-неотрицательный оператор, то $\|C\| = \sup\limits_{x\colon \|x\|=1} \{[Cx, x]\}$.

2. Спектральное разложение J-с.с. оператора в пространстве Понтрягина

В этом разделе пространство с индефинитной метрикой — это пространство Понтрягина, и указанное условие дальше оговариваться не будет. Если J-с.с. оператор A имеет только вещественный спектр, то у него есть собственная спектральная функция (с.с.ф.) E_λ с конечным множеством критических точек Λ. Точные формулировки будут приведены ниже. Поскольку некоторые формулы, полученные в процессе доказательства существования с.с.ф., используются для построения модельного пространства по версии [33], то мы приведём его набросок по схеме, предложенной в [36] (класс операторов, охваченный в [36], шире, чем рассматриваемый нами). На первом этапе вещественность спектра оператора A предполагаться не будет. Итак, по известной теореме Понтрягина найдётся такое максимальное неположительное подпространство $\mathcal{L}_-$, что $A\mathcal{L}_- \subset \mathcal{L}_-$. В силу определения пространства Понтрягина размерность подпространства $\mathcal{L}_-$ равна κ, поэтому оператор $A|_{\mathcal{L}_-}$ действует в конечномерном пространстве и его спектр — конечное множество.

Пусть $N(t)$ — минимальный аннулирующий многочлен для $A|_{\mathcal{L}_-}$ (т. е. $N\big(A|_{\mathcal{L}_-}\big)=0$ и $N(t)$ имеет минимальную степень среди всех многочленов с таким свойством), коэффициент которого при старшей степени для определённости равен единице, $\bar N(t)$ — многочлен, коэффициенты которого сопряжены к коэффициентам многочлена $N(t)$. Тогда

$$0=[N(A)x,y]=[x,\bar N(A)y],\quad \text{где}\quad x\in\mathcal{L}_-,\ \ y\in\mathcal{H},$$

поэтому $\bar N(A)\mathcal{H}\subset\mathcal{L}_+$, где $\mathcal{L}_+=\mathcal{L}_-^{[\perp]}$ — максимальное неотрицательное подпространство. Введём на $\mathcal{H}$ новую полуторалинейную форму $\langle x,y\rangle:=[N(A)x,N(A)y]$. Тогда

$$\langle x,x\rangle=[\bar N(A)N(A)x,x]=[N(A)\bar N(A)x,x]=[\bar N(A)x,\bar N(A)x]\geqslant 0\quad \forall x\in\mathcal{H}. \tag{2.1}$$

Рассмотрим последовательность степенных моментов

$$\{c_k=\langle A^kx,x\rangle\}_{k=0}^{+\infty}, \tag{2.2}$$

которая, очевидно, удовлетворяет следующему условию роста:

$$|c_k|\leqslant\|x\|^2\|N(A)\|^2\|A\|^k,\quad k=0,1,\dots \tag{2.3}$$

Так как квадратичная форма $\langle\cdot,\cdot\rangle$ неотрицательна, то по теореме Гамбургера (см., например, [7, теорема 2.1.1]) последовательность $\{c_k\}_{k=0}^{+\infty}$ допускает представление

$$c_k=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}t^k d\sigma^{(x)}(t), \tag{2.4}$$

где $\sigma^{(x)}(t)$ — неубывающая функция, $\sigma^{(x)}(-\infty)=0$, $\sigma^{(x)}(t-0)=\sigma^{(x)}(t)$ для любых $t\in\mathbb{R}$. В силу условия (2.3) функция $\sigma^{(x)}(t)$ не имеет точек роста на полубесконечных интервалах $(-\infty,-\|A\|)$ и $(\|A\|,+\infty)$, а именно

$$\sigma^{(x)}(t)=0\quad\text{при}\quad t<-\|A\|\quad\text{и}\quad \sigma^{(x)}(t)=[N(A)x,N(A)x]\quad\text{при}\quad t>\|A\|. \tag{2.5}$$

Благодаря (2.5) представление (2.4) может быть переписано в виде

$$c_k=\int\limits_{-\|A\|}^{\|A\|+\epsilon}t^k d\sigma^{(x)}(t),\quad \epsilon=\mathrm{const}>0.$$

Из последнего равенства следует (см., например, [7, теорема 2.6.4]), что функция $\sigma^{(x)}(t)$ определяется единственным образом (проблема моментов является определённой). Укажем также, что $\sigma^{(x)}(t)$ может быть восстановлена по $\{c_k\}_0^\infty$ с помощью аналитической функции $f(\xi)$, первоначально заданной в окрестности бесконечно удалённой точки рядом

$$f(\xi)=\sum_{k=0}^{\infty}c_k\xi^{-(k+1)},$$

а затем аналитически продолженной на область $\mathbb{C}\backslash[-\|A\|,\|A\|]$ формулой

$$f(\xi)=\int\limits_{-\|A\|}^{\|A\|+\epsilon}\frac{1}{\xi-t}\,d\sigma^{(x)}(t),\quad \epsilon=\mathrm{const}>0. \tag{2.6}$$

Несложно показать, что

$$\frac{\sigma^{(x)}(t-0)+\sigma^{(x)}(t+0)}{2}=\frac{1}{2\pi i}\lim_{\delta\to+0}\int\limits_{\Gamma_\delta^{(t)}}f(\xi)d\xi, \tag{2.7}$$

где $\Gamma_\delta^{(t)}$ положительно ориентированная граница прямоугольной области $[-\|A\|-1,t]\times i[-1,1]$ без участка границы между точками $(t,-i\delta)$ и $(t,i\delta)$. Чтобы не усложнять формулы, мы будем использовать дальше представление (2.4), но при этом иметь в виду, что соответствующие интегралы фактически берутся по конечному промежутку. Далее, для фиксированного t функция $\sigma^{(x)}(t)$ определяет неотрицательную числовую функцию по отношению к x. Поскольку эта функция порождена (как следует из (2.4)) эрмитовыми полуторалинейными формами $\langle A^k x, x\rangle$, для которых, очевидно, выполняются тождество параллелограмма и соотношение однородности из (1.1), то в силу единственности представления (2.4) и формулы восстановления (2.7) оба эти условия выполнены и для $\sigma^{(x)}(t)$. Кроме того, $\sigma^{(x)}(t) \leqslant [N(A)x, N(A)x]$, поэтому функция $\sigma^{(x)}(t)$ непрерывна по x в нормированной топологии. Итак, для $\sigma^{(x)}(t)$ выполнены условия теоремы 1.1. Последнее обстоятельство открывает возможность ввести эрмитову полуторалинейную форму

$$\prec x, y \succ^{(t)} := \frac{1}{4}\sum_{m=0}^{3} i^m \cdot \sigma^{(x+i^m y)}(t).$$

Поскольку квадратичная форма $\sigma^{(x)}(t)$ непрерывна по x, введённая полуторалинейная форма $\prec x, y \succ^{(t)}$ непрерывна в гильбертовой нормированной топологии. В силу сказанного (см. также замечание 1.1) найдётся операторнозначная функция G_t такая, что

- $G_{-\infty} = 0$, $G_t = \operatorname*{s\text{-}lim}_{\tau\to t-0} G_\tau$ для любого $t \in \mathbb{R}$ (s-lim — предел в сильной операторной топологии);
- для любого $t \in \mathbb{R}$ и $\tau \in (-\infty, t)$ оператор $(G_t - G_\tau)$ является J-неотрицательным;
- $N(A)\bar{N}(A)A^k x = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} t^k dG_t x$ для любого $x \in \mathcal{H}$ и $k = 0, 1, 2, \ldots$

Указанное интегральное представление степеней оператора A и стандартное разложение его резольвенты $R_\xi(A)$ в окрестности бесконечно удалённой точки (см. [20, гл. XI, § 1, п. 148, формула 5]) приводит к следующему представлению:

$$N(A)\bar{N}(A)R_\xi(A) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{t-\xi}\, dG_t, \tag{2.8}$$

где $\xi \in \mathbb{C}\backslash[-\|A\|, \|A\|]$. Далее, выражение $M(t,\xi) = \dfrac{N(\xi)\bar{N}(\xi) - N(t)\bar{N}(t)}{t-\xi}$ превращается после его очевидного доопределения в исключительной подобласти $t = z$ в полином от двух переменных, т. е. выражению $M(A,\xi) = R_\xi(A)\big(N(\xi)\bar{N}(\xi)I - N(A)\bar{N}(A)\big)$ можно придать корректный смысл. Последняя формула и представление (2.8) приводят к новому представлению

$$R_\xi(A) = \frac{1}{N(\xi)\bar{N}(\xi)}\left(M(A,\xi) + \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{t-\xi}\, dG_t\right), \tag{2.9}$$

где сходимость интеграла можно понимать как в сильной, так и в равномерной операторной топологиях. Непосредственно из этого представления следует, что вне вещественной оси функция $R_\xi(A)$ аналитична всюду за исключением, быть может, конечного числа полюсов. Последнее означает, что невещественный спектр A состоит из конечного числа собственных значений с конечной длиной жордановых цепочек. Несложно показать, что инвариантное подпространство оператора A, состоящее из всех его собственных и присоединённых векторов, отвечающих ровно одному собственному значению, нейтрально, и потому в случае пространства Понтрягина конечномерно. Кроме того, спектр любого J-с.с. оператора (как в случае пространства Понтрягина, так и пространства Крейна) симметричен относительно вещественной оси. Всё сказанное позволяет отделить инвариантное подпространство оператора A, отвечающее его невещественному спектру, от инвариантного подпространства, отвечающего его вещественному спектру. Эти подпространства оказываются J-ортогональными и проекционно полными, а первое подпространство — ещё и конечномерным. Соответствующие J-ортогональные проекторы могут быть построены как проекторы Рисса (по поводу последних см., например, [20, гл. XI, § 1, п. 148, теорема о разложении]). J-с.с. операторы в конечномерных J-пространствах полностью описываются методами линейной алгебры [17], поэтому в дальнейшем, если прямо не оговорено противное, мы будем предполагать, что

$$\sigma(A) \subset \mathbb{R}. \tag{2.10}$$

При условии (2.10) все коэффициенты многочлена $N(\xi)$ вещественны, поэтому формула (2.9) может быть заменена на формулу

$$R_\xi(A) = \frac{1}{N^2(\xi)}\left(M(A,\xi) + \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{t-\xi}\, dG_t\right). \tag{2.11}$$

Положим

$$\Lambda := \{\lambda :\ N(\lambda) = 0\}. \tag{2.12}$$

Множество Λ в дальнейшем называется *множеством критических точек* для оператора A и для его спектральной функции, к определению которой мы переходим.

Обозначим $\mathbb{R}_G$ множество тех $t \in \mathbb{R}$, для которых G_t непрерывна в сильной операторной топологии. Действуя так же, как и в (2.7), положим

$$E_t := \Big(-\frac{1}{2\pi i}\Big) \operatorname*{s\text{-}lim}_{\delta\to+0} \int\limits_{\Gamma_\delta^{(t)}} R_\xi(A)d\xi \tag{2.13}$$

для всех $t \in \mathbb{R}_G \backslash \Lambda$ и доопределим E_t по формуле $E_t := \operatorname*{s\text{-}lim}_{\tau\in\mathbb{R}_G,\, \tau\to t-0} E_\tau$ для остальных $t \in \mathbb{R}\backslash\Lambda$. Существование предела в (2.13) следует, грубо говоря, из теоремы о существовании сильного предела у монотонной ограниченной последовательности операторов в гильбертовом пространстве (см. [20, гл. VII, § 1, п. 104, теорема Вижье—С. Надя]) и формулы (2.11), однако соответствующее доказательство не вполне тривиально и требует определённой детализации. В её рамках отметим следующее. Из формул (2.11) и (2.13) мы имеем

$$E_t = \Big(-\frac{1}{2\pi i}\Big) \operatorname*{s\text{-}lim}_{\delta\to+0} \int\limits_{\Gamma_\delta^{(t)}} \frac{1}{N^2(\xi)}\left(M(A,\xi) + \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\tau-\xi}\, dG_\tau\right)d\xi. \tag{2.14}$$

Выражение $N^{-2}(\xi)M(A,\xi)$ является дробно-рациональной функцией с операторными коэффициентами, множество полюсов которой совпадает с Λ, поэтому

$$\operatorname*{s\text{-}lim}_{\delta\to+0} \int\limits_{\Gamma_\delta^{(t)}} \frac{1}{N^2(\xi)} M(A,\xi)d\xi = \int\limits_{\Gamma^{(t)}} \frac{1}{N^2(\xi)} M(A,\xi)d\xi, \tag{2.15}$$

где $\Gamma^{(t)}$ — положительно ориентированная граница прямоугольной области $[-\|A\|-1, t] \times i[-1,1]$ (см. (2.7)), а интеграл, стоящий в равенстве (2.15) справа, является интегралом от аналитической на контуре интегрирования функции, и сходимость к нему интеграла в левой части можно трактовать как в сильной, так и в равномерной операторных топологиях. Заметим также, что если λ_{n-1} и λ_n — соседние точки из Λ ($\lambda_{n-1} < \lambda_n$), то интеграл справа не меняется при изменении $t \in (\lambda_{n-1}, \lambda_n)$.

Анализ поведения интеграла $\displaystyle\int\limits_{\Gamma_\delta^{(t)}} \frac{1}{N^2(\xi)}\Big(\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\tau-\xi}\, dG_\tau\Big)d\xi$ при $\delta \to +0$ является, очевидно, более трудной задачей. Зафиксируем произвольное $t \in \mathbb{R}_G$, для которого как внутри, так и вовне контура $\Gamma^{(t)}$ найдутся точки спектра оператора A. Далее, зафиксируем числа α и β:

$$\alpha, \beta \in \mathbb{R}_G, \quad \alpha < \beta, \quad [\alpha,\beta] \cap \Lambda = \varnothing, \quad t \in (\alpha, \beta). \tag{2.16}$$

Функция G_τ не имеет точек роста при $\tau < -\|A\|$ и при $\tau > \|A\|$, поэтому несобственные интегралы $\int\limits_{-\infty}^{\alpha} \frac{1}{\tau-\xi}\, dG_\tau$ и $\int\limits_{\beta}^{+\infty} \frac{1}{\tau-\xi}\, dG_\tau$ задают функции, аналитичные на контуре $\Gamma^{(t)}$, так что

$$\operatorname*{u-lim}_{\delta\to+0} \int\limits_{\Gamma_\delta^{(t)}} \frac{1}{N^2(\xi)} \left(\int\limits_{-\infty}^{\alpha} \frac{1}{\tau-\xi}\, dG_\tau + \int\limits_{\beta}^{+\infty} \frac{1}{\tau-\xi}\, dG_\tau \right) d\xi =$$

$$= \int\limits_{\Gamma^{(t)}} \frac{1}{N^2(\xi)} \left(\int\limits_{-\infty}^{\alpha} \frac{1}{\tau-\xi}\, dG_\tau + \int\limits_{\beta}^{+\infty} \frac{1}{\tau-\xi}\, dG_\tau \right) d\xi$$

(u-lim — предел в равномерной операторной топологии).

Замечание 2.1. Функции $\frac{1}{N^2(\xi)} \int\limits_{-\infty}^{\alpha} \frac{1}{\tau-\xi}\, dG_\tau$ и $\frac{1}{N^2(\xi)} \int\limits_{\beta}^{+\infty} \frac{1}{\tau-\xi}\, dG_\tau$ аналитичны на открытой полосе $(\alpha,\beta)\times i\mathbb{R}$, поэтому интегралы

$$\int\limits_{\Gamma^{(t)}} \frac{1}{N^2(\xi)} \int\limits_{-\infty}^{\alpha} \frac{1}{\tau-\xi}\, dG_\tau d\xi \quad \text{и} \quad \int\limits_{\Gamma^{(t)}} \frac{1}{N^2(\xi)} \int\limits_{\beta}^{+\infty} \frac{1}{\tau-\xi}\, dG_\tau d\xi$$

сохраняют постоянное значение при $t \in (\alpha,\beta)$.

Далее,

$$\int\limits_{\Gamma_\delta^{(t)}} \frac{1}{N^2(\xi)} \left(\int\limits_{\alpha}^{\beta} \frac{1}{\tau-\xi}\, dG_\tau \right) d\xi = \int\limits_{\alpha}^{\beta} \left(\int\limits_{\Gamma_\delta^{(t)}} \frac{1}{N^2(\xi)(\tau-\xi)}\, d\xi \right) dG_\tau. \tag{2.17}$$

Дробь $\frac{1}{N^2(\xi)(\tau-\xi)}$ разлагается в линейную комбинацию дробей вида $\frac{1}{(\xi-\lambda_m)^l(\xi-\tau)}$, где λ_m — произвольная точка из множества Λ, а степень l меняется от единицы до значения кратности λ_m как корня многочлена $N^2(\xi)$. Одновременно

$$\frac{1}{(\xi-\lambda_m)^l(\xi-\tau)} = \left(\frac{1}{(\xi-\lambda_m)^l(\xi-\tau)} - \frac{1}{(\tau-\lambda_m)^l(\xi-\tau)} \right) + \frac{1}{(\tau-\lambda_m)^l(\xi-\tau)} =$$

$$= -\frac{\sum\limits_{j=0}^{l-1} (\tau-\lambda_m)^{l-j-1}(\xi-\lambda_m)^j}{(\xi-\lambda_m)^l(\tau-\lambda_m)^l} + \frac{1}{(\tau-\lambda_m)^l(\xi-\tau)} =$$

$$= \frac{1}{(\tau-\lambda_m)^l(\xi-\tau)} - \frac{1}{(\tau-\lambda_m)^l(\xi-\lambda_m)} - \sum_{j=0}^{l-2} (\tau-\lambda_m)^{-(j+1)}(\xi-\lambda_m)^{j-l}.$$

Указанная цепочка преобразований предполагает, что $l \geqslant 2$; если же $l=1$, то в последней строчке преобразований третье слагаемое (т. е. сумма) должно быть опущено, что только упрощает дальнейшие рассуждения. Пусть $l \geqslant 2$, тогда

$$\int\limits_{\Gamma_\delta^{(t)}} \sum_{j=0}^{l-2} (\tau-\lambda_m)^{-(j+1)}(\xi-\lambda_m)^{j-l} d\xi =$$

$$= \sum_{j=0}^{l-2} \frac{1}{j-l+1} (\tau-\lambda_m)^{-(j+1)} \big((t-\delta i+1)^{j-l+1} - (t+\delta i+1)^{j-l+1} \big)$$

и, следовательно, выражение $\int\limits_{\Gamma_\delta^{(t)}} \sum\limits_{j=0}^{l-2} (\tau-\lambda_m)^{-(j+1)}(\xi-\lambda_m)^{j-l} d\xi$ равномерно по t стремится к нулю при $\delta \to 0$ и $t \in [\alpha, \beta]$. Далее, значение интеграла $\int\limits_{\Gamma_\delta^{(t)}} (\xi - \lambda_m)^{-1}\, d\xi$ зависит от местоположения точки λ_m:

$$\int\limits_{\Gamma_\delta^{(t)}} \frac{1}{(\xi-\lambda_m)}\, d\xi = \begin{cases} 2i\Big(\pi - \operatorname{arctg}\Big(\dfrac{\delta}{t-\lambda_m}\Big)\Big), & \text{если } \lambda_m < \alpha; \\ 2i \operatorname{arctg}\Big(\dfrac{\delta}{\lambda_m - t}\Big), & \text{если } \lambda_m > \beta; \end{cases}$$

поэтому

$$\operatorname*{u-lim}_{\delta\to+0} \int\limits_{\alpha}^{\beta} \Bigg(\int\limits_{\Gamma_\delta^{(t)}} \frac{1}{(\tau-\lambda_m)^l(\xi-\lambda_m)}\, d\xi \Bigg) dG_\tau = \begin{cases} 2\pi i \displaystyle\int\limits_{\alpha}^{\beta} \frac{1}{(\tau-\lambda_m)^l}\, dG_\tau, & \text{если } \lambda_m < \alpha; \\ 0, & \text{если } \lambda_m > \beta. \end{cases}$$

Похожим образом выглядит значение интеграла $\int\limits_{\Gamma_\delta^{(t)}} \frac{1}{(\xi-\tau)}\, d\xi$:

$$\int\limits_{\Gamma_\delta^{(t)}} \frac{1}{(\xi-\tau)}\, d\xi = \begin{cases} 2i\Big(\pi - \operatorname{arctg}\Big(\dfrac{\delta}{t-\tau}\Big)\Big), & \text{если } \tau < t; \\ \pi i, & \text{если } \tau = t; \\ 2i \operatorname{arctg}\Big(\dfrac{\delta}{\tau - t}\Big), & \text{если } \tau > t. \end{cases}$$

Этот случай, тем не менее, принципиально отличается от предыдущих, поскольку результат интегрирования зависит от τ и при переходе к пределу при $\delta \to +0$ мы получаем разрывную функцию:

$$\lim_{\delta\to+0} \int\limits_{\Gamma_\delta^{(t)}} \frac{1}{(\xi-\tau)}\, d\xi = \begin{cases} 2\pi i, & \text{если } \tau < t; \\ \pi i, & \text{если } \tau = t; \\ 0, & \text{если } \tau > t. \end{cases}$$

В силу сказанного зависящий от δ оператор $\int\limits_{\alpha}^{\beta} \Big(\int\limits_{\Gamma_\delta^{(t)}} \frac{1}{(\tau-\lambda_m)^l(\xi-\tau)}\, d\xi \Big) dG_\tau$ не имеет, вообще говоря, предела в равномерной операторной топологии при $\delta \to +0$, однако его поведение в сильной операторной топологии будет иным. Действительно, операторы

$$\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\alpha}^{t} \Bigg(\int\limits_{\Gamma_\delta^{(t)}} \frac{1}{(\tau-\lambda_m)^l(\xi-\tau)}\, d\xi \Bigg) dG_\tau \quad \text{и} \quad \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{t}^{\beta} \Bigg(\int\limits_{\Gamma_\delta^{(t)}} \frac{1}{(\tau-\lambda_m)^l(\xi-\tau)}\, d\xi \Bigg) dG_\tau$$

монотонно (хотя и разнонаправленно) зависят от δ и ограничены, поэтому в силу упомянутой выше теоремы Вижье—С. Надя сходятся в сильной операторной топологии к некоторым пределам при $\delta \to +0$. Теорема Вижье—С. Надя — это теорема существования, не дающая ответ на вопрос, каковы эти пределы, но переход к слабому пределу даёт возможность применить теорему Б. Леви о монотонной сходимости. Обычно теорему Б. Леви формулируют для интеграла Лебега, но она очевидным образом переформулируется для интеграла Лебега—Стилтьеса (см., например, [11]). Итак,

$$\lim_{\delta\to+0} \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\alpha}^{\beta} \Bigg(\int\limits_{\Gamma_\delta^{(t)}} \frac{1}{(\tau-\lambda_m)^l(\xi-\tau)}\, d\xi \Bigg) d(G_\tau x, x) = \int\limits_{\alpha}^{t} \frac{1}{(\tau-\lambda_m)^l}\, d(G_\tau x, x).$$

Суммируя всё полученное выше, имеем (см. (2.13))

$$E_t = B^{\alpha,\beta} + \int\limits_{\alpha}^{t} \frac{1}{N^2(\tau)}\, dG_\tau, \tag{2.18}$$

где J-с.с. оператор $B^{\alpha,\beta}$ зависит от α и β, но не зависит от $t \in (\alpha, \beta)$. Формула (2.18) малооперативна, поскольку действия оператора на векторы пространства $\mathcal{H}$ не имеют явного описания, однако локальное приращение $E(\Delta)$ для соответствующего приращения Δ выглядит достаточно просто:

$$\text{если}\quad \alpha < \mu < \nu < \beta, \quad \text{то} \quad E(\Delta) = \int\limits_{\mu}^{\nu} \frac{1}{N^2(t)}\, dG_t, \tag{2.19}$$

где $\Delta = [\mu, \nu)$, $E(\Delta) = E_\nu - E_\mu$, $\mu, \nu \in \mathbb{R}_G$. Последнее ограничение — временное, и в дальнейшем (после соответствующего обоснования) мы от него откажемся. Оператор $E(\Delta)$ можно ввести не только через E_t, но и (учитывая механизм определения самого оператора E_t) через контурный интеграл, трактуемый как интеграл в смысле главного значения

$$E(\Delta) = -\frac{1}{2\pi i} \operatorname*{s-lim}_{\delta\to+0} \int\limits_{\Upsilon_\delta^{(\Delta)}} R_\xi(A) d\xi, \tag{2.20}$$

где $\Upsilon_\delta^{(\Delta)}$ — часть положительно ориентированной границы $\Upsilon^{(\Delta)}$ прямоугольника $[\mu, \nu] \times i[-1, 1]$ без двух участков границы, заключённых, во-первых, между точками $(\mu, -i\delta)$ и $(\mu, i\delta)$ и, во-вторых, между точками $(\nu, -i\delta)$ и $(\nu, i\delta)$; т. е. состоящая из двух частей кривая интегрирования $\Upsilon_\delta^{(\Delta)}$ получена из контура $\Upsilon^{(\Delta)}$ удалением из последнего малых участков в соответствующих окрестностях его пересечения с вещественной прямой. Форма пути $\Upsilon_\delta^{(\Delta)}$ не меняется при применении к нему операции сопряжения, однако ориентация пути при сопряжении меняется на противоположную, что, в свою очередь, компенсируется сменой знака у множителя $(2\pi i)^{-1}$, поэтому заданный формулой (2.20) оператор $E(\Delta)$ J-самосопряжён. Заметим, что высота прямоугольника $[\mu, \nu] \times i[-1, 1]$ в формуле (2.20) существенной роли не играет, прямоугольник может быть заменён, скажем, прямоугольником $[\mu, \nu] \times i[-1/2, 1/2]$, полную границу которого мы обозначим через $\widetilde{\Upsilon}^{(\Delta)}$, а с указанными выше изъятиями — через $\widetilde{\Upsilon}_\delta^{(\Delta)}$. Наша ближайшая цель — показать, что оператор $E(\Delta)$ является проектором, для чего достаточно показать, что $E^2(\Delta) = E(\Delta)$. В процессе этого доказательства мы будем следовать схеме [20, гл. XI, § 1, п. 148], но с учётом того, что в нашем случае соответствующие контурные интегралы являются интегралами в смысле главного значения и пересекаются со спектром оператора A. Пусть $\mu < \mu_1 < \nu_1 < \nu$, $\Delta_1 = [\mu_1, \nu_1)$, $E(\Delta_1) = E_{\nu_1} - E_{\mu_1}$, функция G_t непрерывна в точках μ_1 и ν_1. Поскольку операторы $E(\Delta)$ и $E(\Delta_1)$ введены как интегралы от резольвенты оператора A, то они перестановочны как с оператором A, так и между собой. Кроме того, произведение операторов непрерывно в сильной операторной топологии, поэтому

$$E(\Delta)E(\Delta_1) = \left(\frac{1}{2\pi i}\right)^2 \operatorname*{s-lim}_{\delta\to+0} \int\limits_{\Upsilon_\delta^{(\Delta)}} R_\xi(A) d\xi \cdot \operatorname*{s-lim}_{\delta_1\to+0} \int\limits_{\widetilde{\Upsilon}_{\delta_1}^{(\Delta_1)}} R_\xi(A) d\xi$$

или

$$E(\Delta)E(\Delta_1) = \left(\frac{1}{2\pi i}\right)^2 \operatorname*{s-lim}_{\delta\to+0} \operatorname*{s-lim}_{\delta_1\to+0} \int\limits_{\Upsilon_\delta^{(\Delta)}} \left(\int\limits_{\widetilde{\Upsilon}_{\delta_1}^{(\Delta_1)}} R_\xi(A) \cdot R_\zeta(A) d\zeta \right) d\xi. \tag{2.21}$$

Воспользуемся теперь следующим равенством (см. [20, гл. XI, § 1, п. 147, формула 8]), которое иногда называют тождеством Гильберта для резольвент:

$$R_\xi(A) - R_\zeta(A) = (\xi - \zeta) R_\xi(A) \cdot R_\zeta(A). \tag{2.22}$$

Тогда интеграл из правой части равенства (2.21) преобразуется следующим образом:

$$\int\limits_{\Upsilon_\delta^{(\Delta)}} \Bigg(\int\limits_{\widetilde{\Upsilon}_{\delta_1}^{(\Delta_1)}} R_\xi(A)\cdot R_\zeta(A)d\zeta\Bigg)d\xi = \int\limits_{\Upsilon_\delta^{(\Delta)}} \Bigg(\int\limits_{\widetilde{\Upsilon}_{\delta_1}^{(\Delta_1)}} \frac{R_\xi(A)-R_\zeta(A)}{(\xi-\zeta)}d\zeta\Bigg)d\xi.$$

Точка ξ является внешней по отношению к контуру $\widetilde{\Upsilon}^{(\Delta_1)}$, поэтому

$$\lim_{\delta_1\to+0} R_\xi(A) \int\limits_{\Upsilon_{\delta_1}^{(\Delta_1)}} \frac{1}{(\xi-\zeta)}\,d\zeta = 0.$$

Далее, точка ζ является внутренней по отношению к контуру $\widetilde{\Upsilon}^{(\Delta)}$, поэтому

$$\lim_{\delta\to+0} R_\zeta(A) \int\limits_{\Upsilon_\delta^{(\Delta)}} \frac{1}{(\xi-\zeta)}\,d\xi = 2\pi i R_\zeta(A).$$

Указанные в (2.21) порядки вычисления как кратного предела, так и кратного интеграла могут быть изменены, поэтому из трёх последних равенств и (2.21) мы имеем, что

$$E(\Delta)E(\Delta_1) = E(\Delta_1). \tag{2.23}$$

Оператор $E(\Delta_1)$ ведёт себя монотонно (хотя и разнонаправленно) как при $\mu_1\to\mu+0$, так и при $\nu_1\to\nu-0$, поэтому

$$E(\Delta) = \operatorname*{s-lim}_{\mu_1\to\mu+0}\ \operatorname*{s-lim}_{\nu_1\to\nu-0} E(\Delta_1)$$

и (2.23) влечёт требуемое равенство. Итак, $E(\Delta)$ — проектор и к тому же, как отмечалось выше, J-с.с., поэтому он J-ортогонален. Кроме того, оператор A перестановочен с $R_\xi(A)$, поэтому он перестановочен с $E(\Delta)$, откуда $E(\Delta)AE(\Delta) = AE(\Delta)$, т. е. подпространства $\mathcal{H}_\Delta = E(\Delta)\mathcal{H}$ и $\mathcal{H}_\Delta^{[\perp]} = \big(I-E(\Delta)\big)\mathcal{H}$ инвариантны относительно A. Практически так же доказывается, что J-с.с. проектором является оператор E_t: сначала при $t_1<t$ доказывается равенство $E_{t_1}E_t = E_{t_1}$, а затем равенство $E_t^2 = E_t$ доказывается предельным переходом при $t_1\to t$.

Наша следующая задача — определить локализацию спектра для сужений $A|_{E_t\mathcal{H}}$ и $A|_{(I-E_t)\mathcal{H}}$. Для этого надо доказать, действуя по схеме [20], наличие предела $\lim\limits_{\delta\to+0}\int\limits_{\Gamma_\delta^{(t)}}\frac{R_\xi(A)}{(\xi-\zeta)}d\xi$ (непосредственно в условиях [20] этот предел существует автоматически). Если оператор $R_\zeta(A)$ определён, то существование нужного предела следует из представления

$$\int\limits_{\Gamma_\delta^{(t)}} \frac{R_\xi(A)}{(\xi-\zeta)}\,d\xi = \int\limits_{\Gamma_\delta^{(t)}} \frac{R_\xi(A)-R_\zeta(A)}{(\xi-\zeta)}\,d\xi + \int\limits_{\Gamma_\delta^{(t)}} \frac{R_\zeta(A)}{(\xi-\zeta)}\,d\xi,$$

которое благодаря (2.22) преобразуется в представление

$$\int\limits_{\Gamma_\delta^{(t)}} \frac{R_\xi(A)}{(\xi-\zeta)}\,d\xi = R_\zeta(A)\int\limits_{\Gamma_\delta^{(t)}} R_\xi(A)d\xi + R_\zeta(A)\int\limits_{\Gamma_\delta^{(t)}} \frac{d\xi}{(\xi-\zeta)}. \tag{2.24}$$

Отметим, что (2.24) имеет, в частности, место, если $\zeta\notin\mathbb{R}$. Если же $\zeta\in\mathbb{R}$ и $\zeta\notin\Lambda$, то доказательство существования искомого предела реализуется по той же схеме, что и доказательство корректности определения (2.13), с единственным дополнительным условием, что α и β выбираются так, что $\zeta\notin[\alpha,\beta]$. Далее, из очевидного равенства

$$(A-\zeta I)R_\xi(A) = (A-\xi I)R_\xi(A) + (\xi-\zeta)R_\xi(A)) = (I+(\xi-\zeta)R_\xi(A))$$

следует

$$(A-\zeta I)\int\limits_{\Gamma_\delta^{(t)}} \frac{R_\xi(A)}{(\xi-\zeta)}\,d\xi = \int\limits_{\Gamma_\delta^{(t)}} \frac{1}{(\xi-\zeta)}\,d\xi\cdot I + \int\limits_{\Gamma_\delta^{(t)}} R_\xi(A)d\xi. \tag{2.25}$$

Интегралы, стоящие в левой части равенства (2.25), имеют пределы в сильной операторной топологии при $\delta \to +0$, поэтому

$$(A-\zeta I) \int\limits_{\Gamma^{(t)}}' \frac{R_\xi(A)}{(\xi-\zeta)}\, d\xi = \begin{cases} 2\pi i(I-E_t), & \text{если } \zeta \in (-\|A\|-1,t)\times i(-1,1),\\ 2\pi i E_t, & \text{если } \zeta \notin [-\|A\|-1,t]\times i[-1,1], \end{cases}$$

где $\int'$ — интеграл в смысле главного значения. Полученное равенство показывает, что для любой точки $\zeta \in (-\|A\|-1,t)\times i(-1,1)$ оператор $(A-\zeta I)|_{(I-E_t)\mathcal{H}}$ является (двусторонне ограниченно) обратимым, т. е.

$$(-\|A\|-1,t)\times i(-1,1) \subset \rho(A|_{(I-E_t)\mathcal{H}});$$

по аналогичным причинам

$$\mathbb{C}\backslash\big([-\|A\|-1,t]\times i[-1,1]\big) \subset \rho(A|_{E_t\mathcal{H}}).$$

Пусть вещественные числа a и b таковы, что $a<b$, $a,b\notin\Lambda$, $G_a = \operatorname*{s-lim}_{t\to a} G_t$, $G_b = \operatorname*{s-lim}_{t\to b} G_t$. Рассматривая $A|_{E_a\mathcal{H}}$ как сужение оператора $A|_{E_b\mathcal{H}}$ и повторяя приведённую выше схему, мы получим, что

- $(a,b)\times i(-1,1) \subset \rho(A|_{(I-E(\Delta))\mathcal{H}})$,
- $\mathbb{C}\backslash\big([a,b]\times i[-1,1]\big) \subset \rho(A|_{E(\Delta)\mathcal{H}})$,

где $\Delta=[a,b)$, $E(\Delta)=E_b-E_a$.

Наша следующая задача — найти интегральное представление оператора $A|_{E(\Delta)\mathcal{H}}$, где Δ и $E(\Delta)$ заданы условиями (2.19) и (2.20). Благодаря равенствам

$$AR_\xi(A) = I + \xi R_\xi(A), \qquad \frac{\xi}{t-\xi} = -1 + \frac{t}{t-\xi}$$

и представлению (2.11) имеем

$$\begin{aligned} AR_\xi(A) &= I + \frac{\xi}{N^2(\xi)}\left(M(A,\xi) + \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{t-\xi}\, dG_t\right) = \\ &= I + \frac{1}{N^2(\xi)}\left(\xi M(A,\xi) - N^2(A) + \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{t}{t-\xi}\, dG_t\right) = \\ &= I + \frac{1}{N^2(\xi)}\left(\xi M(A,\xi) - N^2(A) + \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{t-\xi}\, dF_t\right), \end{aligned} \tag{2.26}$$

где $F_t = \int\limits_{-\infty}^{t} \eta\, dG_\eta$. Представление (2.26) имеет тот же набор свойств, что и использованные при вычислении интеграла (2.20) свойства представления (2.11), с тем небольшим уточнением, что оператор-функция F_t не является, вообще говоря, монотонной на $\mathbb{R}$, однако она будет монотонной на положительной и отрицательной полупрямых и непрерывной в нуле. Сказанное означает, что

$$AE(\Delta) = -\frac{1}{2\pi i} \operatorname*{s-lim}_{\delta\to+0} \int\limits_{\Upsilon_\delta^{(\Delta)}} AR_\xi(A)\, d\xi = \int\limits_{\mu}^{\nu} \frac{1}{N^2(t)}\, dF_t = \int\limits_{\mu}^{\nu} \frac{t}{N^2(t)}\, dG_t. \tag{2.27}$$

Нам осталось избавиться от условия $t\in\mathbb{R}_G\backslash\Lambda$, использованного при анализе представления (2.14) и выводе последующих формул. Для этого при $t-\epsilon\in\mathbb{R}\backslash\Lambda$ и $t\notin\mathbb{R}_G$ нам достаточно положить

$$E_t = \operatorname*{s-lim}_{t-\epsilon\in\mathbb{R}_G,\, \epsilon\to+0} E_{t-\epsilon}.$$

Итак, установлено, что J-с.с. оператор A с вещественным спектром обладает спектральной функцией E_t такой, что (здесь $\Delta = [a, b)$, $a, b \notin \Lambda$)

$$\left.\begin{array}{l}
\textbf{a.}\ \text{для любого } t \in \mathbb{R}\backslash\Lambda \text{ верно } AE_t = E_tA;\\
\textbf{b.}\ \text{если } E(\Delta)\mathcal{H} \neq \{0\}, \text{ то } \sigma(A|_{E(\Delta)\mathcal{H}}) \subset \bar{\Delta};\\
\textbf{c.}\ \text{если } \Delta \cap \Lambda = \varnothing \text{ и } E(\Delta)\mathcal{H} \neq \{0\}, \text{ то подпространство}\\
\quad E(\Delta)\mathcal{H} \text{ положительно и } AE(\Delta) = \int\limits_{\Delta} t dE_t;\\
\textbf{d.}\ \text{если } \Delta \cap \Lambda \neq \varnothing, \text{ то подпространство } E(\Delta)\mathcal{H} \text{ либо от-}\\
\quad \text{рицательно, либо индефинитно.}
\end{array}\right\} \tag{2.28}$$

Поясним последний пункт. В условиях этого пункта подпространство $E(\Delta)\mathcal{H}$ содержит либо отрицательный, либо нейтральный собственный вектор оператора A, вместе с тем оно проекционно полно. Проекционно полное подпространство не может быть семидефинитным (в данном случае — неположительным), поэтому оно либо отрицательно, либо (если найдётся нейтральный собственный вектор) индефинитно.

Продолжим тему. Пусть $\lambda_0 \in \Lambda$. Тогда возможны три взаимоисключающих варианта:

- для некоторого интервала $\Delta = [a, b)$ такого, что $(a, b) \cap \Lambda = \{\lambda_0\}$ и $a, b \notin \Lambda$, спектральная функция $E_t|_{E(\Delta)\mathcal{H}}$ ограничена, и после доопределения $E_{\lambda_0} = \operatorname*{s-lim}\limits_{t\to\lambda_0-0} E_t$ справедливо равенство $AE(\Delta) = \int\limits_{\Delta} t dE_t$;
- для некоторого интервала $\Delta = [a, b)$ такого, что $(a, b) \cap \Lambda = \{\lambda_0\}$ и $a, b \notin \Lambda$, спектральная функция $E_t|_{E(\Delta)\mathcal{H}}$ ограничена, но после доопределения $E_{\lambda_0} = \operatorname*{s-lim}\limits_{t\to\lambda_0-0} E_t$ имеем соотношение $AE(\Delta) \neq \int\limits_{\Delta} t dE_t$;
- для некоторого интервала $\Delta = [a, b)$ такого, что $(a, b) \cap \Lambda = \{\lambda_0\}$ и $a, b \notin \Lambda$, спектральная функция $E_t|_{E(\Delta)\mathcal{H}}$ неограничена.

Отметим, что ограниченность спектральной функции $E_t|_{E(\Delta)\mathcal{H}}$ имеет (или не имеет) место одновременно для всех интервалов $\Delta = [a, b)$, подчинённых условиям $(a, b) \cap \Lambda = \{\lambda_0\}$ и $a, b \notin \Lambda$ с фиксированным λ_0, а наличие предела $\operatorname*{s-lim}\limits_{t\to\lambda_0-0} E_t$ следует из теоремы Вижье—С. Надя (см. [20, гл. VII, § 1, п. 104]). Интерпретируем теперь каждую из этих опций в терминах теории спектральных операторов (см. [15]). Первый вариант означает, что оператор $A|_{E(\Delta)\mathcal{H}}$ подобен самосопряжённому оператору, т. е. является скалярным спектральным оператором с вещественным спектром. Второй вариант соответствует случаю, когда оператор $\lambda_0 \in \Lambda$ является спектральным оператором, состоящим из суммы скалярного спектрального оператора и нетривиального конечномерного нильпотентного оператора. Итак, только третий вариант отвечает случаю обобщённых спектральных операторов, для которых нет развитой теории модельных представлений. Именно этим исключительным случаем мы и займёмся в следующем разделе.

3. Модель J-с.с. оператора на базе его спектрального разложения

В этом разделе, как и выше, $\mathcal{H}$ — пространство Понтрягина.

Рассмотрим следующий пример.

Пример 3.1. Пусть система $e, g, f, h_1, h_2, h_3, \ldots$ образует ортонормированный базис в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$, и пусть полуторалинейная форма на $\mathcal{H}$ задаётся формулой

$$[x, y] = (x, e)(g, y) + (x, g)(e, y) + (x, f)(f, y) + \sum_{j=1}^{\infty}(x, h_j)(h_j, y).$$

Тогда это пространство превращается в пространство Понтрягина с $\kappa = 1$. Зададим на $\mathcal{H}$ оператор A с помощью следующих условий:

- $Ae = 0$,
- $Ah_j = \dfrac{1}{j} \cdot (h_j + e)$, $j = 1, 2, \ldots$,

- $Ag = -f + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j} \cdot h_j$,
- $Af = -e$.

Расширяя область определения оператора A по линейности и непрерывности на всё пространство $\mathcal{H}$, получим, что A — это компактный J-с.с. оператор, $A(h_j + e) = \frac{1}{j} \cdot (h_j + e)$, $j = 1, 2, \ldots$ Спектральная функция оператора A может быть полностью описана следующим равенством:

$$E(\{j^{-1}\})x = [x, (h_j + e)] \cdot (h_j + e),$$

так что

$$E_t x = (I - E(\{j^{-1}\}_{j=1}^{n}))x = x - \sum_{j=1}^{n} [x, (h_j + e)] \cdot (h_j + e), \tag{3.1}$$

где $n = [t^{-1}]$, $[t^{-1}]$ — целая часть числа t^{-1}.

Положим $x_n = \frac{1}{n} \cdot \sum_{j=1}^{n} h_j$. Тогда

$$E(\{j^{-1}\}_{j=1}^{n})x_n = \frac{1}{n} \cdot \sum_{j=1}^{n} (h_j + e) = e + x_n.$$

В то же самое время

$$\|x_n\| = \frac{1}{\sqrt{n}} \to 0$$

при $n \to \infty$. Итак, для оператора A и его спектральной функции E_λ имеют место следующие результаты ($\mathrm{Lin}\, X$ и $\mathrm{CLin}\, X$ это, соответственно, линейная оболочка и замкнутая линейная оболочка множества X):

$$\left.\begin{array}{ll} \textbf{a.} & \text{спектральная функция } E_\lambda \text{ неограничена;} \\ \textbf{b.} & \text{ядро оператора } A|_{\tilde{\mathcal{H}}}, \text{ где } \tilde{\mathcal{H}} = \underset{\Delta=[a,b),\, 0<a<b}{\mathrm{CLin}} \{E(\Delta)\mathcal{H}\}, \\ & \text{нетривиально;} \\ \textbf{c.} & \text{подпространство } \tilde{\mathcal{H}} \text{ вырождено.} \end{array}\right\} \tag{3.2}$$

Поясним, что в условиях приведённого примера $e \in \operatorname{Ker} A|_{\tilde{\mathcal{H}}}$ и $\tilde{\mathcal{H}} \cap \tilde{\mathcal{H}}^{[\perp]} = \{\mu e\}_{\mu \in \mathbb{C}}$, при этом условия (3.2) сформулированы так, что их одновременное выполнение отражает общую ситуацию в следующем смысле.

Предложение 3.1. *Если A — J-с.с. оператор с неотрицательным спектром и $t = 0$ — его единственная критическая точка, то три условия (3.2) эквивалентны.*

Доказательство. Линеал $\underset{\Delta=[a,b),\, 0<a<b}{\mathrm{Lin}} \{E(\Delta)\mathcal{H}\}$ в условиях, наложенных на оператор A, является J-положительным, а подпространство $\tilde{\mathcal{H}}$ либо J-положительно, либо J-неотрицательно. Если спектральная функция E_λ неограничена, то подпространство $\tilde{\mathcal{H}}$ не является проекционно полным. Действительно, допустим противное, пусть $\tilde{P}$ — J-ортопроектор на $\tilde{\mathcal{H}}$. По построению $\tilde{P}E(\Delta) = E(\Delta)$, откуда $E(\Delta)\tilde{P} = (\tilde{P}E(\Delta))^c = E(\Delta)$ и для любого $x \in \mathcal{H}$

$$[\tilde{P}x, x] = [\tilde{P}E(\Delta)x, E(\Delta)x] + [\tilde{P}(\tilde{P} - E(\Delta))x, (\tilde{P} - E(\Delta))x] \geqslant [E(\Delta)x, x].$$

Итак (см. замечание 1.1), семейство операторов $\{E(\Delta)\}$ ограничено, что противоречит ограниченности оператор-функции E_t. Напомним следующий результат.

Теорема (см. [1, теорема I.9.6]). *Пусть подпространство $\mathcal{L}$ пространства Понтрягина положительно. Тогда существует константа $c > 1$ такая, что $(x, x) \leqslant c[x, x]$ для любого $x \in \mathcal{L}$.*

По этой теореме подпространство $\tilde{\mathcal{H}}$, если оно не проекционно полно, не может быть J-положительным, поэтому оно вырождено, т. е. из (3.2**a**) следует (3.2**c**). Далее, подпространство $\tilde{\mathcal{H}} \cap \tilde{\mathcal{H}}^{[\perp]}$ нейтрально и поэтому конечномерно, так что спектр оператора $A|_{\tilde{\mathcal{H}} \cap \tilde{\mathcal{H}}^{[\perp]}}$ — точечный, но ненулевым он в силу (2.28**c**) быть не может, т. е. $\sigma\big(A|_{\tilde{\mathcal{H}} \cap \tilde{\mathcal{H}}^{[\perp]}}\big) = \{0\}$. Итак, из (3.2**c**) следует (3.2**b**). Наконец, если спектральная функция E_t ограничена, то $\tilde{\mathcal{H}} = (I - E_{+0})\mathcal{H}$ и $t = 0$ принадлежит разве что непрерывному спектру оператора $A|_{\tilde{\mathcal{H}}}$, т. е. из (3.2**b**) следует (3.2**a**). $\square$

Для простоты ниже в рамках данного раздела рассмотрим такой J-с.с. оператор A, что

$$\left.\begin{aligned}&\textbf{a. } \Lambda=\{0\};\\&\textbf{b. } \text{функция } E_t \text{ неограничена;}\\&\textbf{c. } \text{для любого полуинтервала } \Delta=[a,b) \text{ такого, что}\\&\quad 0\notin[a,b], \text{ оператор } A|_{E(\Delta)\mathcal{H}} \text{ имеет простой спектр.}\end{aligned}\right\}\tag{3.3}$$

С учётом (3.3) переопределим $\tilde{\mathcal{H}}$: $\tilde{\mathcal{H}} = \underset{\Delta=[a,b),\,0\notin[a,b]}{\mathrm{CLin}}\{E(\Delta)\mathcal{H}\}$. В силу (3.3**b**) подпространство $\tilde{\mathcal{H}}$ вырождено, т. е. $\widetilde{\mathcal{H}}\cap\widetilde{\mathcal{H}}^{[\perp]}\neq\{0\}$. Положим $\mathcal{H}_1 := \widetilde{\mathcal{H}}\cap\widetilde{\mathcal{H}}^{[\perp]}$. Отметим, что $\mathcal{H}_1$ — конечномерное подпространство размерности $k\leqslant\kappa$. Поскольку подпространство $\tilde{\mathcal{H}}$ неотрицательно, оно может быть представлено в виде

$$\tilde{\mathcal{H}}=\mathcal{H}_1\dotplus\mathcal{H}_2,\tag{3.4}$$

где $\mathcal{H}_2$ — положительное подпространство.

Лемма 3.1. *Пусть E_λ — спектральная функция J-с.с. оператора A, удовлетворяющего условиям* (3.3). *Тогда найдутся скалярная лебегова мера μ_σ, ассоциированное с этой мерой гильбертово пространство L^2_σ и набор μ_σ-измеримых скалярных функций $\{\tilde g_j(t)\}_{j=1}^k$ такие, что если* $\Delta=[a,b)$, $0\notin[a,b]$, *то оператор $E(\Delta)|_{\widetilde{\mathcal{H}}}$ подобен оператору, действующему по формулам*

$$\begin{aligned}&f(t)\mapsto\chi_\Delta(t)f(t)+\sum_{j=1}^k\int\limits_\Delta f(t)\overline{\tilde g_j(t)}\,d\sigma(t)\cdot e_j,\\&e_j\mapsto 0,\quad j=1,2,\ldots,k,\end{aligned}$$

на формальной линейной оболочке L^2_σ и $\{e_j\}_{j=1}^k$, где $\{e_j\}_{j=1}^k$ — базис в $\mathcal{H}_1$, а $\chi_\Delta(t)$ — индикатор множества Δ, причём $\chi_\Delta(t)\tilde g_j(t)\in L^2_\sigma$ для $j=1,2,\ldots,k$ и

$$\sum_{j=1}^k\alpha_j\tilde g_j(t)\in L^2_\sigma\quad\Longrightarrow\quad\alpha_1=\alpha_2=\ldots=\alpha_k=0.\tag{3.5}$$

Доказательство. В соответствии с равенством (3.4) сужение $E(\Delta)|_{\widetilde{\mathcal{H}}}$ имеет следующее матричное представление:

$$E(\Delta)|_{\widetilde{\mathcal{H}}}=\begin{pmatrix}0 & E_{12}(\Delta)\\0 & E_{22}(\Delta)\end{pmatrix}.\tag{3.6}$$

Напомним, что гильбертово скалярное произведение играет для нас вспомогательную роль, поэтому его можно выбирать среди топологически эквивалентных произведений, обеспечивающих требуемую структуру фундаментальной симметрии J. Не нарушая общности можно допустить, что

$$(\cdot,\,\cdot)=[\cdot,\,\cdot]\quad\text{на}\quad\mathcal{H}_2\quad\text{и}\quad\mathcal{H}_1\perp\mathcal{H}_2.\tag{3.7}$$

Тогда оператор-функция $F_t:=E_{22}((-\infty,t))$ представляет собой (ортогональное) разложение единицы, действующее в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}_2$. Согласно общей теории самосопряжённых операторов в гильбертовом пространстве найдётся гильбертово пространство L^2_σ скалярных (см. (3.3)) функций и оператор подобия $W: L^2_\sigma\mapsto\mathcal{H}_2$ такие, что для любого $\Delta=[a,b)$

$$W^{-1}E_{22}(\Delta)Wf(t)=\chi_\Delta(t)f(t).\tag{3.8}$$

Далее, пусть $\{e_j\}_1^k$ — ортонормированный базис в $\mathcal{H}_1$. Так как проектор $E(\Delta)$ ограничен для любого $\Delta=[a,b)$, $0\notin\Delta$, то для произвольного $j=1,2,\ldots,k$ выражение $\nu_j^\Delta Wf(t):=\big(E_{12}(\Delta)Wf(t),e_j\big)$ задаёт на L^2_σ непрерывный линейный функционал. Благодаря этому для любого $j=1,2,\ldots,k$ найдётся такая F-измеримая функция $\tilde g_j(t)$, что для любого $\Delta=[a,b]$, $0\notin\Delta$ и $f(t)\in L^2_\sigma$ имеет место представление

$$\nu_j^\Delta Wf(t)=\int\limits_\Delta f(t)\overline{\tilde g(t)}\,d\sigma(t).\tag{3.9}$$

Тот факт, что функция $\tilde{g}_j(t)$ не зависит от Δ, вытекает из представления (3.9) для непересекающихся интервалов и того обстоятельства, что $E(\Delta)$ — это проектор. Далее, так как оператор-функция E_t неограничена, то, как минимум,

$$\tilde{g}_j(t) \notin L^2_\sigma$$

для одного $j = 1, 2, \ldots, k$. Нам осталось показать, что на самом деле верно более сильное утверждение (3.5).

Пространство $\tilde{\mathcal{H}}$ благодаря своему определению и формуле (3.9) является замыканием векторов, имеющих форму

$$Wf(t) + \sum_{j=1}^{k} \int_{\mathbb{R}} f(t)\overline{\tilde{g}_j(t)} d\sigma(t) \cdot e_j, \tag{3.10}$$

где $f(t)$ пробегает множество всех тех функций из L^2_σ, которые обращаются в нуль в некоторой окрестности нуля, своей для каждой функции; поскольку всякий вектор $x \in \mathcal{H}_1$ допускает представление $x = \sum\limits_{j=1}^{k} (x, e_j) \cdot e_j$, то найдётся такая последовательность $\{f_m\}_{m=1}^\infty \subset L^2_\sigma$, что

$$\lim_{m\to\infty} \|f_m\|_{L^2_\sigma} = 0 \quad \text{и} \quad \lim_{m\to\infty} \sum_{j=1}^{k} \int_{\mathbb{R}} f_m(t)\overline{\tilde{g}_j(t)}\, d\sigma(t) \cdot e_j = x.$$

Зафиксируем теперь $x \in \mathcal{H}_1$, соответствующую последовательность $\{f_m\}_{m=1}^\infty \subset L^2_\sigma$ и допустим, что $\sum\limits_{j=1}^{n} \alpha_j \cdot \tilde{g}_j(t) \in L^2_\sigma$. Тогда линейный функционал ($f \in L^2_\sigma$)

$$\phi f := \int_{\mathbb{R}} f(t)\overline{\sum_{j=1}^{n} \alpha_j \cdot \tilde{g}_j(t)}\, d\sigma(t)$$

будет непрерывен. Отсюда

$$(x, \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \cdot e_j) = \big(\lim_{m\to\infty} \left(Wf_m(t) + \sum_{j=l}^{k} \int_{\mathbb{R}} f_m(t)\overline{\tilde{g}_l(t)}\, d\sigma(t) \cdot e_l \right), \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \cdot e_j\big) =$$

$$= \lim_{m\to\infty} \sum_{j=1}^{k} \int_{\mathbb{R}} f_m(t)\overline{\alpha_j \tilde{g}_j(t)}\, d\sigma(t) = \lim_{m\to\infty} \phi f_m = 0.$$

Так как x произволен, то $\sum\limits_{j=1}^{n} \alpha_j \cdot e_j = 0$, т. е. $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_n = 0$. $\square$

Лемма 3.1 открывает путь для построения частичного модельного представления оператора A в смысле, который будет объяснён ниже. Сохраним принятое при доказательстве леммы 3.1 соглашение (3.7) и положим (см. (3.4))

$$\mathcal{H}_0 = J\mathcal{H}_1. \tag{3.11}$$

Тогда $\mathcal{H}_0 \perp \tilde{\mathcal{H}}$. Дополнительно предположим, что базис $\{e_j\}_{j=1}^k$ в лемме 3.1 взят ортонормированным. Обозначим P_0, P_1 и P_2 ортопроекторы соответственно на подпространства $\mathcal{H}_0$, $\mathcal{H}_1$ и $\mathcal{H}_2$.

Теорема 3.1. *Пусть пространство L^2_σ и функции $\{\tilde{g}_j\}_{j=1}^k$ связаны со спектральной функцией E_λ J-с.с. оператора A так же, как в лемме 3.1 (см. (3.8)), а $\tilde{L}^2_\sigma$ — гильбертово пространство, образованное как линейная оболочка L^2_σ и $\{\tilde{g}_j\}_{j=1}^k$, причём функции системы $\{\tilde{g}_j\}_{j=1}^k$ полагаются по определению взаимно ортогональными, имеющими единичную норму и ортогональными к L^2_σ, а последнее сохраняет свою стандартную гильбертову структуру. Тогда функция $t\tilde{g}_j$ принадлежат к $\tilde{L}^2_\sigma$ для любого $j = 1, 2, \ldots, k$ и компрессия $(P_0 + P_2)A|_{\mathcal{H}_0 \oplus \mathcal{H}_2}$ оператора A подобна оператору умножения на независимую переменную t, действующему в $\tilde{L}^2_\sigma$.*

Доказательство. Благодаря равенству (2.28**c**), лемме 3.1 и описанию (3.10) векторов из линеала $\operatorname*{Lin}\limits_{\Delta=[a,b),\,0\notin[a,b]}\{E(\Delta)\mathcal{H}\}$ имеем

$$A\left(Wf(t)+\sum_{j=1}^{k}\int_{\mathbb{R}} f(t)\overline{\tilde{g}_j(t)}\,d\sigma(t)\cdot e_j\right)=Wtf(t)+\sum_{j=1}^{k}\int_{\mathbb{R}} tf(t)\overline{\tilde{g}_j(t)}\,d\sigma(t)\cdot e_j.$$

Кроме того, $Ae_l=\sum\limits_{j=1}^{k}\alpha_{jl}e_j$, откуда

$$\begin{aligned}A\big(Wf(t)\big)&=A\left(Wf(t)+\sum_{j=1}^{k}\int_{\mathbb{R}} f(t)\overline{\tilde{g}_j(t)}\,d\sigma(t)\cdot e_j\right)-\sum_{l=1}^{k}\int_{\mathbb{R}} f(t)\overline{\tilde{g}_l(t)}\,d\sigma(t)\cdot Ae_l=\\&=Wtf(t)+\sum_{j=1}^{k}\int_{\mathbb{R}} tf(t)\overline{\tilde{g}_j(t)}\,d\sigma(t)\cdot e_j-\sum_{l=1}^{k}\int_{\mathbb{R}} f(t)\overline{\tilde{g}_l(t)}\,d\sigma(t)\cdot\sum_{j=1}^{k}\alpha_{jl}e_j=\\&=Wtf(t)+\sum_{j=1}^{k}\int_{\mathbb{R}} f(t)\left(t\overline{\tilde{g}_j(t)}-\sum_{l=1}^{k}\overline{\tilde{g}_l(t)}\alpha_{jl}\right)d\sigma(t)\cdot e_j.\end{aligned}$$

Последнее выражение задаёт в L^2_σ непрерывный оператор тогда и только тогда, когда $\big(t\tilde{g}_j(t)-\sum\limits_{l=1}^{k}\tilde{g}_l(t)\overline{\alpha}_{jl}\big)\in L^2_\sigma$. Теперь утверждение теоремы следует из равенств $P_2A|_{\mathcal{H}_0}=J\big(P_1AP_2\big)^*J|_{\mathcal{H}_0}$ и $P_0A|_{\mathcal{H}_0}=\big(JAJ\big)^*|_{\mathcal{H}_0}$, обусловленных J-с.с. оператора A. □

Замечание 3.1. Доказанное выше равенство

$$A\big(Wf(t)\big)=Wtf(t)+\sum_{j=1}^{k}\int_{\mathbb{R}} f(t)\left(t\overline{\tilde{g}_j(t)}-\sum_{l=1}^{k}\overline{\tilde{g}_l(t)}\alpha_{jl}\right)d\sigma(t)\cdot e_j$$

описывает действие оператора $A|_{\mathcal{H}_2}$.

Условие (3.3**c**) является, с одной стороны, ограничительным, но, с другой стороны, не является неустранимым. В случае отказа от него пространство $\tilde{L}^2_\sigma$ скалярных функций надо заменить на подходящее пространство векторнозначных функций, что и будет сделано в следующем разделе.

4. Модель J-унитарного оператора, порождаемая его спектральным разложением

Всюду в этом параграфе U обозначает J-унитарный оператор, действующий в пространстве Понтрягина $\mathcal{H}$, т. е. $[Ux,Uy]=[x,y]$ для всех $x,y\in\mathcal{H}$ и $U\mathcal{H}=\mathcal{H}$. Далее, символами $\mathbb{D}$ и $\mathbb{T}$ обозначены, соответственно, открытый единичный диск и его граница.

Спектральные свойства оператора U могут быть исследованы методами, аналогичными использованным в предыдущих параграфах, но с некоторой их модификацией. Так, например, вместо степенной последовательности моментов (2.2) берётся последовательность «тригонометрических» моментов $\{c_k=\langle U^kx,x\rangle\}_{k=-\infty}^{+\infty}$. Решение этой проблемы моментов приводит к представлению резольвенты (ср. с (2.8))

$$N(U)\bar{N}(U^{-1})R_\xi(U)=\int_0^{2\pi}\frac{1}{e^{it}-\xi}\,dG_t. \tag{4.1}$$

Действуя по той же схеме, что и в разделе 2, получим, что множество $\sigma(U)\backslash\mathbb{T}$ конечно, а соответствующее ему инвариантное подпространство оператора U конечномерно и проекционно полно, поэтому в пределах данного параграфа по умолчанию предполагается, что $\sigma(U)\subset\mathbb{T}$. Тем же методом (с естественной адаптацией к особенностям J-унитарных операторов) устанавливается, что оператор U обладает J-ортогональной спектральной функцией E_t с множеством критических точек Λ и условиями нормировки $E_0 = 0$, $E_{2\pi} = I$, $\operatorname*{s\text{-}lim}_{\tau\to t-0} E_\tau = E_t$, где $t, \tau \in [0, 2\pi]\backslash\Lambda$, а связь между U и E_t описывается следующим образом (здесь $\Delta = [a, b)$, $0 \leqslant a < b \leqslant 2\pi$, $a, b \notin \Lambda$):

$$\left.\begin{array}{l}
\textbf{a.}\ \text{для любого } t \in [0,2\pi]\backslash\Lambda \text{ верно } UE_t = E_tU;\\
\textbf{b.}\ \text{если } E(\Delta)\mathcal{H} \neq \{0\}, \text{ то } \sigma(U|_{E(\Delta)\mathcal{H}}) \subset \{\xi\colon \xi = e^{it}, t \in \bar{\Delta}\};\\
\textbf{c.}\ \text{если } \Delta\cap\Lambda = \varnothing \text{ и } E(\Delta)\mathcal{H} \neq \{0\}, \text{ то подпространство } E(\Delta)\mathcal{H}\\
\quad \text{положительно и } UE(\Delta) = \int\limits_\Delta e^{it}dE_t;\\
\textbf{d.}\ \text{если } \Delta\cap\Lambda \neq \varnothing, \text{ то } E(\Delta) \neq 0 \text{ и подпространство } E(\Delta)\mathcal{H} \text{ либо}\\
\quad \text{отрицательно, либо индефинитно.}
\end{array}\right\} \qquad (4.2)$$

Пусть $\widetilde{\mathcal{H}} := \mathrm{CLin}\{E(\Delta)\mathcal{H}\}$, где Δ пробегает множество всех полуоткрытых интервалов вида (4.2**c**). Подпространство $\widetilde{\mathfrak{H}}$ в силу (4.2**c**) является неположительным. Мы предположим, что (ср. с (3.3**b**))

$$\widetilde{\mathcal{H}} \cap \widetilde{\mathcal{H}}^{[\perp]} \neq \{0\}. \tag{4.3}$$

Напомним, что условие (4.3) выполняется тогда и только тогда, когда оператор-функция E_λ является неограниченной. Положим $\mathfrak{G}_1 = \widetilde{\mathcal{H}} \cap \widetilde{\mathcal{H}}^{[\perp]}$, $\mathfrak{G}_0 = J\mathfrak{G}_1$, $\mathfrak{G}_2 = \widetilde{\mathcal{H}} \cap \mathfrak{G}_1^\perp$, $\mathfrak{G}_3 = (\widetilde{\mathcal{H}} \oplus \mathfrak{G}_0)^{[\perp]}$. Все последующие выкладки только упростятся, если подпространство $\mathfrak{G}_3$ окажется тривиальным, поэтому в дальнейшем предполагается, что $\mathfrak{G}_3 \neq \{0\}$. Далее, без потери общности можно предположить, что $\mathfrak{G}_3 = (\widetilde{\mathfrak{H}} \oplus \mathfrak{G}_0)^\perp$ и что на $\mathfrak{G}_2$ гильбертово скалярное произведение совпадает с $[\cdot, \cdot]$. Итак,

$$\left.\begin{array}{c}
\mathcal{H} = \mathfrak{G}_0 \oplus \mathfrak{G}_1 \oplus \mathfrak{G}_2 \oplus \mathfrak{G}_3,\\[2ex]
J = \begin{pmatrix} 0 & V^{-1} & 0 & 0\\ V & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & I_2 & 0\\ 0 & 0 & 0 & J_3 \end{pmatrix}, \quad U = \begin{pmatrix} U_{00} & 0 & 0 & 0\\ U_{10} & U_{11} & U_{12} & U_{13}\\ U_{20} & 0 & U_{22} & 0\\ U_{30} & 0 & 0 & U_{33} \end{pmatrix}.
\end{array}\right\} \qquad (4.4)$$

В этом представлении V является изометрией, I_2 — единичным оператором в $\mathfrak{G}_2$, J_3 — фундаментальной симметрией в $\mathfrak{G}_3$, а элементы матричного представления U описываются следующими соотношениями:

$$\left.\begin{array}{rcl}
(U_{00})^{-1} &=& V^{-1}(U_{11})^*V,\\
U_{10} &=& -\dfrac{1}{2}U_{11}V\left((U_{20})^*U_{20} + (U_{30})^*J_3U_{30} + iA\right),\\
U_{20} &=& -U_{22}(U_{12})^*VU_{00},\\
U_{30} &=& -U_{33}J_3(U_{13})^*VU_{00},
\end{array}\right\} \qquad (4.5)$$

где A — это самосопряжённый оператор. Кроме того, U_{22} и U_{33} являются, соответственно, унитарным и J_3-унитарным операторами в соответствующих подпространствах. Положим

$$\widetilde{U} := \begin{pmatrix} U_{11} & U_{12}\\ 0 & U_{22} \end{pmatrix}, \quad \widetilde{U}^{\uparrow} := \begin{pmatrix} U_{00} & 0\\ U_{20} & U_{22} \end{pmatrix}. \tag{4.6}$$

Операторы $\widetilde{U}$ и $\widetilde{U}^{\uparrow}$ действуют, соответственно, в пространствах $\widetilde{\mathcal{H}} = \mathfrak{G}_1 \oplus \mathfrak{G}_2$ и $\widetilde{\mathcal{H}}^{\uparrow}\colon = \mathfrak{G}_0 \oplus \mathfrak{G}_2$. Так как U_{22} является унитарным оператором, то его модель — это e^{iT}, т. е. оператор умножения на функцию e^{it}, действующий в подходящем пространстве вектор-функций $L^2_{\vec{\sigma}}(\mathcal{E})$, где $\mathcal{E}$ — гильбертово (возможно, конечномерное) пространство, а векторнозначная мера $\mu_{\vec{\sigma}}(\mathcal{E})$ определяется так, как это обычно делается в теории кратности для самосопряжённых операторов. Наше изложение этой конструкции ближе всего к принятому в [18, § 41], где, впрочем, используется термин «прямой интеграл гильбертовых пространств», а не «векторнозначная мера» (по этому поводу см. также [8, гл. VI, § 86], [10, гл. 7], [12, гл. 4.4] и [19, гл. VII]). Итак, пусть $\sigma(t)$ — неубывающая (скалярная) функция, определённая на сегменте $[0, 2\pi]$, непрерывная слева во всех точках этого сегмента и имеющая бесконечное множество точек роста. Эта функция порождает на данном сегменте скалярную меру Лебега—Стилтьеса μ_σ. Пусть $t \mapsto \mathcal{E}_t$, $t \in [0, 2\pi]$ является отображением со следующими свойствами:

- $\mathcal{E} = \operatorname*{CLin}_{t\in[0,2\pi]}\{\mathcal{E}_t\}$;

- $\dim(\mathcal{E}_t)$ — μ_σ-измеримая, но не обязательно почти всюду (п.в.) конечная функция;
- если $\dim(\mathcal{E}_{t_1}) = \dim(\mathcal{E}_{t_2})$, то $\mathcal{E}_{t_1} = \mathcal{E}_{t_2}$;
- если $\dim(\mathcal{E}_{t_1}) < \dim(\mathcal{E}_{t_2})$, то $\mathcal{E}_{t_1} \subset \mathcal{E}_{t_2}$.

Обозначим как $M_{\vec{\sigma}}(\mathcal{E})$ пространство векторнозначных функций $f(t)\colon\ t \mapsto \mathcal{E}_t$, μ_σ-измеримых в слабом смысле, заданных п.в. и конечных п.в. на сегменте $[0, 2\pi]$; символ $L^2_{\vec{\sigma}}(\mathcal{E})$ будет обозначать здесь гильбертово пространство таких функций $f(t) \in M_{\vec{\sigma}}(\mathcal{E})$, что $\int\limits_0^{2\pi} \|f(t)\|^2_{\mathcal{E}} d\sigma(t) < \infty$, со скалярным произведением $(f(t), g(t))_{L^2_{\vec{\sigma}}} = \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} (f(t), g(t))_{\mathcal{E}} d\sigma(t)$.

Пусть $\{\widetilde{g}_j(t)\}_{j=1}^k \subset M_{\vec{\sigma}}(\mathcal{E})$ — некоторая система функций со следующими свойствами:

$$\left.\begin{array}{ll}
\textbf{a.} & \text{система } \{\widetilde{g}_j(t)\}_{j=1}^k \text{ линейно независима по модулю } L^2_{\vec{\sigma}}(\mathcal{E});\\
\textbf{b.} & \text{для любого } j = 1, 2, \ldots, k \text{ функция } e^{it}\widetilde{g}_j(t) \text{ представима в ви-}\\
& \text{де } e^{it}\widetilde{g}_j(t) = \eta_j(t) + \displaystyle\sum_{l=1}^k c_{jl}\widetilde{g}_l(t), \text{ где } \eta_j(t) \in L^2_{\vec{\sigma}}(\mathcal{E});\\
\textbf{c.} & \text{модуль всех собственных значений матрицы } C = \big(c_{jl}\big)_{k\times k} \text{ ра-}\\
& \text{вен единице.}
\end{array}\right\} \tag{4.7}$$

Обозначим через $\widetilde{L}^2_{\vec{\sigma}}(\mathcal{E})$ гильбертово пространство, образованное линейной оболочкой функций из $L^2_{\vec{\sigma}}(\mathcal{E})$ и $\{\widetilde{g}_j(t)\}_{j=1}^k$, причём функции из $\{\widetilde{g}_j(t)\}_{j=1}^k$ полагаются по определению взаимно ортогональными, имеющими единичную норму и ортогональными к $L^2_{\vec{\sigma}}(\mathcal{E})$, а последнее множество рассматривается как подпространство пространства $\widetilde{L}^2_{\vec{\sigma}}(\mathcal{E})$ и сохраняет свою обычную гильбертову структуру. Условие (4.7**b**) позволяет ввести на $\widetilde{L}^2_{\vec{\sigma}}(\mathcal{E})$ оператор умножения на функцию e^{it}: $f(t) \mapsto e^{it}f(t)$. Этот оператор будет обозначаться как e^{iT}. Условия (4.7) также однозначно определяют матрицу $C = \big(c_{jl}\big)_{k\times k}$ и гарантирует её обратимость, поэтому дают возможность ввести на $\widetilde{L}^2_{\vec{\sigma}}(\mathcal{E})$ оператор умножения на функцию e^{-it} (обозначаемый как e^{-iT}). Легко проверить, что оператор e^{-iT} является обратным к e^{iT}.

Теорема 4.1. *Для введённого выше оператора U найдутся гильбертово пространство $L^2_{\vec{\sigma}}(\mathcal{E})$, набор функций $\{\widetilde{g}_j(t)\}_{j=1}^k$, удовлетворяющих условиям* (4.7)*, и изометрический оператор W : $\widetilde{L}^2_{\vec{\sigma}}(\mathcal{E}) \mapsto \widetilde{\mathfrak{H}}$, $WL^2_{\vec{\sigma}}(\mathcal{E}) = \mathfrak{G}_2$ такие, что* (*см.* (4.4) *и* (4.6))

$$\widetilde{U} = W(e^{-iT})^* W^{-1}, \quad \widetilde{U}^\uparrow = W^\uparrow e^{iT}(W^\uparrow)^{-1}, \tag{4.8}$$

где $W^\uparrow = (I_2 \oplus V^{-1})W$, функция $\sigma(t)$ непрерывна в тех точках t, для которых $e^{it} \in \sigma(U_{11}) \cup \sigma(U_{33})$. Пространство $L^2_{\vec{\sigma}}(\mathcal{E})$ и набор $\{\widetilde{g}_j(t)\}_{j=1}^k$ в (4.7) *могут быть выбраны так, что для всех $j = 1, 2, \ldots, k$ и почти всех $t \in [0, 2\pi]$ выполняется условие $\widetilde{g}_j(t) \in \Omega$, где Ω — некоторое подпространство пространства $\mathcal{E}$, $\dim \Omega \leqslant k$.*

Доказательство этой теоремы мы опускаем, поскольку оно проводится (с учётом сделанных выше замечаний) по той же схеме, что и доказательства леммы 3.1 и теоремы 3.1. Более детальную информацию можно найти в [40, теорема 1].

5. Другие модели

5.1. Подход Шульмана. В. С. Шульман предложил в [27] (см. также [34]) модели, описывающие не индивидуальные операторы, а равномерно замкнутые J-симметричные алгебры операторов, действующих в пространстве Понтрягина единичного ранга (пространстве Π_1). Заметим, что коммутативность такой алгебры не предполагалась, но в то же время и не исключалась. Понятно также, что автора интересовали прежде всего такие алгебры, которые имели некоторые особенности, порождённые индефинитной метрикой. Вся совокупность равномерно замкнутых J-симметричных алгебр с единицей может быть разбита на два непересекающихся типа. К первому типу относятся такие алгебры, все инвариантные подпространства которых невырождены (т. е. не имеют изотропной части). Такие алгебры называются *невырожденными*, их теория достаточно хорошо изучена (см. литературные ссылки в [27]) и не содержит каких-либо существенных особенностей, которые отличали бы её от теории симметричных операторных алгебр в гильбертовых пространствах. Иная ситуация складывается с J-симметричными операторными алгебрами, среди инвариантных подпространств которых есть вырожденные. Такие алгебры названы Шульманом *общими*. Применительно к пространству типа Π_1 это означает, что если $\mathfrak{A}$ — общая алгебра, то найдётся нейтральный вектор e, который является собственным вектором для всех операторов из $\mathfrak{A}$. Зафиксируем этот вектор и соответствующее нейтральное подпространство $\mathcal{L}$. Далее, пусть $\mathcal{K}$ — нейтральное подпространство, кососвязанное с $\mathcal{L}$. Последнее означает, что существует вектор $g \in \mathcal{K}$ такой, что $[e, g] = 1$. Заметим, что $\mathcal{K}$ определяется неоднозначно, и мы его при необходимости можем изменить. Пусть

$$\mathcal{G} = \mathcal{K}^{[\perp]} \cap \mathcal{L}^{[\perp]}.$$

Тогда

$$\mathcal{H} = \mathcal{K} \dotplus \mathcal{G} \dotplus \mathcal{L} \tag{5.1}$$

и любой оператор $B \in \mathfrak{A}$ представим следующим образом:

$$B = \begin{pmatrix} B_{11} & 0 & 0 \\ B_{21} & B_{22} & 0 \\ B_{31} & B_{32} & B_{33} \end{pmatrix}. \tag{5.2}$$

В частности, $B_{11} g = \mu_B g$, $B_{33} e = \lambda_B e$. Отметим, что множество $\widetilde{\mathfrak{A}} = \{B_{22}\}$ образует *-алгебру, если B пробегают всю алгебру $\mathfrak{A}$. Отметим, что $\mathcal{L}^{[\perp]} = \mathcal{G} \dotplus \mathcal{L}$ является инвариантным подпространством для $\mathfrak{A}$.

Определение 5.1. Если для некоторого $\mathcal{L}$ соотношение $B\mathcal{L}^{[\perp]} \subset \mathcal{L}$ при $B \in \mathfrak{A}$ влечёт $B = 0$, то $\mathfrak{A}$ относится к *классу* 0. Если соотношение $B\mathcal{L}^{[\perp]} \subset \mathcal{L}$ выполняется по крайней мере для одного $B \neq 0$, $B \in \mathfrak{A}$ и для всякого B: $B \in \mathfrak{A}$ и $B\mathcal{L}^{[\perp]} \subset \mathcal{L}$ выполняется $\mu_B = \lambda_B = 0$, то $\mathfrak{A}$ по определению относится к *классу* 1. Если найдётся такой оператор $B \in \mathfrak{A}$, что $B\mathcal{L}^{[\perp]} \subset \mathcal{L}$ и $|\lambda_B| + |\mu_B| > 0$, то $\mathfrak{A}$ относится по определению либо к *классу* 2, либо к *классу* 3. Класс 2 объединяет такие общие алгебры, не принадлежащие к классам 0 и 1, для которых их J-с.с. операторы имеют только вещественный спектр, к классу же 3 относятся такие алгебры, в состав которых обязательно входят, среди прочих, J-с.с. операторы, спектр которых содержит невещественные собственные значения.

Без ограничения общности можно считать, что разложение (5.1) пространства $\mathcal{H}$ ортогонально в гильбертовом смысле, а скалярное произведение $(\cdot, \cdot)$ на $\mathcal{G}$ совпадает с $[\cdot, \cdot]$. Классификация Шульмана относится, как уже отмечалось, не к индивидуальным операторам, а к операторным алгебрам, поэтому для сопоставления моделей следует взять J-с.с. оператор A, действующий в пространстве Понтрягина ранга 1 и удовлетворяющий условиям теоремы 3.1, и положить $\mathfrak{A} = \operatorname{Alg}_u A$, где $\operatorname{Alg}_u A$ обозначает замыкание в равномерной операторной топологии алгебры операторов, являющихся значениями полиномов от оператора A. Заметим, что, грубо говоря, классификация Шульмана связана со структурой идеала общей алгебры, задаваемого условием $B_{22} = 0$ (см. (5.2)). В частности, если последнее условие влечёт равенство $B = 0$ (т. е. введённый идеал тривиален), то соответствующая общая алгебра относится к классу 0, а если этот идеал нетривиален, но для него $B_{11} = 0$ и $B_{33} = 0$, то общая алгебра относится к классу 1. Если вернуться к условиям теоремы 3.1, то необходимо отметить, что подпространства $\mathcal{H}_1$ и $\mathcal{H}_0$ из (3.4) в случае пространства Π_1 совпадают соответственно с подпространствами $\mathcal{L}$ и $\mathcal{K}$ из (5.1), но подпространство $\mathcal{H}_2$ из (3.4) у́же, чем подпространство $\mathcal{G}$ из (5.1), поскольку $\mathcal{H}_2$ не включает ядро оператора $(I - P_1)A|_{(\mathcal{H}_0 \dotplus \mathcal{H}_1)^\perp}$, где P_1 — ортопроектор на подпространство $\mathcal{H}_1$. В обозначениях (5.2) оператор $(I - P_1)A|_{(\mathcal{H}_0 \dotplus \mathcal{H}_1)^\perp}$ — это оператор A_{22}, так что с учётом теоремы 3.1 подпространство $\mathcal{G}$ представляется (см. (3.10)) в виде $\mathcal{G} = \mathcal{N} \oplus W L^2_\sigma$, где $\mathcal{N}$ — ядро оператора A_{22}. Положим, допуская некоторую вольность в обозначениях,

$$\mathcal{G} = \mathcal{N} \oplus L^2_\sigma. \tag{5.3}$$

Если $\tilde{L}^2_\sigma$ — модельное пространство оператора A, то $\tilde{L}^2_\sigma$ в силу принадлежности пространства Понтрягина $\mathcal{H}$ к типу Π_1 является линейной оболочкой L^2_σ и функции $\tilde{g}_1(t)$:

$$\int\limits_{\mathbb{R}} |\tilde{g}_1(t)|^2 d\sigma(t) = \infty, \quad \int\limits_{\mathbb{R}} |t\tilde{g}_1(t)|^2 d\sigma(t) < \infty. \tag{5.4}$$

В символах (5.2), (5.3) и $\tilde{L}^2_\sigma$ действие оператора A описывается формулами

$$\left.\begin{aligned} &Ag = y_A + t\tilde{g}_1(t) + \gamma_A \cdot e, \quad Az = [z, y_A] \cdot e, \\ &Af(t) = tf + \int\limits_{\mathbb{R}} tf(t)\overline{\tilde{g}(t)}\, d\sigma(t) \cdot e, \quad Ae = 0, \end{aligned}\right\} \tag{5.5}$$

где $y_A, z \in \mathcal{N}$, $\gamma_A \in \mathbb{R}$ и $f(t) \in L^2_\sigma$. Из этого представления видно, что модельное пространство $\tilde{L}^2_\sigma$ недостаточно для полного описания оператора A даже в случае пространства типа Π_1. Прямой подсчёт показывает, тем не менее, что для степеней оператора A, больших двух, их действие полностью задаётся модельным пространством $\tilde{L}^2_\sigma$:

$$\left.\begin{aligned} &A^n g = t^n \tilde{g}_1(t) + \int\limits_{\mathbb{R}} t^n |\tilde{g}(t)|^2\, d\sigma(t) \cdot e, \quad Az = 0, \\ &A^n f(t) = t^n f(t) + \int\limits_{\mathbb{R}} t^n f(t)\overline{\tilde{g}(t)}\, d\sigma(t) \cdot e, \quad Ae = 0, \end{aligned}\right\} \tag{5.6}$$

где $z \in \mathcal{N}$, $f(t) \in L^2_\sigma$, $n = 3, 4, \ldots$ Из комментария к формулам (5.5) следует, что в целом совокупность элементов матрицы (5.2) не может быть представлена в терминах модельного пространства $\tilde{L}^2_\sigma$, однако ключевые для классификации Шульмана операторы B_{11}, B_{22} и B_{33} такое представление допускают: найдётся такая непрерывная на $\sigma(A_{22})$ функция $\phi_B(t)$, что $B_{11}g = \phi_B(0)g$, $B_{22}(z + f(t)) = \phi_B(0)z + \phi_B(t) \cdot f(t)$ и $B_{33}e = \phi_B(0)e$. Из последних равенств следует, что если $B_{22} = 0$, то $B_{11} = 0$ и $B_{22} = 0$, поэтому порождаемая оператором A алгебра $\mathfrak{A}$ относится либо к классу 1, либо к классу 2. Покажем, что классу 1 она не принадлежит. Рассмотрим последовательность многочленов

$$Q_n(t) = \frac{t^4}{(\|A\| + 1)^4}\biggl(1 + \Bigl(1 - \frac{t^4}{(\|A\| + 1)^4}\Bigr) + \ldots + \Bigl(1 - \frac{t^4}{(\|A\| + 1)^4}\Bigr)^n\biggr), \quad n = 1, 2, \ldots$$

Эта последовательность при любом $t \in \bigl(-(\|A\| + 1), 0\bigr) \cup \bigl(0, (\|A\| + 1)\bigr)$ обладает следующим набором свойств (см. (5.4)):

- $0 < Q_n(t) < 1$, $\int\limits_{\mathbb{R}} Q_n(t)|\tilde{g}_1(t)|^2 d\sigma(t) < \infty$;
- $Q_n(t) < Q_{n+1}(t)$;
- $\lim\limits_{n\to\infty} Q_n(t) = 1$.

Тогда в силу (2.5) и (5.4) верно

$$\lim_{n\to\infty} \int\limits_{\mathbb{R}} Q_n(t)|\tilde{g}_1(t)|^2 d\sigma(t) = \infty. \tag{5.7}$$

Положим $\alpha_n = \int\limits_{\mathbb{R}} Q_n(t)|\tilde{g}_1(t)|^2 d\sigma(t)$, $C_n = \dfrac{1}{\alpha_n} Q_n(A)$. Тогда (см. (5.6))

$$\left.\begin{aligned} &C_n g = \frac{1}{\alpha_n} Q_n(t)\tilde{g}_1(t) + e, \quad C_n z = 0, \\ &C_n f(t) = \frac{1}{\alpha_n} Q_n(t) f(t) + \frac{1}{\alpha_n} \int\limits_{\mathbb{R}} Q_n(t) f(t)\overline{\tilde{g}(t)} d\sigma(t) \cdot e, \quad C_n e = 0. \end{aligned}\right\} \tag{5.8}$$

Отсюда и из оценок

$$\frac{1}{\alpha_n}\|Q_n(t)\tilde{g}_1(t)\|_{L^2_\sigma} = \frac{1}{\alpha_n}\left(\int\limits_{\mathbb{R}} |Q_n(t)\tilde{g}_1(t)|^2 d\sigma(t)\right)^{1/2} \leqslant \frac{1}{\alpha_n}\left(\int\limits_{\mathbb{R}} Q_n(t)|\tilde{g}_1(t)|^2 d\sigma(t)\right)^{1/2} = \frac{1}{\sqrt{\alpha_n}},$$

$$\frac{1}{\alpha_n}\left|\int\limits_{\mathbb{R}} Q_n(t)f(t)\overline{\tilde{g}(t)}\,d\sigma(t)\right| \leqslant \frac{\|f(t)\|_{L^2_\sigma}}{\alpha_n}\left(\int\limits_{\mathbb{R}} |Q_n(t)\tilde{g}_1(t)|^2 d\sigma(t)\right)^{1/2} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{\|f(t)\|_{L^2_\sigma}}{\alpha_n}\left(\int\limits_{\mathbb{R}} Q_n(t)|\tilde{g}_1(t)|^2 d\sigma(t)\right)^{1/2} = \frac{\|f(t)\|_{L^2_\sigma}}{\sqrt{\alpha_n}}$$

вытекает, что оператор C_n при $n \to \infty$ стремится по операторной норме к оператору C_∞, задаваемому соотношениями ($z \in \mathcal{N}$, $f(t) \in L^2_\sigma$):

$$C_\infty g = e, \quad C_\infty z = C_\infty f(t) = C_\infty e = 0.$$

По построению $C_\infty \in \mathfrak{A}$, поэтому алгебра $\mathfrak{A}$ относится к классу 1.

Определение 5.2 (см. [27, 34]). Пусть $\mathfrak{A}$ — операторная $*$-алгебра в гильбертовом пространстве $\mathcal{G}$. Линейное отображение q из $\mathfrak{A}$ в $\mathcal{G}$ называется *квазивектором*, если

$$q(AB) = Aq(B) \quad \text{для любых} \quad A, B \in \mathfrak{A}.$$

Квазивектор q будет по определению *$*$-замкнутым*, если пространство $\mathfrak{A}$ будет полным по отношению к норме

$$\|A\|_q = \|A\| + \|q(A)\| + \|q(A^*)\|.$$

Квазивектор q является *ограниченным* тогда и только тогда, когда найдётся такая константа $c > 0$, что

$$\|q(A)\| \leqslant c\|A\| \quad \text{для любых} \quad A \in \mathfrak{A}.$$

Перейдём теперь непосредственно к модели Шульмана. Пусть $\mathfrak{A}$ — алгебра класса 1. Отметим, что любой оператор $B \in \mathfrak{A}$ может быть представлен в виде $B = B_0 + \lambda I$, где $B_0 \in \mathfrak{A}_0 \subset \mathfrak{A}$, $\mathfrak{A}_0$ — подалгебра без единицы. Это замечание относится и к алгебре $\widetilde{\mathfrak{A}} = \{B_{22}\}$ (см. (5.2)).

Теорема 5.1 (см. [27, 34]). *Пусть $\mathfrak{A}$ является алгеброй класса 1. Тогда существует такой $*$-замкнутый квазивектор q: $\widetilde{\mathfrak{A}}_0 \to \mathcal{G}$, что для любых $B \in \mathfrak{A}$ и $z \in \mathcal{G}$*

- $Bg = \lambda g + x_1 + y + q((B_0)_{22}) + \gamma e,$
- $Bz = B_{22}z + (z, x_2 + Vy + q((B_0^*)_{22}))e,$
- $Be = \lambda e,$

где $x_1, x_2 \in \mathcal{G}_F$, $y \in \mathcal{D} \subset \mathcal{G}_C$, $\mathcal{G}_F \subset \mathcal{G}$ является подпространством, инвариантным по отношению к $\widetilde{\mathfrak{A}}_0$ и ортогональным к q, $\mathcal{G}_C \perp \mathcal{G}_F$ и $\mathcal{G}_C \subset \operatorname{Ker}\widetilde{\mathfrak{A}}_0$, V является замкнутым инволютивным оператором с областью определения $\mathcal{D}$: $\mathcal{D} \mapsto \mathcal{G}_C$, $\lambda, \gamma \in \mathbb{C}$.

Интерпретируем эту теорему на примере 3.1. Одномерные подпространства $\mathcal{K}$ и $\mathcal{L}$ порождаются, соответственно, векторами g и e. Подпространством $\mathcal{G}$ в данном случае будет замкнутая линейная оболочка векторов $f, h_1, h_2, \ldots$, квазивектор в терминах разложения (5.1) и представления (5.2) имеет вид $q(A_{22}^k) = \sum\limits_{j=1}^{\infty} \dfrac{1}{j^k} h_j$, т. е. $q(A^k) \perp f$, подпространство $\mathcal{G}_F$ одномерно и натянуто на вектор f, $x_1 = x_2 = -f$, подпространство $\mathcal{G}_C$ тривиально. Отметим также, что квазивектор q неограничен. Последнее верно не только для данного примера, но и для любой алгебры $\operatorname{Alg}_u A$, порождённой оператором A, подчинённым условию (3.3**b**). Укажем, что последнее условие не является необходимым для того, чтобы алгебра $\operatorname{Alg}_u A$ принадлежала классу 1.

5.2. Подход Йонаса—Лангера—Тексториуса. В работе [33] была предложена модель ограниченного циклического J-с.с. оператора в пространстве Понтрягина, базирующегося на интегральном представлении последовательности вида (2.2).

Напомним для начала определение циклического вектора и циклического оператора (см., например, [22, гл. 14, п. 126] и [19, гл. VII, п. 2]). Если B — некоторый оператор в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$, то *циклическим вектором* этого оператора называется любой вектор $x \in \mathcal{H}$ такой, что система векторов $\{B^n x\}_{n=0}^{\infty}$ полна в $\mathcal{H}$. Далеко не для всякого оператора существуют циклические векторы. В случае самосопряжённого оператора B в гильбертовом пространстве наличие циклического вектора эквивалентно простоте спектра у B (это соответствует условию (3.3**c**)), но для спектральных или обобщённых спектральных операторов картина усложняется. Если оператор B обладает циклическим вектором, то он называется *циклическим*. Циклическим, в частности, является оператор A из примера 3.1, а его циклическим вектором будет, скажем, g.

Далее, всякий ограниченный J-с.с. оператор A, действующий в пространстве Понтрягина $\mathcal{H}$, полиномиально дефинизируем, т. е. для A найдётся такой (дефинизирующий) полином $\mathcal{P}(\cdot)$, для которого оператор $\mathcal{P}(A)$ J-неотрицателен. В (2.1) показано, что можно положить $\mathcal{P}(\cdot) = N(\cdot)\bar{N}(\cdot)$, однако, вообще говоря, для одного и того же оператора существуют разные дефинизирующие полиномы, и для дальнейшего конкретный вид $\mathcal{P}(\cdot)$ неважен, дальше лишь предполагается, что коэффициенты у $\mathcal{P}(\cdot)$ вещественны, а коэффициент при его старшей степени равен единице.

Итак, пусть A — фиксированный ограниченный J-с.с. оператор, действующий в пространстве Понтрягина $\mathcal{H}$ и для него найдётся такой вектор h, что последовательность $\{A^n h\}_0^{\infty}$ полна в $\mathcal{H}$. Выберем и зафиксируем полином $\mathcal{P}(\xi) = \xi^m + \eta_{m-1}\xi^{m-1} + \eta_{m-2}\xi^{m-2} + \ldots + \eta_0$, который дефинизирует A. Последовательность $\{d_n = [\mathcal{P}(A)A^n h, h]\}_0^{\infty}$ является позитивной последовательностью моментов и поэтому допускает представление

$$d_n = \int_{-\infty}^{+\infty} t^n d\sigma(t),$$

которое мы используем для регуляризованного интегрального представления последовательности моментов $\{c_n = [A^n h, h]\}_0^{\infty}$. Указанные последовательности моментов связаны соотношениями

$$d_n = c_{n+m} + \eta_{m-1}c_{n+m-1} + \eta_{m-2}c_{n+m-2} + \ldots + \eta_0 c_n,$$

откуда

$$c_{n+m} = -(\eta_{m-1}c_{n+m-1} + \eta_{m-2}c_{n+m-2} + \ldots + \eta_0 c_n) + \int_{-\infty}^{+\infty} t^n d\sigma(t),$$

в частности

$$c_m = -(\eta_{m-1}c_{m-1} + \eta_{m-2}c_{m-2} + \ldots + \eta_0 c_0) + \int_{-\infty}^{+\infty} d\sigma(t),$$

$$\begin{aligned}c_{1+m} &= -(\eta_{m-1}c_m + \eta_{m-2}c_{m-1} + \ldots + \eta_0 c_1) + \int_{-\infty}^{+\infty} t d\sigma(t) = \\ &= -(\eta_{m-2}c_{m-1} + \ldots + \eta_0 c_1) + \int_{-\infty}^{+\infty} t d\sigma(t) + \\ &\qquad + \eta_{m-1}\big(\eta_{m-1}c_{m-1} + \eta_{m-2}c_{m-2} + \ldots + \eta_0 c_0\big) - \eta_{m-1}\int_{-\infty}^{+\infty} d\sigma(t) = \\ &= -\big((\eta_{m-2} - \eta_{m-1}^2)c_{m-1} + \ldots + (\eta_0 - \eta_{m-1}\eta_1)c_1 - \eta_{m-1}\eta_0 c_0\big) + \int_{-\infty}^{+\infty} (t - \eta_{m-1}) d\sigma(t).\end{aligned}$$

Отметим, что выражение $-\big(\eta_{m-1}\xi^{m-1}+\eta_{m-2}\xi^{m-2}+\ldots+\eta_0\big)$ представляет собой интерполяционный полином для ξ^m с узлами интерполяции, совпадающими с корнями (с учётом кратности) многочлена $\mathcal{P}(\xi)$. Аналогично, многочлен $-\big((\eta_{m-2}-\eta_{m-1}^2)\xi^{m-1}+\ldots+(\eta_0-\eta_{m-1}\eta_1)\xi-\eta_{m-1}\eta_0\big)$ является интерполяционным для функции ξ^{m+1} с теми же узлами интерполяции. Используя приведённые соображения и метод полной математической индукции можно показать, что

$$c_n=\sum_{j=0}^{m}\alpha_j^{(n)}c_j+\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{t^n-\sum\limits_{j=0}^{m}\alpha_j^{(n)}t^j}{\mathcal{P}(t)}\,d\sigma(t), \tag{5.9}$$

где $\sum\limits_{j=0}^{m}\alpha_j^{(n)}t^j$ — интерполяционный многочлен для t^n, $n=0,1,\ldots$ Поясним, что для $n<m$ представление (5.9) сводится к тривиальному равенству $c_n=c_n$.

Перейдём теперь к формированию модельного пространства Понтрягина как некоторого пространства функций. Отождествим (циклический) вектор h с тождественной единицей, вектор Ah отождествим с t, A^2h отождествим с t^2 и т. д. Итак, стартовым линейным многообразием функций у нас будет множество полиномов $\mathfrak{P}$. Превратим множество $\mathfrak{P}$ в линейное пространство с внутренним скалярным произведением $[\cdot,\cdot]$, полагая $[t^j,t^l]=c_{j+l}$, $j,l=0,1,\ldots$, где величины c_{l+j} заданы в (5.9). По построению линеал $\mathfrak{P}$ изометричен плотному подмножеству пространства Понтрягина $\mathcal{H}$, поэтому он после пополнения превращается в пространство Понтрягина, которое мы обозначим $\Pi(\Phi)$, а исходный оператор будет подобен действующему в $\Pi(\Phi)$ оператору умножения A_T на независимую переменную. Указанное пополнение можно реализовать разными способами, но все эти способы топологически эквивалентны. Один из вариантов — выделить в $\mathfrak{P}$ максимальное отрицательное подпространство $\mathcal{L}_-$ и найти в $\mathfrak{P}$ J-ортогональное дополнение $\mathcal{L}_+=\mathcal{L}_-^{[\perp]}$. Линеал $\mathcal{L}_+$ с внутренним эрмитовым произведением $[\cdot,\cdot]$ — это предгильбертово пространство, пополнив которое, мы и получим (в прямой сумме с $\mathcal{L}_-$) пространство Понтрягина $\Pi(\Phi)$. Формулы (5.9) показывают, что, вообще говоря, как гильбертова структура, так и структура пространства Понтрягина на функциональном пространстве $\Pi(\Phi)$ может задаваться не обычной мерой Лебега—Стилтьеса, а некоторым распределением (обобщённой функцией) Φ. Разберём эту возможность на конкретном примере.

Рассмотрим пример 3.1. Прямая проверка показывает, что минимальная натуральная степень n, при которой оператор A^n становится J-неотрицательным, равна двум, поэтому в рассматриваемом случае естественно положить $d_n=[A^{2+n}g,g]$, $n=0,1,\ldots$ Тогда

$$d_n=\int\limits_{-\infty}^{\infty}t^n d\sigma(t),\quad n=0,1,2,\ldots,$$

где $\sigma(t)=0$ при $t\leqslant 0$, $\sigma(t)=1+\sum\limits_{j=[1/t]+1}^{\infty}\dfrac{1}{j^2}$ при $0<t\leqslant 1$, $\sigma(t)=1+\sum\limits_{j=1}^{\infty}\dfrac{1}{j^2}$ при $t>1$, откуда (коэффициенты c_0 и c_1 вычисляются непосредственно)

$$c_0=c_1=0,\quad c_n=\int\limits_{0}^{\infty}t^{n-2}d\sigma(t),\quad n=2,3,\ldots \tag{5.10}$$

Дальнейшие пояснения мы будем делать в терминах элементов из $\Pi(\Phi)$. Если $u(t)$, $v(t)$ — многочлены из $\Pi(\Phi)$, то в силу (5.10)

$$[u(t),v(t)]=\int\limits_{0}^{\infty}\frac{u(t)\overline{v(t)}-u(0)\overline{v(0)}-(u'(0)\overline{v(0)}+u(0)\overline{v'(0)})t}{t^2}\,d\sigma(t). \tag{5.11}$$

Поскольку функция $\sigma(t)$ имеет скачок в нуле, поясним, что

$$\int\limits_0^\infty \frac{u(t)\overline{v(t)} - u(0)\overline{v(0)} - (u(t)\overline{v(t)})'|_{t=0}t}{t^2}\,d\sigma(t) = \frac{(u(t)\overline{v(t)})''}{2}\Big|_{t=0}\left(1 + \sum_{j=1}^\infty \frac{1}{j^2}\right) +$$
$$+ \lim_{\varepsilon\to+0}\int\limits_\varepsilon^\infty \frac{u(t)\overline{v(t)} - u(0)\overline{v(0)} - (u(t)\overline{v(t)})'|_{t=0}t - (u(t)\overline{v(t)})''|_{t=0}t^2}{t^2}\,d\sigma(t),$$

откуда

$$c_2 = [t^2, 1] = 1 + \sum_{j=1}^\infty \frac{1}{j^2}, \quad c_n = \sum_{j=1}^\infty \frac{1}{j^n}, \quad n = 3, 4, \ldots \tag{5.12}$$

Прямой подсчёт даёт $[1-t^2, 1-t^2] = [1 - 2t^2 + t^4, 1] = -2c_2 + c_4 < 0$, так что в качестве подпространства $\mathcal{L}_-$ можно взять одномерное подпространство, натянутое на полином $1 - t^2$. Далее, пусть $u(t) = \gamma_0 + \gamma_1 t + \gamma_2 t^2 + \ldots + \gamma_l t^l$ — произвольный многочлен. Тогда $\mathcal{L}_+$ — это множество многочленов вида

$$\widehat{u}(t) = u(t) - \omega[u(t), 1-t^2](1-t^2) = u(t) - \omega(1-t^2)\int\limits_0^\infty \frac{u(t)(1-t^2) - u(0) - u'(0)t}{t^2}\,d\sigma(t),$$

где $\omega = (-2c_2 + c_4)^{-1}$. Тогда

$$(\widehat{u}(t), \widehat{v}(t)) = [\widehat{u}(t), \widehat{v}(t)] = [u(t), v(t)] - \omega[u(t), (1-t^2)][(1-t^2), v(t)].$$

J-ортопроекция функций $u(t)$ и $v(t)$ на $\mathcal{L}_-$ равна $\check{u}(t) = \omega[u(t), (1-t^2)](1-t^2)$ и $\check{v}(t) = \omega[v(t), (1-t^2)](1-t^2)$ соответственно, а гильбертово скалярное произведение этих проекций в рамках выбранной конструкции — это $(\check{u}(t), \check{v}(t)) = -\omega[u(t), (1-t^2)][(1-t^2), v(t)]$, так что (напомним, что константа $\omega < 0$)

$$(u(t), v(t)) = [u(t), v(t)] - 2\omega[u(t), (1-t^2)][(1-t^2), v(t)]. \tag{5.13}$$

Представление (5.13) показывает, что произвольная последовательность полиномов $\{u_n(t)\}_{n=1}^\infty$ будет последовательностью Коши в гильбертовой норме тогда и только тогда, когда она одновременно будет последовательностью Коши по отношению к индефинитной норме и порождать числовую последовательность Коши $\{[u_n(t), (1-t^2)]\}_{n=1}^\infty$. Описание пополнения $\mathfrak{P}$ связано прежде всего с тем, что $\sigma(t)$ — это функция скачков. Непосредственно проверяется, что последовательность функций t^n, $n = 2, 3, \ldots$ является последовательностью Коши и сходится к функции $\varphi_1(t)$: $\varphi_1(t) = 0$ при $t \in [0, 1)$, $\varphi_1(1) = 1$, последовательность функций $4^n t^n (1-t)^n$ — к функции $\varphi_2(t)$: $\varphi_2(t) = 0$ при $t \in [0, 1/2) \cup (1/2, 1]$, $\varphi_2(1/2) = 1$ и т. д. Функция $\varphi_n(t)$ в этой схеме задаётся равенствами $\varphi_n(t)$: $\varphi_n(t) = 0$ при $t \in [0, 1/n) \cup (1/n, 1]$, $\varphi_n(1/n) = 1$. Подсчитывая с помощью предельного перехода значения внутреннего скалярного для этих функций, имеем $[\varphi_n(t), v(t)] = \bar{v}(1/n)$ и, в частности, $[\varphi_n(t), \varphi_l(t)] = \delta_{nl}$, где δ_{nl} — символ Кронекера. Одновременно

$$(\varphi_n(t), v(t)) = \bar{v}(1/n) - \frac{2\omega(n^2-1)}{n^2}[(1-t^2), v(t)]$$

и

$$(\varphi_n(t), \varphi_l(t)) = \delta_{nl} - \frac{2\omega(n^2-1)}{n^2}\frac{(l^2-1)}{l^2}.$$

Рассмотрим теперь последовательность

$$\psi_n(t) = \frac{1}{n}\sum_{l=1}^n \varphi_l(t).$$

Внешне эта последовательность функций равномерно сходится к нулю, однако $[\psi_n(t), 1] = 1$ для любого $n = 1, 2, \ldots$; с другой стороны, согласно методу средних арифметических для последовательностей (см. [16, теорема 4.1.II Сильвермана—Теплица]) для произвольного полинома $u(t)$ верно $\lim\limits_{n\to\infty}[\psi_n(t), tu(t)] = 0$. Итак, для любого полинома $u(t)$ мы имеем $\lim\limits_{n\to\infty}[\psi_n(t), u(t)] = \overline{u(0)}$, т. е. $\lim_{n\to\infty}\psi_n(t)$ можно отождествить с дельта-функцией Дирака $\delta(t)$, причём $[\delta(t),\delta(t)]=0$. Аналогичный подсчёт даёт ($v(t)$ — произвольный многочлен)

$$(\delta(t),v(t))=\bar v(0)-2\omega[(1-t^2),v(t)],\quad (\delta(t),\varphi_l(t))=-2\omega\frac{l^2-1}{l^2},\quad (\delta(t),\delta(t))=-2\omega,$$

$$(\varphi_n(t)-\delta(t),\varphi_l(t)-\delta(t))=\delta_{nl}-\frac{2\omega}{n^2l^2}.$$

Последнее равенство означает, что система $\{\varphi_l(t)-\delta(t)\}_{l=1}^{\infty}$ является системой Рисса (см. [9] или [13]), поэтому ряд $\sum\limits_{l=1}^{\infty}\nu_l(\varphi_l(t)-\delta(t))$ сходится тогда и только тогда, когда $\sum\limits_{l=1}^{\infty}|\nu_l|^2<\infty$.

Рассмотрим теперь последовательность

$$\vartheta_n(t)=\sum_{l=1}^{n}\frac{\varphi_l(t)-\delta(t)}{l}.$$

Наша цель — найти $\lim\limits_{n\to\infty}[\vartheta_n(t),v(t)]$ для произвольного полинома $v(t)$, который, очевидно, может быть представлен в виде $v(t)=v(0)+v'(0)t+t^2w(t)$. Итак,

$$\lim_{n\to\infty}[\vartheta_n(t),v(t)]=\lim_{n\to\infty}\left(v'(0)\sum_{l=1}^{n}\frac{1}{l^2}+\sum_{l=1}^{n}\frac{w(1/l)}{l^3}\right)=v'(0)\sum_{l=1}^{\infty}\frac{1}{l^2}+\sum_{l=1}^{\infty}\frac{w(1/l)}{l^3}.$$

С другой стороны,

$$[t,v(t)]=v'(0)\left(1+\sum_{1}^{\infty}\frac{1}{l^2}\right)+\sum_{1}^{\infty}\frac{w(1/l)}{l^3},$$

поэтому элемент $t-\lim\limits_{n\to\infty}\vartheta_n(t)$ из $\Pi(\Phi)$ может быть отождествлён с обобщённой функцией $-\delta'(t)$. Резюмируя приведённые выше соображения можно утверждать, что все элементы пространства $\Pi(\Phi)$ могут быть представлены в виде

$$\alpha+\beta\delta(t)+\gamma\delta'(t)+\sum_{l=1}^{\infty}\nu_l(\varphi_l(t)-\delta(t)),$$

где $\sum\limits_{l=1}^{\infty}|\nu_l|^2<\infty$. При этом надо иметь в виду, что $\sigma(t)$ — функция скачков, поэтому значения какой либо функции из $\Pi(\Phi)$ на множестве $\bigcup\limits_{l=1}^{\infty}\left(\frac{1}{l+1},\frac{1}{l}\right)$ несущественны и, скажем, функции

$$t \ \text{ и } \ -\delta'(t)+\sum_{l=1}^{\infty}\frac{1}{l}(\varphi_l(t)-\delta(t))$$

представляют один и тот же элемент из $\Pi(\Phi)$; аналогичное замечание верно для пары функций

$$t^2 \ \text{ и } \ \delta'(t)+\sum_{l=1}^{\infty}\frac{1^2}{l}\varphi_l(t)-\delta(t)$$

и т. п. Оператор A_T после его замыкания задаётся равенствами

$$A_T\delta(t)=0,\quad A_T\delta'(t)=-\delta(t),\quad A_T1=-\delta'(t)+\sum_{l=1}^{\infty}\frac{1}{l}\,(\varphi_l(t)-\delta(t)),\quad A_T\varphi_l(t)=\frac{1}{l}\,\varphi_l(t),$$

где $l=1,2,\dots$, и этим завершается описание модели оператора A из примера 3.1.

6. Заключительные замечания

В рамках данных заметок были приведены три модели, связанные с J-с.с. или J-унитарными операторами, действующими в пространстве Понтрягина. Модель Шульмана выходит далеко за рамки модели для индивидуального J-с.с. оператора или моногенной (порождаемой одним оператором) алгебры, она описывает действие операторной алгебры на всём пространстве Понтрягина и доказала свою полезность в исследовании, например, проблемы бикоммутанта [27, 30, 34, 39]. Вместе с тем модель Шульмана изначально строилась для пространства Понтрягина типа Π_1, и неясно, как её можно обобщить (сохраняя тот же уровень прозрачности) на более широкий класс пространств Понтрягина. Модель Йонаса—Лангера—Текксториуса описывает действие оператора A на всём пространстве Понтрягина при любом значении его ранга индефинитности — в этом заключается её достоинство; очевидное же ограничение рассматриваемой модели — она предполагает цикличность оператора A. Это ограничение не очень существенно для пространства типа Π_1, поскольку в этом случае найдётся такое проекционно полное, инвариантное относительно A подпространство $\mathcal{H}_c$, что оператор $A|_{\mathcal{H}_c}$ — циклический, а подпространство $\mathcal{H}_c^{[\perp]}$ положительно, по этому поводу см. [23]. При бóльших рангах индефинитности требование цикличности уже становится ограничительным. Если отказаться от цикличности A и сохранить подход к проблеме, предложенный в работе [33], то числовую степенную последовательность моментов придётся заменить её матричным аналогом, но это достаточно сложный и трудно контролируемый процесс. Более того, опыт классификации J-нормальных операторов в псевдоунитарных пространствах с рангом индефинитности, равным двум, наглядно показывает необозримость всех неприводимых конструкций коммутативных J-симметричных алгебр при ранге индефинитности, большем двух. Модели, описанные здесь в разделах 3 и 4, являются неполными в том смысле, что описывают действие J-с.с. или J-унитарного оператора (не накладывая при этом каких-либо ограничений на кратность спектра соответствующего оператора или ранг индефинитности пространства Понтрягина) не на всём пространстве, а на подпространстве, ответственном за их «обобщённую спектральную» компоненту. Этого, тем не менее, оказывается достаточно при построении максимально возможного в некотором естественном смысле функционального исчисления для J-с.с. и J-унитарных операторов в пространстве Понтрягина (см. [25, 37, 40]), а также для исследования спектральных свойств бикоммутанта J-с.с. оператора (см. [26, 39]). Этот же подход можно сравнительно легко распространить на коммутативные семейства J-с.с. операторов в пространстве Понтрягина и (при некоторых дополнительных ограничениях, определяющих так называемые классы H и $K(H)$ — см. [3, 28, 29]) в пространстве Крейна.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Азизов Т. Я., Иохвидов И. С.* Линейные операторы в гильбертовых пространствах с G-метрикой// Усп. мат. наук. — 1971. — *26*, № 4. — С. 43–92.
2. *Азизов Т. Я., Иохвидов И. С.* Линейные операторы в пространствах с индефинитной метрикой и их приложения// Итоги науки и техн. Сер. Мат. анал. — 1979. — *17*. — С. 113–205.
3. *Азизов Т. Я., Иохвидов И. С.* Основы теории линейных операторов в пространствах с индефинитной метрикой. — М.: Наука, 1986.
4. *Азизов Т. Я., Копачевский Н. Д.* Введение в теорию пространств Понтрягина: специальный курс лекций. — Симферополь: ТНУ, 2008.
5. *Азизов Т. Я., Копачевский Н. Д.* Введение в теорию пространств Крейна: специальный курс лекций. — Симферополь: ООО «ФОРМА», 2010.
6. *Ароншайн Н.* Квадратичные формы на векторных пространствах// Математика. — 1964. — *8*, № 5. — С. 102–155.
7. *Ахиезер Н. И.* Классическая проблема моментов и некоторые вопросы анализа, связанные с нею. — М.: Физматгиз, 1961.
8. *Ахиезер Н. И., Глазман И. М.* Теория линейных операторов в гильбертовом пространстве. — М.: Наука, 1966.
9. *Бари Н. К.* Биортогональные системы и базисы в гильбертовом пространстве// Уч. зап. МГУ. — 1951. — *148*. — С. 69–107.
10. *Бирман М. Ш., Соломяк М. З.* Спектральная теория самосопряжённых операторов в гильбертовом пространстве. — Л.: Изд-во Ленингр. ун-та, 1980.
11. *Богачёв В. И.* Курс лекций по действительному анализу. — М.: МГУ, 2008.

12. *Браттели У., Робинсон Д.* Операторные алгебры и квантовая статистическая механика. — М.: Мир, 1982.
13. *Гохберг И. Ц., Крейн М. Г.* Введение в теорию линейных несамосопряжённых операторов в гильбертовом пространстве. — М.: Наука, 1965.
14. *Гохман Э. Х.* Интеграл Стилтьеса и его приложения. — М.: Физматгиз, 1958.
15. *Данфорд Н., Шварц Дж.* Линейные операторы. Т. 3. Спектральные операторы. — М.: Мир, 1974.
16. *Кук Р.* Бесконечные матрицы и пространства последовательностей. — М.: ФМЛ, 1960.
17. *Мальцев А. И.* Основы линейной алгебры. — СПб: Лань, 2009.
18. *Наймарк М. А.* Нормированные кольца. — М.: Физматлит, 2010.
19. *Рид М., Саймон Б.* Методы современной математической физики. Т. 1: Функциональный анализ. — М.: Мир, 1977.
20. *Рисс Ф., Секефальви-Надь Б.* Лекции по функциональному анализу. — М.: Мир, 1979.
21. *Севастьянов Б. А.* Курс теории вероятностей и математической статистики. — М.: Наука, 1982.
22. *Халмош П.* Гильбертово пространство в задачах. — М.: Мир, 1970.
23. *Штраус В. А.* Некоторые особенности спектральной функции π-самосопряжённого оператора// В сб.: «Функциональный анализ. Теория операторов. 21». — Ульяновск: УГПИ, 1983. — С. 135–146.
24. *Штраус В. А.* Модельное представление простейшего π-самосопряжённого оператора// В сб.: «Функциональный анализ. Спектральная теория. 22». — Ульяновск: УГПИ, 1984. — С. 123–133.
25. *Штраус В. А.* Функциональное представление алгебры, порождённой самосопряжённым оператором в пространстве Понтрягина// Функц. анализ и его прилож. — 1986. — *20*, № 1. — С. 91–92.
26. *Штраус В. А.* Функциональное представление операторов, дважды перестановочных с самосопряжённым оператором в пространстве Понтрягина// Сиб. мат. ж. — 1988. — *29*, № 6. — С. 176–184.
27. *Шульман В. С.* Банаховы симметричные алгебры операторов в пространстве типа Π_1// Мат. сб. — 1972. — *89*, № 2. — С. 264–279.
28. *Azizov T. Ya., Strauss V. A.* Spectral decompositions for special classes of self-adjoint and normal operators on Krein spaces// В сб.: «Spectral Theory and Its Applications». — Theta, 2003. — С. 45–67.
29. *Azizov T. Ya., Strauss V. A.* On a spectral decomposition of a commutative operator family in spaces with indefinite metric// Methods Funct. Anal. Topol. — 2005. — *11*, № 1. — С. 10–20.
30. *Bendersky A. Y., Litvinov S. N., Chilin V. I.* A description of commutative symmetric operator algebras in a Pontryagin space π_1// J. Operator Theory. — 1997. — *37*. — С. 201–222.
31. *Colojoară I., Foiaş C.* Theory of Generalized Spectral Operators. — New York, etc: Gordon and Breach, 1968.
32. *Holtz O., Strauss V.* Classification of normal operators in spaces with indefinite scalar product of rank-2// Linear Algebra Appl. — 1996. — *241–243*. — С. 455–517.
33. *Jonas P., Langer H., Textorius B.* Models and unitary equivalence of cyclic selfadjoint operators in Pontrjagin spaces// В сб.: «Workshop on Operator Theory and Complex Analysis», Sapporo, Japan, June 1991. — Basel: Birkhäuser, 1992. — С. 252–284.
34. *Kissin E., Shulman V.* Representations of Krein spaces and derivations of C^*-algebras. — US: Addison-Wesley Longman, 1997.
35. *Langer H.* Spectraltheorie linearer Operatoren in J-räumen und enige Anwendungen auf die Shar $L(\lambda) = \lambda^2 I + \lambda B + C$// Habilitationsschrift. — Dresden: Dresden Tech. Univ., 1965.
36. *Langer H.* Spectral functions of definitizable operators in Krein space// Lecture Notes in Math. — 1982. — *948*. — С. 1–46.
37. *Strauss V.* A functional description for the commutative WJ^*-algebras for the D_κ^+-class// В сб.: «Operator Theory and Indefinite Inner Product Spaces». — Basel: Birkhäuser, 2006. — С. 299–335.
38. *Strauss V.* Models of function type for commutative symmetric operator families in Krein spaces// Abstr. Appl. Anal. — 2008. — *2008*. — 439781.
39. *Strauss V.* On a commutative WJ^*-algebra of D_1^+-class and its bicommutant// Oper. Matrices. — 2011. — *5*, № 4. — С. 585–617.
40. *Strauss V.* On the weakly closed algebra generated by a unitary operator in a Pontryagin space// Oper. Matrices. — 2018. — *12*, № 3. — С. 837–853.

В. А. Штраус

Ульяновский государственный педагогический университет им. И. Н. Ульянова, Ульяновск, Россия

E-mail: `vstrauss@mail.ru`

DOI: 10.22363/2413-3639-2022-68-3-522-552 UDC 517.982+517.984.48

Models of Self-Adjoint and Unitary Operators in Pontryagin Spaces

© 2022 **V. A. Strauss**

Abstract. This paper represents a revised version of the lectures, delivered by the author at KROMSH-2019. These lectures are devoted to describing a few different ways of constructing a model representation for self-adjoint and unitary operators acting in Pontryagin spaces, and a comparison between them. Two of these models are based on the regularized integral Krein–Langer representation of a numerical sequence generated by the powers of a self-adjoint (in the sense of Pontryagin spaces) operator. The steps to deduce both this representation and the spectral function of the corresponding operator are given. In both models (first of which belongs to the author of this paper), the operator is realized as an operator of multiplication by an independent variable, but the space of functions in which it acts is different for each of the models. The third model, introduced by V. S. Shulman, is based on his own concept of a quasi-vector.

REFERENCES

1. T. Ya. Azizov and I. S. Iokhvidov, “Lineynye operatory v gil’bertovykh prostranstvakh s G-metrikoy” [Linear operators in Hilbert spaces with G-metric], *Usp. mat. nauk* [Progr. Math. Sci.], 1971, **26**, No. 4, 43–92 (in Russian).
2. T. Ya. Azizov and I. S. Iokhvidov, “Lineynye operatory v prostranstvakh s indefinitnoy metrikoy i ikh prilozheniya” [Linear operators in spaces with an indefinite metric and their applications], *Itogi nauki i tekhn. Ser. Mat. anal.* [Totals Sci. Tech. Ser. Math. Anal.], 1979, **17**, 113–205 (in Russian).
3. T. Ya. Azizov and I. S. Iokhvidov, *Osnovy teorii lineynykh operatorov v prostranstvakh s indefinitnoy metrikoy* [Fundamentals of the Theory of Linear Operators in Spaces with Indefinite Metric], Nauka, Moscow, 1986 (in Russian).
4. T. Ya. Azizov and N. D. Kopachevsky, *Vvedenie v teoriyu prostranstv Pontryagina: spetsial’nyy kurs lektsiy* [Introduction to the Theory of Pontryagin Spaces: Special Course], TNU, Simferopol’, 2008 (in Russian).
5. T. Ya. Azizov and N. D. Kopachevsky, *Vvedenie v teoriyu prostranstv Kreyna: spetsial’nyy kurs lektsiy* [Introduction to the Theory of Krein Spaces: Special Course], FORMA, Simferopol’, 2010 (in Russian).
6. N. Aronszajn, “Kvadratichnye formy na vektornykh prostranstvakh” [Quadratic forms on vector spaces], *Matematika* [Matematika], 1964, **8**, No. 5, 102–155 (in Russian).
7. N. I. Akhiezer, *Klassicheskaya problema momentov i nekotorye voprosy analiza, svyazannye s neyu* [The classical moment problem and some related questions in analysis], Fizmatgiz, Moscow, 1961 (in Russian).
8. N. I. Akhiezer and I. M. Glazman, *Teoriya lineynykh operatorov v gil’bertovom prostranstve* [Theory of Linear Operators in Hilbert Space], Nauka, Moscow, 1966 (in Russian).
9. N. K. Bari, “Biortogonal’nye sistemy i bazisy v gil’bertovom prostranstve” [Biorthogonal systems and bases in Hilbert space], *Uch. zap. MGU* [Uch. zap. MGU], 1951, **148**, 69–107 (in Russian).
10. M. Sh. Birman and M. Z. Solomyak, *Spektral’naya teoriya samosopryazhennykh operatorov v gil’bertovom prostranstve* [Spectral theory of self-adjoint operators in Hilbert space], Leningrad Univ., Leningrad, 1980 (in Russian).
11. V. I. Bogachev, *Kurs lektsiy po deystvitel’nomu analizu* [Lectures on Real Analysis], MSU, Moscow, 2008 (in Russian).
12. O. Bratteli and D. Robinson, *Operatornye algebry i kvantovaya statisticheskaya mekhanika* [Operator Algebras and Quantum Statistical Mechanics], Mir, Moscow, 1982 (Russian translation).
13. I. C. Gohberg and M. G. Kreyn, *Vvedenie v teoriyu lineynykh nesamosopryazhennykh operatorov v gil’bertovom prostranstve* [Introduction to the Theory of Linear Nonselfadjoint Operators in a Hilbert Space], Nauka, Moscow, 1965 (in Russian).

14. E. Kh. Gokhman, *Integral Stilt'esa i ego prilozheniya* [Stieltjes Integral and Its Applications], Fizmatgiz, Moscow, 1958 (in Russian).
15. N. Dunford and J. T. Schwartz, *Lineynye operatory. T. 3. Spektral'nye operatory* Linear Operators. Part III. Spectral operators], Mir, Moscow, 1974 (Russian translation).
16. R. G. Cooke, *Beskonechnye matritsy i prostranstva posledovatel'nostey* [Infinite Matrices and Sequence Spaces], FML, Moscow, 1960 (Russian translation).
17. A. I. Mal'tsev, *Osnovy lineynoy algebry* [Fundamentals of Linear Algebra], Lan', Saint Petersburg, 2009 (in Russian).
18. M. A. Naimark, *Normirovannye kol'tsa* [Normed Rings], Fizmatlit, Moscow, 2010 (in Russian).
19. M. Reed and B. Simon, *Metody sovremennoy matematicheskoy fiziki. T. 1: Funktsional'nyy analiz* [Methods of Modern Mathematical Physics. V. 1: Functional Analysis], Mir, Moscow, 1977 (Russian translation).
20. F. Riesz and B. Sz.-Nagy, *Lektsii po funktsional'nomu analizu* [Functional Analysis], Mir, Moscow, 1979 (Russian translation).
21. B. A. Sevast'yanov, *Kurs teorii veroyatnostey i matematicheskoy statistiki* [A Course of Probability Theory and Mathematical Statistics], Nauka, Moscow, 1982 (in Russian).
22. P. R. Halmos, *Gil'bertovo prostranstvo v zadachakh* [A Hilbert Space Problem Book], Mir, Moscow, 1970 (Russian translation).
23. V. A. Strauss, "Nekotorye osobennosti spektral'noy funktsii π-samosopryazhennogo operatora" [Some peculiarities of the spectral function of a π-self-adjoint operator], In: *Funktsional'nyy analiz. Teoriya operatorov. 21* [Functional Analysis. Operator Theory. 21], UGPI, Ul'yanovsk, 1983, pp. 135–146 (in Russian).
24. V. A. Strauss, "Model'noe predstavlenie prosteyshego π-samosopryazhennogo operatora" [A model representation of the simplest π-self-adjoint operator], In: *Funktsional'nyy analiz. Spektral'naya teoriya. 22* [Functional Analysis. Operator Theory. 22], UGPI, Ul'yanovsk, 1984, pp. 123–133 (in Russian).
25. V. A. Strauss, "Funktsional'noe predstavlenie algebry, porozhdennoy samosopryazhennym operatorom v prostranstve Pontryagina" [Functional representation of the algebra, generated by a self-adjoint operator in the Pontryagin space], *Funkts. analiz i ego prilozh.* [Funct. Anal. Appl.], 1986, **20**, No. 1, 91–92 (in Russian).
26. V. A. Strauss, "Funktsional'noe predstavlenie operatorov, dvazhdy perestanovochnykh s samosopryazhennym operatorom v prostranstve Pontryagina" [Functional representation of operators, double permutable with a self-adjoint operator in the Pontryagin space], *Sib. mat. zh.* [Siberian Math. J.], 1988, **29**, No. 6, 176–184 (in Russian).
27. V. S. Shul'man, "Banakhovy simmetrichnye algebry operatorov v prostranstve tipa Π_1" [Banach symmetric algebras of operators in a space of type Π_1], *Mat. sb.* [Math. Digest], 1972, **89**, No. 2, 264–279 (in Russian).
28. T. Ya. Azizov and V. A. Strauss, "Spectral decompositions for special classes of self-adjoint and normal operators on Krein spaces," In: *Spectral Theory and Its Applications*, Theta, 2003, pp. 45–67.
29. T. Ya. Azizov and V. A. Strauss, "On a spectral decomposition of a commutative operator family in spaces with indefinite metric," *Methods Funct. Anal. Topol.*, 2005, **11**, No. 1, 10–20.
30. A. Y. Bendersky, S. N. Litvinov, and V. I. Chilin, "A description of commutative symmetric operator algebras in a Pontryagin space π_1," *J. Operator Theory*, 1997, **37**, 201–222.
31. I. Colojoară and C. Foiaş, *Theory of Generalized Spectral Operators*, Gordon and Breach, New York, etc., 1968.
32. O. Holtz and V. Strauss, "Classification of normal operators in spaces with indefinite scalar product of rank-2," *Linear Algebra Appl.*, 1996, **241–243**, 455–517.
33. P. Jonas, H. Langer, and B. Textorius, "Models and unitary equivalence of cyclic selfadjoint operators in Pontrjagin spaces," In: *Workshop on Operator Theory and Complex Analysis*, Sapporo, Japan, June 1991, Birkhäuser, Basel, 1992, pp. 252–284.
34. E. Kissin and V. Shulman, *Representations of Krein spaces and derivations of C^*-algebras*, Addison-Wesley Longman, US, 1997.
35. H. Langer, "Spectraltheorie linearer Operatoren in J-räumen und enige Anwendungen auf die Shar $L(\lambda) = \lambda^2 I + \lambda B + C$," *Habilitationsschrift*, Dresden: Dresden Tech. Univ., 1965.
36. H. Langer, "Spectral functions of definitizable operators in Krein space," *Lecture Notes in Math.*, 1982, **948**, 1–46.
37. V. Strauss, "A functional description for the commutative WJ^*-algebras for the D_κ^+-class," In: *Operator Theory and Indefinite Inner Product Spaces*, Birkhäuser, Basel, 2006, pp. 299–335.
38. V. Strauss, "Models of function type for commutative symmetric operator families in Krein spaces," *Abstr. Appl. Anal.*, 2008, **2008**, 439781.

39. V. Strauss, “On a commutative WJ^*-algebra of D_1^+-class and its bicommutant,” *Oper. Matrices*, 2011, **5**, No. 4, 585–617.
40. V. Strauss, “On the weakly closed algebra generated by a unitary operator in a Pontryagin space,” *Oper. Matrices*, 2018, **12**, No. 3, 837–853.

V. A. Strauss

Ul’yanovsk State Pedagogical University, Ul’yanovsk, Russia

E-mail: vstrauss@mail.ru