Современная математика. Фундаментальные направления. Том 68, № 3 (2022). С. 488–508
Contemporary Mathematics. Fundamental Directions. ISSN 2413-3639 (Print)

DOI: 10.22363/2413-3639-2022-68-3-488-508 УДК 517.2+531.38

ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ ПОВЕДЕНИЕМ РЕШЕНИЙ НАЧАЛЬНО-КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ, ВОЗНИКАЮЩЕЙ В МЕХАНИКЕ ДИСКРЕТНО-КОНТИНУАЛЬНЫХ СИСТЕМ

© 2022 г. **Е. П. КУБЫШКИН**

Аннотация. Рассматривается начально-краевая задача для системы из двух дифференциальных уравнений, одно из которых является обыкновенным, а другое уравнением с частными производными, связь между которыми осуществляется через интегральный функционал. При этом краевые условия содержат старшие производные по времени от искомых функций. Начально-краевая задача моделирует поворот механической системы, состоящей из двух твердых тел, соединенных упругим стержнем, вокруг центра масс одного из твердых тел. Поворот осуществляется моментом внешних сил (моментом управления), приложенным к оси вращения твердого тела. Для начально-краевой задачи введено понятие обобщенного решения, доказана теорема существования и единственности обобщенного решения, корректности постановки задачи. Решены задачи оптимального управления поворотом механической системы из начального состояния в конечное в заданный момент времени, минимизируя значение управляющего момента и минимизируя функционал энергии от управляющего момента. В указанной постановке также решены задачи быстродействия при ограничениях на значение управляющего момента и на величину интеграла энергии от управляющего момента.

ОГЛАВЛЕНИЕ

1. Введение

Дискретно-континуальными принято называть механические системы, содержащие как твердые тела, так и упругие элементы. Такие системы являются механическими моделями манипуляционных роботов, руки которых обладают упругой податливостью, космических аппаратов, имеющих упругие элементы конструкций, гибких роторов турбин, несущих бандажные диски лопаток, центрифуг и др. конструкций. Математическими моделями таких систем являются, как правило, начально-краевые задачи для систем дифференциальных уравнений, содержащих как уравнения обыкновенные, так и уравнения с частными производными, связь между которыми осуществляется через функционалы и операторы. Начально-краевые задачи могут содержать старшие производные по времени в краевых условиях. В связи с этим встает задача математически корректной постановки начально-краевых задач для такого класса дифференциальных уравнений. Даже для математических моделей достаточно простых механических систем рассматриваемого вида эта задача зачастую не выглядит просто. Изучению таких систем посвящена обширная литература, в основном прикладного характера. Рассматриваются задачи управления движением, устойчивости и стабилизации, колебаний таких систем. Активно такие системы стали изучаться в 80-х годах прошлого века, что было обусловлено интенсивным развитием робототехники, созданием больших космических станций и других сложных систем, имеющих упругоподатливые элементы конструкций. Отметим некоторые работы. Во-первых, монографию [21], в которой наряду со многими другими рассмотрена задача управления поворотом упругого стержня с точечным грузом на конце как механическая модель руки манипулятора. Для такой системы получены уравнения движения. Постановка задачи позволяет найти точное решение начально-краевой задачи, что дает возможность построить программное управление, обеспечивающие поворот системы с гашением колебаний. Близкие по постановке задачи изучались в монографии [3], где построены уравнения движения дискретно-континуальных систем, моделирующих роботов, манипуляторы, шагающие аппараты, а также рассмотрены различные проблемы динамики, управления и оптимизации таких систем. Основной метод исследования в монографии — это замена распределенной составляющей конечномерной по методу Галеркина. В качестве базисных функций берутся балочные функции. Для конечномерного аналога строятся оптимальные управления, которые и берутся в качестве управлений дискретно-континуальных систем. В работе [25], где рассматривается задача поворота гибкой руки манипулятора с полным гашением поперечной вибрации в конце процесса управления, также используется метод приближений Галеркина. В работах [22–24] изучается задача управления медленным вращением диска с балкой Тимошенко. Авторы используют представление решения распределенной части системы через собственные функции спектральной краевой задачи, соответствующей балке Тимошенко, закрепленной с одного конца, считая при этом угол поворота системы известной функцией. Такой подход потребовал ограничений на счетное число значений радиусов диска, при которых рассматриваемая система является неуправляемой (нестабилизируемой). Эта же модель при упомянутых ограничениях рассмотрена в работе [6] при решении задачи стабилизации поведения решений. Как следует из результатов [16], эти ограничения обусловлены методом исследования. Задачи стабилизации углового положения твердого тела с упругими стержнями рассматривались также в [1, 7, 8, 19].

В настоящей работе рассматривается начально-краевая задача, моделирующая поворот механической системы, состоящей их двух твердых тел, соединенных упругим стержнем, вокруг оси, проходящей через центр масс одного из твердых тел перпендикулярно средней линии недеформированного стержня. Упругий стержень рассматривается в рамках гипотез Эйлера—Бернулли малого изгиба стержней, имеет постоянное сечение и равномерно распределенную по длине массу. Точки заделки стержня в твердые тела и их центры масс находятся на одной прямой со средней линией недеформированного стержня. Поворот осуществляется моментом внешних сил, приложенным к оси вращения. Для начально-краевой задачи определено понятие обобщенного решения, доказана теорема существования и единственности обобщенного решения, непрерывной зависимости решения от начальных условий и параметров начально-краевой задачи. Решена задача оптимального перевода решения начально-краевой задачи из начального фазового состояния в конечное в заданный момент времени, минимизируя значение управляющего момента, и аналогичная задача с минимизацией функционала энергии от управляющего момента. В указанной постановке также решены задачи быстродействия при ограничениях на значение управляющего момента и на величину интеграла энергии от управляющего момента. Рассматриваемая система может служить механической моделью руки манипулятора, переносящей груз и обладающей упругой податливостью, или космической станции, состоящей из двух модулей, соединенных упругим переходом, осуществляющей поворот в плоскости орбиты вокруг центра масс одного из модулей. Вывод уравнений движения и краевых условий рассматриваемой механической системы приведен в работе автора [13]. Там же приведен алгоритм решения одной из сформулированных задач управления. При этом многие математические вопросы решения задач управления либо остались не изложенными, либо приведены без доказательств. Настоящая работа призвана восполнить этот пробел. В работе используется идеология работ [5, 12, 14, 15], в которых рассматриваются в различных постановках задачи оптимального управления поворотом твердого тела с упругим и наследственно вязкоупругим стержнем.

Работа выполнена в рамках реализации программы развития регионального научно-образовательного математического центра (ЯрГУ) при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования РФ (соглашение о предоставлении из федерального бюджета субсидии № 075-02-2022-886) и Программы развития ЯрГУ, проект № П2-К-1-Г-4/2021 П2-ГМ4-2021.

2. Математическая постановка задачи

Рассматривается начально-краевая задача

$$J\ddot{\theta} + \int\limits_0^1 (x+a_1)y_{tt}(x,t)dx + m_2(1+a_1+a_2)y_{tt}(1,t) + [m_2a_2(1+a_1+a_2)+J_2]y_{xtt}(1,t) = M(t), \quad (2.1)$$

$$y_{tt} + y_{xxxx} = -(x+a_1)\ddot{\theta}, \quad (2.2)$$

$$y(0,t) = y_x(0,t) = 0,$$

$$y_{xx}(1,t) = -J_2(y_{xtt}(1,t)+\ddot{\theta}) - m_2a_2\big\{y_{tt}(1,t) + a_2y_{xtt}(1,t) + \ddot{\theta}(1+a_1+a_2)\big\},$$

$$y_{xxx}(1,t) = m_2\big\{y_{tt}(1,t) + a_2y_{xtt}(1,t) + \ddot{\theta}(1+a_1+a_2)\big\}, \quad (2.3)$$

$$\theta(0) = \theta_0, \quad \dot{\theta}(0) = \dot{\theta}_0, \quad y(x,0) = y_0(x), \quad y_t(x,0) = y_1(x), \quad (2.4)$$

относительно функций $\theta(t), y(x,t)$ в области $\bar{Q}_T = \{(x,t) : 0 \leqslant x \leqslant 1, 0 \leqslant t \leqslant T\}$. В (2.1)–(2.4) $J, J_1, J_2, a_1, a_2, m_2$ — положительные параметры, $M(t)$ — известная функция, функциональные пространства для начальных условий $y_0(x), y_1(x)$ и функции $M(t)$ будут определены ниже. При этом

$$J = J_1 + \int\limits_0^1 (x+a_1)^2dx + m_2(1+a_1+a_2)^2 + J_2 = J_1 + 1/3 + a_1 + a_1^2 + m_2(1+a_1+a_2)^2 + J_2. \quad (2.5)$$

Начально-краевая задачи (2.1)–(2.5) приведена в безразмерных переменных. При этом функции $\theta(t), y(x,t)$ определяют соответственно угол поворота системы относительно инерциального пространства и величину деформации стержня; параметры J_1 и J_2 определяют моменты инерции твердых тел относительно осей, проходящих через их центры масс перпендикулярно плоскости вращения системы; a_1 и a_2 определяют расстояния от центров масс твердых тел до точек заделки упругого стержня; m_2 характеризует массу второго твердого тела. Функция $M(t)$ определяет момент вращения (управления). Выражение (2.5) определяет момент инерции всей системы относительно оси вращения.

В дальнейшем, как обычно, $L_2(0,T)$ — пространство определенных на $(0,T)$ вещественнозначных интегрируемых по Лебегу функций $u(t)$, для которых

$$||u(t)||_{L_2(0,T)} = (u(t),u(t))^{1/2}_{L_2(0,T)} < \infty, \quad (u_1(t),u_2(t))_{L_2(0,T)} = \int\limits_0^T u_1(t)u_2(t)dt,$$

$L_\infty(0,T)$ — подпространство функций из $L_2(0,T)$, для которых

$$||u(t)||_{L_\infty(0,T)} = vrai \sup_{0\leqslant t\leqslant T} |u(t)| < \infty$$

(существенный supremum).

Для начально-краевой задачи (2.1)–(2.4) рассмотрены следующие задачи оптимального управления.

Задача 2.1. *Определить функцию управления $M(t) \in L_2(0,T)$, переводящую решение начально-краевой задачи (2.1)–(2.4) из начального состояния (2.4) в конечное*

$$\theta(T) = \theta_{0T}, \quad \dot{\theta}(T) = \theta_{1T}, \quad y(x,T) = y_{0T}(x), \quad y_t(x,T) = y_{1T}(x) \quad (2.6)$$

в заданный момент времени T и минимизирующую функционал

$$\Phi_1(M) = \|M(t)\|_{L_2(0,T)}.$$

Задача 2.2 (задача быстродействия). *Определить функцию управления* $M(t) \in L_2(0,T)$, $\Phi_1(M) \leqslant L_1 < \infty$, *переводящую решение начально-краевой задачи* (2.1)–(2.4) *из начального состояния* (2.4) *в конечное* (2.6) *за минимальное время* T.

Задача 2.3. *Определить функцию управления* $M(t) \in L_\infty(0,T)$, *переводящую решение начально-краевой задачи* (2.1)–(2.4) *из начального состояния* (2.4) *в конечное* (2.6) *в заданный момент времени* T *и минимизирующую функционал*

$$\Phi_2(M) = \|M(t)\|_{L_\infty(0,T)}.$$

Задача 2.4 (задача быстродействия). *Определить функцию управления* $M(t) \in L_\infty(0,T)$, $\Phi_2(M) \leqslant L_2 < \infty$, *переводящую решение начально-краевой задачи* (2.1)–(2.4) *из начального состояния* (2.4) *в конечное* (2.6) *за минимальное время* T.

Ниже для начально-краевой задачи (2.1)–(2.4) сформулировано понятие обобщенного решения, определены функциональные пространства для начальных условий и решения, доказана теорема существования и единственности решения. Показана корректность поставленной начально-краевой задачи, получена аналитическая формула решения. Для оптимальных управлений сформулирован принцип максимума, предложены эффективные алгоритмы построения оптимальных управлений. В задачах 2.2 и 2.4 значения минимального времени определяются как корни некоторых нелинейных алгебраических уравнений.

3. Построение решения начально-краевой задачи (2.1)–(2.4)

Выразим $y_{tt}(x,t)$ из (2.2) и подставим в уравнение (2.1). В результате имеем

$$\left(J - \int_0^1 (x+a_1)^2 dx\right)\ddot{\theta} - \int_0^1 (x+a_1) y_{xxxx}(x,t)dx + m_2^* y_{tt}(1,t) + J_2^* y_{xtt}(1,t) = M(t), \tag{3.1}$$

где использованы обозначения $m_2^* = m_2(1+a_1+a_2), J_2^* = m_2 a_2(1+a_1+a_2) + J_2$. Вычислив в равенстве (3.1) второй интеграл по частям при учете краевых условий (2.3), получим для θ дифференциальное уравнение

$$J_1\ddot{\theta} + a_1 y_{xxx}(0,t) - y_{xx}(0,t) = M(t). \tag{3.2}$$

Это позволяет выписать для определения $y(x,t)$ две эквивалентные начально-краевые задачи:

$$y_{tt} - J^{-1}(x+a_1)\left[\int_0^1 (x_1+a_1) y_{tt}(x_1,t)dx_1 + m_2^* y_{tt}(1,t) + J_2^* y_{xtt}(1,t)\right] + y_{xxxx} = -J^{-1}(x+a_1)M(t), \tag{3.3}$$

$$y(0,t) = y_x(0,t) = 0,$$

$$y_{xx}(1,t) = J^{-1}J_2^* \int_0^1 (x_1+a_1) y_{tt}(x_1,t)dx_1 - (J_2 + m_2 a_2^2 - J^{-1}J_2^{*2}) y_{xtt}(1,t) -$$
$$-(m_2 a_2 - J^{-1}J_2^* m_2^*) y_{tt}(1,t) - J^{-1}J_2^* M(t),$$

$$y_{xxx}(1,t) = -J^{-1}m_2^* \int_0^1 (x_1+a_1) y_{tt}(x_1,t)dx_1 + (m_2 - J^{-1}m_2^{*2}) y_{tt}(1,t) +$$
$$+(m_2 a_2 - J^{-1}J_2^* m_2^*) y_{xtt}(1,t) + J^{-1}m_2^* M(t), \tag{3.4}$$

$$y(x,0) = y_0(x), \quad y_t(x,0) = \dot{y}_0(x) \tag{3.5}$$

и

$$y_{tt} + y_{xxxx} - J_1^{-1}(x+a_1)(a_1 y_{xxx}(0) - y_{xx}(0)) = -J_1^{-1}(x+a_1)M(t), \tag{3.6}$$

$$y(0,t) = y_x(0,t) = 0,$$

$$y_{xx}(1,t) - J_1^{-1}J_2^*(a_1 y_{xxx}(0,t) - y_{xx}(0,t)) = -(J_2 + m_2 a_2^2) y_{xtt}(1,t) - m_2 a_2 y_{tt}(1,t) - J_1^{-1}J_2^* M(t),$$

$$y_{xxx}(1,t) + J_1^{-1}m_2^*(a_1 y_{xxx}(0,t) - y_{xx}(0,t)) = m_2 y_{tt}(1,t) + m_2 a_2 y_{xtt}(1,t) + J_1^{-1}m_2^* M(t), \tag{3.7}$$

$$y(x,0) = y_0(x), \quad y_t(x,0) = y_1(x). \tag{3.8}$$

Положим сначала $M(t) \equiv 0$. Определяя решение $y(x,t)$ в виде $y(x,t) = v(x)s(t)$, подставим его в краевую задачу (3.6)–(3.8). В результате получим для определения $v(x)$ спектральную краевую задачу

$$v^{\mathrm{IV}}(x) - J_1^{-1}(x+a_1)(a_1 v'''(0) - v''(0)) = \lambda v(x), \tag{3.9}$$

$$\begin{gathered} v(0) = v'(0) = 0, \\ v''(1) - J_1^{-1}J_2^*(a_1 v'''(0) - v''(0)) = \lambda[(J_2 + a_2^2 m_2)v'(1) + a_2 m_2 v(1)], \\ v'''(1) + J_1^{-1}m_2^*(a_1 v'''(0) - v''(0)) = -\lambda m_2(v(1) + a_2 v'(1)), \end{gathered} \tag{3.10}$$

а для $s(t)$ — следующее уравнение:

$$\ddot{s}(t) + \lambda s(t) = 0.$$

Спектральная краевая задача (3.9)-(3.10) подробно рассмотрена в работе [4]. Ниже приведены основные результаты. Запишем спектральную краевую задачу (3.9)-(3.10) в матричной форме

$$\begin{pmatrix} v^{\mathrm{IV}}(x) \\ -v'''(1) \\ v''(1) \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} I & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & a_2 m_2 \\ 0 & a_2 m_2 & J_2 + a_2^2 m_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v(x) \\ v(1) \\ v'(1) \end{pmatrix} + J_1{}^{-1}(a_1 v'''(0) - v''(0)) \begin{pmatrix} x + a_1 \\ m_2^* \\ J_2^* \end{pmatrix}, \tag{3.11}$$

$$v(0) = v'(0) = 0. \tag{3.12}$$

Введем гильбертово пространство $\mathcal{H} = L_2 \oplus \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}$ с элементами $\widehat{v} = col(v(x), v(1), v'(1)) \in \mathcal{H}$. Здесь и в дальнейшем для сокращения записи используется обозначение L_2 пространства $L_2(0;1)$, а соответствующее скалярное произведение обозначено $(*,*)$. Введем в $\mathcal{H}$ операторы

$$\mathcal{A}\widehat{v} = col(v^{\mathrm{IV}}, -v'''(1), v''(1)), \quad \mathcal{D}(\mathcal{A}) = \{\widehat{v} \in \mathcal{H}:\ v(x) \in C^4[0;1],\ v(0) = v'(0) = 0\},$$

$$\mathcal{B}\widehat{v} = \begin{pmatrix} I & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & a_2 m_2 \\ 0 & a_2 m_2 & J_2 + a_2^2 m_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v(x) \\ v(1) \\ v'(1) \end{pmatrix}, \quad \mathcal{D}(\mathcal{B}) = \mathcal{H}.$$

Скалярное произведение в $\mathcal{H}$ определено равенством

$$\langle \widehat{u}, \widehat{v} \rangle_{\mathcal{H}} = \int_0^1 u(x)v(x)dx + u(1)v(1) + u'(1)v'(1).$$

Интегрируя по частям, замечаем, что

$$a_1 v'''(0) - v''(0) = -\left(\int_0^1 (a_1 + x)v^{\mathrm{IV}}(x)dx - (a_1+1)v'''(1) + v''(1) \right) = -\langle \widehat{f}, \mathcal{A}\widehat{v} \rangle_{\mathcal{H}},$$

где $\widehat{f} = col(a_1 + x, a_1 + 1, 1) \in \mathcal{H}$. Кроме того,

$$\begin{pmatrix} x + a_1 \\ m_2^* \\ J_2^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & a_2 m_2 \\ 0 & a_2 m_2 & J_2 + a_2^2 m_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 + x \\ a_1 + 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \mathcal{B}\widehat{f}.$$

Таким образом, (3.11), (3.12) может быть записано в виде

$$\mathcal{A}\widehat{v} + \frac{1}{J_1}\langle \widehat{f}, \mathcal{A}\widehat{v} \rangle_{\mathcal{H}} \mathcal{B}\widehat{f} = \lambda \mathcal{B}\widehat{v} \quad (\text{в } \mathcal{H}). \tag{3.13}$$

Покажем, что оператор $\mathcal{A}$ является симметричным и положительно определенным. Действительно, для $\widehat{v}, \widehat{u} \in \mathcal{D}(\mathcal{A})$

$$\langle \mathcal{A}\widehat{v}, \widehat{u} \rangle_{\mathcal{H}} = \int_0^1 v^{\mathrm{IV}}(x)u(x)dx - v'''(1)u(1) + v''(1)u'(1) = \int_0^1 v''(x)u''(x)dx =$$

$$= \int_0^1 v(x)u^{\mathrm{IV}}(x)dx - u'''(1)v(1) + u''(1)v'(1) = \langle \widehat{v}, \mathcal{A}\widehat{u} \rangle_{\mathcal{H}}.$$

Кроме того, для $\widehat{v} \in \mathcal{D}(\mathcal{A})$

$$\langle \mathcal{A}\widehat{v}, \widehat{v}\rangle_{\mathcal{H}} = \int\limits_0^1 v''(x)^2 dx, \quad \langle \mathcal{A}\widehat{v}, \widehat{v}\rangle_{\mathcal{H}} = 0 \Rightarrow v(x) \equiv 0,$$

т. е. оператор $\mathcal{A}$ положительный. Применяя теперь к (3.13) неравенство Фридрихса [18], получим положительную определенность оператора $\mathcal{A}$. Расширяя его (по Фридрихсу) до самосопряженного положительно определенного оператора, получаем

$$\mathcal{D}(\mathcal{A}) = \{\widehat{v} = col(v(x), v(1), v'(1)) \in \mathcal{H} \colon v(x) \in W^4(0;1),\ v(0) = v'(0) = 0\},$$
$$\mathcal{D}(\mathcal{A}^{1/2}) = \mathcal{H}_{\mathcal{A}} = \{\widehat{v} = col(v(x), v(1), v'(1)) \in \mathcal{H} \colon v(x) \in W^2(0;1),\ v(0) = v'(0) = 0\}.$$

Согласно теоремам вложения Соболева [17], $\mathcal{H}_{\mathcal{A}}$ компактно вложено в исходное пространство $\mathcal{H}$. Отсюда непосредственно следует, что оператор $\mathcal{A}^{-1}$ существует и является компактным в $\mathcal{H}$.

Оператор $\mathcal{B} = \mathcal{B}^* > 0$ является ограниченным и ограниченно обратимым оператором в $\mathcal{H}$. Таким образом, из (3.13) следует, что

$$\mathcal{B}^{-1}\mathcal{A}\widehat{v} + {J_1}^{-1}\langle \widehat{f}, \mathcal{A}\widehat{v}\rangle_{\mathcal{H}}\widehat{f} = \lambda\widehat{v} \quad (\text{в } \mathcal{H}).$$

Обозначив $\widehat{\eta} = \mathcal{A}\widehat{v} \in \mathcal{H}$, перепишем последнее равенство следующим образом:

$$\mathcal{B}^{-1}\widehat{\eta} + {J_1}^{-1}\langle \widehat{f}, \widehat{\eta}\rangle_{\mathcal{H}}\widehat{f} = \lambda\mathcal{A}^{-1}\widehat{\eta} \quad (\text{в } \mathcal{H}).$$

Очевидно, $\mathcal{P}_{\widehat{f}}\widehat{\eta} = \langle \widehat{f}, \widehat{\eta}\rangle_{\mathcal{H}}\widehat{f}$ является ортопроектором на одномерное подпространство $\mathrm{sp}\{\widehat{f}\}$, поэтому $\mathcal{P}_{\widehat{f}} = \mathcal{P}^*_{\widehat{f}} \geqslant 0$ ограничен в $\mathcal{H}$. Имеем задачу

$$\mathcal{C}\widehat{\eta} = \lambda\mathcal{A}^{-1}\widehat{\eta} \quad (\text{в } \mathcal{H}), \quad \mathcal{C} = \mathcal{B}^{-1} + {J_1}^{-1}\mathcal{P}_{\widehat{f}}. \tag{3.14}$$

Здесь, очевидно, оператор $\mathcal{C} = \mathcal{C}^* > 0$ ограничен и ограниченно обратим. На решениях задачи (3.14) имеем $\mathcal{C}\widehat{\eta} \in \mathcal{D}(\mathcal{A}) \subset \mathcal{H}_{\mathcal{A}}$, поэтому, сделав замену

$$\widehat{\vartheta} = \mathcal{A}^{-1/2}\widehat{\eta} = \mathcal{A}^{1/2}\widehat{v} \in \mathcal{H}_{\mathcal{A}} \subset \mathcal{H},$$

получим уравнение

$$\mathcal{K}\widehat{\vartheta} = \mathcal{A}^{1/2}\mathcal{C}\mathcal{A}^{1/2}\widehat{\vartheta} = \lambda\widehat{\vartheta} \quad (\text{в } \mathcal{H}).$$

Оператор $\mathcal{K}^{-1}$ является положительным компактным самосопряженным в $\mathcal{H}$. Согласно теореме Гильберта—Шмидта, $\sigma(\mathcal{K}^{-1})$ состоит из изолированных конечнократных положительных собственных значений $\{\mu_k\}_{k=1}^{\infty}$ с предельной точкой $+0$, а из соответствующих собственных элементов $\{\widehat{\vartheta}_k\}_{k=1}^{\infty}$ можно составить ортонормированный базис в $\mathcal{H}$. Тогда спектр исходной спектральной задачи состоит из изолированных положительных собственных значений конечной кратности $\{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty},\ \lambda_k \to +\infty\ (k \to \infty)$, а система собственных элементов $\{\widehat{v}_k = \mathcal{A}^{-1/2}\widehat{\vartheta}_k \in \mathcal{D}(\mathcal{A})\}_{k=1}^{\infty}$ является полной в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$. Она образует ортонормированный базис в энергетическом пространстве оператора $\mathcal{A}$, при этом справедливы формулы ортогональности

$$\langle \widehat{v}_k, \widehat{v}_l\rangle_{\mathcal{H}_{\mathcal{A}}} = \langle \mathcal{A}^{1/2}\widehat{v}_k, \mathcal{A}^{1/2}\widehat{v}_l\rangle_{\mathcal{H}} = \langle \widehat{\vartheta}_k, \widehat{\vartheta}_l\rangle_{\mathcal{H}} = \delta_{kl}. \tag{3.15}$$

Перейдем к выводу конкретного вида скалярного произведения (3.15) в терминах собственных функций $v_k(x)$ спектральной краевой задачи (3.9)-(3.10). Подставив теперь $y(x,t) = v(x)s(t)$ в начально-краевую задачу (3.3)–(3.5), получим для определения $v(x)$ следующую спектральную краевую задачу:

$$v^{\mathrm{IV}}(x) = \lambda\Big\{v(x) - J^{-1}(x + a_1)\Big[\int\limits_0^1 (x_1 + a_1)v(x_1)dx_1 + m_2^* v(1) + J_2^* v'(1)\Big]\Big\}, \tag{3.16}$$

$$v(0) = v'(0) = 0,$$

$$v''(1) = \lambda\Big\{(J_2 + a_2^2 m_2)v'(1) + m_2 a_2 v(1) - J^{-1}J_2^*\Big[\int\limits_0^1 (x_1 + a_1)v(x_1)dx_1 + m_2^* a_2 v(1) + J_2^* v'(1)\Big]\Big\},$$

$$v'''(1)=\lambda\Big\{-m_2(v(1)+a_2v'(1))-J^{-1}m_2^*\Big[\int\limits_0^1(x_1+a_1)v(x_1)dx_1+m_2^*v(1)+J_2^*v'(1)\Big]\Big\},\qquad(3.17)$$

эквивалентную (3.9)-(3.10).

Пусть $v_k(x)$ и $v_l(x)$ — собственные функции спектральной краевой задачи (3.16)-(3.17), отвечающие собственным значениям λ_k и λ_l соответственно. Подставим теперь $v_k(x)$ и λ_k в (3.16). Полученное равенство умножим на $v_l(x)$ и проинтегрируем по отрезку $[0,1]$. В результате имеем

$$\int\limits_0^1 v_k^{\mathrm{IV}}(x)v_l(x)dx=\lambda_n\Big\{\int\limits_0^1 v_k(x)v_l(x)dx-J^{-1}\int\limits_0^1(x+a_1)v_m(x)dx\Big[\int\limits_0^1(x_1+a_1)v(x_1)dx_1+$$
$$+m_2^*v(1)+J_2^*v'(1)\Big]\Big\},\qquad(3.18)$$

Вычисляя интеграл в левой части (3.18) по частям, с учетом краевых условий (3.17) будем иметь

$$\int\limits_0^1 v_k''(x)v_l''(x)dx=(v_k''(x),v_l''(x))=\lambda_k\Big[(v_k(x),v_l(x))+m_2v_k(1)v_l(1)+(J_2+a_2^2m_2)v_k'(1)v_l'(1)+$$
$$+a_2m_2(v_k'(1)v_l(1)+v_k(1)v_l'(1))-J^{-1}\Big((x+a_1,v_k)(x+a_1,v_l)+m_2^*((x+a_1,v_k)v_l(1)+$$
$$+(x+a_1,v_l)v_k(1))+J_2^*((x+a_1,v_k)v_l'(1)+(x+a_1,v_l)v_k'(1))+m_2^{*2}v_k(1)v_l(1)+J_2^{*2}v_k'(1)v_l'(1)+$$
$$+m_2^*J_2^*(v_k(1)v_l'(1)+v_l(1)v_k'(1))\Big)\Big]=\lambda_k\langle v_k(x),v_l(x)\rangle.\qquad(3.19)$$

Поменяв $v_k(x)$ и $v_l(x)$ местами, получим

$$(v_l''(x),v_k''(x))=\lambda_l\langle v_k(x),v_l(x)\rangle.\qquad(3.20)$$

При $\lambda_k\neq\lambda_l$, вычтя из (3.19) выражение (3.20), имеем $\langle v_k,v_l\rangle=0$. Имеем также $\langle v,v\rangle\geqslant 0$, $\langle v,v\rangle=0\Rightarrow v(x)\equiv 0$.

Перейдем теперь к выводу характеристического уравнения для определения λ_k и построению собственных функций $v_k(x)$. Положим в уравнении (3.9) $\lambda=\beta^4$, а выражение $a_1v'''(0)-v''(0)$ будем рассматривать как параметр. Тогда общее решение (3.9) запишется в виде

$$v(x)=A\operatorname{ch}(\beta x)+B\operatorname{sh}(\beta x)+C\cos(\beta x)+D\sin(\beta x)-\frac{1}{J_1\beta^4}(x+a_1)(a_1v'''(0)-v''(0)),\qquad(3.21)$$

где A,B,C,D — произвольные постоянные. Отсюда получаем

$$v''(0)=\beta^2(A-C),\quad v'''(0)=\beta^3(B-D),$$

что в результате дает

$$v(x)=A\operatorname{ch}(\beta x)+B\operatorname{sh}(\beta x)+C\cos(\beta x)+D\sin(\beta x)-\frac{1}{J_1\beta^2}(x+a_1)(a_1\beta(B-D)-A+C).\quad(3.22)$$

Подставляя теперь (3.22) в краевые условия (3.10), получаем следующую систему линейных уравнений для определения A,B,C,D:

$$\begin{cases}(1+\dfrac{a_1}{J_1\beta^2})A-\dfrac{a_1^2}{J_1\beta}B+(1-\dfrac{a_1}{J_1\beta^2})C+\dfrac{a_1^2}{J_1\beta}D=0,\\ \dfrac{1}{J_1\beta^2}A+(\beta-\dfrac{a_1}{J_1\beta})B-\dfrac{1}{J_1\beta^2}C+(\beta+\dfrac{a_1}{J_1\beta})D=0,\\ (\operatorname{ch}\beta(1+\beta^2a_2m_2)+\beta^3\operatorname{sh}\beta(J_2+a_2^2m_2))A+(\operatorname{sh}\beta(1+\beta^2a_2m_2)+\beta^3\operatorname{ch}\beta(J_2+a_2^2m_2))B+\\ +(\cos\beta(-1+\beta^2a_2m_2)-\beta^3\sin\beta(J_2+a_2^2m_2))C+(\sin\beta(-1+\beta^2a_2m_2)+\beta^3\cos\beta(J_2+a_2^2m_2))D=0,\\ (\operatorname{sh}\beta(1+\beta^2a_2m_2)+\beta m_2\operatorname{ch}\beta)A+(\operatorname{ch}\beta(1+\beta^2a_2m_2)+\beta m_2\operatorname{sh}\beta)B+\\ +(\sin\beta(1-\beta^2a_2m_2)+\beta m_2\cos\beta)C+(\cos\beta(-1+\beta^2a_2m_2)+\beta m_2\sin\beta)D=0.\end{cases}$$

Эта система имеет нетривиальное решение, если ее определитель равен нулю. Этот факт и дает характеристическое уравнение

$$\begin{gathered}p(\beta) \equiv J_1\beta^{-4} - J_1J_2m_2 + (((J_1 - 2(J_2 + (a_2^2 - a_1^2)m_2))\beta^{-4} + J_1J_2m_2)\cos\beta + \\ +(\beta^{-7} + 2a_1m_2\beta^{-5} + (m_2(J_2 - J_1) + a_1(a_1 + 2J_2 + 2a_2^2m_2))\beta^{-3} + \\ +(J_1J_2 + m_2(a_2^2J_1 + a_1^2J_2))\beta^{-1})\sin\beta)\operatorname{ch}\beta + \\ +((-\beta^{-7} + 2a_1m_2\beta^{-5} + (m_2(J_1 - J_2) + a_1(a_1 - 2J_2 - 2a_2^2m_2))\beta^{-3} + \\ +(J_1J_2 + m_2(a_2^2J_1 + a_1^2J_2))\beta^{-1})\cos\beta + \\ +2((a_1 + m_2)\beta^{-6} + a_1^2(J_2 + a_2^2m_2)\beta^{-3} + a_1J_2m_2\beta^{-2})\sin\beta)\operatorname{sh}\beta = 0,\end{gathered} \tag{3.23}$$

положительные корни которого $\beta_n > 0$ однократны и определяют собственные значения $\lambda_n = \beta_n^4$ спектральной краевой задачи (3.9)-(3.10).

При этом нормированные собственные функции будут иметь явный вид

$$v_n(x) = \frac{v_n^*(x)}{\langle v_n^*(x), v_n^*(x)\rangle^{1/2}}, \tag{3.24}$$

где

$$\begin{gathered}v_n^*(x) = A_n\operatorname{ch}(\beta_nx) + B_n\operatorname{sh}(\beta_nx) + C_n\cos(\beta_nx) + D_n\sin(\beta_nx) - \\ -\frac{1}{J_1\beta^2}(x + a_1)(a_1\beta(B_n - D_n) - A_n + C_n),\end{gathered}$$

$$\begin{aligned}A_n &= \beta_n\bigl([2a_1\beta_n(m_2 + a_1(1 - \beta_n^2m_2a_2)) - J_1\beta_n^3m_2]\sin\beta_n + J_1\beta_n^3m_2\operatorname{sh}\beta_n + \\ &\quad + [2a_1(-1 + \beta_n^2m_2(a_1 + a_2)) - J_1\beta_n^2(-1 + \beta_n^2m_2a_2)]\cos\beta_n + J_1\beta_n^2(1 + \beta_n^2m_2a_2)\operatorname{ch}\beta_n\bigr), \\ B_n &= [2\beta_nm_2 + (1 + \beta_n^2m_2a_2)(2a_1\beta_n + J_1\beta_n^3)]\sin\beta_n - \beta_n^3J_1(1 + a_2\beta_n^2m_2)\operatorname{sh}\beta_n + \\ &\quad + [2\beta_n^2m_2(a_1 + a_2) - 2 + \beta_n^4J_1m_2]\cos\beta_n - \beta_n^4J_1m_2\operatorname{ch}\beta_n, \\ C_n &= -\beta_n\bigl(-J_1\beta_n^3m_2\sin\beta_n + [2a_1\beta_n(m_2 + a_1(1 + \beta_n^2m_2a_2)) + J_1\beta_n^3m_2]\operatorname{sh}\beta_n + \\ &\quad + J_1\beta_n^2(1 - \beta_n^2m_2a_2)\cos\beta_n + [2a_1(1 + \beta_n^2m_2(a_1 + a_2)) + J_1\beta_n^2(1 + \beta_n^2m_2a_2)]\operatorname{ch}\beta_n\bigr), \\ D_n &= -\beta_n^3J_1(1 - a_2\beta_n^2m_2)\sin\beta_n - [2\beta_nm_2 + (1 + \beta_n^2m_2a_2)(2a_1\beta_n - J_1\beta_n^3)]\operatorname{sh}\beta_n - \\ &\quad - \beta_n^4J_1m_2\cos\beta_n - [2\beta_n^2m_2(a_1 + a_2) + 2 - \beta_n^4J_1m_2]\operatorname{ch}\beta_n.\end{aligned}$$

Между функциями $v_n(x)$ выполнены условия ортогональности

$$\langle v_k, v_l\rangle = \delta_{kl}, \tag{3.25}$$

где δ_{kl} — символ Кронекера.

Рассмотрим вопрос построения решения начально-краевой задачи (3.3)–(3.5). Введем некоторые функциональные пространства, необходимые для корректной постановки начально-краевой задачи.

Обозначим через $H(0,1)$ гильбертово пространство функций $y(x)$, полученное замыканием в норме

$$\|y(x)\|_H = \langle y(x), y(x)\rangle^{1/2} \tag{3.26}$$

линейной оболочки функций $v_n(x)$ $(n = 1, 2, \ldots)$, т. е.

$$y(x) = \sum_{n=1}^{\infty} y_nv_n(x),\ \ y_n = \langle y(x), v_n(x)\rangle,\quad \|y(x)\|_H = \Bigl(\sum_{n=1}^{\infty} y_n^2\Bigr)^{1/2} < \infty. \tag{3.27}$$

Для $y_1(x), y_2(x) \in H(0,1)$ определено скалярное произведение $\langle y_1(x), y_2(x)\rangle$ согласно (3.19). Из (3.26), (3.27) для $y(x) \in H(0,1)$ следует $\|y(x)\|_H \geqslant 0$, $\|y(x)\|_H = 0 \iff y(x) = 0$, т. е. равенство (3.19) удовлетворяет всем аксиомам скалярного произведения. Очевидно, что $H(0,1) \subset L_2(0,1)$.

Через $H^j(0,1) \subset H(0,1)$ $(j = 1, 2, 3)$ обозначим пространства функций вида

$$y(x) = \sum_{n=1}^{\infty} y_nv_n(x), y_n = \langle y(x), v_n(x)\rangle,\quad \|y(x)\|_{H^j} = \Bigl(\sum_{n=1}^{\infty} \omega_n^jy_n^2\Bigr)^{1/2} < \infty,\ \omega_n = \beta_n^2.$$

Отметим, что эти пространства являются соответственно замкнутыми подпространствами пространств Соболева $W_2^j(0,1)$ (см. [17]).

Через $H(Q_T)$ обозначим гильбертово пространство функций $y(x,t)$, полученное замыканием множества функций $y(x,t) \in C^{1,0}(\bar{Q}_T)$ в норме

$$\|y(x,t)\|_{H(Q_T)} = (y(x,t), y(x,t))_{H(Q_T)}^{1/2}, \ (u(x,t), v(x,t))_{H(Q_T)} = \int\limits_0^T \langle u(x,t), v(x,t)\rangle dt.$$

Очевидно, что $H(Q_T) \subset L_2(Q_T)$. Через $H^2(Q_T)$ обозначим гильбертово пространство функций $y(x,t)$, полученное замыканием множества функций $y(x,t) \in C^{2,1}(\bar{Q}_T)$, $y(0,t) = y_x(0,t) = 0$ в норме

$$\|y(x,t)\|_{H^2(Q_T)} = (y(x,t), y(x,t))_{H^2(Q_T)}^{1/2},$$

$$(u(x,t), v(x,t))_{H^2(Q_T)} = (u_{xx}(x,t), v_{xx}(x,t))_{L_2(Q_T)} + (u_t(x,t), v_t(x,t))_{H(Q_T)}.$$

Умножим обе части уравнение (3.3) на функцию

$$v(x,t) \in H^2(Q_T), \quad v(x,T) \equiv 0 \tag{3.28}$$

и проинтегрируем по $(x,t) \in Q_T$. В результате будем иметь равенство

$$\int\limits_0^T\int\limits_0^1 y_{tt}(x,t)v(x,t)dxdt - \frac{1}{J}\Bigg\{ \int\limits_0^T\int\limits_0^1 (x+a_1)v(x,t)dx \int\limits_0^1 (x_1+a_1)y_{tt}(x_1,t)dx_1dt +$$
$$+ m_2^* \int\limits_0^T\int\limits_0^1 (x+a_1)v(x,t)y_{tt}(1,t)dxdt + J_2^* \int\limits_0^T\int\limits_0^1 (x+a_1)v(x,t)y_{xtt}(1,t)dxdt\Bigg\} +$$
$$+ \int\limits_0^T\int\limits_0^1 v(x,t)y_{xxxx}(x,t)dxdt = -\frac{1}{J}\int\limits_0^T\int\limits_0^1 (x+a_1)v(x,t)M(t)dxdt. \tag{3.29}$$

Вычисляя интегралы, входящие в (3.29), по частям с учетом краевых и начальных условий (3.4), (3.5), а также условия (3.28), получим выражения

$$\int\limits_0^T\int\limits_0^1 y_{tt}(x,t)v(x,t)dxdt = -(\dot{y}_0(x), v(x,0)) - \int\limits_0^T y_t(x,t)v_t(x,t)dxdt, \tag{3.30}$$

$$\int\limits_0^T\int\limits_0^1 (x+a_1)v(x,t)dx\int\limits_0^1 (x_1+a_1)y_{tt}(x_1,t)dx_1dt = -(x+a_1, \dot{y}_0(x))(x+a_1, v(x,0)) -$$
$$- \int\limits_0^T (x+a_1, y_t(x,t))(x+a_1, v_t(x,t))dt, \tag{3.31}$$

$$\int\limits_0^T\int\limits_0^1 (x+a_1)v(x,t)y_{tt}(1,t)dxdt = -\dot{y}_0(1)(x+a_1, v(x,0)) -$$
$$- \int\limits_0^T y_t(1,t)(x+a_1, v_t(x,t))dt, \tag{3.32}$$

$$\int\limits_0^T\int\limits_0^1 (x+a_1)v(x,t)y_{xtt}(1,t)dxdt = -\dot{y}_0'(1)(x+a_1, v(x,0)) -$$

$$-\int_0^T y_{xt}(1,t)(x+a_1, v_t(x,t))dt, \tag{3.33}$$

$$\int_0^T\int_0^1 v(x,t)y_{xxxx}(x,t)dxdt = -v(1,0)\Big\{m_2\dot y_0(1)+m_2a_2\dot y_0'(1)-\frac{1}{J}m_2^*\Big[(x+a_1,\dot y_0(x))+$$
$$+m_2^*\dot y_0(1)+J_2^*\dot y_0'(1)\Big]\Big\}-\int_0^T v_t(1,t)\Big\{m_2y_t(1,t)+m_2a_2y_{xt}(1,t)-$$
$$-\frac{1}{J}m_2^*\Big[(x+a_1,y_t(x,t))+m_2^*y_t(1,t)+J_2^*y_{xt}(1,t)\Big]\Big\}dt+v_x(1,0)\times$$
$$\times\Big\{-(J_2+m_2a_2^2)\dot y_0'(1)-m_2a_2\dot y_0(1)+\frac{1}{J}J_2^*\Big[(x+a_1,\dot y_0(x))+m_2^*\dot y_0(1)+J_2^*\dot y_0'(1)\Big]\Big\}+$$
$$+\frac{1}{J}m_2^*\Big[(x+a_1,\dot y_0(x))+m_2^*\dot y_0(1)+J_2^*\dot y_0'(1)\Big]\Big\}-$$
$$-\int_0^T v_{xt}(1,t)\Big\{-(J_2+m_2a_2^2)y_{xt}(1,t)-m_2a_2y_t(1,t)+\frac{1}{J}J_2^*\Big[(x+a_1,y_t(x,t))+m_2^*y_t(1,t)+$$
$$+J_2^*y_{xt}(1,t)\Big]\Big\}dt+\int_0^T(y_{xx}(x,t),v_{xx}(x,t))dt+\frac{1}{J}\int_0^T M(t)\big\{m_2^*v(1,t)+J_2^*v_x(1,t)\big\}dt. \tag{3.34}$$

Объединяя (3.30)–(3.34), получим выражение

$$(y_t(x,t),v_t(x,t))_{H(Q_T)}-(y_{xx}(x,t),v_{xx}(x,t))_{L_2(Q_T)}-{J_1}^{-1}((x+a_1)M(t),v(x,t))_{H(Q_T)}+$$
$$+\langle\dot y_0(x),v(x,0)\rangle=0. \tag{3.35}$$

Пусть

$$y_0(x)\in H^2(0,1),\quad \dot y_0(x)\in H(0,1). \tag{3.36}$$

Под *обобщенным решением* начально-краевой задачи (3.3)–(3.5), определенным в области $Q(T)$ с начальными условиями (3.36), будем понимать функцию $y(x,t)\in H^2(Q_T)$, $y(x,0)=y_0(x)$, удовлетворяющую интегральному соотношению (3.35) для любой функции $v(x,t)$ вида (3.28).

Покажем, что обобщенное решение начально-краевой задачи (3.3)–(3.5) существует, единственно, а также получим формулу, его определяющую.

Докажем сначала следующую теорему.

Теорема 3.1. *Решение начально-краевой задачи* (3.3)–(3.5) *единственно.*

Доказательство. Предположив существование двух решений $y_1(x,t)$ и $y_2(x,t)$. Для их разности $y(x,t)$ получим интегральное соотношение

$$(y_t(x,t),v_t(x,t))_{H(Q_T)}-(y_{xx}(x,t),v_{xx}(x,t))_{L_2(Q_T)}=0. \tag{3.37}$$

Необходимо показать, что существует лишь одна, тождественно равная нулю в $Q(T)$ функция $y(x,t)$, удовлетворяющая соотношению (3.37) для любой функции $v(x,t)$ вида (3.28).

Выберем в качестве $v(x,t)$ функцию

$$v(x,t)=\begin{cases}\displaystyle\int_t^\tau y(x,\xi)d\xi, & 0<t<\tau,\\ 0, & \tau\leqslant t<T,\end{cases} \tag{3.38}$$

зависящую от параметра $0<\tau<T$.

Отметим, что

$$v_t(x,t)=\begin{cases}-y(x,t), & 0<t<\tau,\\ 0, & \tau\leqslant t<T.\end{cases}$$

Подставив (3.38) в (3.37), имеем

$$\int\limits_0^T\langle y_t(x,t),v_t(x,t)\rangle dt=-\int\limits_0^\tau\langle y_t(x,t),y(x,t)\rangle dt=-\frac{1}{2}\int\limits_0^\tau\frac{d}{dt}\langle y(x,t),y(x,t)\rangle dt=-\frac{1}{2}\langle y(x,\tau),y(x,\tau)\rangle,$$

$$\int\limits_0^T(y_{xx}(x,t),v_{xx}(x,t))_{L_2(0,1)}dt=\int\limits_0^1\int\limits_0^\tau\int\limits_t^\tau y_{xx}(x,t)y_{xx}(x,\xi)d\xi dtdx=$$

$$=\int\limits_0^1\left(\int\limits_0^\tau y_{xx}(x,t)dt\int\limits_t^\tau y_{xx}(x,\xi)d\xi\right)dx=\int\limits_0^1\left(\int\limits_0^\tau y_{xx}(x,\xi)d\xi\int\limits_0^\xi y_{xx}(x,t)dt\right)dx=$$

$$=\frac{1}{2}\int\limits_0^1\left(\int\limits_0^\tau y_{xx}(x,t)dt\right)^2dx.$$

В итоге равенство (3.37) примет вид

$$\frac{1}{2}\langle y(x,\tau),y(x,\tau)\rangle+\frac{1}{2}\int\limits_0^1\left(\int\limits_0^\tau y_{xx}(x,t)dt\right)^2dx=0,$$

из которого в силу произвольности τ следует, что $y(x,t)\equiv 0$. Отсюда следует единственность решения. □

Перейдем теперь к доказательству существования обобщенного решения начально-краевой задачи (3.3)–(3.5).

Представим

$$y_0(x)=\sum_{n=1}^\infty\omega_n^{-1}a_{0n}v_n(x),\ a_{0n}=\omega_n\langle\ y_0(x),v_n(x)\rangle,\ ||y_0(x)||_{H^2}=\big(\sum_{n=1}^\infty a_{0n}^2\big)^{1/2}<\infty,\tag{3.39}$$

$$\dot y_0(x)=\sum_{n=1}^\infty b_{0n}v_n(x),\ b_{0n}=\langle\dot y_0(x),v_n(x)\rangle,\ ||\dot y_0(x)||_H=\big(\sum_{n=1}^\infty b_{0n}^2\big)^{1/2}<\infty.\tag{3.40}$$

Справедлива следующая теорема.

Теорема 3.2. *Величины*

$$d_n=\langle x+a_1,v_n(x)\rangle\neq 0,\ n=1,2,\dots,\quad d_n=O(n^{-1})\ \text{при}\ \ n\to\infty.\tag{3.41}$$

Доказательство. Подставим $v_n(x)$ и $\lambda_n=\omega_n^2$ в (3.9)-(3.10), умножим уравнение (3.9) на $x+a_1$ и проинтегрируем по отрезку $[0,1]$ с учетом краевых условий (3.10). В результате получим равенство

$$\omega_n^2d_n=-(a_1v_n'''(0)-v_n''(0)).\tag{3.42}$$

Предположим, что $d_n=0$ для некоторого n. Тогда из (3.42) следует равенство $a_1v_n'''(0)-v_n''(0)=0$. Учитывая это в (3.21) и используя первое краевое условие (3.10), получим равенства

$$A_n+C_n=0,\quad B_n+D_n=0.\tag{3.43}$$

Подставив найденные в (3.24) выражения для A_n и C_n в (3.43), имеем равенство

$$\begin{gathered}2a_1(\operatorname{ch}\beta_n+\cos\beta_n)+2a_1\beta_n^2m_2(a_1+a_2)(\operatorname{ch}\beta_n-\cos\beta_n)+\\+2a_1\beta_n(m_2+a_1)(\operatorname{sh}\beta_n-\sin\beta_n)+\beta_n^2m_2a_1a_2(\operatorname{sh}\beta_n+\sin\beta_n)=0.\end{gathered}\tag{3.44}$$

Так как при положительных β_n выполнены неравенства $\operatorname{sh}\beta_n+\sin\beta_n>0$, $\operatorname{ch}\beta_n+\cos\beta_n>0$, $\operatorname{sh}\beta_n-\sin\beta_n>0$ и $\operatorname{ch}\beta_n-\cos\beta_n>0$, левая часть (3.44) строго больше нуля. Это означает ошибочность предположения $d_n=0$ для некоторого n. При $\beta\to\infty$ левая часть уравнения (3.23) стремится к выражению $p(\beta)\equiv\cos\beta+O(\beta^{-1})$. В связи с этим $\beta_n\sim\pi(2n+1)/2$ при $n\to\infty$, а функции $v_n(x)$ стремятся к балочным функциям [20]

$$v_n^*(x)=(\sin\beta_n-\operatorname{sh}\beta_n)(\operatorname{ch}(\beta_nx)-\cos(\beta_nx))+(\operatorname{ch}\beta_n-\cos\beta_n)(\operatorname{sh}(\beta_nx)-\sin(\beta_nx))/(v_n^*(x),v_n^*(x))_{L_2}^{1/2},$$

соответствующим условиям защемления с обоих концов, в которых $(v_n^*(x),v_n^*(x))_{L_2}^{1/2}=\exp(\beta_n)/2(1+O(\beta_n^{-1}))$ при $n\to\infty$. С учетом этого имеем справедливость второго утверждения теоремы. □

В результате справедливо представление

$$x+a_1=\sum_{n=1}^{\infty}d_nv_n(x),\ d_n=\langle x+a_1,v_n(x)\rangle,\ ||x+a_1||_H=\big(\sum_{n=1}^{\infty}d_n^2\big)^{1/2}<\infty. \tag{3.45}$$

Выберем в качестве $y_0(x)=a_{0n}v_n(x)\omega_n^{-1}$, $\dot y_0(x)=b_{0n}v_n(x)$, и пусть в правой части уравнения (3.3) вместо функции $x+a_1$ стоит функция $d_nv_n(x)$. Здесь a_{0n},b_{0n} — некоторые постоянные. Полагаем также $M(t)\in L_2(0,T)$. Тогда функция

$$y_n(x,t)=v_n(x)\big(a_{0n}\omega_n^{-1}\cos(\omega_nt)+b_{0n}\omega_n^{-1}\sin(\omega_nt)-\frac{1}{J_1}d_n\int_0^t\omega_n^{-1}\sin(\omega_n(t-\tau))M(\tau)d\tau\big) \tag{3.46}$$

является обобщенным решением начально-краевой задачи (3.3)–(3.5), удовлетворяющим вышеназванным начальным условиям. Это проверяется непосредственной подстановкой (3.46) в (3.35) с учетом разложения

$$v(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\omega_n^{-1}f_n(t)v_n(x),\ f_n(t)=\omega_n\langle v(x,t),v_n(x)\rangle,\ \sum_{n=1}^{\infty}f_n^2(t)<\infty,$$
$$f_n(t)\in W_2^1(0,T),\ f_n(T)=0.$$

Аналогичное утверждение справедливо, если

$$y_0(x)=\sum_{n=1}^{N}\omega_n^{-1}a_{0n}v_n(x),\quad \dot y_0(x)=\sum_{n=1}^{N}b_{0n}v_n(x)$$

и в правой части уравнения (3.3) вместо функции $x+a_1$ стоит ряд $\sum\limits_{n=1}^{N}d_nv_n(x)$. В этом случае обобщенное решение начально-краевой задачи (3.3)–(3.5) будет представлено суммой $y_N(x,t)=\sum\limits_{n=1}^{N}y_n(x,t)$.

Покажем теперь, что ряд вида

$$y(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}v_n(x)\omega_n^{-1}\big(a_{0n}\cos(\omega_nt)+b_{0n}\sin(\omega_nt)-\frac{1}{J_1}d_n\int_0^t\sin(\omega_n(t-\tau))M(\tau)d\tau\big), \tag{3.47}$$

где a_{0n},b_{0n},d_n определен в (3.39), (3.40) и (3.45) и дает обобщенное решение начально-краевой задачи (3.3)–(3.5), принадлежащее $H^2(Q_T)$ и удовлетворяющее начальным условиям $y(x,0)=y_0(x)$, $y_t(x,0)=\dot y_0(x)$. Отметим, что согласно (3.39), (3.40) решение (3.47) удовлетворяет начальным условиям.

Любой конечный отрезок ряда (3.47) является обобщенным решением начально-краевой задачи (3.3)–(3.5), т. е. (3.47) является формальным обобщенным решением. Докажем сходимость (3.47) в норме пространства $H^2(Q_T)$. Формально дважды дифференцируя по x, имеем

$$y_{xx}(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}v_n''(x)\omega_n^{-1}\big(a_{0n}\cos(\omega_nt)+b_{0n}\sin(\omega_nt)-\frac{1}{J_1}d_n\int_0^t\sin(\omega_n(t-\tau))M(\tau)d\tau\big).$$

С учетом равенств (3.20), (3.25) оценим

$$\Big\| \sum_{n=N}^{N+m} v_n''(x)\omega_n^{-1}\Big(a_{0n}\cos(\omega_n t) + b_{0n}\sin(\omega_n t) - \frac{1}{J_1}d_n \int_0^t \sin(\omega_n(t-\tau))M(\tau)d\tau\Big)\Big\|^2_{L_2(Q_T)} =$$

$$= \sum_{n=N}^{N+m} \int_0^T \Big(a_{0n}\cos(\omega_n t) + b_{0n}\sin(\omega_n t) - \frac{1}{J_1}d_n \int_0^t \sin(\omega_n(t-\tau))M(\tau)d\tau\Big)^2 dt \leqslant$$

$$\leqslant 3\sum_{n=N}^{N+m} \int_0^T \Big(a_{0n}^2\cos^2(\omega_n t) + b_{0n}^2\sin^2(\omega_n t) + \Big(\frac{1}{J_1}d_n\Big)^2 \big(\int_0^t \sin(\omega_n(t-\tau))M(\tau)d\tau\big)^2\Big) dt \leqslant$$

$$\leqslant 3T\sum_{n=N}^{N+m} \Big(a_{0n}^2 + b_{0n}^2 + \Big(\frac{1}{J_1}d_n\Big)^2 \|M(t)\|^2_{L_2(0,T)}\Big). \tag{3.48}$$

В (3.48) использовано неравенство $2ab \leqslant a^2 + b^2$. Согласно (3.39), (3.40), (3.45) величина (3.48) может быть сделана за счет выбора N и m меньше любого заданного $\varepsilon > 0$. Аналогично для

$$y_t(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} v_n(x)\big(-a_{0n}\sin(\omega_n t) + b_{0n}\cos(\omega_n t) - \frac{1}{J_1}d_n \int_0^t \cos(\omega_n(t-\tau))M(\tau)d\tau\big)$$

имеем

$$\Big\| \sum_{n=N}^{N+m} v_n(x)\Big(-a_{0n}\sin(\omega_n t) + b_{0n}\cos(\omega_n t) - \frac{1}{J_1}d_n \int_0^t \cos(\omega_n(t-\tau))M(\tau)d\tau\Big)\Big\|^2_{H(Q_T)} =$$

$$= \sum_{n=N}^{N+m} \int_0^T \Big(-a_{0n}\sin(\omega_n t) + b_{0n}\cos(\omega_n t) - \frac{1}{J_1}d_n \int_0^t \cos(\omega_n(t-\tau))M(\tau)d\tau\Big)^2 dt \leqslant$$

$$\leqslant 3\sum_{n=N}^{N+m} \int_0^T \Big(a_{0n}^2\sin^2(\omega_n t) + b_{0n}^2\cos^2(\omega_n t) + \Big(\frac{1}{J_1}d_n\Big)^2 \big(\int_0^t \cos(\omega_n(t-\tau))M(\tau)d\tau\big)^2\Big) dt \leqslant$$

$$\leqslant 3T\sum_{n=N}^{N+m} \Big(a_{0n}^2 + b_{0n}^2 + \Big(\frac{1}{J_1}d_n\Big)^2 \|M(t)\|^2_{L_2(0,T)}\Big). \tag{3.49}$$

Величина (3.49) также согласно (3.39), (3.40), (3.45) за счет выбора N и m может быть сделана меньше любого заданного $\varepsilon > 0$. Это означает, что последовательность частичных сумм ряда (3.47) фундаментальна в пространстве $H^2(Q_T)$. В силу полноты этого пространства ряд (3.47) сходится к функции $y(x,t) \in H^2(Q_T)$. Существование обобщенного решения начально-краевой задачи (3.3)–(3.5) доказано.

Из (3.39), (3.40), (3.45) и (3.48), (3.49) для решения (3.47) вытекает оценка

$$\|y(x,t)\|_{H^2(Q_T)} \leqslant C\Big(\|y_0(x)\|^2_{H^2} + \|\dot y_0(x)\|^2_H + \|x+a_1\|^2_H \|M(t)\|^2_{L_2(0,T)}\Big)^{1/2}, \tag{3.50}$$

где $C > 0$ — некоторая постоянная. Неравенство (3.50) доказывает корректность поставленной задачи.

Построим теперь обобщенное решение уравнения (2.1), удовлетворяющее начальным условиям (2.4). Пусть функция

$$p(t) \in W_2^1(0,T), \quad p(T) = 0. \tag{3.51}$$

Умножим уравнение (2.1) на $p(t)$ и проинтегрируем по $t \in [0,T]$:

$$J\int_0^T \ddot\theta(t)p(t)dt + \int_0^T \Big[\int_0^1 (x+a_1)y_{tt}(x,t)dx + m_2(1+a_1+a_2)y_{tt}(1,t) +$$

$$+[m_2a_2(1+a_1+a_2)+J_2]y_{xtt}(1,t)\big]p(t)dt=\int\limits_0^T M(t)p(t)dt, \tag{3.52}$$

Вычисляя интегралы, входящие в (3.52), по частям, будем иметь

$$-J\int\limits_0^T\dot\theta(t)\dot p(t)dt-J\dot\theta_0p(0)-p(0)\int\limits_0^1(x+a_1)\dot y_0(x)dx-\int\limits_0^T\dot p(t)\int\limits_0^1(x+a_1)y_t(x,t)dxdt-$$

$$-m_2(1+a_1+a_2)\big[\dot y_0(1)p(0)+\int\limits_0^T y_t(1,t)\dot p(t)dt\big]-$$

$$-[m_2a_2(1+a_1+a_2)+J_2]\big[\dot y_{0x}(1)p(0)+\int\limits_0^T y_{tx}(1,t)\dot p(t)dt\big]=\int\limits_0^T M(t)p(t)dt,$$

что эквивалентно равенству

$$\int\limits_0^T\Big(J\dot\theta(t)\dot p(t)+\frac{J}{J_1}\langle x+a_1,y_t(x,t)\rangle\dot p(t)\Big)dt+J\dot\theta_0p(0)+\frac{J}{J_1}\langle x+a_1,\dot y_0(x)\rangle p(0)+\int\limits_0^T M(t)p(t)dt=0. \tag{3.53}$$

Под обобщенным решением уравнения (2.1) будем понимать функцию $\theta(t)\in W_2^1(0,T)$, $\theta(0)=\theta_0$, удовлетворяющую интегральному равенству (3.53) для любой функции $p(t)$ вида (3.51).

Легко видеть, что искомым решением уравнения (2.1) будет функция

$$\theta(t)=\theta_0+\dot\theta_0t+\frac{1}{J_1}\big(\langle x+a_1,\dot y_0(x)\rangle t-\int\limits_0^t\langle x+a_1,y_{t_1}(x,t_1)\rangle dt_1\big)+\frac{1}{J}\int\limits_0^t(t-t_1)M(t_1)dt_1=$$

$$=\theta_0+\dot\theta_0t+\frac{1}{J_1}\big(\langle x+a_1,\dot y_0(x)\rangle t-\langle x+a_1,y(x,t)\rangle+\langle x+a_1,y_0(x)\rangle\big)+\frac{1}{J}\int\limits_0^t(t-t_1)M(t_1)dt_1. \tag{3.54}$$

Сформулируем сказанное в виде итоговой теоремы.

Теорема 3.3. *Обобщенное решение $\theta(t),y(x,t)$ начально-краевой задачи* (2.1)–(2.4) *в области Q_T с начальными условиями $\theta(0)=\theta_0$, $\dot\theta(0)=\dot\theta_0$, $y_0(x)\in H^2(0,1)$, $\dot y_0(x)\in H(0,1)$ существует, единственно и представимо в виде* (3.47), (3.54). *При этом $\theta(t)\in W_2^1(0,T)$, $y(x,t)\in H^2(Q_T)$, и для решения справедлива оценка* (3.50).

4. Построение оптимальных управлений

Выберем

$$y_0(x),y_T(x)\in H^3(0,1),\quad \dot y_0(x),\dot y_T(x)\in H^1(0,1) \tag{4.1}$$

и переформулируем задачу 2.1 с учетом (3.47), (3.54) следующим образом: найти минимум функционала (2.5) при ограничениях

$$\dot\theta_T=\dot\theta_0+J_0^{-1}\big(\langle x+a,\dot y_0(x)\rangle-\langle x+a,\dot y_T(x)\rangle\big)+J^{-1}\int\limits_0^T M(\tau)d\tau,$$

$$\theta_T=\theta_0+\dot\theta_0T+J_0^{-1}\big(\langle x+a,\dot y_0(x)\rangle T+\langle x+a,y_0(x)\rangle-\langle x+a,y_T(x)\rangle\big)+J^{-1}\int\limits_0^T(T-\tau)M(\tau)d\tau,$$

$$a_{Tn}=a_{0n}\cos(\omega_nT)+b_{0n}\sin(\omega_nT)-J_1^{-1}d_n\int\limits_0^T\sin(\omega_n(T-\tau))M(\tau)d\tau,$$

$$b_{Tn} = -a_{0n}\sin(\omega_n T) + b_{0n}\cos(\omega_n T) - J_1^{-1} d_n \int\limits_0^T \cos(\omega_n(T-\tau))M(\tau)d\tau, \tag{4.2}$$

$$a_{Tn} = \omega_n \langle y_T(x), v_n(x)\rangle, \quad b_{Tn} = \langle \dot y_T(x), v_n(x)\rangle \quad (n = 1, 2, \ldots).$$

Отметим, что первое условие (3.41) является необходимым условием управляемости поведением решений начально-краевой задачи (2.1)–(2.4).

Преобразуем равенства (4.2) к следующему виду:

$$\int\limits_0^T M(t)dt = \alpha_1(T) = J(\dot\theta_T - \dot\theta_0) + JJ_1^{-1}\sum_{n=1}^{\infty} d_n(b_{Tn} - b_{0n}),$$

$$\int\limits_0^T tdt = \alpha_2(T) = J(\theta_0 - \theta_T - \dot\theta_T T) + JJ_1^{-1}\sum_{n=1}^{\infty} d_n(a_{0n}\omega_n^{-1} - a_{Tn} - b_{Tn}T),$$

$$\int\limits_0^T \sin(\omega_n t)M(t)dt = \alpha_{2n+1}(T) = J_1 d_n^{-1}(a_{Tn}\cos(\omega_n T) - b_{Tn}\sin(\omega_n T) - a_{0n}),$$

$$\int\limits_0^T \cos(\omega_n t)M(t)dt = \alpha_{2n+2}(T) = J_1 d_n^{-1}(-a_{Tn}\sin(\omega_n T) - b_{Tn}\cos(\omega_n T) + b_{0n}), \tag{4.3}$$

$n = 1, 2, \ldots$

Отметим, что согласно (3.41) и свойств функций (4.1) справедливо неравенство

$$\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n^2(T) < \infty. \tag{4.4}$$

Обозначим через $Q_2(0,T)$ подпространство $L_2(0,T)$, являющееся замкнутой (в норме этого пространства) линейной оболочкой функций

$$\varphi_1(t) = 1, \quad \varphi_2(t) = t, \quad \varphi_{2n+1}(t) = \sin(\omega_n t), \quad \varphi_{2n+2}(t) = \cos(\omega_n t) \quad (n = 1, 2\ldots). \tag{4.5}$$

Теорема 4.1. *Функции* (4.5) *образуют базис Рисса в* $Q_2(0,T)$.

Доказательство. Покажем сначала, что для некоторого N функции

$$\varphi_{2(N+j)+1}(t), \quad \varphi_{2(N+j)+2}(t) \quad (j = 1, 2, \ldots) \tag{4.6}$$

образуют базис Рисса в подпространстве $Q_2^N(0,T)$, являющимся замкнутой линейной оболочкой в $L_2(0,T)$ функций (4.6). Согласно [2, с. 48], для этого необходимо и достаточно, чтобы собственные значения матриц Грамма

$$G_m^N = \{g_{pq}\}, \quad g_{pq} = (\varphi_p(t), \varphi_q(t))_{L_2(0,T)}, \quad p, q = 2(N+j)+1,\ 2(N+j)+2, \quad j = 1, 2, \ldots, m, \tag{4.7}$$

были в совокупности отделены от нуля и бесконечности. Из вида функции (4.7) с учетом соотношения $\omega_n \sim [\pi/2(2n+1)]^2$ при $n \to \infty$ имеем

$$g_{2(N+j)+1\ 2(N+j)+1}, g_{2(N+j)+2\ 2(N+j)+2} = T/2 + O((N+j)^{-2}), g_{2(N+j)+1\ 2(N+j)+2} = O((N+j)^{-2})$$

при $(N+j) \to \infty$, и

$$g_{2(N+j)+1\ 2(N+k)+1}, g_{2(N+j)+1\ 2(N+k)+2} = O([(2N+j+k)(j-k)]^{-1})$$

при $j \neq k,\ j, k = 1, 2, \ldots, m,\ |(2N+j+k)(j-k)| \to \infty$.

В связи с этим характеристическое уравнение матрицы G_m^N порядка $2m$ будет иметь вид $(T/2-\lambda)^{2m} + O(N^{-1})$. Отсюда следует совокупная отделенность от нуля и бесконечности собственных значений матриц G_m^N. Таким образом, функции (4.6) образуют базис Рисса в $Q_2^N(0,T)$.

Добавление к функциям (4.6) конечного числа линейно независимых функций не меняет свойства базиса. Следовательно, функции (4.5) образует базис Рисса в $Q_2(0,T)$. Это означает, что собственные значения $\lambda_j > 0$ бесконечной матрицы Грамма G, построенной по системе функций (4.5), в совокупности отделены от нуля и бесконечности, т. е. существуют постоянные $m_g, M_g > 0$, для которых $m_g < \lambda_j < M_g$ $(j = 1, 2, \ldots)$. Таким образом, справедливо неравенство

$$m_g \sum_{j=1}^{\infty} \xi_j^2 < \sum_{j\ k=1}^{\infty} g_{jk}\xi_j\xi_k < M_g \sum_{j=1}^{\infty} \xi_j^2 \tag{4.8}$$

для любого $\xi = (\xi_1, \xi_2, \ldots) \in l_2$, $||\xi||^2 = \sum\limits_{j=1}^{\infty} \xi_j^2 < \infty$. □

Произвольный линейный непрерывный функционал в пространстве $L_2(0,T)$ запишем в виде

$$F_2(u) = (u(t), M(t))_{L_2(0,T)}\,,\ M(t) \in L_2(0,T),\ \|F_2\| = \|M(t)\|_{L_2(0,T)}. \tag{4.9}$$

Задача 2.1 построения оптимального управления на основании (2.1), (4.3), (4.9) сводится к следующей проблеме моментов в пространстве $L_2(0,T)$.

Задача. *Найти функционал вида* (4.9), *удовлетворяющий условиям*

$$F_2(\varphi_j(t)) = \alpha_j(T),\ j = 1, 2, \ldots \tag{4.10}$$

и имеющий минимальную норму $\|F_2\|_{min} = m_{2T}$.

По системе функций $\varphi_j(t)$ построим ортонормированную в $L_2(0,T)$ систему функций $\psi_j(t)$, используя ортогонализацию Шмидта (см., например, [2, с. 26]). Для этого положим

$$\begin{aligned}
&\bar\psi_1(t) = \varphi_1(t), && \psi_1(t) = \bar\psi_1(t)/\eta_1,\\
&\bar\psi_2(t) = \varphi_2(t) - \alpha_{21}\psi_1(t), && \psi_2(t) = \bar\psi_2(t)/\eta_2,\\
&\ldots\\
&\bar\psi_n(t) = \varphi_n(t) - \sum_{j=0}^{n-1} \alpha_{nj}\psi_j(t), && \psi_n(t) = \bar\psi_n(t)/\eta_n,\\
&\alpha_{nj} = (\varphi_n(t), \psi_j(t))_{L_2(0,T)}, && \eta_n = \left\|\bar\psi_n(t)\right\|_{L_2(0,T)}.
\end{aligned}$$

Введем в рассмотрение величины $\beta_n(T)$ по следующей схеме:

$$\begin{aligned}
&\beta_1(T) = \alpha_1(T)/\eta_1,\\
&\beta_2(T) = (\alpha_2(T) - \alpha_{21}\beta_1(T))/\eta_2,\\
&\ldots\\
&\beta_n(T) = (\alpha_n(T) - \sum_{j=0}^{n-1} \alpha_{nj}\beta_j(T))/\eta_n.
\end{aligned}$$

Эти соотношения определяют бесконечномерную нижнюю треугольную матрицу $B(T) = \{B_{ij}(T)\}_{i,j=1,\ldots,\infty}$, которая задает ограниченный и ограниченно обратимый в пространстве l_2 оператор $\beta(T) = B(T)\alpha(T)$, $\beta(T) = (\beta_1(T), \beta_2(T), \ldots)$, $\alpha(T) = (\alpha_1(T), \alpha_2(T), \ldots)$. Непосредственно вычисляя, находим

$$\psi_1(t) = T^{-1/2}, \psi_2(t) = 3^{1/2}(-T^{-1/2} + 2\cdot T^{-3/2}t), \ldots$$

$$\beta_1(T) = T^{-1/2}\alpha_1(T), \beta_2(T) = 3^{1/2}(-T^{-1/2}\alpha_1(T) + 2T^{-3/2}\alpha_2(T)), \ldots$$

Отметим, что остальные $\beta_n(T)$ имеют аналогичную зависимость от T: $\lim\limits_{T\to 0} \beta_n(T) = \infty$, $\lim\limits_{T\to\infty} \beta_n(T) = 0$. В связи с этим и (4.4)

$$m_2(T) = (\sum_{n=1}^{\infty} \beta_n^2(T))^{1/2} < \infty,\ \lim_{T\to 0} m_2(T) = \infty,\ \lim_{T\to\infty} m_2(T) = 0. \tag{4.11}$$

Теорема 4.2. *Существует единственная функция*

$$M^*(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \beta_n(T)\psi_n(t), \quad \|M^*(t)\|_{L_2(0,T)} = (\sum_{n=0}^{\infty} \beta_n^2(T))^{1/2} = m_2(T), \tag{4.12}$$

дающая решение задачи 2.1.

Доказательство. Представим $L_2(0,T) = Q_2(0,T) \oplus P_2(0,T)$, где

$$P_2(0,T) = \{u(t) \in L_2(0,T),\ (u(t), \psi_j(t))_{L_2(0,T)} = 0,\ j = 1, 2 \ldots\}.$$

Условия (4.10) эквивалентны условиям

$$F_2(\psi_j(t)) = \beta_j(T) \quad (j = 1, 2, \ldots). \tag{4.13}$$

Произвольная функция $M(t) \in L_2(0,T)$, определяющая функционал (4.9), удовлетворяющий условиям (4.13), имеет вид $M(t) = M^*(t) + P(t)$, где $P(t) \in P_2(0,T)$, но

$$\|M(t)\|^2_{L_2(0,T)} = \|M^*(t)\|^2_{L_2(0,T)} + \|P(t)\|^2_{L_2(0,T)}.$$

Отсюда $\min \|M(t)\|_{L_2(0,T)} = \|M^*(t)\|_{L_2(0,T)} = m_2(T)$. □

Обозначим через $S(m_2(T))$ множество функционалов вида (4.9), имеющих норму $m_2(T)$, каждый из которых характеризуется функцией $M(t)$. Имеющий единичную норму элемент $e_0(t) = M^*(t)/\|M^*(t)\|_{L_2(0,T)}$ назовем *экстремальным.* Обобщением функционального подхода к задачам оптимального управления, предложенного в монографии [10], на рассматриваемый бесконечномерный случай является следующее из вышесказанного утверждение.

Теорема 4.3 (принцип максимума)**.** *Оптимальный функционал $F_2^*(u)$ вида* (4.9)*, определяемый функцией $M^*(t)$, выделяется из всех функционалов вида* (4.9)*, имеющих ту же норму $m_2(T)$, следующим свойством максимума на экстремальном элементе*:

$$F_2^*(e_0) = \max_{F(u) \in S(m_2(T))} F(e_0).$$

Обозначим через T^* первый положительный корень уравнения $m_(T) = L_1$, существование которого следует из (4.11).

Теорема 4.4. *Решение задачи* 2.2 *дает пара* $(T^*, M^*(t))$, *где $M^*(t)$ определяется формулой* (4.12).

Рассмотрим теперь решение задач 2.3 и 2.4. Запишем произвольный линейный непрерывный функционал в пространстве $L_1(0,T)$ в виде

$$F_1(u) = \int_0^T u(t) M_1(t) dt, \quad \|F_1\| = \|M_1(t)\|_{L_\infty}. \tag{4.14}$$

С учетом (2.3), (4.3), (4.14) задача 2.3 может быть сформулирована как следующая проблема моментов в $L_1(0,T)$.

Задача. *Найти функционал вида* (4.14)*, удовлетворяющий условиям*

$$F_1(\varphi_j(t)) = \alpha_j(T)\ (j = 1, 2, \ldots) \tag{4.15}$$

и имеющий минимальную норму $\|F_1\|_{min} = m_1(T)$.

Отметим, что указанная проблема моментов при конечном числе ограничений (4.15) рассмотрена в [11]. Некоторые результаты [11] могут быть перенесены на рассматриваемый случай.

Обозначим через $Q_1(0,T)$ подпространство $L_1(0,T)$, полученное замыканием в норме пространства $L_1(0,T)$ множества функций вида $u_N(t) = \sum\limits_{j=1}^{N} \xi_j \varphi_j(t),\ \xi = (\xi_1, \xi_2, \ldots) \in l_2$. В силу соотношения $\|u_N(t)\|_{L_1(0,T)} \leqslant T\|u_N(t)\|^2_{L_2(0,T)}$ и неравенства (4.8), $Q_1(0,T)$ является замкнутым линейным подпространством $L_1(0,T)$.

Введем двойственную к проблеме моментов задачу.

Задача. *Найти*

$$\min_{\xi\in l_2}\|\sum_{j=1}^{\infty}\xi_j\varphi_j(t)\|_{L_1(0,T)}=\|\sum_{j=1}^{\infty}\xi_j^*\varphi_j(t)\|_{L_1(0,T)}=\|u^*(t)\|_{L_1(0,T)}=l_1(T)^{-1}\tag{4.16}$$

при условии $\sum\limits_{j=1}^{\infty}\xi_j\alpha_j(T)=1$.

Теорема 4.5. $m_1(T)=l_1(T)$.

Доказательство. Для любых $\xi=(\xi_1,\xi_2,\dots)\in l_2$ и $N>0$ согласно (4.15)

$$|\sum_{j=1}^{N}\xi_j\alpha_j(T)|=|F_1\left(\sum_{j=1}^{N}\xi_j\varphi_j(t)\right)|\leqslant\|F_1\|\;\|\sum_{j=1}^{N}\xi_j\varphi_j(t)\|_{L_1(0,T)}\leqslant\|F_1\|\;\|\sum_{j=1}^{\infty}\xi_j\varphi_j(t)\|_{L_1(0,T)}.$$

Отсюда

$$\|F_1\|^{-1}\leqslant\min_{\xi\in l_2}\|\sum_{j=1}^{\infty}\xi_j\varphi_j(t)\|_{L_1(0,T)}/|\sum_{j=1}^{\infty}\xi_j\alpha_j(T)|=\min_{\xi\in l_2,\sum\limits_{j=1}^{\infty}\xi_j\alpha_j(T)=1}\|\sum_{j=1}^{\infty}\xi_j\varphi_j(t)\|_{L_1(0,T)}.$$

Таким образом, $\|F_1\|\geqslant l_1(T)$ и $m_1(T)\geqslant l_1(T)$.

Определим в $Q_1(0,T)$ функционал

$$\Phi(u)=\Phi\left(\sum_{j=1}^{\infty}\xi_j\varphi_j\right)=\sum_{j=1}^{\infty}\xi_j\alpha_j(T)\quad(\xi=(\xi_1,\xi_2,\dots)\in l_2).$$

Норма $\Phi(u)$ в $Q_1(0,T)$ равна

$$\|\Phi\|=\sup_{u\in Q_1(0,T)}\Phi(u)|/\|u\|_{L_1(0,T)}=\sup_{\xi\in l_2}|\sum_{j=1}^{\infty}\xi_j\alpha_j(T)|/\|\sum_{j=1}^{\infty}\xi_j\varphi_j(t)\|_{L_1(0,T)}=l_1(T).\tag{4.17}$$

Продолжим функционал $\Phi(u)$ на все пространство $L_1(0,T)$ с сохранением нормы (теорема Хана—Банаха, см., например, [9, с. 236]). Этот функционал обозначим $F_1^*(u)$. Соответственно имеем $F_1^*(\varphi_j)=\alpha_j(T)$ $(j=1,2,\dots)$. Следовательно, $m_1(T)=l_1(T)$. ☐

Отсюда на основании (4.14), (4.16) имеем следующее утверждение.

Теорема 4.6. *Решение задачи* 2.3 *дается формулой*

$$M_1^*(t)=l_1(T)\operatorname{sign}(u^*(t)).\tag{4.18}$$

Отметим, что согласно (4.16)

$$|F_1^*(u^*)|=l(T)\|u^*(t)\|_{L_1(0,T)}=1.\tag{4.19}$$

Очевидно, что справедливо и обратное. Если для некоторого элемента $u^*(t)\in Q_1(0,T)$ выполнено (4.19), то для $u^*(t)$ выполнено (4.17) и $u^*(t)$ является решением двойственной задачи.

Пространство $L_1(0,T)$ не является строго нормированным. Поэтому равенство (4.19) и соответственно решение двойственной задачи (4.16) справедливо не для единственного элемента.

Пусть $u^*(t)$ и $v^*(t)$ — решения задачи (4.16). Тогда для функционала $F_1(u)$ вида (4.14), дающего решение проблемы моментов (4.15), в котором $M^*(t)$ определяется согласно (4.18), справедливы на основании (4.17), (4.19) равенства $|F_1(u^*)|=|F_1(v^*)|=1$. Но тогда на основании (4.14) почти всюду $l(T)\operatorname{sign}(u^*(t))=l(T)\operatorname{sign}(v^*(t))$. Таким образом, решение задачи 2.3 единственно.

Обозначим через $S(m_1(T))$ множество функционалов вида (4.14), имеющих норму $m_1(T)$, каждый из которых характеризуется функцией $M_1(t)$. Имеющий единичную норму элемент $e_0(t)=u^*(t)/\|u^*(t)\|_{L_1(0,T)}$ назовем *экстремальным*.

Теорема 4.7 (принцип максимума). *Оптимальный функционал $F_1^*(u)$ вида* (4.14), *определяемый функцией $M_1^*(t)$, выделяется из всех функционалов вида* (4.14), *имеющих ту же норму $m_1(T)$, следующим свойством максимума на любом экстремальном элементе*:

$$F_1^*(e_0)=\max_{M_1(t)\in S(m_1(T))}F_1(e_0).$$

Из (4.16) следует

$$\lim_{T\to 0} m_1(T) = \infty, \quad \lim_{T\to\infty} m_1(T) = 0. \tag{4.20}$$

Обозначим через T^* первый положительный корень уравнения $m_1(T) = L_2$.

Теорема 4.8. *Решение задачи* 2.4 *дает пара* $(T^*, M_1^*(t))$, *где* $M_1^*(t)$ *определяется формулой* (4.18).

Остановимся на практическом вычислении элемента $u^*(t)$. Отметим, что $Q_2(0,T) \subset Q_1(0,T)$. Рассмотрим функцию

$$v^*(t) = M^*(t)/m_2^2(T), \tag{4.21}$$

где $M^*(t), m_2(T)$ определены согласно (4.12). В результате имеем

$$F_1(v^*(t)) = F_1(\sum_{j=1}^{\infty} \beta_j(T)\psi_j(t))/m_2^2(T) = \sum_{j=1}^{\infty} \beta_j^2(T)/m_2^2(T) = 1.$$

Таким образом, $v^*(t)$ является решением (4.14) и $\|v^*(t)\|_{L_1(0,T)} = l^{-1}(T)$. Следовательно,

$$M_1^*(t) = l^{-1}(T)\,\mathrm{sign}(v^*(t)). \tag{4.22}$$

Таким образом, выражения (4.21), (4.22) устанавливают взаимосвязь между решениями задач 2.1 и 2.3. Отметим, что в работе [14] приведены примеры использования изложенной схемы построения решений задачи 2.3. Показано, что функция $M_1^*(t)$ может иметь большое число переключений.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Андрейченко Д. К., Андрейченко К. П.* К теории стабилизации спутников с упругими стержнями// Изв. РАН. Теор. и сист. управ. — 2004. — № 6. — С. 150–163.
2. *Ахиезер Н. И., Глазман И. М.* Теория линейных операторов в гильбертовом пространстве. — М.: Наука, 1966.
3. *Бербюк В. Е.* Динамика и оптимизация робототехнических систем. — Киев: Наукова думка, 1989.
4. *Войтицкий В. И., Злобина М. Ю., Кубышкин Е. П.* О спектральной задаче, возникающей в механике манипуляционных роботов// Модел. и анализ инф. сист. — 2009. — *16*, № 3. — С. 22–28.
5. *Гарнихина М. Ю., Кубышкин Е. П.* Оптимальное управление поворотом твердого тела с наследственно вязкоупругим стержнем// Изв. РАН. Мех. тв. тела. — 2006. — № 5. — С. 29–41.
6. *Зеликин М. И., Манита Л. А.* Накопление переключений управления в задачах с распределенными параметрами// Соврем. мат. Фундам. Направл. — 2006. — *19*. — С. 78–113.
7. *Злочевский С. И., Кубышкин Е. П.* О влиянии колебаний упругих элементов с распределенными массами на ориентацию спутника// Косм. исслед. — 1987. — *25*, № 4. — С. 537–544.
8. *Злочевский С. И., Кубышкин Е. П.* О стабилизации спутника с гибкими стержнями// Косм. исслед. — 1989. — *27*, № 5. — С. 643–651.
9. *Канторович Л. В., Акилов Г. П.* Функциональный анализ. — СПб.: Нев. диалект, 2004.
10. *Красовский Н. Н.* Теория управления движением. — М.: Наука, 1968.
11. *Крейн М. Г., Нудельман А. А.* Проблема моментов Маркова и экстремальные задачи. — М.: Наука, 1973.
12. *Кубышкин Е. П.* Оптимальное управление поворотом твердого тела с гибким стержнем// Прикл. мат. мех. — 1992. — *56*, № 2. — С. 240–249.
13. *Кубышкин Е. П.* Оптимальное управление поворотом системы двух тел, соединенных упругим стержнем// Прикл. мат. мех. — 2014. — *78*, № 5. — С. 656–670.
14. *Кубышкин Е. П., Солодовников П. А.* Об одном алгоритме оптимального управления поворотом твердого диска с упругим стержнем // Динам. сист. — 2016. — *6*, № 2. — С. 95–108.
15. *Кубышкин Е. П., Тряхов М. С.* Оптимальное управление поведением решений начально-краевой задачи, моделирующей вращение твердого тела с упругим стержнем// Модел. и анализ инф. сист. — 2014. — *21*, № 5. — С. 72–92.
16. *Кубышкин Е. П., Хребтюгова О. А.* Обобщенное решение одной начально-краевой задачи, возникающей в механике дискретно-континуальных систем// Модел. и анализ инф. сист. — 2012. — № 1. — С. 84–96.
17. *Ладыженская О. А.* Краевые задачи математической физики. — М.: Наука, 1973.
18. *Михлин С. Г.* Вариационные методы в математической физике. — М.: Наука, 1970.

19. *Русских С. В.* Управляемый поворот космического аппарата с упругими панелями солнечных батарей// Изв. вузов. Сер. Машиностр. — 2016. — *12.* — С. 97–105.
20. *Челомей В. Н. (гл. ред.) и др.* Вибрации в технике. Справочник. Т. 1. — М.: Машиностроение, 1978.
21. *Черноусько Ф. Л., Болотник Н. Н., Градецкий В. Г.* Манипуляционные роботы. — М.: Наука, 1989.
22. *Gugat M.* Controllability of a slowly rotating Timoshenko beam// ESAIM Control Optim. Calc. Var. — 2001. — *6.* — С. 333–360.
23. *Krabs W., Sklyar G. M.* On the stabilizability of a slowly rotating Timoshenko beam// Z. Anal. Anwend. — 2000. — *19.* № 1. — С. 131–145.
24. *Krabs W., Sklyar G. M., Wozniak J.* On the set of reachable states in the problem of controllability of rotating Timoshenko beams// J. Anal. Appl. — 2003. — *22*, № 1. — С. 215–228.
25. *Sakawa Y., Ito R., Fujii N.* Optimal control of rotation of a flexible arm// В сб.: «Control Theory for Distributed Parameter Systems and Applications». — 1983. — С. 175–187.

Е. П. Кубышкин
Ярославский государственный университет им. П. Г. Демидова, Ярославль, Россия
E-mail: kubysh.t@yandex.ru

DOI: 10.22363/2413-3639-2022-68-3-488-508 UDC 517.2+531.38

Optimal Control of the Behavior of Solutions to an Initial-Boundary Value Problem Arising in the Mechanics of Discrete-Continuum Systems

© 2022 **E. P. Kubyshkin**

REFERENCES

1. D. K. Andreychenko and K. P. Andreychenko, "K teorii stabilizatsii sputnikov s uprugimi sterzhnyami" [On the theory of stabilization of satellites with elastic rods], *Izv. RAN. Teor. i sist. uprav.* [Bull. Russ. Acad. Sci. Ser. Theor. Control Syst.], 2004, No. 6, 150–163 (in Russian).
2. N. I. Akhiezer and I. M. Glazman, *Teoriya lineynykh operatorov v gil'bertovom prostranstve* [Theory of Linear Operators in Hilbert Space], Nauka, Moscow, 1966 (in Russian).
3. V. E. Berbyuk, *Dinamika i optimizatsiya robototekhnicheskikh sistem* [Dynamics and Optimization of Robotic Systems], Naukova dumka, Kiev, 1989 (in Russian).
4. V. I. Voytitsky, M. Yu. Zlobina, and E. P. Kubyshkin, "O spektral'noy zadache, voznikayushchey v mekhanike manipulyatsionnykh robotov" [On the spectral problem arising in the mechanics of manipulation robots], *Model. i analiz inf. sist.* [Model. Anal. Inform. Syst.], 2009, **16**, No. 3, 22–28 (in Russian).
5. M. Yu. Garnikhina and E. P. Kubyshkin, "Optimal'noe upravlenie povorotom tverdogo tela s nasledstvenno vyazkouprugim sterzhnem" [Optimal control of the rotation of a rigid body with a hereditarily viscoelastic rod], *Izv. RAN. Mekh. tv. tela* [Bull. Russ. Acad. Sci. Ser. Solid Mech.], 2006, No. 5, 29–41 (in Russian).
6. M. I. Zelikin and L. A. Manita, "Nakoplenie pereklyucheniy upravleniya v zadachakh s raspredelennymi parametrami" [Accumulation of switchings in distributed parameter problems], *Sovrem. mat. Fundam. Napravl.* [Contemp. Math. Fundam. Directions], 2006, **19**, 78–113 (in Russian).
7. S. I. Zlochevskiy and E. P. Kubyshkin, "O vliyanii kolebaniy uprugikh elementov s raspredelennymi massami na orientatsiyu sputnika" [On the influence of oscillations of elastic elements with distributed masses on satellite orientation], *Kosm. issled.* [Cosmic Research], 1987, **25**, No. 4, 537–544 (in Russian).
8. S. I. Zlochevskiy and E. P. Kubyshkin, "O stabilizatsii sputnika s gibkimi sterzhnyami" [On the stabilization of a satellite with flexible rods], *Kosm. issled.* [Cosmic Research], 1989, **27**, No. 5, 643–651 (in Russian).

9. L. V. Kantorovich and G. P. Akilov, *Funktsional'nyy analiz* [Functional Analysis], Nev. dialekt, Saint Petersburg, 2004 (in Russian).
10. N. N. Krasovskii, *Teoriya upravleniya dvizheniem* [Motion Control Theory], Nauka, Moscow, 1968 (in Russian).
11. M. G. Kreyn and A. A. Nudel'man, *Problema momentov Markova i ekstremal'nye zadachi* [The Markov moment problem and extremal problems], Nauka, Moscow, 1973 (in Russian).
12. E. P. Kubyshkin, "Optimal'noe upravlenie povorotom tverdogo tela s gibkim sterzhnem" [Optimal control of the rotation of a rigid body with a flexible rod], *Prikl. mat. mekh.* [Appl. Math. Mech.], 1992, **56**, No. 2, 240–249 (in Russian).
13. E. P. Kubyshkin, "Optimal'noe upravlenie povorotom sistemy dvukh tel, soedinennykh uprugim sterzhnem" [Optimal control of the rotation of a system of two bodies connected by an elastic rod], *Prikl. mat. mekh.* [Appl. Math. Mech.], 2014, **78**, No. 5, 656–670 (in Russian).
14. E. P. Kubyshkin and P. A. Solodovnikov, "Ob odnom algoritme optimal'nogo upravleniya povorotom tverdogo diska s uprugim sterzhnem" [On one algorithm for optimal control of the rotation of a rigid disk with an elastic rod], *Dinam. sist.* [Dynam. Syst.], 2016, **6**, No. 2, 95–108 (in Russian).
15. E. P. Kubyshkin and M. S. Tryakhov, "Optimal'noe upravlenie povedeniem resheniy nachal'no-kraevoy zadachi, modeliruyushchey vrashchenie tverdogo tela s uprugim sterzhnem" [Optimal control of the behavior of solutions of the initial-boundary value problem modeling the rotation of a rigid body with an elastic rod], *Model. i analiz inf. sist.* [Model. Anal. Inform. Syst.], 2014, **21**, No. 5, 72–92 (in Russian).
16. E. P. Kubyshkin and O. A. Khrebtyugova, "Obobshchennoe reshenie odnoy nachal'no-kraevoy zadachi, voznikayushchey v mekhanike diskretno-kontinual'nykh sistem" [Generalized solution of one initial-boundary value problem arising in the mechanics of discrete-continuous systems], *Model. i analiz inf. sist.* [Model. Anal. Inform. Syst.], 2012, No. 1, 84–96 (in Russian).
17. O. A. Ladyzhenskaya, *Kraevye zadachi matematicheskoy fiziki* [Boundary-Value Problems of Mathematical Physics], Nauka, Moscow, 1973 (in Russian).
18. S. G. Mikhlin, *Variatsionnye metody v matematicheskoy fizike* [Variational Methods in Mathematical Physics], Nauka, Moscow, 1970 (in Russian).
19. S. V. Russkikh, "Upravlyaemyy povorot kosmicheskogo apparata s uprugimi panelyami solnechnykh batarey" [Controlled rotation of a spacecraft with elastic solar panels], *Izv. vuzov. Ser. Mashinostr.* [Bull. Higher Edu. Inst. Ser. Engineering], 2016, **12**, 97–105 (in Russian).
20. V. N. Chelomey (gl. red.) i dr., *Vibratsii v tekhnike. Spravochnik. T. 1* [Vibrations in technology. Handbook. Vol. 1], Mashinostroenie, Moscow, 1978 (in Russian).
21. F. L. Chernous'ko, N. N. Bolotnik, and V. G. Gradetskiy, *Manipulyatsionnye roboty* [Manipulation Robots], Nauka, Moscow, 1989 (in Russian).
22. M. Gugat, "Controllability of a slowly rotating Timoshenko beam," *ESAIM Control Optim. Calc. Var.*, 2001, **6**, 333–360.
23. W. Krabs and G. M. Sklyar, "On the stabilizability of a slowly rotating Timoshenko beam," *Z. Anal. Anwend.*, 2000, **19**. No. 1, 131–145.
24. W. Krabs, G. M. Sklyar, and J. Wozniak, "On the set of reachable states in the problem of controllability of rotating Timoshenko beams," *J. Anal. Appl.*, 2003, **22**, No. 1, 215–228.
25. Y. Sakawa, R. Ito, and N. Fujii, "Optimal control of rotation of a flexible arm," In: *Control Theory for Distributed Parameter Systems and Applications*, 1983, pp. 175–187.

E. P. Kubyshkin
Demidov Yaroslavl' State University, Yaroslavl', Russia
E-mail: kubysh.t@yandex.ru