

ТОПОЛОГИЧЕСКАЯ СОПРЯЖЕННОСТЬ ГРАДИЕНТНО-ПОДОБНЫХ ПОТОКОВ НА ПОВЕРХНОСТЯХ И ЭФФЕКТИВНЫЕ АЛГОРИТМЫ ЕЕ РАЗЛИЧЕНИЯ

© 2022 г. В. Е. КРУГЛОВ, О. В. ПОЧИНКА

Аннотация. Градиентно-подобные потоки на поверхностях имеют простую динамику, что вдохновляло многих математиков на поиски инвариантов их топологической эквивалентности. В предположениях различной общности на рассматриваемый класс градиентно-подобных потоков, были получены такие классические инварианты, как схема Леонтович—Майера, граф Пейшото, оснащенный граф Пейшото, двуцветный граф Вонга, трехцветный граф Ошемкова—Шарко, круговая схема Флейтас и др. Таким образом, проблема классификации градиентно-подобных потоков на поверхностях с точки зрения топологической эквивалентности решена исчерпывающим образом. В недавних работах В. Е. Круглова, Д. С. Малышева, О. В. Починки доказано, что для градиентно-подобных потоков классы топологической эквивалентности совпадают с классами топологической сопряженности. Полученный результат позволяет использовать для топологической сопряженности градиентно-подобных потоков любые инварианты их эквивалентности. Настоящее исследование является обзором результатов по топологической сопряженности градиентно-подобных потоков на поверхностях и эффективным алгоритмам ее различения, т. е. алгоритмам, время работы которых ограничено некоторым полиномом от длины входной информации.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Введение	468
1. Необходимые сведения из теории потоков на многообразиях	468
1.1. Общие понятия непрерывных динамических систем	468
1.2. Гиперболические неподвижные точки	469
1.3. Гиперболические периодические орбиты	469
1.4. Структурно устойчивые и Ω -устойчивые потоки	469
2. Топологическая сопряженность градиентно-подобных потоков на поверхностях	470
2.1. Динамика градиентно-подобных потоков	470
2.2. Отсутствие модулей топологической сопряженности	471
3. Эффективные алгоритмы различения эквивалентности (сопряженности) градиентно-подобных потоков на поверхностях	474
3.1. Необходимые сведения из теории графов и алгоритмов	474
3.2. Граф Пейшото	474
3.3. Модифицированный граф Пейшото	478
3.4. Граф Вонга	480
3.5. Круговая схема Флейтас	481
3.6. Трехцветный граф Ошемкова—Шарко	483
Список литературы	485



ВВЕДЕНИЕ

Напомним, что потоки $f^t, f^{t'}: M \rightarrow M$ на многообразии M называются *топологически эквивалентными*, если существует гомеоморфизм $h: M \rightarrow M$, отображающий траектории потока f^t в траектории потока $f^{t'}$ с сохранением направления движения по траекториям. Два потока называются *топологически сопряженными*, если выполняется условие $hf^t = f^{t'}h, t \in \mathbb{R}$; это означает, что h отображает траектории в траектории, сохраняя не только направление, но и время движения по траекториям.

Первые результаты в этой области восходят к классической работе А. А. Андронова и Л. С. Понтрягина [1] 1937 года. Они рассмотрели систему дифференциальных уравнений, заданных в компактной части плоскости, ограниченной кривой без контакта. Для таких систем ими было введено понятие грубости, получен критерий грубости и доказана всюду плотность грубых систем среди всех систем в компактной части плоскости. Согласно критерию Андронова—Понтрягина система является грубой тогда и только тогда, когда ее неблуждающее множество состоит из конечного числа гиперболических неподвижных точек, конечного числа гиперболических периодических орбит, и не имеет связок.

Основной трудностью в обобщении этого результата на случай произвольных ориентируемых поверхностей положительного рода является возможность нового типа движения — незамкнутая рекуррентная траектория. Отсутствие таких траекторий для грубых потоков без особенностей на 2-торе была доказана А. Г. Майером [4] в 1939 году. В работах [13, 14] М. Пейшото ввел эквивалентное грубости понятие структурной устойчивости, снимающее требование близости к тождественному гомеоморфизму, осуществляющего эквивалентность близких систем. Он доказал, что критерий грубости Андронова—Понтрягина дословно переносится на потоки, заданные на произвольных поверхностях. Выделенный класс векторных полей был назван классом *векторных полей Морса—Смейла* после того как в 1967 году С. Смейл [18] обобщил свойства грубых систем Андронова—Понтрягина на случай произвольной размерности.

Напомним, что поток Морса—Смейла называется *градиентно-подобным*, если его неблуждающее множество не содержит периодических орбит. Такие потоки имеют наиболее простую динамику, что вдохновляло многих математиков на поиски инвариантов их топологической эквивалентности. В предположениях различной общности на рассматриваемый класс градиентно-подобных потоков были получены следующие инварианты: схема Леонтович—Майера (Е. А. Леонтович, А. Г. Майер) [2, 3], граф Пейшото (М. Пейшото) [15], оснащенный граф Пейшото (В. З. Гринес, О. В. Починка) [8], двуцветный граф (К. Вонг) [19], трехцветный граф (А. Ошемков, В. Шарко) [5], круговая схема (Г. Флейтас) [7].

Таким образом, проблема классификации градиентно-подобных потоков на поверхностях с точки зрения топологической эквивалентности решена исчерпывающим образом. В работах [10, 11] доказано, что для градиентно-подобных потоков классы топологической эквивалентности совпадают с классами топологической сопряженности. Полученный результат позволяет использовать для топологической сопряженности градиентно-подобных потоков любые инварианты их эквивалентности. В работе [11] также построены эффективные алгоритмы различения для перечисленных комбинаторных инвариантов градиентно-подобных потоков на поверхностях, т. е. алгоритмы, ограниченные некоторым полиномом от длины входной информации.

Настоящее исследование является обзором результатов по топологической сопряженности градиентно-подобных потоков на поверхностях и эффективным алгоритмам ее различения.

1. НЕОБХОДИМЫЕ СВЕДЕНИЯ ИЗ ТЕОРИИ ПОТОКОВ НА МНОГООБРАЗИЯХ

1.1. Общие понятия непрерывных динамических систем. Пусть M — гладкое замкнутое n -многообразие с метрикой d . *Гладким потоком* на M называется гладкое отображение $\phi: M \times \mathbb{R} \rightarrow M$ с групповыми свойствами:

- 1) $\phi(x, 0) = x \quad \forall x \in M$;
- 2) $\phi(\phi(x, t), s) = \phi(x, t + s) \quad \forall x \in M, \forall s, t \in \mathbb{R}$.

В дальнейшем будем использовать обозначение $\phi^t(x) = \phi(x, t), x \in M, t \in \mathbb{R}$. Заметим, что при фиксированном $t \in \mathbb{R}$ отображение $\phi^t: M \rightarrow M$ является диффеоморфизмом, поэтому поток еще называют однопараметрической группой диффеоморфизмов, действующих на многообразии M .

Траекторией или *орбитой* точки $x \in M$ называется множество $\mathcal{O}_x = \{\phi^t(x), t \in \mathbb{R}\}$. Любая орбита потока либо состоит из одной точки, и в этом случае эта точка называется *неподвижной*, либо гомеоморфна окружности, и в этом случае любая точка орбиты называется *периодической*, либо является инъективно иммерсированной прямой. Полагают, что все траектории потока, отличные от неподвижной точки, ориентированы в соответствии с возрастанием параметра t . С каждым потоком $\phi^t: M \rightarrow M$ связано касающееся траекторий потока векторное поле

$$\dot{x} = \left. \frac{\partial \phi(x, t)}{\partial t} \right|_{t=0} = F(x).$$

Два потока $\phi^t: M \rightarrow M$ и $\phi'^t: M' \rightarrow M'$ называются *топологически эквивалентными*, если существует гомеоморфизм $h: M \rightarrow M'$, переводящий траектории потока ϕ^t в траектории потока ϕ'^t с сохранением ориентации. Если при этом гомеоморфизм h обладает свойством $h\phi^t = \phi'^t h$ для любого $t \in \mathbb{R}$, то потоки называются *топологически сопряженными*.

1.2. Гиперболические неподвижные точки. Пусть $p \in M$ — неподвижная точка потока $\phi^t: M \rightarrow M$. *Устойчивым* и *неустойчивым*, соответственно, многообразием неподвижной точки p называются множества

$$W_p^s = \{x \in M : d(p, \phi^t(x)) \rightarrow 0 \text{ при } t \rightarrow +\infty\} \text{ и}$$

$$W_p^u = \{x \in M : d(p, \phi^t(x)) \rightarrow 0 \text{ при } t \rightarrow -\infty\}.$$

Устойчивой (*неустойчивой*) *сепаратрисой* неподвижной точки p называется компонента линейной связности множества $W_p^s \setminus p$ ($W_p^u \setminus p$).

С неподвижной точкой потока помимо касательного векторного поля $\dot{x} = F(x)$ связано *линеаризованное векторное поле*

$$\dot{x} = A(x - p),$$

где A — матрица частных производных отображения $F(x)$ в точке p (матрица Якоби). Неподвижная точка p потока ϕ^t называется *гиперболической*, если собственные значения матрицы A не имеют нулевых действительных частей.

Напомним, что неподвижная точка p диффеоморфизма $f: M \rightarrow M$ называется *гиперболической*, если матрица частных производных отображения $f(x)$ в точке p (матрица Якоби) не имеет собственных значений по модулю равных единице.

1.3. Гиперболические периодические орбиты. Пусть \mathfrak{c} — замкнутая траектория потока $\phi^t: M \rightarrow M$. *Устойчивым* и *неустойчивым*, соответственно, многообразием замкнутой траектории \mathfrak{c} называются множества

$$W_{\mathfrak{c}}^s = \{x \in M : \min_{p \in \mathfrak{c}} d(p, \phi^t(x)) \rightarrow 0 \text{ при } t \rightarrow +\infty\} \text{ и}$$

$$W_{\mathfrak{c}}^u = \{x \in M : \min_{p \in \mathfrak{c}} d(p, \phi^t(x)) \rightarrow 0 \text{ при } t \rightarrow -\infty\}.$$

Пусть $p \in \mathfrak{c}$ и Σ_p — $(n-1)$ -мерный диск, трансверсальный в точке p вектору, касательному к периодической траектории, называемый *секущей Пуанкаре*. Тогда в некоторой окрестности $V_p \subset \Sigma_p$ точки p для каждой точки $x \in V_p$ существует значение $\tau_x > 0$ такое, что $\phi^{\tau_x}(x) \in \Sigma_p$ и $\phi^t(x) \notin \Sigma_p$ для любого $0 < t < \tau_x$. Отображение $f: V_p \rightarrow \Sigma_p$, определенное формулой $f(x) = \phi^{\tau_x}(x)$, $x \in V_p$, называется *отображением последования*, или *отображением Пуанкаре*.

Заметим, что точка p является неподвижной точкой отображения последования. Периодическая траектория \mathfrak{c} называется *гиперболической*, если точка p является гиперболической неподвижной точкой отображения Пуанкаре $f: V_p \rightarrow F_p(V_p)$.

1.4. Структурно устойчивые и Ω -устойчивые потоки. Точка $x \in M$ называется *блуждающей точкой* потока $\phi^t: M \rightarrow M$, если существует открытая окрестность U_x точки x такая, что $\phi^t(U_x) \cap U_x = \emptyset$ для всех $t > 1$. В противном случае точка x называется *неблуждающей*. Множество всех неблуждающих точек потока ϕ^t называется его *неблуждающим множеством* и обозначается Ω_{ϕ^t} .

Поток $\phi^t: M \rightarrow M$ называется *Ω -устойчивым*, если существует окрестность $U(\phi^t)$ потока ϕ^t в пространстве $C^1(S \times \mathbb{R}, S)$ с C^1 -топологией такая, что если $\phi'^t \in U(\phi^t)$, то потоки $\phi^t|_{\Omega_{\phi^t}}$ и $\phi'^t|_{\Omega_{\phi'^t}}$ топологически эквивалентны.

Поток $\phi^t: M \rightarrow M$ называется *структурно устойчивым*, если существует окрестность $U(\phi^t)$ потока ϕ^t в пространстве $C^1(S \times \mathbb{R}, S)$ с C^1 -топологией такая, что если $\phi^{t'} \in U(\phi^t)$, то потоки ϕ^t и $\phi^{t'}$ топологически эквивалентны.

Поток называется *поток Морса—Смейла*, если его неблуждающее множество состоит конечного числа гиперболических неподвижных точек и конечного числа гиперболических периодических орбит, чьи устойчивые и неустойчивые многообразия пересекаются трансверсально. Поток Морса—Смейла без периодических орбит называется *градиентно-подобным* потоком.

В силу результатов [1, 13, 14] поток на поверхности является структурно устойчивым тогда и только тогда, когда он является потоком Морса—Смейла. Условие трансверсальности на поверхности означает, что у потока отсутствуют *связки* — траектории, соединяющие седловые точки.

Из критерия Ω -устойчивости [16] следует, что неблуждающее множество Ω -устойчивого потока на поверхности состоит из конечного числа гиперболических периодических орбит и неподвижных точек, при этом последние не образуют *циклов* (см. рис. 1), т. е. наборов неподвижных точек

$$p_1, \dots, p_k, p_{k+1} = p_1$$

со свойством

$$W_{p_i}^s \cap W_{p_{i+1}}^u \neq \emptyset, \quad i = 1, \dots, k.$$

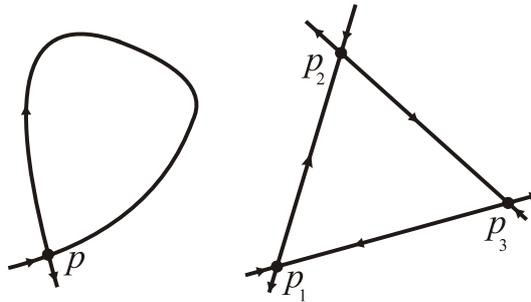


Рис. 1. Примеры циклов
FIG. 1. Examples of cycles

2. ТОПОЛОГИЧЕСКАЯ СОПРЯЖЕННОСТЬ ГРАДИЕНТНО-ПОДОВНЫХ ПОТОКОВ НА ПОВЕРХНОСТЯХ

2.1. Динамика градиентно-подобных потоков. Пусть f^t — градиентно-подобный поток, заданный на поверхности S . Следующее предложение является локальной классификацией гиперболических неподвижных точек потока на поверхности с точностью до топологической сопряженности.

Предложение 2.1 (см. [6, теорема 5.1, гл. 2], [17, теорема 7.1, гл. 4] и [10, лемма 1]).

Пусть p — неподвижная гиперболическая точка потока $f^t: S \rightarrow S$. Тогда существует окрестность $u_p \subset S$ точки p и гомеоморфизм на образ $\psi_p: u_p \rightarrow \mathbb{R}^2$ такой, что поток $f^t|_{u_p}$ топологически сопряжен с одним из следующих потоков:

$$\begin{aligned} a_0^t(x, y) &= (2^{-t}x, 2^{-t}y), \\ a_1^t(x, y) &= (2^{-t}x, 2^t y), \\ a_2^t(x, y) &= (2^t x, 2^t y), \end{aligned}$$

т. е. $\psi_p \circ f^t|_{u_p} = a_i^t \circ \psi_p|_{u_p}$ для любого t , не выводящего точки за пределы u_p .

В случае сопряжения с потоком a_0^t, a_1^t, a_2^t неподвижная точка p называется *стоком*, *седлом*, *источником*, соответственно (см. рис. 2). Будем обозначать через $\Omega_{f^t}^0, \Omega_{f^t}^1, \Omega_{f^t}^2$ множества всех стоков, седел, источников потока f^t , соответственно.

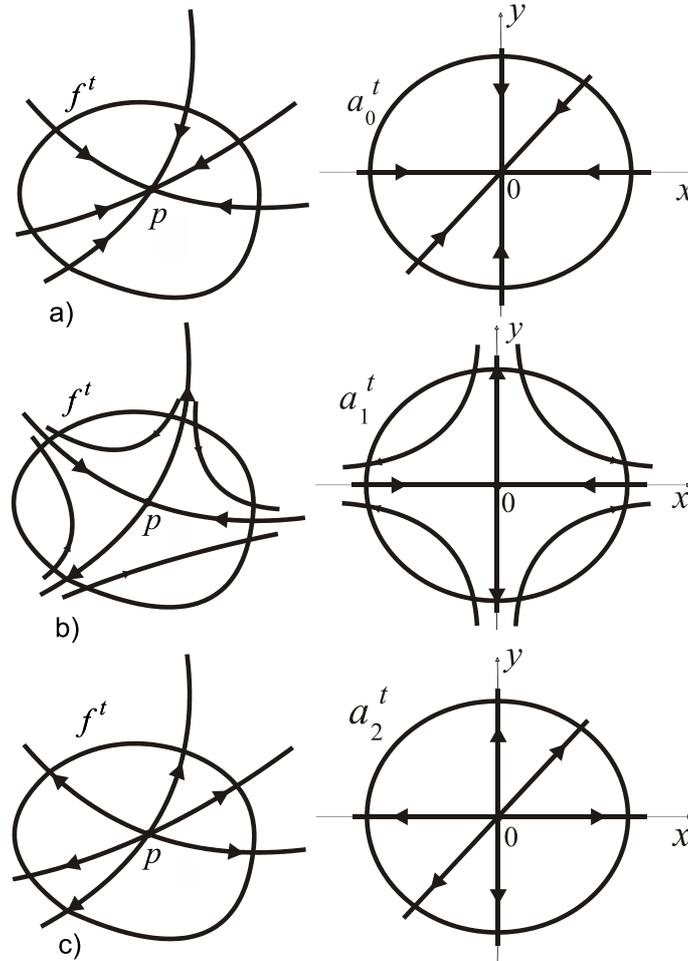


РИС. 2. Классификация в окрестности гиперболических неподвижных точек: а) сток, б) седло, в) источник

FIG. 2. Classification in the neighborhood of hyperbolic fixed points: a) sink, b) saddle, c) source

Предложение 2.2 (см. [18, следствие 5.3]). Пусть $f^t: S \rightarrow S$ — градиентно-подобный поток. Тогда:

- 1) $S = \bigcup_{p \in \Omega_{ft}} W_p^u = \bigcup_{p \in \Omega_{ft}} W_p^s$;
- 2) W_p^u (W_p^s) является гладким подмногообразием многообразия S , диффеоморфным \mathbb{R}^i (\mathbb{R}^{2-i}) для любой неподвижной точки $p \in \Omega_{ft}^i$;
- 3) для любой неустойчивой (устойчивой) сепаратрисы l_σ^u (l_σ^s) седловой точки σ существует сток ω (источник α) такой, что $\text{cl}(l_\sigma^u) \setminus (l_\sigma^u) = \{\sigma, \omega\}$ ($\text{cl}(l_\sigma^s) \setminus (l_\sigma^s) = \{\sigma, \alpha\}$);
- 4) для любого стока ω (источника α) существует хотя бы одна седловая точка σ с неустойчивой (устойчивой) сепаратрисой l_σ^u (l_σ^s) такой, что $\text{cl}(l_\sigma^u) \setminus (l_\sigma^u) = \{\sigma, \omega\}$ ($\text{cl}(l_\sigma^s) \setminus (l_\sigma^s) = \{\sigma, \alpha\}$).

2.2. Отсутствие модулей топологической сопряженности. В этом разделе мы доказываем факт о совпадении классов эквивалентности и топологической сопряженности для градиентно-подобных потоков на поверхности.

Теорема 2.1 (см. [11, теорема 7]). Градиентно-подобные потоки на замкнутой поверхности топологически сопряжены тогда и только тогда, когда они топологически эквивалентны.

Доказательство. Необходимость условий теоремы очевидна, докажем их достаточность. Пусть S — замкнутая поверхность и $f^t: S \rightarrow S$ — градиентно-подобный поток. Согласно пункту 1 предложения 2.2, замыкание любой блуждающей орбиты ℓ потока f^t состоит из двух различных неподвижных точек p, q :

$$\text{cl}(\ell) \setminus \ell = \{p, q\}.$$

Поэтому обозначим эту траекторию через $\ell_{p,q}$, предполагая, что она направлена от p к q . Пусть f'^t — градиентно-подобный поток, топологически эквивалентный потоку f^t , т. е. существует гомеоморфизм $h: S \rightarrow S$, переводящий траектории потока f^t в траектории потока f'^t и сохраняющий ориентации траекторий. В том числе h переводит неподвижные точки потока f^t в неподвижные точки потока f'^t , поэтому будем обозначать $p' = h(p)$ для $p \in \Omega_{f^t}$, $p' \in \Omega_{f'^t}$. Тогда

$$h(\ell_{pq}) = \ell'_{p'q'}$$

для каждой блуждающей траектории ℓ_{pq} потока f^t .

В силу предложения 2.1 потоки f^t, f'^t в некоторых окрестностях $u_p, u_{p'}$ точек p, p' , соответственно, топологически сопряжены посредством некоторого гомеоморфизма $h_p: u_p \rightarrow u_{p'}$. Пусть

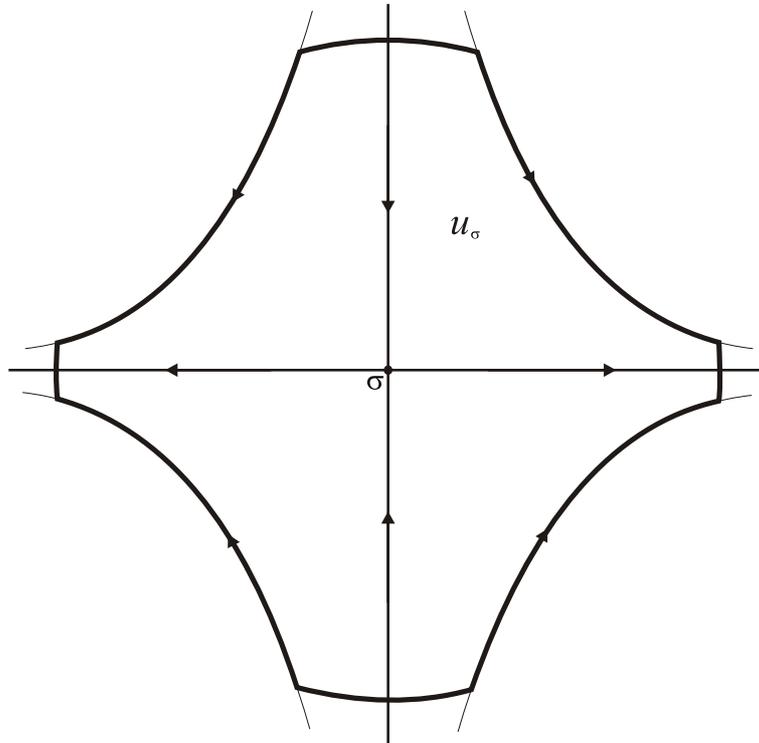


Рис. 3. Окрестность u_σ седла σ
 FIG. 3. Neighborhood u_σ of the saddle σ

σ — седловая точка потока f^t . Не уменьшая общности, будем полагать, что окрестность u_σ выбрана так, что ее граница состоит из четырех отрезков траекторий и четырех отрезков секущих (см. рис. 3), и отображение $h^{-1}h_\sigma$ сохраняет сепаратрисы седла σ .

Для точки $x \in S$ обозначим через \mathcal{O}_x (\mathcal{O}'_x) траекторию потока f^t (f'^t), проходящую через точку x . Положим

$$V_\sigma = \bigcup_{x \in \text{cl}(u_\sigma)} \mathcal{O}_x, \quad V_{\sigma'} = \bigcup_{x \in \text{cl}(u_{\sigma'})} \mathcal{O}'_x.$$

Продолжим h_σ до гомеоморфизма $h_{V_\sigma}: V_\sigma \rightarrow V_{\sigma'}$ по следующему правилу (см. рис. 4). Во-первых,

$$h_{V_\sigma}|_{u_\sigma} = h_\sigma.$$

Во-вторых, для точки $z \in (\text{int}V_\sigma \setminus \text{cl}(u_\sigma))$ положим $\{z_0\} = \mathcal{O}_z \cap \partial u_\sigma$ и $f^{t_z}(z_0) = z$, для $t_z \in \mathbb{R}$; для точки $z \in \partial V_\sigma \setminus \partial u_\sigma$ положим t_z таким, что $|t_z| = \min\{t \in \mathbb{R} \mid f^{-t}(z) \in \partial u_\sigma\}$ и $z_0 = f^{-t_z}(z)$; тогда

$$h_{V_\sigma}(z) = f^{t_z}(h_\sigma(z_0)).$$

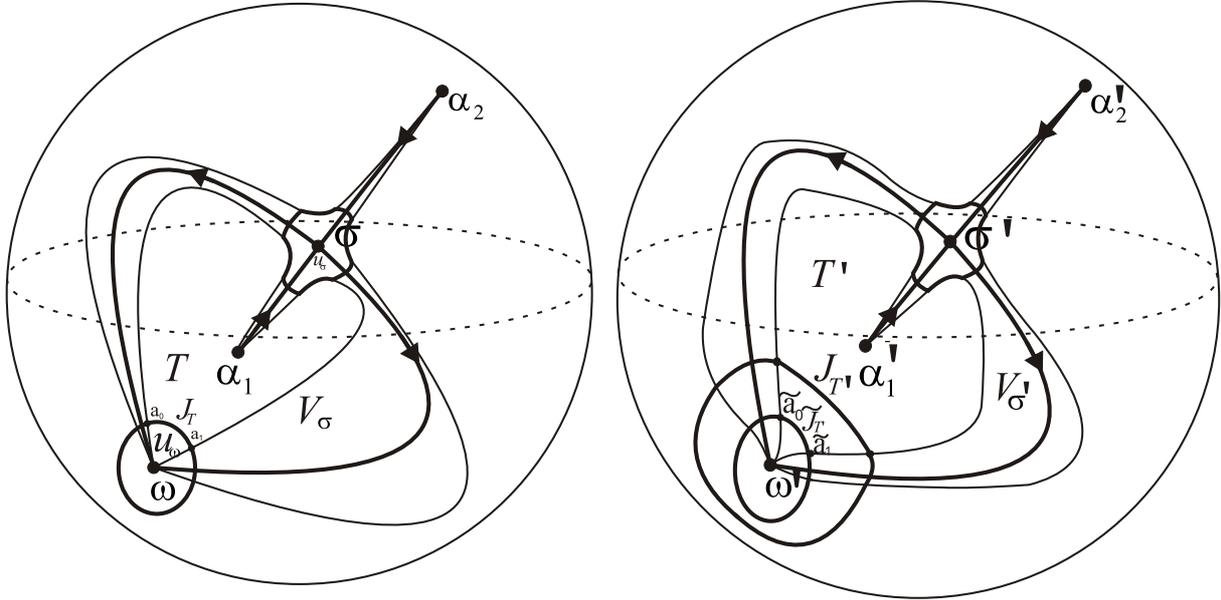


Рис. 4. Построение сопрягающего гомеоморфизма
 FIG. 4. Construction of a conjugating homeomorphism

Пусть V (V') — объединение всех V_σ ($V_{\sigma'}$) и $h_V: V \rightarrow V'$ — гомеоморфизм, составленный из гомеоморфизмов h_{V_σ} . Продолжим гомеоморфизм h_V до объемлющего сопрягающего гомеоморфизма. Для этого заметим, что замыкание T любой компоненты связности множества $S \setminus (V \cup \Omega_{f^t})$ принадлежит бассейну некоторого стока ω . Поскольку гомеоморфизм $h^{-1}h_\sigma$ сохраняет сепаратрисы седел, то существует замыкание $T' \subset W_{\omega'}^s$, единственной компоненты связности множества $S \setminus (V' \cup \Omega_{f^{t'}}$) такой, что $h(T) \cap T' \neq \emptyset$. Продолжим h_V на T посредством сопрягающего гомеоморфизма h_T .

В силу предложения 2.1 потоки $f^t, f^{t'}$ в некоторых окрестностях $u_\omega, u_{\omega'}$ точек ω, ω' , соответственно, топологически сопряжены посредством некоторого гомеоморфизма $h_\omega: u_\omega \rightarrow u_{\omega'}$. Пусть $\gamma \subset u_\omega$ — кривая, ограничивающая на u_ω диск, содержащий ω и $\gamma' = h_\omega(\gamma)$. Пусть $J_T = \gamma \cap T$ и a_0, a_1 — концы дуги J_T . Тогда существуют седловые точки σ_0, σ_1 (возможно, $\sigma_0 = \sigma_1$) такие, что $a_i \in (J_T \cap V_{\sigma_i}), i = 0, 1$. Аналогично, дуга $\tilde{J}_{T'} = \gamma' \cap T'$ ограничена точками \tilde{a}_0, \tilde{a}_1 , принадлежащими $V_{\sigma'_0}, V_{\sigma'_1}$, соответственно. Пусть $t_0, t_1 \in \mathbb{R}$ так, что $f^{t_i}(\tilde{a}_i) = h_V(a_i), i = 0, 1$, и $\rho: \tilde{J}_{T'} \rightarrow [0, 1]$ — гомеоморфизм такой, что $\rho(\tilde{a}_i) = i, i = 0, 1$. Пусть

$$J_{T'} = \{f^{t_z}(\tilde{z}) \mid \tilde{z} \in \tilde{J}_{T'}, t_z = t_0 + (t_1 - t_0)\rho(\tilde{z})\}.$$

Определим произвольный гомеоморфизм $h_J: J_T \rightarrow J_{T'}$ так, что $h_J(a_i) = h_V(a_i), i = 0, 1$. Тогда каждая точка z множества T единственным образом определена точкой $z_0 = \mathcal{O}_z \cap J_T$ и значением $t_z \in \mathbb{R}$ таким, что $f^{t_z}(z_0) = z$. Определим гомеоморфизм $h_T: T \rightarrow T'$ по формуле

$$h_T(f^{t_z}(z_0)) = f^{t_z}(h_J(z_0)).$$

Наконец, определим сопрягающий гомеоморфизм $H: S \rightarrow S$ так, что $H|_V = h_V, H|_T = h_T$, и $H|_{\Omega_{f^t}} = h|_{\Omega_{f^t}}$. \square

Таким образом, для градиентно-подобных потоков на поверхностях классы топологической эквивалентности совпадают с классами топологической сопряженности, что позволяет использовать

для топологической сопряженности градиентно-подобных потоков любые инварианты их эквивалентности.

3. ЭФФЕКТИВНЫЕ АЛГОРИТМЫ РАЗЛИЧЕНИЯ ЭКВИВАЛЕНТНОСТИ (СОПРЯЖЕННОСТИ) ГРАДИЕНТНО-ПОДОБНЫХ ПОТОКОВ НА ПОВЕРХНОСТЯХ

3.1. Необходимые сведения из теории графов и алгоритмов. В данном разделе мы приводим общие сведения из теории графов и алгоритмов. Напомним, что *конечным графом* Γ называется упорядоченная пара (V, E) , где

- V — непустое множество *вершин*;
- E — множество пар вершин, называемых *ребрами*.

Каждую из вершин a, b ребра ab называют *инцидентной* ребру ab и говорят, что вершины a, b соединены ребром ab . *Валентностью* вершины называется число инцидентных ей ребер. Если ребра представляют из себя упорядоченные пары вершин, то граф называется *ориентированным*. Граф называется *связным*, если любые две его вершины b_0, b_k можно соединить *путем*, т. е. последовательностью $b_0, b_0b_1, b_1, \dots, b_{k-1}, b_{k-1}b_k, b_k$, при этом k — *длина пути*. Если начало и конец пути совпадают, то путь называют *циклом*. Если обе вершины ребра совпадают, то ребро называется *петлей*. *Подграфом* графа Γ называется пара (\tilde{V}, \tilde{E}) , где $\tilde{V} \subset V, \tilde{E} \subset E$.

Назовем *k-подразбиением* ребра $e = ab$ операцию, в ходе которой ребро e удаляется из графа, и на его место добавляются новые вершины c_1, c_2, \dots, c_k с ребрами $ac_1, c_1c_2, \dots, c_{k-1}c_k, c_kb$. Назовем *k*-подразбиением* ребра $e = ab$ операцию, в ходе которой ребро e удаляется из графа, и на его место добавляются новые вершины c_1, c_2, \dots, c_k, d с ребрами $ac_1, c_1c_2, \dots, c_{k-1}c_k, c_kb, c_1d$.

Конечным мультиграфом Γ называется граф, для которого множество ребер E допускает включение одного и того же элемента по несколько раз. Для краткости будем называть мультиграф также просто *графом*. Граф Γ называется *n-цветным*, если множество его ребер является объединением n подмножеств, каждое из которых состоит из ребер одного и того же определенного цвета.

Граф называется *простым*, если он не содержит петель и кратных ребер. Граф называется *планарным*, если существует его вложение в плоскость. Если существует вложение графа в поверхность, то граф называется *вложимым в поверхность*. Граф называется *двудольным* или *биграфом*, если множество его вершин можно разбить на две части таким образом, что не существует ребра, соединяющего две вершины из одной и той же части.

Два графа Γ и Γ' называются *изоморфными*, если существует отображение, переводящее вершины и ребра графа Γ в вершины и ребра графа Γ' , соответственно, с сохранением, при наличии, цветов и направлений.

Алгоритмы, различающие изоморфность графов с помощью количества операций, полиномиально зависящего от числа входных данных, называются *эффективными*, или *полиномиальными*. Приведем несколько известных результатов о существовании эффективных алгоритмов проверки изоморфности графов.

Предложение 3.1 (см. [9]). *Изоморфность двух n-вершинных планарных простых графов можно проверить за время $O(n)$.*

Предложение 3.2 (см. [12]). *Изоморфность двух n-вершинных простых графов, вложимых в поверхность рода g, можно проверить за время $O(n^{O(g)})$.*

3.2. Граф Пейшото. Пусть $f^t: S \rightarrow S$ — градиентно-подобный поток. В работе [15] для потока f^t построен ориентированный граф Γ_{f^t} (*граф Пейшото*). Вершины графа Γ_{f^t} соответствуют неподвижным точкам потока f^t , ребра соответствуют ориентированным седловым сепаратрисам (см. рис. 5).

На рис. 6 изображен пример неэквивалентных градиентно-подобных потоков с изоморфными ориентированными графами. Отсюда следует, что класс изоморфности графа не является полным инвариантом потока. По этой причине граф Γ_{f^t} оснащается так называемыми *различающими множествами*, в результате чего получается *граф Пейшото* $\Gamma_{f^t}^P$, который является полным топологическим инвариантом.

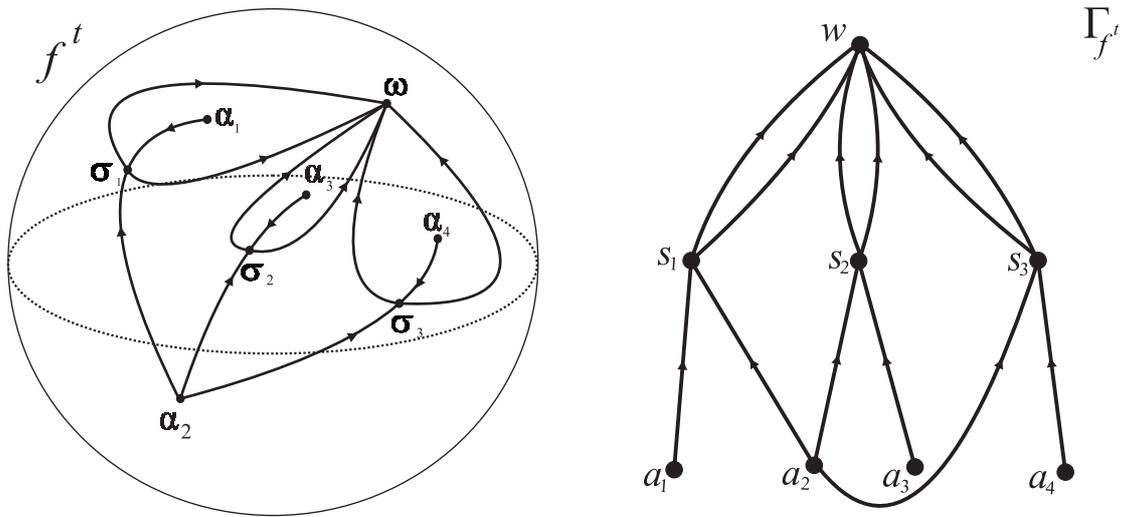


Рис. 5. Пример градиентно-подобного потока f^t и его графа Пейшото Γ_{f^t}
 FIG. 5. An example of a gradient-like f^t flow and its Peixoto graph Γ_{f^t}

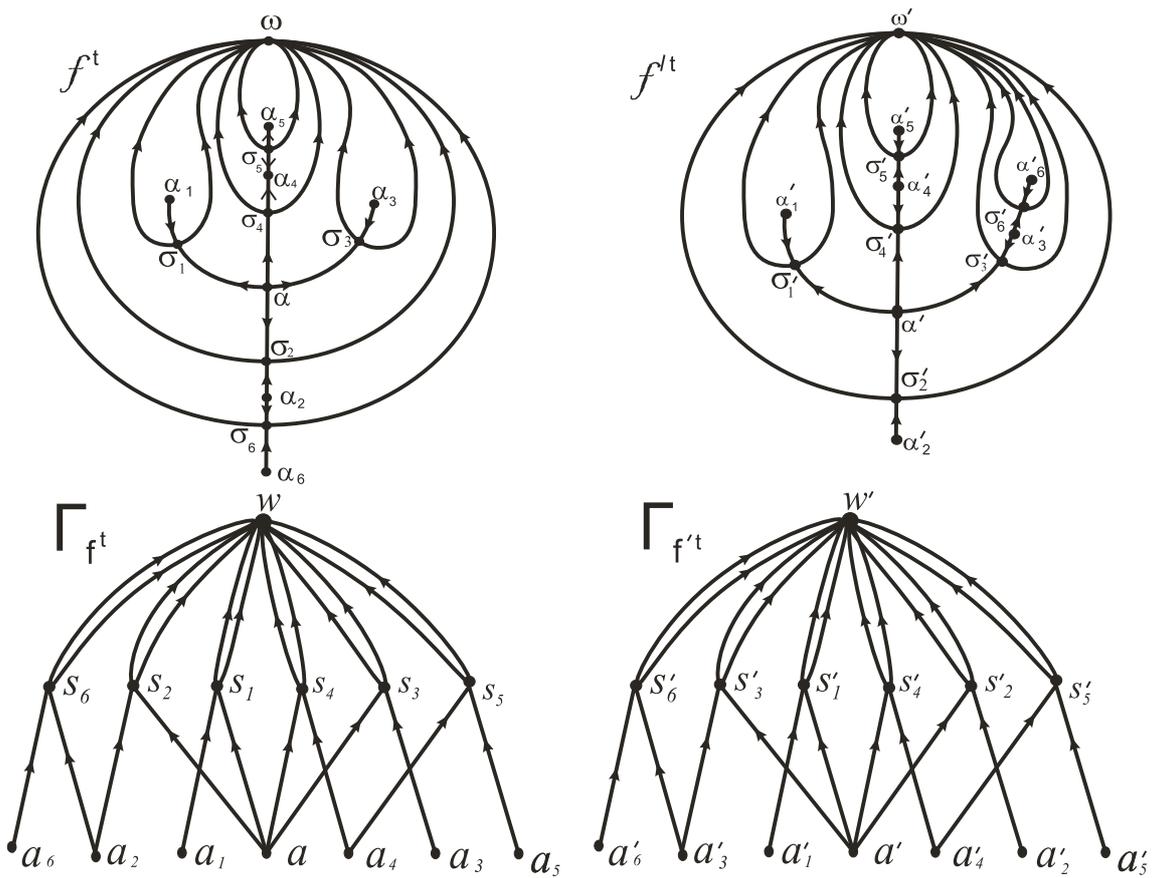


Рис. 6. Два потока f^t и f'^t с изоморфными ориентированными графами Γ_{f^t} и $\Gamma_{f'^t}$
 FIG. 6. Two flows f^t and f'^t with isomorphic directed graphs Γ_{f^t} and $\Gamma_{f'^t}$

Именно, рассмотрим множество

$$\tilde{S} = S \setminus \bigcup_{\sigma \in \Omega_{f^t}^1} (cl(W_\sigma^u) \cup cl(W_\sigma^s)).$$

Замыкание любой его компоненты связности называется *ячейкой*. Согласно [15], все ячейки градиентно-подобных потоков могут быть только трех типов, изображенных на рис. 7.

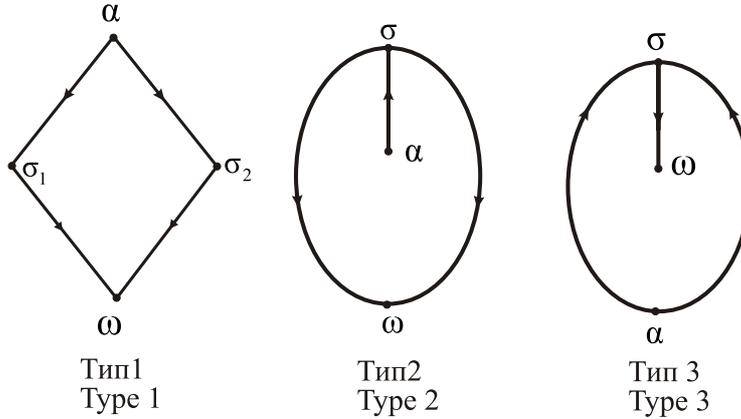


Рис. 7. Типы ячеек градиентно-подобного потока; α — источник, σ , σ_1 , σ_2 — седла, ω — сток

FIG. 7. Cell types of gradient-like flow; α is a source, σ , σ_1 , σ_2 are saddles, ω is a sink

Различающим множеством называется подграф, соответствующий границе ячейки. Следовательно, различающие множества могут быть трех типов, соответствующих типам ячеек (см. рис. 8).

Два графа Пейшото $\Gamma_{f^t}^P$, $\Gamma_{f^{t'}}^P$ градиентно-подобных потоков f^t и $f^{t'}$, соответственно, называются *изоморфными*, если существует изоморфизм графов Γ_{f^t} и $\Gamma_{f^{t'}}$, сохраняющий различающие множества.

Предложение 3.3 (см. [15, предложение 4.4]). *Два градиентно-подобных потока f^t , $f^{t'}$ топологически эквивалентны тогда и только тогда, когда их графы Пейшото $\Gamma_{f^t}^P$, $\Gamma_{f^{t'}}^P$ изоморфны.*

Основным результатом настоящего раздела является следующая теорема.

Теорема 3.1 (см. [11, теорема 1]). *Пусть f^t и $f^{t'}$ — градиентно-подобные потоки, заданные на поверхности S рода g и $\Gamma_{f^t}^P$, $\Gamma_{f^{t'}}^P$ — их оснащенные n -вершинные графы Пейшото. Тогда изоморфность графов $\Gamma_{f^t}^P$ и $\Gamma_{f^{t'}}^P$ можно проверить за время $O(n^{O(g)})$ для $g > 0$ и за время $O(n)$ для $g = 0$.*

Доказательство. Идея построения алгоритма, устанавливающего изоморфность графов $\Gamma_{f^t}^P$, $\Gamma_{f^{t'}}^P$, состоит в сведении этих графов к простым, вложимым в поверхность S , графам $\tilde{\Gamma}_{f^t}$, $\tilde{\Gamma}_{f^{t'}}$ таким, что $\Gamma_{f^t}^P$ и $\Gamma_{f^{t'}}^P$ изоморфны тогда и только тогда, когда изоморфны $\tilde{\Gamma}_{f^t}$ и $\tilde{\Gamma}_{f^{t'}}$.

Более детально. Во-первых, добавим по две соседних вершины валентности один к каждой седловой вершине графа $\Gamma_{f^t}^P$. Во-вторых, для каждого его подграфа типа 1 добавим по новой вершине и по четыре ребра, соединяющих новую вершину с остальными вершинами подграфа. В-третьих, применим 2^* -подразбиение к каждому ребру графа $\Gamma_{f^t}^P$, соединяющему седловую и стоковую вершины, и 1-подразбиение к ребру, соединяющему источниковую и седловую вершины. Получим граф $\tilde{\Gamma}_{f^t}$ (см. рис. 9).

Очевидно, $\tilde{\Gamma}_{f^t}$ единственным образом строится по $\Gamma_{f^t}^P$. Покажем, что $\Gamma_{f^t}^P$ также может быть единственным образом восстановлен по $\tilde{\Gamma}_{f^t}$.

Вершина графа $\tilde{\Gamma}_{f^t}$ является седловой в $\Gamma_{f^t}^P$ тогда и только тогда, когда она инцидентна двум вершинам валентности один. Следовательно, все седловые вершины могут быть определены единственным образом. Пусть s — седловая вершина графа $\Gamma_{f^t}^P$. В графе $\tilde{\Gamma}_{f^t}$ она инцидентна единственной вершине x валентности 3 и единственной вершине y валентности 2. Вершина x инцидентна единственной вершине x' валентности 2, которая, в свою очередь, инцидентна отличной от x вершине w . Вершина w соответствует стоку, а sw — ребро графа $\Gamma_{f^t}^P$, соответствующее

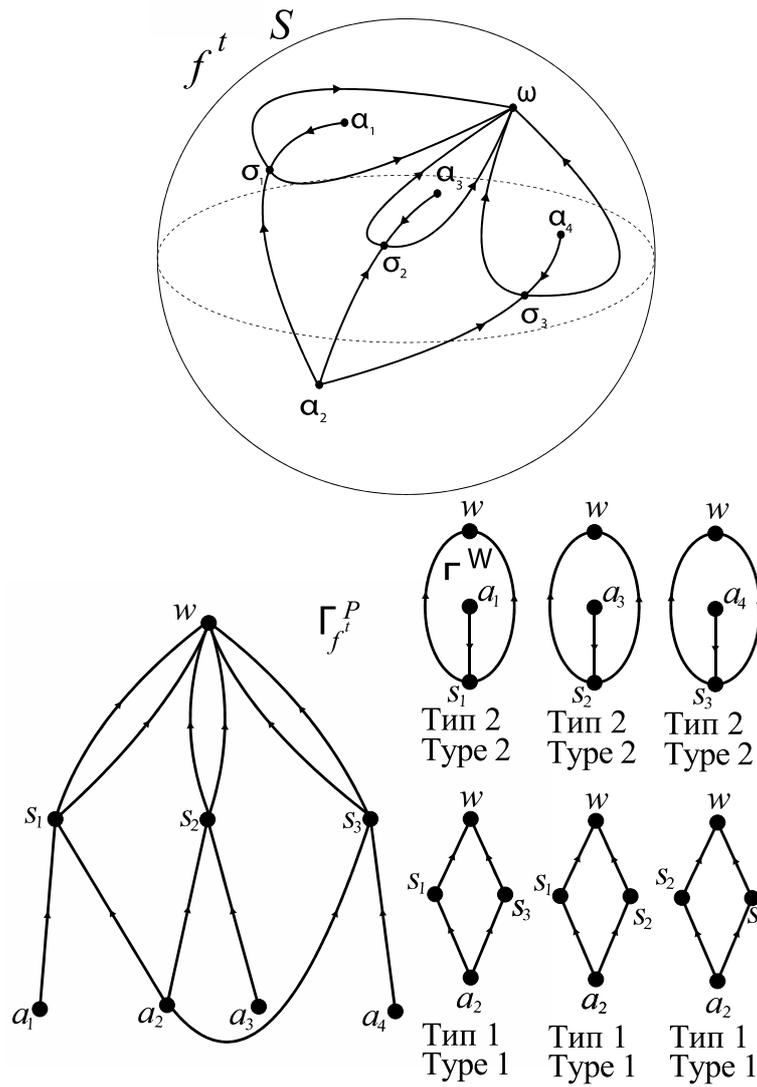


РИС. 8. Градиентно-подобный поток f^t на сфере S и его граф Пейшото $\Gamma_{f^t}^P$ с подграфами
 FIG. 8. Gradient-like flow f^t on the sphere S and its Peixoto graph $\Gamma_{f^t}^P$ with subgraphs

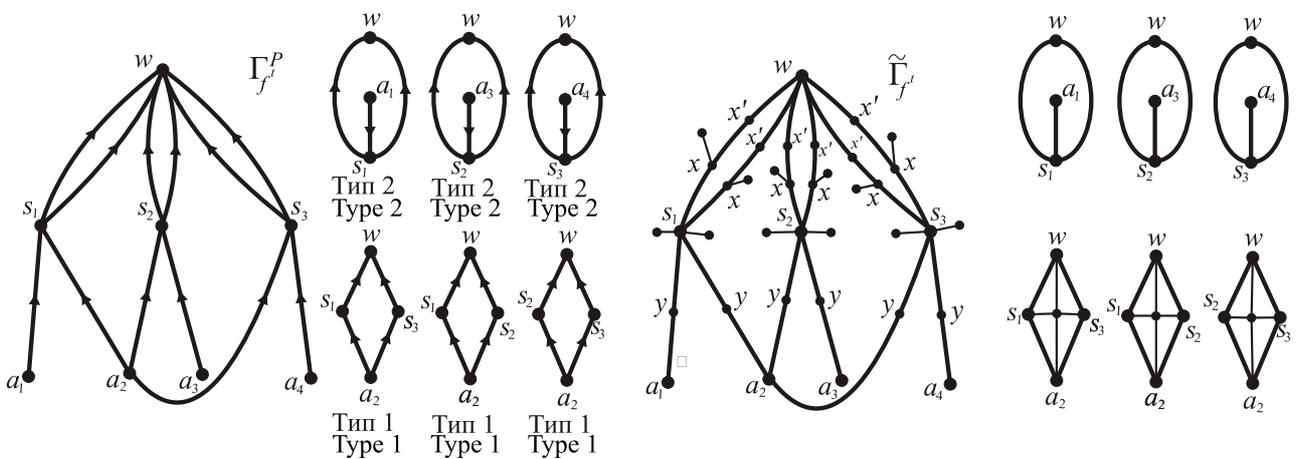


РИС. 9. Граф Пейшото $\Gamma_{f^t}^P$ с подграфами и его простой граф $\tilde{\Gamma}_{f^t}$
 FIG. 9. The Peixoto graph $\Gamma_{f^t}^P$ with subgraphs and its simple graph $\tilde{\Gamma}_{f^t}$

неустойчивой сепаратрисе. Вершина y инцидентна вершине a , отличной от s . Вершина a соответствует источнику, а as — ребро графа Γ_{ft}^P , соответствующее устойчивой седловой сепаратрисе.

Отличив стоковую, седловую и источниковую вершины графа Γ_{ft}^P , а также седловые сепаратрисы, можно восстановить все вершины валентности 1, соответствующие источникам и стокам. Каждый подграф типа 2 или 3 полностью определяется такой вершиной. Следовательно, все подграфы этих типов могут быть найдены единственным образом. Подграфы типа 1 единственным образом восстанавливаются по вершинам валентности 4, инцидентным двум различным седловым вершинам.

Таким образом, графы Γ_{ft}^P и $\Gamma_{f't}^P$ изоморфны тогда и только тогда, когда изоморфны графы $\tilde{\Gamma}_{ft}$ и $\tilde{\Gamma}_{f't}$.

Построение графов $\tilde{\Gamma}_{ft}$ и $\tilde{\Gamma}_{f't}$ по графам Γ_{ft}^P и $\Gamma_{f't}^P$ может быть осуществлено за время $O(n)$. Кроме того, графы $\tilde{\Gamma}_{ft}$ и $\tilde{\Gamma}_{f't}$ оба имеют $O(n)$ вершин. Поскольку графы Γ_{ft} и $\Gamma_{f't}$ вложимы в поверхность S , а добавление новых вершин и ребер не дает пересечений ребер во внутренних точках, то графы $\tilde{\Gamma}_{ft}$ и $\tilde{\Gamma}_{f't}$ также вложимы в поверхность S . Согласно предложениям 3.1 и 3.2, изоморфность графов $\tilde{\Gamma}_{ft}$, $\tilde{\Gamma}_{f't}$, а следовательно, и Γ_{ft}^P , $\Gamma_{f't}^P$ можно проверить за время $O(n^{O(g)})$ для $g > 0$ и за время $O(n)$ для $g = 0$. \square

3.3. Модифицированный граф Пейшото. В 2011 году В. З. Гринес и О. В. Починка [8] модифицировали граф Пейшото¹. Именно, вместо различающих множеств они оснастили ориентированный граф Пейшото Γ_{ft} порядками ребер, инцидентных вершинам, соответствующим стокам, и получили таким образом *модифицированный граф Пейшото* Γ_{ft}^{GP} , являющийся полным инвариантом.

Более детально. Пусть ω — сток потока f^t , а L_ω — множество сепаратрис, содержащих ω в своем замыкании. Из предложения 2.1 следует, что существует 2-диск $B_\omega \ni \omega$ такой, что каждая сепаратриса $l \subset L_\omega$ пересекает ∂B_ω в единственной точке. Для вершины w , соответствующей ω , пусть E_w — множество ребер графа Γ_{ft} , инцидентных w . Пусть N_w — мощность множества E_w . Пронумеруем элементы E_w следующим образом. Возьмем 2-диск B_ω в бассейне ω и множество $c_\omega = \partial B_\omega$. Зададим ориентацию против часовой стрелки на c_ω по отношению к B_ω . Пронумеруем все ребра e_1, \dots, e_{N_w} из E_w в соответствии с порядком соответствующих сепаратрис на c_ω , начиная с некоторой точки на c_ω . Эта нумерация всех элементов E_w называется *согласованной* с вложением сепаратрис.

Два модифицированных графа Пейшото Γ_{ft}^{GP} и $\Gamma_{f't}^{GP}$ потоков f^t и f'^t называются *изоморфными*, если существует изоморфизм ξ между Γ_{ft} и $\Gamma_{f't}$ такой, что перестановка $\Theta_{w,w'}$, где $w' = \xi(w)$, индуцированная изоморфизмом ξ , является степенью циклической перестановки для каждой вершины w , соответствующей стоку.

Так, на рис. 6 вершина w (w') графа Γ_{ft} ($\Gamma_{f't}$) соответствует стоку ω (ω') и вершина a (a') соответствует источнику α (α'). Перенумеруем сепаратрисы $l_1^u, l_2^u, l_3^u, l_4^u$ ($l_1^u, l_2^u, l_3^u, l_4^u$) седловых точек, принадлежащих устойчивому многообразию точки ω (ω') в соответствии с положительной ориентацией замкнутой кривой вокруг ω (ω'). Введем нумерацию на множестве E_w (E'_w), согласованную с вложением сепаратрис. Как мы уже заметили, графы Γ_{ft} и $\Gamma_{f't}$ изоморфны. Существует в точности два изоморфизма этих графов: изоморфизм ξ_1 наложения Γ_{ft} на граф $\Gamma_{f't}$ и изоморфизм ξ_2 , являющийся композицией наложения и отражения относительно оси $a'w'$. Непосредственно проверяется, что изоморфизм ξ_1 индуцирует перестановку $\Theta_{w,w'} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}$, а изоморфизм ξ_2 индуцирует перестановку $\Theta_{w,w'} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$. Ни одна из этих перестановок не является степенью циклической перестановки, в силу чего модифицированные графы Γ_{ft}^{GP} и $\Gamma_{f't}^{GP}$ неизоморфны.

¹Классификационные результаты в [8] получены для градиентно-подобных диффеоморфизмов, но они также применимы для потоков.

Предложение 3.4 (см. [8, теорема 3.2.1]). *Градиентно-подобные потоки $f^t, f^{t^*}: S \rightarrow S$ топологически эквивалентны тогда и только тогда, когда их модифицированные графы $\Gamma_{f^t}^{GP}$ и $\Gamma_{f^{t^*}}^{GP}$ изоморфны.*

Теорема 3.2 (см. [11, теорема 2]). *Пусть f^t, f^{t^*} — градиентно-подобные потоки на поверхности S рода g и $\Gamma_{f^t}^{GP}, \Gamma_{f^{t^*}}^{GP}$ — их модифицированные n -вершинные графы с t ребрами. Тогда изоморфизм графов $\Gamma_{f^t}^{GP}$ и $\Gamma_{f^{t^*}}^{GP}$ может быть проверен за время $O(n^{O(g)})$, если $g > 0$, и за время $O(n)$, если $g = 0$.*

Доказательство. Для доказательства также будем использовать идею сведения модифицированного графа $\Gamma_{f^t}^{GP}$ к простому $\bar{\Gamma}_{f^t}$. Для каждой стоковой вершины w графа $\Gamma_{f^t}^{GP}$ рассмотрим циклически упорядоченное множество E_w всех ребер, инцидентных w . Удалим из графа $\Gamma_{f^t}^{GP}$ вершину w и все ребра, инцидентные w , добавим циклы с N_w вершинами к получившемуся графу; их вершины пронумерованы $1, \dots, N_w$. Для каждого $1 \leq i \leq N_w$ добавим неориентированное ребро между i -ой вершиной цикла и вершиной, отличной от w и инцидентной i -му ребру в E_w . Далее, добавим по две вершины валентности 1 к каждой седловой вершине графа $\Gamma_{f^t}^{GP}$ и применим 1-подразбиение к каждому ориентированному ребру (см. рис. 10).

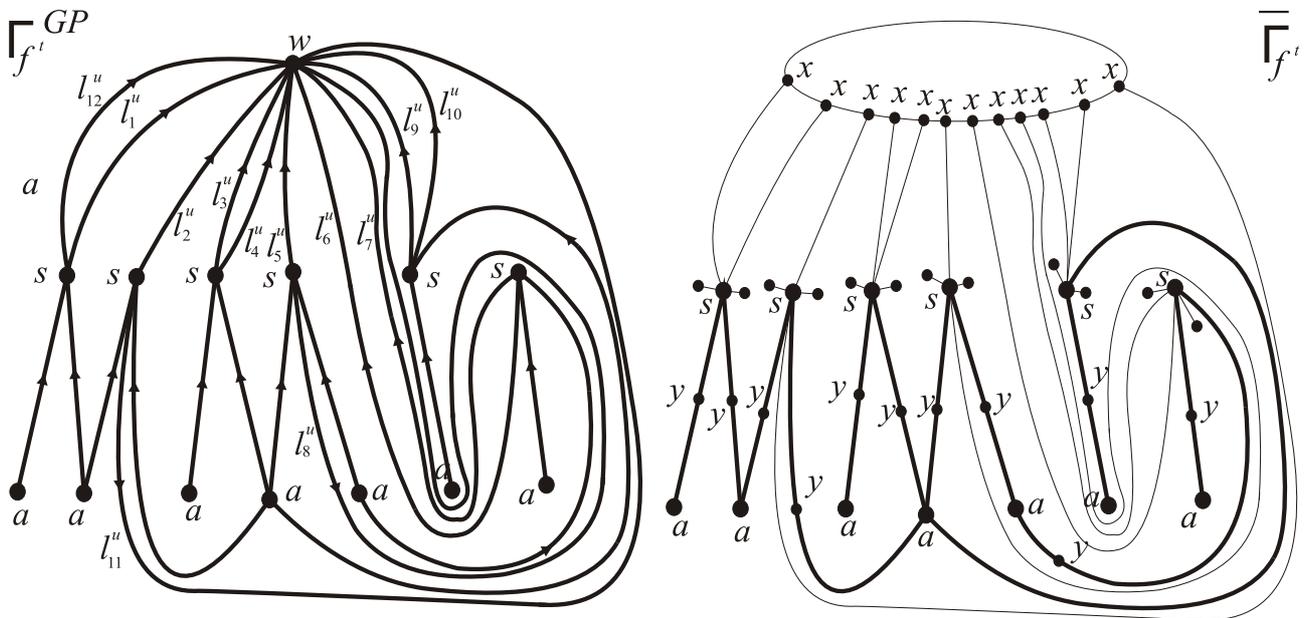


Рис. 10. Модифицированный граф Пейшото $\Gamma_{f^t}^{GP}$ и его простой граф $\bar{\Gamma}_{f^t}$

FIG. 10. Modified Peixoto graph $\Gamma_{f^t}^{GP}$ and its simple graph $\bar{\Gamma}_{f^t}$

Очевидно, $\bar{\Gamma}_{f^t}$ единственным образом строится по $\Gamma_{f^t}^{GP}$. Покажем, что $\Gamma_{f^t}^{GP}$ также может быть единственным образом восстановлен по $\bar{\Gamma}_{f^t}$.

Действительно, седловые вершины графа $\Gamma_{f^t}^{GP}$ — это вершины, инцидентные двум вершинам валентности 1. Каждая седловая вершина s соединяется с единственной вершиной x валентности 3 и единственной вершиной y валентности 2. Вершина y инцидентна отличной от седловой вершине a — это источниковая вершина. Вершины типа x образуют циклы, соответствующие стоковым точкам. Циклический порядок множества E_w определяется при обходе циклов. Ребро sx графа $\bar{\Gamma}_{f^t}^{GP}$ соответствует неустойчивой седловой сепаратрисе, а ребро sa — устойчивой. Следовательно, имея граф $\bar{\Gamma}_{f^t}$, можно единственным образом восстановить граф $\Gamma_{f^t}^{GP}$.

Таким образом, графы $\Gamma_{f^t}^{GP}$ и $\Gamma_{f^{t^*}}^{GP}$ изоморфны тогда и только тогда, когда простые графы $\bar{\Gamma}_{f^t}$ и $\bar{\Gamma}_{f^{t^*}}$ изоморфны.

Построение графов $\bar{\Gamma}_{f^t}$ и $\bar{\Gamma}_{f^{t^*}}$ по графам $\Gamma_{f^t}^{GP}$ и $\Gamma_{f^{t^*}}^{GP}$ осуществляется за время $O(n)$. Кроме того, каждый из графов $\bar{\Gamma}_{f^t}$ и $\bar{\Gamma}_{f^{t^*}}$ имеет $O(n)$ вершин. Поскольку добавление циклов к графам

$\Gamma_{f^t}^{GP}$ и $\Gamma_{f^{t'}}^{GP}$ сохраняет их вложимость в поверхность S , то графы $\bar{\Gamma}_{f^t}$ и $\bar{\Gamma}_{f^{t'}}$ также вложимы в S . По предложениям 3.1 и 3.2, изоморфизм графов $\bar{\Gamma}_{f^t}$ и $\bar{\Gamma}_{f^{t'}}$, а следовательно, и $\Gamma_{f^t}^{GP}$ и $\Gamma_{f^{t'}}^{GP}$, может быть проверен за время $O(n^{O(g)})$, если $g > 0$, и за время $O(n)$, если $g = 0$. \square

3.4. Граф Вонга. Пусть f^t — градиентно-подобный поток, заданный на ориентируемой поверхности S . *Граф Вонга* для такого потока — это граф, дуальный к графу Пейшото: вершины графа Вонга $\Gamma_{f^t}^W$ соответствуют ячейкам потока f^t , его ребра соответствуют седловым сепаратрисам и соединяют вершины, соответствующие ячейкам, граничащим по соответствующим ребрам сепаратрисам. При этом, если какая-либо седловая сепаратриса лежит во внутренности замыкания некоторой ячейки, то этой ячейке и этой сепаратрисе соответствует вершина графа с петлей. То есть каждая вершина имеет валентность 4, если считать петлю за два условных ребра. Набор этих четырех ребер, включая условные, разбивается на пары, в каждую из которых входит одно ребро, соответствующее устойчивой сепаратрисе, и одно ребро, соответствующее неустойчивой сепаратрисе, примыкающие друг к другу на границе соответствующей вершине ячейки. Такие пары обозначаются дугой, пересекающей оба ребра пары (рис. 11).

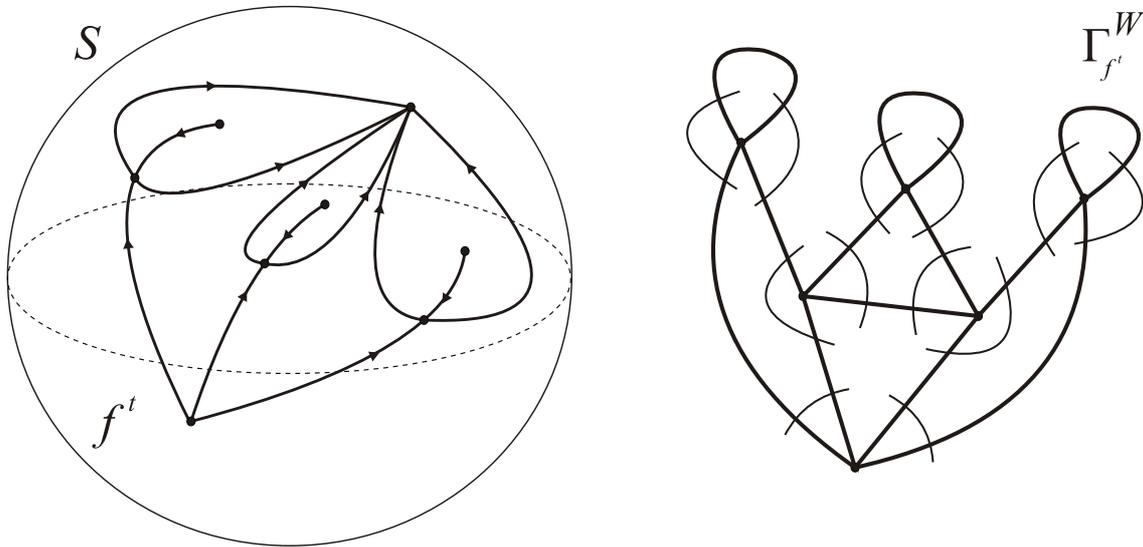


Рис. 11. Поток f^t из G на поверхности S и его граф Вонга $\Gamma_{f^t}^W$
 FIG. 11. The flow f^t from G onto a surface S and its Wong graph $\Gamma_{f^t}^W$

Графы $\Gamma_{f^t}^W, \Gamma_{f^{t'}}^W$ называются *изоморфными*, если существует изоморфизм между $\Gamma_{f^t}^W$ и $\Gamma_{f^{t'}}^W$, сохраняющий парность ребер.

Предложение 3.5 (см. [19]). *Градиентно-подобные потоки $f^t, f^{t'}$ на ориентируемой поверхности S топологически эквивалентны тогда и только тогда, когда их графы Вонга $\Gamma_{f^t}^W, \Gamma_{f^{t'}}^W$ изоморфны.*

Теорема 3.3 (см. [11, теорема 3]). *Пусть $f^t, f^{t'}$ — градиентно-подобные потоки на ориентируемой поверхности S рода g и $\Gamma_{f^t}^W, \Gamma_{f^{t'}}^W$ — их n -вершинные графы Вонга. Тогда изоморфизм графов $\Gamma_{f^t}^W$ и $\Gamma_{f^{t'}}^W$ проверяется за время¹ $O(n^{O(g)})$, если $g \neq 0$, и за время $O(n)$, если $g = 0$.*

Доказательство. По графу $\Gamma_{f^t}^W$ построим простой граф $\check{\Gamma}_{f^t}$ следующим образом. Для этого применим 1-подразбиение к каждой петле; новая вершина соединена двумя ребрами с изначальной вершиной петли. Разбив таким образом петлю на два ребра, отнесем каждое из них к своей паре. Затем применим 1*-подразбиение к каждому ребру и соединим ребрами добавленные этой операцией вершины, находящиеся на исходных ребрах, принадлежащих некоторой паре. Таким образом получим граф $\check{\Gamma}_{f^t}$ (см. рис. 12).

¹В настоящем обзоре использованы идеи доказательства из работы [11], однако оценки времени работы алгоритма существенно улучшены.

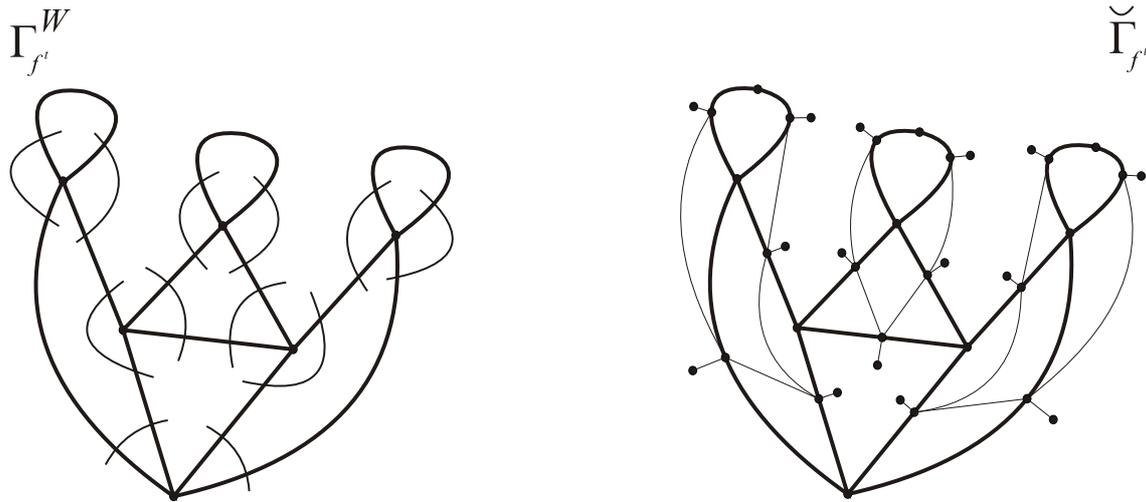


Рис. 12. Граф $\Gamma_{f^t}^W$ и построенный по нему простой граф $\check{\Gamma}_{f^t}$
 FIG. 12. The graph $\Gamma_{f^t}^W$ and the simple graph $\check{\Gamma}_{f^t}$ constructed from it

Заметим, что граф $\Gamma_{f^t}^W$ единственным образом восстанавливается по графу $\check{\Gamma}_{f^t}$. Действительно, все вершины графа $\Gamma_{f^t}^W$ — это все вершины валентности 4 графа $\check{\Gamma}_{f^t}$. Петлям графа $\Gamma_{f^t}^W$ взаимно однозначно соответствуют простые циклы, содержащие вершину валентности 2 графа $\check{\Gamma}_{f^t}$. Наконец, ребра, соединяющие вершины, инцидентные вершине валентности 1 на графе $\check{\Gamma}_{f^t}$, лежат на парных ребрах графа $\Gamma_{f^t}^W$.

Таким образом, графы $\Gamma_{f^t}^W$ и $\Gamma_{f^{t'}}^W$ изоморфны тогда и только тогда, когда графы $\check{\Gamma}_{f^t}$ и $\check{\Gamma}_{f^{t'}}$ изоморфны.

Поскольку вершины графа $\Gamma_{f^t}^W$ соответствуют ячейкам, а ребра — седловым сепаратрисам, можно изобразить этот граф, просто расположив вершины внутри ячеек потока f^t , а ребра — соединив соответствующие вершины дугами, пересекающими соответствующие сепаратрисы. Поэтому граф $\Gamma_{f^t}^W$ вкладывается в несущую поверхность потока f^t . В пары мы объединяем ребра, соответствующие соседствующим в границе сепаратрисам, поэтому дуги, символизирующие принадлежность ребер к паре, также вкладывается в поверхность. При построении графа $\check{\Gamma}_{f^t}$ добавленные ребра либо представляют из себя именно эти дуги, либо ребра, не создающие новых замкнутых контуров, поэтому эти новые ребра не влияют на вложимость графа в поверхность S .

Построение графов $\check{\Gamma}_{f^t}$ и $\check{\Gamma}_{f^{t'}}$ по $\Gamma_{f^t}^W$ и $\Gamma_{f^{t'}}^W$ выполняется за линейное время от числа n . Тогда утверждение теоремы непосредственно следует из предложений 3.1, 3.2. \square

3.5. Круговая схема Флейтас. Градиентно-подобный поток $f^t: S \rightarrow S$ называется *полярным*, если в его неблуждающем множестве содержится ровно один источник и ровно один сток. Граф Флейтас $\Gamma_{f^t}^F$ для такого потока f^t строится следующим образом. Выберем вокруг источника (единственного, в силу полярности потоков) окружность S , трансверсальную траекториям потока f^t в бассейне источника. Обозначим через D диск, который эта окружность ограничивает в бассейне источника. Присвоим всем пересечениям окружности S с седловыми сепаратрисами *метки* так, чтобы пересечения с сепаратрисами одного и того же седла были с одинаковыми метками. Каждой паре точек с одинаковыми метками присвоим *спин*, т. е. знак $+(-)$, если объединение диска D с трубчатой окрестностью устойчивого многообразия седловой точки, пересекающего окружность S по данной паре точек, является кольцом (пленкой Мебиуса) (см. рис. 13, 14).

Два инварианта Флейтас $\Gamma_{f^t}^F$ и $\Gamma_{f^{t'}}^F$ полярных потоков $f^t, f^{t'}$, соответственно, называются *изоморфными*, если существует изоморфизм, переводящий окружности инварианта $\Gamma_{f^t}^F$ в окружности инварианта $\Gamma_{f^{t'}}^F$ и сохраняющий метки и спины.

Предложение 3.6 (см. [7]). *Два полярных потока f^t и $f^{t'}$ топологически эквивалентны тогда и только тогда, когда их инварианты Флейтас $\Gamma_{f^t}^F$ и $\Gamma_{f^{t'}}^F$ изоморфны.*

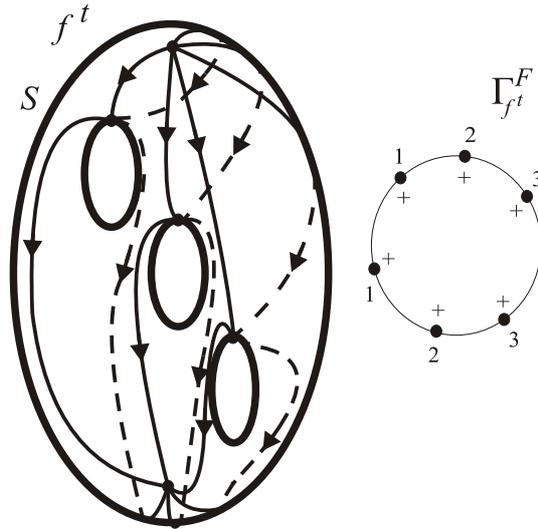


Рис. 13. Полярный поток f^t и его инвариант Флейтас $\Gamma_{f^t}^F$
 FIG. 13. Polar flow f^t and its Fleitas invariant $\Gamma_{f^t}^F$

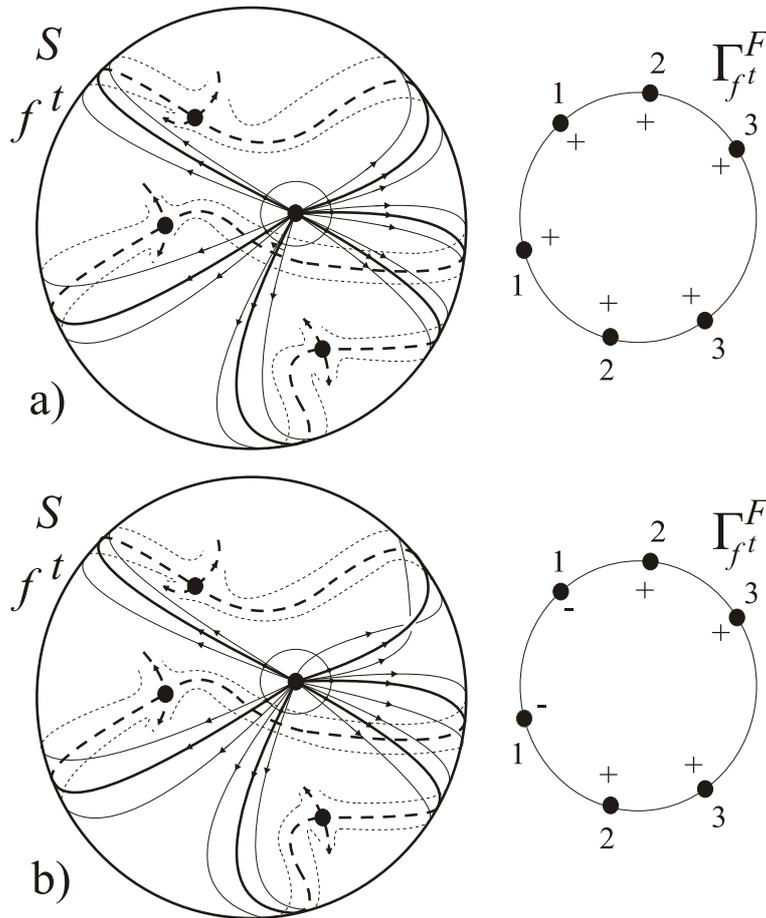


Рис. 14. а) Инвариант Флейтас потока на рис. 13; б) Полярный поток в окрестности источника на неориентируемой поверхности и его инвариант Флейтас
 FIG. 14. a) Fleitas invariant of the flow in Fig. 13; b) Polar flow in the neighborhood of a source on a nonorientable surface and its Fleitas invariant

Теорема 3.4 (см. [11, теорема 5]). Пусть f^t и $f^{t'}$ — полярные потоки на поверхности S рода g и $\Gamma_{f^t}^F, \Gamma_{f^{t'}}^F$ — их n -вершинные графы Флейтас. Тогда изоморфизм графов $\Gamma_{f^t}^F$ и $\Gamma_{f^{t'}}^F$ проверяется за время $O(n^{O(g)})$, если $g > 0$, и за время $O(n)$, если $g = 0$.

Доказательство. Для инварианта Флейтас Γ_{ft}^F построим простой граф $\hat{\Gamma}_{ft}$ следующим образом. Метки инварианта будут вершинами графа, а дуги окружности — ребрами. Соединим одинаковые метки ребрами. Применим 1-подразбиение к каждому ребру, соединяющему одинаковые метки со спином +, и 1*-подразбиение к каждому ребру, соединяющему метки со спином - (см. рис. 15). Заметим, что графы $\hat{\Gamma}_{ft}$ и $\hat{\Gamma}_{f't}$ единственным образом строятся по графам Γ_{ft}^F и $\Gamma_{f't}^F$. Покажем,

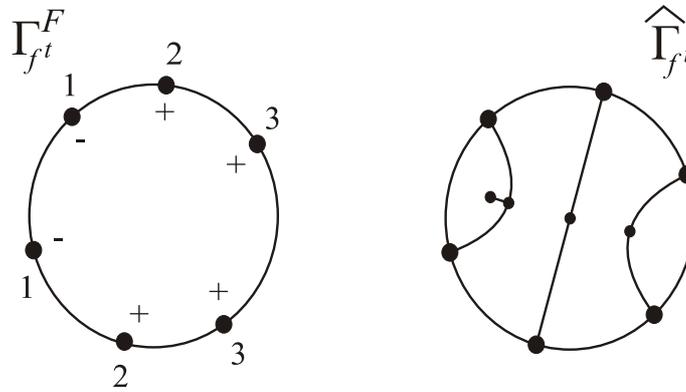


Рис. 15. Граф Γ_{ft}^F и простой граф $\hat{\Gamma}_{ft}$
 FIG. 15. Graph Γ_{ft}^F and simple graph $\hat{\Gamma}_{ft}$

что обратное тоже верно.

Изначальные метки инварианта Γ_{ft}^F — это вершины графа $\hat{\Gamma}_{ft}$ валентности 3, не имеющие соседних вершин валентности 1. Вершины графа $\hat{\Gamma}_{ft}$ соответствуют одинаковым меткам, если их соединяет путь длины 2, не содержащий других вершин, соответствующих меткам. Если вершина в середине такого пути имеет валентность 2, то путь соединяет вершины, соответствующие меткам со спином +. Если вершина в середине пути имеет валентность 3 и соседнюю вершину валентности 1, то путь соединяет вершины, соответствующие меткам со спином -.

Таким образом, графы $\hat{\Gamma}_{ft}$ и $\hat{\Gamma}_{f't}$ изоморфны тогда и только тогда, когда Γ_{ft}^F и $\Gamma_{f't}^F$ изоморфны. Более того, графы $\hat{\Gamma}_{ft}$ и $\hat{\Gamma}_{f't}$ строятся за линейное время от числа n и вложимы в поверхность S , на которой заданы f^t и f'^t . Следовательно, из предложений 3.1, 3.2 вытекает утверждение теоремы. \square

3.6. Трехцветный граф Ошемкова—Шарко. Пусть f^t — градиентно-подобный поток, заданный на поверхности S . Назовем *ячейкой* J потока f^t компоненту связности множества $\tilde{S} = S \setminus (W_{\Omega_{ft}^0 \cup \Omega_{ft}^1}^u \cup W_{\Omega_{ft}^1 \cup \Omega_{ft}^2}^s)$. Обозначим через J_{ft} множество всех ячеек потока f^t и выберем по одной траектории θ_J (t -кривой) в каждой ячейке $J \in J_{ft}$. Положим $\mathcal{T} = \bigcup_{J \in \tilde{S}} \theta_J$, $\bar{S} = \tilde{S} \setminus \mathcal{T}$.

Назовем *u-кривыми* неустойчивые седловые сепаратрисы и *s-кривыми* — устойчивые седловые сепаратрисы.

Из работы [15] следует, что каждая компонента связности Δ множества \bar{S} является криволинейным треугольником, ограниченным одной s -, одной u - и одной t -кривой, вследствие чего мы будем называть Δ *треугольной областью*. Границу каждой треугольной области будем считать ориентированной соответственно движению по t -кривой от источника к стоку. Обозначим через Δ_{ft} множество всех треугольных областей потока f^t .

Трехцветный граф Γ_{ft}^{OS} *Ошемкова—Шарко* из работы [5], соответствующий градиентно-подобному потоку f^t , строится следующим образом (см. рис. 16):

- 1) вершины графа Γ_{ft}^{OS} взаимно однозначно соответствуют треугольным областям потока;
- 2) две вершины графа инцидентны ребру цвета s, t, u , если соответствующие этим вершинам многоугольные области имеют общую s -, t -, u -кривую, а между этим ребром и s, t, u -кривой устанавливается взаимно однозначное соответствие.

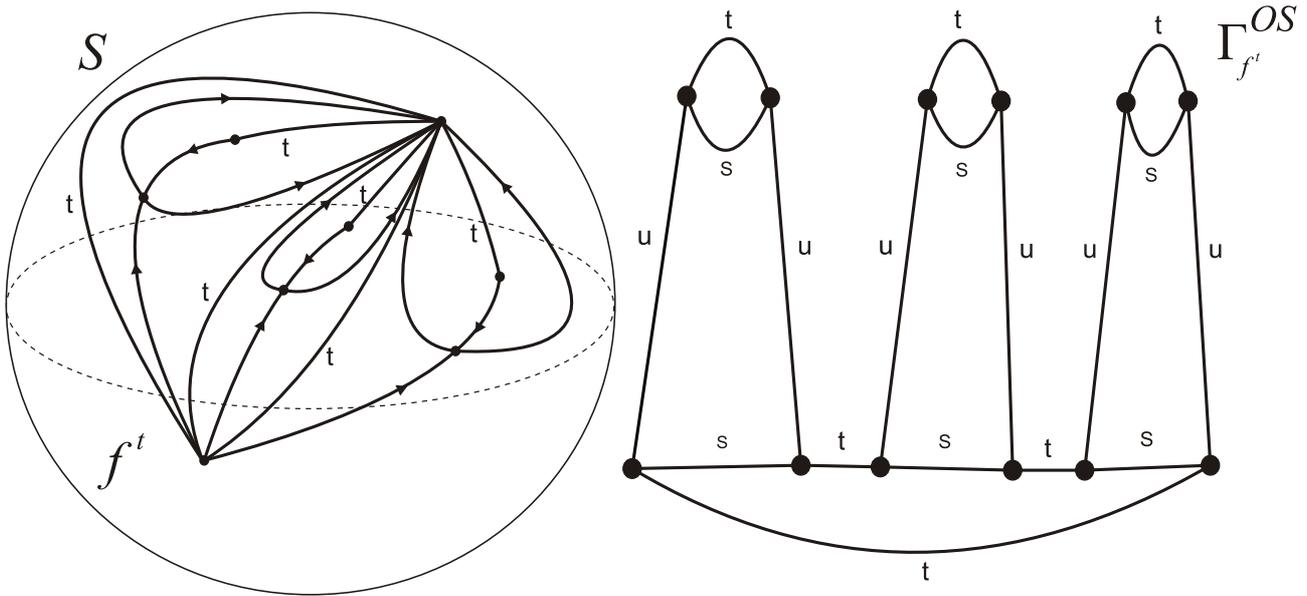


Рис. 16. Фазовый портрет некоторого градиентно-подобного потока и его трехцветный граф

FIG. 16. Phase portrait of some gradient-like flow and its three-color graph

Два трехцветных графа $\Gamma_{f^t}^{OS}$ и $\Gamma_{f^{t'}}^{OS}$ называются *изоморфными*, если существует изоморфизм графов, сохраняющий инцидентность и цветность.

В силу конструкции, трехцветные графы, полученные по различным разбиениям на треугольные области (в зависимости от выбора t -кривых), изоморфны.

Предложение 3.7 (см. [5, теорема 1.10]). *Два градиентно-подобных потока $f^t, f^{t'}$ топологически эквивалентны тогда и только тогда, когда их графы $\Gamma_{f^t}^{OS}$ и $\Gamma_{f^{t'}}^{OS}$ изоморфны.*

Следующая теорема полностью повторяет теорему из работы [11], но мы приводим ее доказательство для полноты изложения.

Теорема 3.5 (см. [11, теорема 4]). *Пусть $f^t, f^{t'}$ — градиентно-подобные потоки, заданные на поверхности рода g , и $\Gamma_{f^t}^{OS}, \Gamma_{f^{t'}}^{OS}$ — их n -вершинные трехцветные графы. Тогда изоморфизм графов $\Gamma_{f^t}^{OS}$ и $\Gamma_{f^{t'}}^{OS}$ проверяется за время $O(n^{O(g)})$, если $g \neq 0$, и за время $O(n)$, если $g = 0$.*

Доказательство. В работе [5] авторы предлагают алгоритм различения изоморфизма. Однако он не полиномиальный, и ниже мы предлагаем полиномиальный алгоритм различения.

Построим граф $\check{\Gamma}_{f^t}$ 1-подразбиением s -ребер, 2-подразбиением t -ребер и 3-подразбиением u -ребер графа $\Gamma_{f^t}^{OS}$ (см. рис. 17).

Заметим, что графы $\check{\Gamma}_{f^t}$ и $\check{\Gamma}_{f^{t'}}$ единственным образом строятся по графам $\Gamma_{f^t}^{OS}$ и $\Gamma_{f^{t'}}^{OS}$. Покажем, что обратное тоже истинно. Вершины валентности 3 графа $\check{\Gamma}_{f^t}$ — это в точности вершины валентности 3 графа $\Gamma_{f^t}^{OS}$. Цвет каждого ребра графа $\check{\Gamma}_{f^t}$ определяется длиной пути между конечными вершинами ребра графа $\check{\Gamma}_{f^t}$.

Таким образом, графы $\check{\Gamma}_{f^t}$ и $\check{\Gamma}_{f^{t'}}$ изоморфны тогда и только тогда, когда $\Gamma_{f^t}^{OS}$ и $\Gamma_{f^{t'}}^{OS}$ изоморфны. Более того, графы $\check{\Gamma}_{f^t}$ и $\check{\Gamma}_{f^{t'}}$ строятся за линейное время от n и вложимы в поверхность S . Следовательно, по предложениям 3.1, 3.2, доказана настоящая теорема. \square

Благодарности. Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект № 17-11-01041), за исключением теорем 3.1 и 3.2, которые выполнены при поддержке Лаборатории динамических систем и приложений НИУ ВШЭ (грант Министерства науки и высшего образования РФ, соглашение № 075-15-2019-1931).

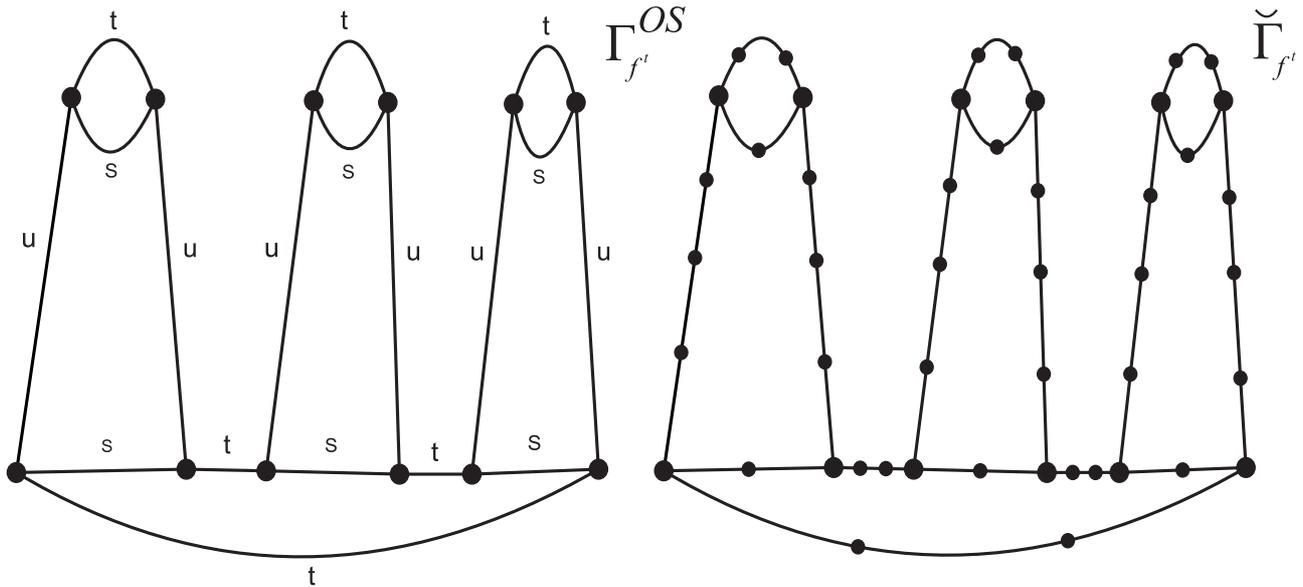


Рис. 17. Трехцветный граф Γ_{ft}^{OS} и его простой граф $\check{\Gamma}_{ft}$
 FIG. 17. The three-color graph Γ_{ft}^{OS} and its simple graph $\check{\Gamma}_{ft}$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Андронов А. А., Понтрягин Л. С. Грубые системы// Докл. АН СССР. — 1937. — 14, № 5. — С. 247–250.
2. Леонтович Е. А., Майер А. Г. О траекториях, определяющих качественную структуру разбиения сферы на траектории// Докл. АН СССР. — 1937. — 14, № 5. — С. 251–257.
3. Леонтович Е. А., Майер А. Г. О схеме, определяющей топологическую структуру разбиения на траектории// Докл. АН СССР. — 1955. — 103, № 4. — С. 557–560.
4. Майер А. Г. Грубые преобразования окружности// Уч. зап. ГГУ. — 1939. — 12. — С. 215–229.
5. Ошемков А. А., Шарко В. В. О классификации потоков Морса–Смейла на двумерных многообразиях// Мат. сб. — 1998. — 189, № 8. — С. 93–140.
6. Палис Ж., Ду Мелу В. Геометрическая теория динамических систем. Введение. — М.: Мир, 1986.
7. Fleitas G. Classification of gradient-like flows on dimensions two and three// Bol. Soc. Bras. Mat. — 1975. — 6. — С. 155–183.
8. Grines V., Medvedev T., Pochinka O. Dynamical Systems on 2- and 3-Manifolds. — Cham: Springer, 2016.
9. Hopcroft J. E., Wong J. K. Linear time algorithm for isomorphism of planar graphs: preliminary report// В сб.: «Proc. of the 6th Annual ACM Symposium on Theory of Computing». — Seattle, 1974. — С. 172–184.
10. Kruglov V. Topological conjugacy of gradient-like flows on surfaces// Динам. сист. — 2018. — 8, № 1. — С. 15–21.
11. Kruglov V., Malyshev D., Pochinka O. On algorithms that effectively distinguish gradient-like dynamics on surfaces// Arnold Math. J. — 2018. — 4, № 3-4. — С. 483–504.
12. Miller G. Isomorphism testing for graphs of bounded genus// В сб.: «Proceedings of the 12th Annual ACM Symposium on Theory of Computing». — New York: The Association for Computing Machinery, 1980. — С. 225–235.
13. Peixoto M. Structural stability on two-dimensional manifolds// Topology. — 1962. — 1, № 2. — С. 101–120.
14. Peixoto M. Structural stability on two-dimensional manifolds (a further remarks)// Topology. — 1963. — 2, № 2. — С. 179–180.
15. Peixoto M. M. On the classification of flows on 2-manifolds// В сб.: «Dynamical Syst., Proc. Sympos. Univ. Bahia, Salvador 1971». — 1973. — С. 389–419.
16. Pugh C., Shub M., The Ω -stability theorem for flows// Invent. Math. — 1970. — 11, № 2. — С. 150–158.
17. Robinson C. Dynamical Systems: Stability, Symbolic Dynamics, and Chaos. — Boca Raton: CRC Press, 1999.
18. Smale S. Differentiable dynamical systems// Bull. Am. Math. Soc. — 1967. — 73. — С. 747–817.
19. Wang X. The C^* -algebras of Morse–Smale flows on two-manifolds// Ergodic Theory Dynam. Systems. — 1990. — 10. — С. 565–597.

В. Е. Круглов
 НИУ ВШЭ, Нижний Новгород, Россия
 E-mail: kruglovslava21@mail.ru

О. В. Починка
 НИУ ВШЭ, Нижний Новгород, Россия
 E-mail: olga-pochinka@yandex.ru

DOI: 10.22363/2413-3639-2022-68-3-467-487

UDC 517.938+519.173

Topological Conjugacy of Gradient-Like Flows on Surfaces and Efficient Algorithms for Its Distinguishment

© 2022 V. E. Kruglov, O. V. Pochinka

Abstract. Gradient-like flows on surfaces have simple dynamics, which inspired many mathematicians to search for invariants of their topological equivalence. Under assumptions of different generality on the class of gradient-like flows under consideration, such classical invariants as the Leontovich–Mayer scheme, the Peixoto graph, the equipped Peixoto graph, the two-color Wang graph, the three-color Oshemkov–Sharko graph, the Fleitas circular scheme, etc. were obtained. Thus, the problem of classifying gradient-like flows on surfaces from the point of view of topological equivalence has been solved in an exhaustive way. In recent works by Kruglov, Malyshev, and Pochinka, it was proved that for gradient-like flows the topological equivalence classes coincide with the topological conjugacy classes. The obtained result allows us to use any invariants of their equivalence for topological conjugacy of gradient-like flows. The present study is a review of the results on topological conjugacy of gradient-like flows on surfaces and efficient algorithms for its distinguishing, that is, algorithms whose running time is limited by some polynomial on the length of the input information.

REFERENCES

1. A. A. Andronov and L. S. Pontryagin, “Grubye sistemy” [Rough systems], *Dokl. AN SSSR* [Rep. Acad. Sci. USSR], 1937, **14**, No. 5, 247–250 (in Russian).
2. E. A. Leontovich and A. G. Mayer, “O traektoriyakh, opredelyayushchikh kachestvennyuyu strukturu razbieniya sfery na traektorii” [On trajectories that determine the qualitative structure of the partition of a sphere into trajectories], *Dokl. AN SSSR* [Rep. Acad. Sci. USSR], 1937, **14**, No. 5, 251–257 (in Russian).
3. E. A. Leontovich and A. G. Mayer, “O skheme, opredelyayushchey topologicheskuyu strukturu razbieniya na traektorii” [On the scheme that determines the topological structure of the partition into trajectories], *Dokl. AN SSSR* [Rep. Acad. Sci. USSR], 1955, **103**, No. 4, 557–560 (in Russian).
4. A. G. Mayer, “Grubye preobrazovaniya okruzhnosti” [Rough transformations of the circle], *Uch. zap. GGU* [Uch. zap. GGU], 1939, **12**, 215–229 (in Russian).
5. A. A. Oshemkov and V. V. Sharko, “O klassifikatsii potokov Morsa–Smeyla na dvumernykh mnogoobraziyakh” [O klassifikatsii potokov Morsa–Smeyla na dvumernykh mnogoobraziyakh], *Mat. sb.* [Math. Digest], 1998, **189**, No. 8, 93–140 (in Russian).
6. J. Palis and W. De Melo, *Geometricheskaya teoriya dinamicheskikh sistem. Vvedenie* [Geometric Theory of Dynamical Systems: An Introduction], Mir, Moscow, 1986 (Russian translation).
7. G. Fleitas, “Classification of gradient-like flows on dimensions two and three,” *Bol. Soc. Bras. Mat.*, 1975, **6**, 155–183.
8. V. Grines, T. Medvedev, and O. Pochinka, *Dynamical Systems on 2- and 3-Manifolds*, Springer, Cham, 2016.



9. J. E. Hopcroft and J. K. Wong, “Linear time algorithm for isomorphism of planar graphs: preliminary report,” In: *Proc. of the 6th Annual ACM Symposium on Theory of Computing*, Seattle, 1974, pp. 172–184.
10. V. Kruglov, “Topological conjugacy of gradient-like flows on surfaces,” *Dinam. sist.*, 2018, **8**, No. 1, 15–21.
11. V. Kruglov, D. Malyshev, and O. Pochinka, “On algorithms that effectively distinguish gradient-like dynamics on surfaces,” *Arnold Math. J.*, 2018, **4**, No. 3-4, 483–504.
12. G. Miller, “Isomorphism testing for graphs of bounded genus,” In: *Proceedings of the 12th Annual ACM Symposium on Theory of Computing*, The Association for Computing Machinery, New York, 1980, pp. 225–235.
13. M. Peixoto, “Structural stability on two-dimensional manifolds,” *Topology*, 1962, **1**, No. 2, 101–120.
14. M. Peixoto, “Structural stability on two-dimensional manifolds (a further remarks),” *Topology*, 1963, **2**, No. 2, 179–180.
15. M. M. Peixoto, “On the classification of flows on 2-manifolds,” In: *Dynamical Syst., Proc. Sympos. Univ. Bahia, Salvador, 1971*, 1973, pp. 389–419.
16. C. Pugh, M. Shub, “The Ω -stability theorem for flows,” *Invent. Math.*, 1970, **11**, No. 2, 150–158.
17. C. Robinson, *Dynamical Systems: Stability, Symbolic Dynamics, and Chaos*, CRC Press, Boca Raton, 1999.
18. S. Smale, “Differentiable dynamical systems,” *Bull. Am. Math. Soc.*, 1967, **73**, 747–817.
19. X. Wang, “The C^* -algebras of Morse–Smale flows on two-manifolds,” *Ergodic Theory Dynam. Systems*, 1990, **10**, 565–597.

V. E. Kruglov

HSE University, Nizhny Novgorod, Russia

E-mail: kruglovslava21@mail.ru

O. V. Pochinka

HSE University, Nizhny Novgorod, Russia

E-mail: olga-pochinka@yandex.ru