Современная математика. Фундаментальные направления. Том 68, № 3 (2022). С. 451–466
Contemporary Mathematics. Fundamental Directions. ISSN 2413-3639 (Print)

DOI: 10.22363/2413-3639-2022-68-3-451-466 УДК 517.968.72

АСИМПТОТИЧЕСКОЕ ПОВЕДЕНИЕ РЕШЕНИЙ ПОЛНОГО ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА

© 2022 г. **Д. А. ЗАКОРА**

Аннотация. В работе изучается полное интегро-дифференциальное операторное уравнение второго порядка в гильбертовом пространстве. Ядро разностного типа интегрального возмущения представляет собой голоморфную полугруппу, окаймленную неограниченными операторами. Исследуется асимптотическое поведение решений этого уравнения. Доказаны асимптотические формулы для решений в случае, когда правая часть близка к почти периодической функции. Полученные формулы применены к исследованию задачи о вынужденных продольных колебаниях вязкоупругого стержня с трением Кельвина—Фойгта.

ОГЛАВЛЕНИЕ

1. Постановка задачи и основная теорема

1.1. Введение. В настоящее время имеется большое число работ, посвящённых изучению различных аспектов теории функционально-дифференциальных и, в частности, интегро-дифференциальных уравнений. Такие уравнения возникают в задачах динамики различных вязкоупругих систем, в задачах управления системами с распределёнными параметрами, задачах наследственной механики, задачах теории распространения тепла в средах с памятью и т. д. Различные вопросы по указанной теме обсуждаются в монографиях [6, 12, 17, 19, 25] (см. также указанную в них литературу). В монографии [1] к изучению функционально-дифференциальных уравнений систематически применяются методы спектральной теории операторов, а также приведён обширный список литературы по обсуждаемым вопросам.

Одним из аспектов изучения интегро-дифференциальных уравнений является вопрос устойчивости решений и их асимптотического поведения. В работах [13, 14] доказано, что решение однородного неполного интегро-дифференциального уравнения второго порядка с операторным ядром достаточно общего вида стремится к нулю с ростом времени, но без оценки скорости убывания. Это утверждение применено к исследованию движения вязкоупругого тела. Динамика вязкоупругих систем, а также подобные вопросы в других задачах, изучалась затем многими авторами. Например, в работах [11, 15, 18, 20, 21, 24] исследуются вопросы устойчивости одномерных систем, описывающих модели Тимошенко вязкоупругих стержней. Работы [2, 2, 9, 10, 22] (см. также указанную в них литературу) посвящены исследованию устойчивости абстрактных интегро-дифференциальных уравнений. В работах [4, 5] исследуются вопросы, аналогичные изучаемым в настоящей статье. А именно, исследуется вопрос асимптотического поведения решений интегро-дифференциальных уравнений в случае «правой части» вида

$$f(t) = g(t) + \sum_{k=0}^{n} e^{-i\sigma_k t} f_k(t), \quad \sigma_0 = 0, \quad 0 \neq \sigma_k \in \mathbb{R} \quad (k = \overline{1,n}),$$

где $\|g(t)\| = o(1)$, $\|f_k'(t)\| = o(1)$ $(k = \overline{0,n})$ при $t \to +\infty$.

Цель работы — вывод асимптотических формул для решений полного интегро-дифференциального операторного уравнения второго порядка в описанном выше случае (см. теорему 1.1). Доказанное утверждение применяется к исследованию задачи о вынужденных продольных колебаниях вязкоупругого стержня с трением Кельвина—Фойгта (см. лемму 3.2).

1.2. Постановка задачи. Пусть H, H_0 — гильбертовы пространства, $\mathcal{L}(H, H_0)$ — банахово пространство линейных ограниченных операторов, действующих из H в H_0, $\mathcal{L}(H) := \mathcal{L}(H, H)$. Пусть A, B, C, G — плотно определённые замкнутые операторы:

$$A : \mathcal{D}(A) \subset H \to H, \quad B : \mathcal{D}(B) \subset H \to H, \quad G : \mathcal{D}(G) \subset H_0 \to H_0, \quad C : \mathcal{D}(C) \subset H \to H_0,$$

причём A, B, G — самосопряжённые положительно определённые операторы. Будем считать, что введённые операторы удовлетворяют следующим гипотезам:

1) $\mathcal{D}(A) = \mathcal{D}(B)$;
2) оператор-функция $C^* \exp(-tG)CA^{-1}$ сильно непрерывна на $\mathbb{R}_+ := [0, +\infty)$.

Из этих предположений, неравенства Гайнца (см. [8, гл. 1, § 7, теорема 7.1]) и полярного разложения замкнутого оператора (см. [7, гл. 6, § 2, п. 7]) следует, в частности, что $\mathcal{D}(A^{1/2}) = \mathcal{D}(B^{1/2}) \subset \mathcal{D}(C)$. Обозначим через $\omega_G := \inf\{\lambda \in \sigma(G\}$, где $\sigma(G)$ — спектр оператора G, нижнюю грань оператора G и предположим, что выполнена третья гипотеза:

3) существует $\gamma > 0$ такое, что

$$\|B^{1/2}u\|_H^2 - \omega_G^{-1}\|Cu\|_{H_0}^2 \geqslant \gamma\|A^{1/2}u\|_H^2 \quad \forall\, u \in \mathcal{D}(A^{1/2}). \tag{1.1}$$

По операторам A, B, C, G с учётом гипотез 1)–3) построим ограниченные операторы Q, Q_0, T и операторный пучок (оператор-функцию) $L(\lambda)$ по следующим формулам:

$$\begin{gathered} Q := B^{1/2}A^{-1/2} \in \mathcal{L}(H), \quad Q_0 := CA^{-1/2} \in \mathcal{L}(H, H_0), \quad T := Q^*Q - Q_0^*G^{-1}Q_0, \\ L(\lambda) := I - \lambda A^{-1} - \frac{1}{\lambda}\left(Q^*Q - Q_0^*G^{-1}Q_0\right) + Q_0^*(G - \lambda)^{-1}G^{-1}Q_0. \end{gathered} \tag{1.2}$$

Замечание 1.1. Отметим, что гипотеза 3) призвана обеспечить положительную определённость оператора T в (1.2) и в конкретной ситуации может быть ослаблена (см. (3.4)).

В гильбертовом пространстве H рассмотрим задачу Коши для полного интегро-дифференциального операторного уравнения второго порядка:

$$\frac{d^2u}{dt^2} = -A\frac{du}{dt} - Bu + \int_0^t C^* \exp\bigl(-G(t-s)\bigr)Cu(s)\,ds + f(t), \quad u(0) = u^0, \quad u'(0) = u^1. \tag{1.3}$$

Определение 1.1. *Решением задачи Коши* (1.3) назовём функцию $u \in C^2(\mathbb{R}_+; H)$ такую, что $u(t) \in \mathcal{D}(B)$ $u'(t) \in \mathcal{D}(A)$ при $t \in \mathbb{R}_+$; $Bu, Au' \in C(\mathbb{R}_+; H)$; выполнены начальные условия и уравнение из (1.3) для любого $t \in \mathbb{R}_+$.

Теорема 1.1.

1) *Если* $u^0, u^1 \in \mathcal{D}(A)$, *а функция* f *локально гёльдерова, то задача Коши* (1.3) *имеет единственное решение* (*в смысле определения* 1.1).
2) *Будем считать дополнительно, что*

$$f(t) = g(t) + \sum_{k=0}^{n} e^{-i\sigma_k t} f_k(t), \quad \sigma_0 = 0, \quad 0 \neq \sigma_k \in \mathbb{R} \quad (k = \overline{1,n}).$$

Если $f_k \in C^1(\mathbb{R}_+; H)$, $k = \overline{0, n}$, *а функция* g *локально гёльдерова, то существуют константы* $\omega > 0$, $M_1 > 0$ *и* $M_2 > 0$ *такие, что для решения задачи Коши* (1.3) *выполнено неравенство*

$$\left(\left\|A^{1/2}\left(u(t) - A^{-1/2}T^{-1}A^{-1/2}f_0(t) + \sum_{k=1}^{n} \frac{e^{-i\sigma_k t}}{i\sigma_k} A^{-1/2}L^{-1}(i\sigma_k)A^{-1/2}f_k(t)\right)\right\|^2 + \right.$$
$$\left. + \left\|u'(t) - \sum_{k=1}^{n} e^{-i\sigma_k t} A^{-1/2}L^{-1}(i\sigma_k)A^{-1/2}f_k(t)\right\|^2\right)^{1/2} \leqslant$$
$$\leqslant M_1 e^{-\omega t}\left(\|A^{1/2}u^0\| + \|u^1\| + \sum_{k=0}^{n}\|f_k(0)\|\right) + M_2\int_0^t e^{-\omega(t-s)}\left(\|g(s)\| + \sum_{k=0}^{n}\|f_k'(s)\|\right) ds. \qquad (1.4)$$

3) *Если* $\|g(t)\| = o(1)$, $\|f_k'(t)\| = o(1)$, $k = \overline{0, n}$, *при* $t \to +\infty$, *то тогда и*

$$\left\|A^{1/2}\left(u(t) - A^{-1/2}T^{-1}A^{-1/2}f_0(t) + \sum_{k=1}^{n} \frac{e^{-i\sigma_k t}}{i\sigma_k} A^{-1/2}L^{-1}(i\sigma_k)A^{-1/2}f_k(t)\right)\right\|^2 +$$
$$+ \left\|u'(t) - \sum_{k=1}^{n} e^{-i\sigma_k t} A^{-1/2}L^{-1}(i\sigma_k)A^{-1/2}f_k(t)\right\|^2 = o(1). \qquad (1.5)$$

2. Доказательство теоремы

Идея доказательства теоремы 1.1 заключается в установлении связи между решениями задачи Коши (1.3) и решениями задачи Коши для некоторого дифференциально-операторного уравнения первого порядка, использовании полугруппы, связанной с этим уравнением первого порядка. Всё доказательство разобьём на несколько шагов, сформулированных в виде лемм.

2.1. Доказательство утверждения о разрешимости. Начнём со следующей простой леммы о свойствах операторов Q, Q_0 и T.

Лемма 2.1. *Имеют место формулы* $Q^*|_{\mathcal{D}(B^{1/2})} = A^{-1/2}B^{1/2}$, $Q_0^*|_{\mathcal{D}(C^*)} = A^{-1/2}C^*$, *оператор* T *положительно определён.*

Доказательство. Для любых $u \in H$, $v \in \mathcal{D}(B^{1/2})$ с учётом (1.2) имеем

$$(Qu, v)_H = (u, Q^*v)_H = (u, A^{-1/2}B^{1/2}v)_H.$$

Отсюда следует, что $Q^*|_{\mathcal{D}(B^{1/2})} = A^{-1/2}B^{1/2}$. Аналогично доказывается вторая формула.

Докажем, что оператор $T \in \mathcal{L}(H)$ (см. (1.2)) положительно определён. Для любых $u \in H$ с учётом гипотезы 3) (см. (1.1)) имеем

$$(Tu, u)_H = ((Q^*Q - Q_0^*G^{-1}Q_0)u, u)_H = \|Qu\|_H^2 - (G^{-1}Q_0u, Q_0u)_{H_0} \geqslant \|Qu\|_H^2 - \omega_G^{-1}\|Q_0u\|_{H_0}^2 =$$
$$= \|B^{1/2}(A^{-1/2}u)\|_H^2 - \omega_G^{-1}\|C(A^{-1/2}u)\|_{H_0}^2 \geqslant \gamma\|A^{1/2}(A^{-1/2}u)\|_H^2 = \gamma\|u\|_H^2.$$

Лемма доказана. □

Пусть $u^0, u^1 \in \mathcal{D}(A)$ и задача Коши (1.3) имеет решение $u(t)$. Перепишем уравнение из (1.3) в следующей эквивалентной форме:

$$\frac{d^2u}{dt^2} = -A^{1/2}\left(A^{1/2}\frac{du}{dt} + (A^{-1/2}B^{1/2})(B^{1/2}A^{-1/2})A^{1/2}u - \right.$$
$$\left. - \int_0^t (A^{-1/2}C^*)\exp\big(-G(t-s)\big)(CA^{-1/2})A^{1/2}u(s)\,ds\right) + f(t). \qquad (2.1)$$

Из (1.2) и леммы 2.1 следует, что функция $u(t)$ будет также решением следующего уравнения:

$$\frac{d^2u}{dt^2} = -A^{1/2}\left(A^{1/2}\frac{du}{dt} + Q^*QA^{1/2}u - Q_0^*\int\limits_0^t \exp\big(-G(t-s)\big)Q_0A^{1/2}u(s)\,ds\right) + f(t). \tag{2.2}$$

По условию $Bu' \in C(\mathbb{R}_+;H)$ (см. определение 1.1). Из гипотезы 1) и представления $A^{1/2}u'(t) = (A^{1/2}B^{-1/2})B^{-1/2}Bu'(t)$ следует, что $A^{1/2}u' \in C(\mathbb{R}_+;H)$. Отсюда и из [3, гл. 1, §1, лемма 1.5] следует, что $(A^{1/2}u(t))' = A^{1/2}u'(t)$. Из этого соотношения и из $u^0 \in \mathcal{D}(A) \subset \mathcal{D}(A^{1/2})$ теперь можно вывести следующую формулу интегрирования по частям:

$$\int\limits_0^t \exp\big(-G(t-s)\big)Q_0A^{1/2}u(s)\,ds =$$

$$= G^{-1}Q_0A^{1/2}u(t) - \exp(-Gt)G^{-1}Q_0A^{1/2}u^0 - \int\limits_0^t \exp\big(-G(t-s)\big)G^{-1}Q_0A^{1/2}u'(s)\,ds.$$

Преобразуем уравнение (2.2) с помощью полученной формулы. С учётом формулы для оператора T (см. (1.2)) из последнего соотношения получим, что (2.2) эквивалентно уравнению

$$\frac{d^2u}{dt^2} = -A^{1/2}\Bigg(A^{1/2}\frac{du}{dt} + T^{1/2}(T^{1/2}A^{1/2}u) + Q_0^*\exp(-Gt)G^{-1}Q_0A^{1/2}u^0 +$$

$$+ Q_0^*G^{-1/2}\int\limits_0^t \exp\big(-G(t-s)\big)G^{-1/2}Q_0A^{1/2}u'(s)\,ds\Bigg) + f(t). \tag{2.3}$$

Определим функции

$$z(t) := u'(t), \quad v(t) := T^{1/2}A^{1/2}u(t), \quad w(t) := \int\limits_0^t \exp\big(-G(t-s)\big)G^{-1/2}Q_0A^{1/2}u'(s)\,ds. \tag{2.4}$$

Функции $z(t)$, $v(t)$, $w(t)$ непрерывно дифференцируемы на $\mathbb{R}_+$. Из (2.3) следует, что они удовлетворяют следующей системе уравнений и начальных условий:

$$\begin{cases} \dfrac{dz}{dt} = -A^{1/2}\big(A^{1/2}z + T^{1/2}v + Q_0^*G^{-1/2}w + Q_0^*\exp(-Gt)G^{-1}Q_0A^{1/2}u^0\big) + f(t), \\ \dfrac{dv}{dt} = -\big(-T^{1/2}A^{1/2}z\big), \\ \dfrac{dw}{dt} = -\big(-G^{-1/2}Q_0A^{1/2}z + Gw\big), \end{cases} \tag{2.5}$$
$$z(0) = u^1, \quad v(0) = T^{1/2}A^{1/2}u^0, \quad w(0) = 0.$$

Систему (2.5) перепишем в виде задачи Коши для дифференциально-операторного уравнения первого порядка в гильбертовом пространстве $\mathcal{H} := H \oplus H \oplus H_0$:

$$\frac{d\xi}{dt} = -\mathcal{A}\big(\xi + \xi(u^0,t)\big) + \mathcal{F}(t), \quad \xi(0) = \xi^0. \tag{2.6}$$

Здесь

$$\mathcal{A} := \begin{pmatrix} A^{1/2} & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & G^{1/2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I & T^{1/2} & Q_0^*G^{-1} \\ -T^{1/2} & 0 & 0 \\ -G^{-1}Q_0 & 0 & I \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A^{1/2} & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & G^{1/2} \end{pmatrix}, \tag{2.7}$$

$$\mathcal{D}(\mathcal{A}) := \big\{\xi = (z;v;w)^\tau \in \mathcal{H} : z + A^{-1/2}T^{1/2}v + A^{-1/2}Q_0^*G^{-1/2}w \in \mathcal{D}(A), \ \ w \in \mathcal{D}(G)\big\},$$

$$\xi(u^0,t) := (0;T^{-1/2}Q_0^*\exp(-Gt)G^{-1}Q_0A^{1/2}u^0;0)^\tau, \ \ \xi^0 := (u^1;T^{1/2}A^{1/2}u^0;0)^\tau, \ \ \mathcal{F}(t) := (f(t);0;0)^\tau.$$

Осуществим в задаче (2.6) замену $\zeta(t) := \xi(t) + \xi(u^0, t)$. В результате получим следующую основную задачу Коши:

$$\frac{d\zeta}{dt} = -\mathcal{A}\zeta + \xi'(u^0, t) + \mathcal{F}(t), \quad \zeta(0) = \xi^0 + \xi(u^0, 0). \tag{2.8}$$

Определение 2.1. *Решением задачи Коши* (2.8) назовём функцию $\zeta \in C^1(\mathbb{R}_+; \mathcal{H})$ такую, что $\zeta(t) \in \mathcal{D}(\mathcal{A})$ при $t \in \mathbb{R}_+$, $\mathcal{A}\zeta \in C(\mathbb{R}_+; \mathcal{H})$, выполнено начальное условие и уравнение из (2.8) для любого $t \in \mathbb{R}_+$.

Таким образом, если $u^0, u^1 \in \mathcal{D}(A)$ и задача Коши (1.3) имеет решение, то по этому решению однозначно строится решение задачи Коши (2.8).

Замечание 2.1. В дальнейших вычислениях понадобятся факторизации Шура—Фробениуса операторных блоков с ограниченными операторными коэффициентами и формулы обращения этих блоков. Пусть E_1, E_2 банаховы пространства, $A_{kl} \in \mathcal{L}(E_l, E_k)$ $(k, l = 1, 2)$, $A_{22}^{-1} \in \mathcal{L}(E_2)$, $D_1 := A_{11} - A_{12}A_{22}^{-1}A_{21}$. Если $D_1^{-1} \in \mathcal{L}(E_1)$, то существует

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}^{-1} &= \left[\begin{pmatrix} I & A_{12}A_{22}^{-1} \\ 0 & I \end{pmatrix}\begin{pmatrix} D_1 & 0 \\ 0 & A_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I & 0 \\ A_{22}^{-1}A_{21} & I \end{pmatrix}\right]^{-1} = \\ &= \begin{pmatrix} D_1^{-1} & -D_1^{-1}A_{12}A_{22}^{-1} \\ -A_{22}^{-1}A_{21}D_1^{-1} & A_{22}^{-1}\big(A_{22} + A_{21}D_1^{-1}A_{12}\big)A_{22}^{-1} \end{pmatrix} \in \mathcal{L}(E_1 \times E_2). \end{aligned} \tag{2.9}$$

Пусть $A_{11}^{-1} \in \mathcal{L}(E_1)$, $D_2 := A_{22} - A_{21}A_{11}^{-1}A_{12}$. Если $D_2^{-1} \in \mathcal{L}(E_2)$, то существует

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}^{-1} &= \left[\begin{pmatrix} I & 0 \\ A_{21}A_{11}^{-1} & I \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A_{11} & 0 \\ 0 & D_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I & A_{11}^{-1}A_{12} \\ 0 & I \end{pmatrix}\right]^{-1} = \\ &= \begin{pmatrix} A_{11}^{-1}\big(A_{11} + A_{12}D_2^{-1}A_{21}\big)A_{11}^{-1} & -A_{11}^{-1}A_{12}D_2^{-1} \\ -D_2^{-1}A_{21}A_{11}^{-1} & D_2^{-1} \end{pmatrix} \in \mathcal{L}(E_1 \times E_2). \end{aligned} \tag{2.10}$$

В следующих двух леммах установим, что оператор $-\mathcal{A}$ является генератором равномерно экспоненциально устойчивой голоморфной полугруппы.

Лемма 2.2. *Оператор $\mathcal{A}$ плотно определён, замкнут, непрерывно обратим, т. е. существует $\mathcal{A}^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$, и справедливо представление*

$$\mathcal{A}^{-1} = \begin{pmatrix} A^{-1/2} & 0 & 0 \\ 0 & I & -T^{-1/2}Q_0^*G^{-1} \\ 0 & 0 & G^{-1/2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -T^{-1/2} & 0 \\ T^{-1/2} & T^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & I \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A^{-1/2} & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \\ 0 & -G^{-1}Q_0T^{-1/2} & G^{-1/2} \end{pmatrix}. \tag{2.11}$$

Доказательство. Докажем, что оператор $\mathcal{A}$ непрерывно обратим, и выведем формулу (2.11). Отсюда будет следовать, что оператор $\mathcal{A}$ замкнут на своей естественной области определения $\mathcal{D}(\mathcal{A})$. Плотная определённость оператора $\mathcal{A}$ последует из включения $(\mathcal{A}^*)^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$.

Применим факторизацию (2.10) к обращению среднего операторного блока в разложении (2.3). С учётом леммы 2.1 найдём, что существует

$$\begin{aligned}&\begin{pmatrix} I & T^{1/2} & Q_0^*G^{-1} \\ -T^{1/2} & 0 & 0 \\ -G^{-1}Q_0 & 0 & I \end{pmatrix}^{-1} = \\ &= \left[\begin{pmatrix} I & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \\ 0 & G^{-1}Q_0T^{-1/2} & I \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I & T^{1/2} & 0 \\ -T^{1/2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I & 0 & 0 \\ 0 & I & T^{-1/2}Q_0^*G^{-1} \\ 0 & 0 & I \end{pmatrix}\right]^{-1} = \\ &= \begin{pmatrix} I & 0 & 0 \\ 0 & I & -T^{-1/2}Q_0^*G^{-1} \\ 0 & 0 & I \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -T^{-1/2} & 0 \\ T^{-1/2} & T^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & I \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \\ 0 & -G^{-1}Q_0T^{-1/2} & I \end{pmatrix} \in \mathcal{L}(\mathcal{H}).\end{aligned}$$

Отсюда и из (2.3) следует (2.11).

Непосредственными вычислениями проверяется, что

$$\mathcal{A}^* = \begin{pmatrix} A^{1/2} & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & G^{1/2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & -T^{1/2} & -Q_0^* G^{-1} \\ T^{1/2} & 0 & 0 \\ G^{-1}Q_0 & 0 & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A^{1/2} & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & G^{1/2} \end{pmatrix},$$

$$\mathcal{D}(\mathcal{A}^*) = \bigl\{\xi = (z; v; w)^\tau \in \mathcal{H} : z - A^{-1/2}T^{1/2}v - A^{-1/2}Q_0^* G^{-1/2} w \in \mathcal{D}(A), \ \ w \in \mathcal{D}(G)\bigr\}.$$

Как и для оператора $\mathcal{A}$, доказывается, что существует $(\mathcal{A}^*)^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$. □

Лемма 2.3. *Оператор $-\mathcal{A}$ является генератором голоморфной полугруппы. Для числовой области значений $\mathcal{W}(\mathcal{A})$ оператора $\mathcal{A}$ выполнено включение*:

$$\mathcal{W}(\mathcal{A}) \subset \bigcap_{\alpha > 0} \bigl\{\lambda \in \mathbb{C} : \bigl|\arg(\lambda + \alpha^2 \|(T^{1/2}, Q_0^* G^{-1/2})\|^2)\bigr| \leqslant \operatorname{arctg} \alpha^{-1}\bigr\}. \tag{2.12}$$

Доказательство. По лемме 2.2 оператор $\mathcal{A}$ плотно определён и замкнут. Таким образом, остаётся доказать, что оператор $\mathcal{A}$ — максимальный секториальный (см. [7, гл. 9, § 1, теорема 1.24]).

Итак, исследуем числовую область значений $\mathcal{W}(\mathcal{A})$ оператора $\mathcal{A}$. Пусть $\xi = (z; v; w)^\tau \in \mathcal{D}(\mathcal{A})$, тогда $z \in \mathcal{D}(A^{1/2})$ и из факторизации (2.7) оператора $\mathcal{A}$ в симметричной форме получим, что

$$\operatorname{Re}(\mathcal{A}\xi, \xi)_{\mathcal{H}} = \operatorname{Re}\left(\begin{pmatrix} I & T^{1/2} & Q_0^* G^{-1} \\ -T^{1/2} & 0 & 0 \\ -G^{-1}Q_0 & 0 & I \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A^{1/2}z \\ v \\ G^{1/2}w \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} A^{1/2}z \\ v \\ G^{1/2}w \end{pmatrix}\right)_{\mathcal{H}} = \|A^{1/2}z\|_H^2 + \|G^{1/2}w\|_{H_0}^2,$$

$$\begin{aligned}|\operatorname{Im}(\mathcal{A}\xi, \xi)_{\mathcal{H}}| &= \bigl|\operatorname{Im}\bigl((T^{1/2}v + Q_0^* G^{-1} G^{1/2} w, A^{1/2}z)_H - (T^{1/2}A^{1/2}z, v)_H - (G^{-1}Q_0 A^{1/2}z, G^{1/2}w)_{H_0}\bigr)\bigr| = \\ &= 2\bigl|\operatorname{Im}(T^{1/2}v + Q_0^* G^{-1/2} w, A^{1/2}z)_H\bigr| \leqslant 2\|T^{1/2}v + Q_0^* G^{-1/2}w\|_H \|A^{1/2}z\|_H.\end{aligned}$$

Из этих оценок при любом $\alpha > 0$ следует (см. [7, гл. 5, § 3, пример 3.34] и [26, лемма 2]), что

$$\begin{aligned}\operatorname{Re}(\mathcal{A}\xi, \xi)_{\mathcal{H}} - \alpha|\operatorname{Im}(\mathcal{A}\xi, \xi)_{\mathcal{H}}| &\geqslant \|A^{1/2}z\|_H^2 + \|G^{1/2}w\|_{H_0}^2 - 2\alpha\|T^{1/2}v + Q_0^* G^{-1/2}w\|_H \|A^{1/2}z\|_H = \\ &= \bigl(\|A^{1/2}z\| - \alpha\|T^{1/2}v + Q_0^* G^{-1/2}w\|_H\bigr)^2 + \|G^{1/2}w\|_{H_0}^2 - \alpha^2\|T^{1/2}v + Q_0^* G^{-1/2}w\|_H^2 \geqslant \\ &\geqslant \omega_G \|w\|_{H_0}^2 - \alpha^2\|(T^{1/2}, Q_0^* G^{-1/2})\|^2\bigl(\|v\|_H^2 + \|w\|_{H_0}^2\bigr) \geqslant -\alpha^2\|(T^{1/2}, Q_0^* G^{-1/2})\|^2\|\xi\|_{\mathcal{H}}^2.\end{aligned}$$

Таким образом,

$$\operatorname{Re}\bigl((\mathcal{A} + \alpha^2\|(T^{1/2}, Q_0^* G^{-1/2})\|^2)\xi, \xi\bigr)_{\mathcal{H}} - \alpha\bigl|\operatorname{Im}\bigl((\mathcal{A} + \alpha^2\|(T^{1/2}, Q_0^* G^{-1/2})\|^2)\xi, \xi\bigr)_{\mathcal{H}}\bigr| \geqslant 0,$$

или

$$\frac{\bigl|\operatorname{Im}\bigl((\mathcal{A} + \alpha^2\|(T^{1/2}, Q_0^* G^{-1/2})\|^2)\xi, \xi\bigr)_{\mathcal{H}}\bigr|}{\operatorname{Re}\bigl((\mathcal{A} + \alpha^2\|(T^{1/2}, Q_0^* G^{-1/2})\|^2)\xi, \xi\bigr)_{\mathcal{H}}} \leqslant \frac{1}{\alpha} \quad \forall\, 0 \neq \xi \in \mathcal{D}(\mathcal{A}), \quad \alpha > 0.$$

Отсюда следует включение (2.12) для числовой области значений $\mathcal{W}(\mathcal{A})$ оператора $\mathcal{A}$:

$$\mathcal{W}(\mathcal{A}) \subset \bigcap_{\alpha > 0} \bigl\{\lambda \in \mathbb{C} : \bigl|\arg(\lambda + \alpha^2 \|(T^{1/2}, Q_0^* G^{-1/2})\|^2)\bigr| \leqslant \operatorname{arctg} \alpha^{-1}\bigr\}.$$

Таким образом, оператор $\mathcal{A}$ секториальный с вершиной сектора в точке $-\alpha^2\|(T^{1/2}, Q_0^* G^{-1/2})\|^2$ и полураствором сектора $\operatorname{arctg}\alpha^{-1}$ при любом $\alpha > 0$.

Для максимальности оператора $\mathcal{A}$ достаточно установить, что $\rho(\mathcal{A}) \cap \{\lambda < 0\} \neq \varnothing$, где $\rho(\mathcal{A})$ — резольвентное множество оператора $\mathcal{A}$. Из факторизации (2.7) оператора $\mathcal{A}$ в симметричной форме имеем

$$\mathcal{A} - \lambda = \begin{pmatrix} A^{1/2} & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & G^{1/2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I - \lambda A^{-1} & T^{1/2} & Q_0^* G^{-1} \\ -T^{1/2} & -\lambda & 0 \\ -G^{-1}Q_0 & 0 & I - \lambda G^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A^{1/2} & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & G^{1/2} \end{pmatrix}.$$

Применим факторизацию (2.9) к обращению среднего операторного блока в этом разложении. При $\lambda \notin \sigma(G) \cup \{0\}$ с учётом обозначения (1.2) для операторного пучка $L(\lambda)$ найдём, что

$$\mathcal{A} - \lambda = \begin{pmatrix} A^{1/2} & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & G^{1/2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & -\lambda^{-1}T^{1/2} & Q_0^* \mathcal{R}_\lambda(G) \\ 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & I \end{pmatrix} \times$$

$$\times \begin{pmatrix} L(\lambda) & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda & 0 \\ 0 & 0 & I-\lambda G^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & 0 & 0 \\ \lambda^{-1}T^{1/2} & I & 0 \\ -\mathcal{R}_\lambda(G)Q_0 & 0 & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A^{1/2} & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & G^{1/2} \end{pmatrix}. \tag{2.13}$$

Очевидно, что если $\lambda < 0$, то $L(\lambda) \gg 0$ и, следовательно, существует $L^{-1}(\lambda) \in \mathcal{L}(H)$. Из (2.13) при $\lambda < 0$ теперь найдём, что существует $(\mathcal{A}-\lambda)^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$, а значит, $\{\lambda < 0\} \subset \rho(\mathcal{A})$. □

Замечание 2.2. Из (2.13) следует формула для резольвенты оператора $\mathcal{A}$:

$$\mathcal{R}_\lambda(\mathcal{A}) = \begin{pmatrix} A^{-1/2} & 0 & 0 \\ -\lambda^{-1}T^{1/2} & I & 0 \\ G^{-1/2}\mathcal{R}_\lambda(G)Q_0 & 0 & G^{-1/2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} L^{-1}(\lambda) & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & (I-\lambda G^{-1})^{-1} \end{pmatrix} \times$$

$$\times \begin{pmatrix} A^{-1/2} & \lambda^{-1}T^{1/2} & -Q_0^*\mathcal{R}_\lambda(G)G^{-1/2} \\ 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & G^{-1/2} \end{pmatrix}, \tag{2.14}$$

$$L(\lambda) = I - \lambda A^{-1} - \lambda^{-1}T + Q_0^*\mathcal{R}_\lambda(G)G^{-1}Q_0,$$

при всех $\lambda \notin \sigma(L(\lambda)) \cup \sigma(G) \cup \{0\}$, где $\sigma(L(\lambda))$ — спектр операторного пучка $L(\lambda)$.

Лемма 2.4. *Голоморфная полугруппа $\mathcal{U}(t)$, генерируемая оператором $-\mathcal{A}$, является равномерно экспоненциально устойчивой, т. е. существуют $\omega > 0$ и $M \geqslant 1$ такие, что*

$$\|\mathcal{U}(t)\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H})} \leqslant Me^{-\omega t} \quad \forall t \in \mathbb{R}_+. \tag{2.15}$$

Доказательство. Известно (см., например, [16, гл. 4, § 3, следствие 3.12]), что если $\mathcal{U}(t)$ голоморфная полугруппа, то её тип совпадает со спектральной границей $s(-\mathcal{A}) = \sup\{\mathrm{Re}\lambda : \lambda \in \sigma(-\mathcal{A})\}$ генератора $-\mathcal{A}$. Таким образом, существование чисел $\omega > 0$, $M \geqslant 1$ и оценки (2.15) будет следовать из неравенства $s(-\mathcal{A}) < 0$ или, что эквивалентно, из неравенства $\inf\{\mathrm{Re}\lambda : \lambda \in \sigma(\mathcal{A})\} > 0$.

Из формулы (2.12), переписанной в виде

$$\mathcal{W}(\mathcal{A} + \alpha^2\|(T^{1/2}, Q_0^*G^{-1/2})\|^2) \subset \bigl\{\lambda \in \mathbb{C} : |\arg\lambda| \leqslant \operatorname{arctg}\alpha^{-1}\bigr\} \quad \forall \alpha > 0,$$

построением огибающих соответствующих семейств прямых найдём, что числовая область значений оператора $\mathcal{A}$ содержится в параболической области:

$$\mathcal{W}(\mathcal{A}) \subset \bigl\{\lambda \in \mathbb{C} : |\mathrm{Im}\lambda| \leqslant 2\|(T^{1/2}, Q_0^*G^{-1/2})\|(\mathrm{Re}\lambda)^{1/2}\bigr\}. \tag{2.16}$$

Из $\mathcal{A}^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ (см. лемму 2.2) следует, что $0 \in \rho(\mathcal{A})$. Теперь, учитывая, что $\rho(\mathcal{A})$ — открытое множество и $\sigma(\mathcal{A}) \subset \overline{\mathcal{W}(\mathcal{A})}$, из (2.16) найдём, что $\inf\{\mathrm{Re}\lambda : \lambda \in \sigma(\mathcal{A})\} > 0$. □

Лемма 2.5. *Если $u^0, u^1 \in \mathcal{D}(A)$, а функция f локально гёльдерова, то задача Коши* (1.3) *имеет единственное решение* (*в смысле определения* 1.1).

Доказательство. Покажем, что из условий леммы следует однозначная разрешимость задачи Коши (2.8). Будем искать решение задачи Коши (2.8) в виде $\zeta(t) = \zeta_1(t) + \zeta_2(t)$, где $\zeta_1(t)$, $\zeta_2(t)$ — решения следующих начальных задач:

$$\frac{d\zeta_1}{dt} = -\mathcal{A}\zeta_1 + \mathcal{F}(t), \quad \zeta_1(0) = \xi^0 + \xi(u^0, 0), \tag{2.17}$$

$$\frac{d\zeta_2}{dt} = -\mathcal{A}\zeta_2 + \xi'(u^0, t), \quad \zeta_2(0) = 0. \tag{2.18}$$

Проверим выполнение условий теоремы о разрешимости задачи Коши (2.17) (см. [3, гл. 2, § 1, теорема 1.4]). Из (2.7) и (1.2) найдём, что

$$\zeta_1(0) = \xi^0 + \xi(u^0, 0) = (u^1; T^{1/2}A^{1/2}u^0; 0)^\tau + (0; T^{-1/2}Q_0^*G^{-1}Q_0A^{1/2}u^0; 0)^\tau =$$
$$= (u^1; T^{-1/2}Q^*QA^{1/2}u^0; 0)^\tau \in \mathcal{D}(\mathcal{A}),$$

так как (см. определение области определения $\mathcal{D}(\mathcal{A})$ в (2.7)), учитывая лемму 2.1,

$$u^1 + A^{-1/2}T^{1/2}(T^{-1/2}Q^*QA^{1/2}u^0) = u^1 + A^{-1/2}Q^*QA^{1/2}u^0 = u^1 + A^{-1/2}Q^*B^{1/2}u^0 =$$
$$= u^1 + A^{-1/2}Q^*|_{\mathcal{D}(B^{1/2})}B^{-1/2}(BA^{-1})Au^0 = u^1 + A^{-1}(BA^{-1})Au^0 \in \mathcal{D}(A).$$

Далее, если функция f локально гёльдерова, т. е. для любого $\tau \in \mathbb{R}_+$ существуют $K = K(\tau) > 0$, $k = k(\tau) \in (0, 1]$ такие, что

$$\|f(t) - f(s)\|_H \leqslant K|t - s|^k \quad \forall\, t, s \in [0, \tau],$$

то, очевидно, и функция $\mathcal{F}$ (см. (2.7)) локально гёльдерова. Таким образом, задача Коши (2.17) имеет единственное решение в смысле определения 2.1.

Проверим теперь выполнение условий теоремы о разрешимости задачи Коши (2.18) (см. [3, гл. 2, § 1, теорема 1.3]). Очевидно, что $\zeta_2(0) = 0 \in \mathcal{D}(\mathcal{A})$. Покажем, что $\xi'(u^0, t) \in \mathcal{D}(\mathcal{A})$ при всех $t \in \mathbb{R}_+$ и $\mathcal{A}\xi'(u^0, \cdot) \in C(\mathbb{R}_+; \mathcal{H})$. Из (2.7) найдём, что

$$\xi'(u^0, t) = (0; T^{-1/2}Q_0^* \exp(-Gt)Q_0A^{1/2}u^0; 0)^\tau.$$

Отсюда, учитывая гипотезу 2) и формулу для $\mathcal{D}(\mathcal{A})$ (см. (2.7)), имеем при любом $t \in \mathbb{R}_+$

$$\begin{aligned} A^{-1/2}T^{1/2}(T^{-1/2}Q_0^* \exp(-Gt)Q_0A^{1/2}u^0) &= A^{-1/2}Q_0^* \exp(-Gt)CA^{-1}(Au^0) = \\ &= A^{-1/2}Q_0^*|_{\mathcal{D}(C^*)} \exp(-Gt)CA^{-1}(Au^0) = A^{-1}C^* \exp(-Gt)CA^{-1}(Au^0) \in \mathcal{D}(A), \end{aligned}$$

т. е. $\xi'(u^0, t) \in \mathcal{D}(\mathcal{A})$ при всех $t \in \mathbb{R}_+$. Теперь непосредственные вычисления показывают, что

$$\mathcal{A}\xi'(u^0, t) = (0; C^* \exp(-Gt)CA^{-1}(Au^0); 0)^\tau$$

— непрерывная на $\mathbb{R}_+$ функция со значениями в $\mathcal{H}$. Таким образом, задача Коши (2.18), а значит, и задача Коши (2.8), имеет единственное решение в смысле определения 2.1.

Пусть $\zeta(t)$ — (единственное) решение задачи Коши (2.8). Введём функцию $\xi(t) := \zeta(t) - \xi(u^0, t)$. Тогда $\xi(t)$ есть решение задачи Коши (2.6) в том смысле, что $\xi \in C^1(\mathbb{R}_+; \mathcal{H})$, $\xi(t) + \xi(u^0, t) \in \mathcal{D}(\mathcal{A})$ при всех $t \in \mathbb{R}_+$ и $\mathcal{A}(\xi + \xi(u^0, \cdot)) \in C(\mathbb{R}_+; \mathcal{H})$, выполнено начальное условие и уравнение из (2.6). Последнее эквивалентно тому, что функции $z(t)$, $v(t)$, $w(t)$, являющиеся координатами функции $\xi(t) = (z(t); v(t); w(t))^\tau$, решают систему (2.5).

Введём функцию $u(t) := A^{-1/2}T^{-1/2}v(t)$, исходя из формул (2.4), и покажем, что эта функция и есть (единственное) решение исходной задачи Коши (1.3).

Из второго уравнения в (2.5) следует, что $u'(t) = z(t)$, а значит, $u \in C^2(\mathbb{R}_+; H)$. Из последнего равенства следует, что $u'(0) = z(0) = u^1$, а из определения функции u — что $u(0) = A^{-1/2}T^{-1/2}v(0)$ $= A^{-1/2}T^{-1/2}(T^{1/2}A^{1/2}u^0) = u^0$, т. е. начальные условия в (1.3) выполнены.

Допустим, что удастся показать, что $z(t) \in \mathcal{D}(A)$ при всех $t \in \mathbb{R}_+$ и $Az \in C(\mathbb{R}_+; H)$. Отсюда будет следовать, что $Au' \in C(\mathbb{R}_+; H)$. Из $Au' \in C(\mathbb{R}_+; H)$ и $u(0) = u^0 \in \mathcal{D}(A)$ следует (см. [3, гл. 1, § 1, лемма 1.5]), что $u(t) \in \mathcal{D}(A)$ при всех $t \in \mathbb{R}_+$ и $Au \in C(\mathbb{R}_+; H)$. Отсюда тогда получим, что $Bu \in C(\mathbb{R}_+; H)$, так как $Bu(t) = (BA^{-1})Au(t)$ и $BA^{-1} \in \mathcal{L}(H)$ в силу гипотезы 1). Непосредственными вычислениями проверяется, что функция u, удовлетворяющая уравнению (2.2), будет также решением уравнения (2.1). Согласно определению 1.1 построенная функция u будет (единственным) решением задачи Коши (1.3).

Итак, найдём из второго и третьего соотношения в (2.5) функции v и w:

$$v(t) = \int_0^t T^{1/2}A^{1/2}z(s)\,ds + T^{1/2}A^{1/2}u^0, \quad w(t) = \int_0^t \exp\big(-G(t-s)\big)G^{-1/2}Q_0A^{1/2}z(s)\,ds.$$

Отсюда и из первого соотношения в (2.5) получим, что на $\mathbb{R}_+$ непрерывна функция

$$A\Big(z(t) + \int_0^t R(t-s)z(s)\,ds + R(t)u^0\Big), \ \text{ где } \ R(t) := A^{-1/2}\big(T + Q_0^* \exp(-Gt)G^{-1}Q_0\big)A^{1/2}. \tag{2.19}$$

Это утверждение перепишем в следующей эквивалентной форме:

$$z(t) + \int_0^t R(t-s)z(s)\,ds = g(t) - R(t)u^0, \quad Ag \in C(\mathbb{R}_+; H). \tag{2.20}$$

Определим на $\mathcal{D}(A)$ норму $\|u\|_{E(A)} := \|Au\|_H$, эквивалентную норме графика, и превратим его таким образом в банахово пространство $E(A)$. Тогда (2.20) можно рассматривать как уравнение Вольтерра второго рода в $E(A)$, если только функция $R(t)u^0$ принимает значения из $E(A)$.

Покажем, что оператор-функция $R(t)$ сильно непрерывна на $\mathbb{R}_+$ со значениями в $E(A)$. Отсюда и из $u^0 \in \mathcal{D}(A)$ будет следовать, что $g - R(\cdot)u^0 \in C(\mathbb{R}_+; E(A))$. Отсюда, в свою очередь, получим, что уравнение (2.20) имеет единственное решение $z \in C(\mathbb{R}_+; E(A))$, что докажет лемму.

Для любого $z \in E(A) = \mathcal{D}(A)$ и $t_0 \in \mathbb{R}_+$ с учётом (1.2), (2.19) и гипотез 1)-2) имеем

$$\begin{aligned}\|R(t)z\|_{E(A)} &= \|A^{1/2}\big(T + Q_0^* \exp(-Gt)G^{-1}Q_0\big)A^{-1/2}(Az)\|_H = \\ &= \|A^{1/2}\big(Q^*Q - Q_0^*G^{-1}Q_0 + Q_0^* \exp(-Gt)G^{-1}Q_0\big)A^{-1/2}(Az)\|_H = \\ &= \|A^{1/2}\big(Q^*|_{\mathcal{D}(B^{1/2})}B^{1/2}A^{-1} - Q_0^*|_{\mathcal{D}(C^*)}G^{-1}CA^{-1} + Q_0^* \exp(-Gt)G^{-1}CA^{-1}\big)(Az)\|_H = \\ &= \|\big(BA^{-1} - C^*G^{-1}CA^{-1} + C^* \exp(-Gt)G^{-1}CA^{-1}\big)(Az)\|_H \leqslant \\ &\leqslant \|BA^{-1} - C^*G^{-1}CA^{-1} + C^* \exp(-Gt)G^{-1}CA^{-1}\|_{\mathcal{L}(H)} \cdot \|z\|_{E(A)},\end{aligned}$$

$$\|R(t)z - R(t_0)z\|_{E(A)} = \|\big(C^* \exp(-Gt)G^{-1}CA^{-1} - C^* \exp(-Gt_0)G^{-1}CA^{-1}\big)(Az)\|_H \to 0, \quad t \to t_0.$$

Лемма доказана. □

2.2. Доказательство асимптотических формул. Установим вспомогательную лемму об асимптотическом поведении решений дифференциально-операторного уравнения первого порядка в произвольном банаховом пространстве.

Лемма 2.6. *Пусть* $-\mathcal{A}$ *— генератор сильно непрерывной равномерно экспоненциально устойчивой* (*см.* (2.15)) *полугруппы* $\mathcal{U}(t)$ *на банаховом пространстве* $\mathcal{E}$. *Предположим, что в задаче Коши*

$$\frac{d\zeta}{dt} = -\mathcal{A}\zeta + \mathcal{G}(t) + \sum_{k=0}^{n} e^{-i\sigma_k t}\mathcal{F}_k(t), \quad \zeta(0) = \zeta^0, \tag{2.21}$$

где $\sigma_0 = 0$, $0 \neq \sigma_k \in \mathbb{R}$, $k = \overline{1,n}$, *выполнены условия*: $\zeta^0 \in \mathcal{D}(\mathcal{A})$, $\mathcal{F}_k \in C^1(\mathbb{R}_+; \mathcal{E})$, $k = \overline{0,n}$, $\mathcal{G} \in C^1(\mathbb{R}_+; \mathcal{E})$, *либо функция* $\mathcal{G}$ *локально гёльдерова, если полугруппа* $\mathcal{U}(t)$ *голоморфна. Тогда существует константа* $M_0 \geqslant 1$ *такая, что для решения задачи* (2.21) *выполнено неравенство*

$$\begin{aligned}\Big\|\zeta(t) - \sum_{k=0}^{n} e^{-i\sigma_k t}\mathcal{R}_{i\sigma_k}(\mathcal{A})\mathcal{F}_k(t)\Big\|_{\mathcal{E}} &\leqslant M_0 e^{-\omega t}\Big(\|\zeta^0\|_{\mathcal{E}} + \sum_{k=0}^{n}\|\mathcal{F}_k(0)\|_{\mathcal{E}}\Big) + \\ &+ M_0 \int_0^t e^{-\omega(t-s)}\Big(\|\mathcal{G}(s)\|_{\mathcal{E}} + \sum_{k=0}^{n}\|\mathcal{F}_k'(s)\|_{\mathcal{E}}\Big)\,ds.\end{aligned} \tag{2.22}$$

Доказательство. Из условий теоремы следует, что задача (2.21) имеет единственное решение (в смысле определения 2.1). Будем искать это решение в виде $\zeta(t) = \sum_{k=0}^{n} e^{-i\sigma_k t}\mathcal{R}_{i\sigma_k}(\mathcal{A})\mathcal{F}_k(t) + \chi(t)$. Тогда функция $\chi(t)$ должна быть решением задачи Коши

$$\frac{d\chi}{dt} = -\mathcal{A}\chi + \mathcal{G}(t) - \sum_{k=0}^{n} e^{-i\sigma_k t}\mathcal{R}_{i\sigma_k}(\mathcal{A})\mathcal{F}_k'(t), \quad \chi(0) = \zeta^0 - \sum_{k=0}^{n}\mathcal{R}_{i\sigma_k}(\mathcal{A})\mathcal{F}_k(0) \in \mathcal{D}(\mathcal{A}). \tag{2.23}$$

Заметим, что решение задачи (2.23) можно представить в виде суммы $\chi(t) = \chi_1(t) + \chi_2(t)$, где $\chi_1(t)$, $\chi_2(t)$ — решения задач Коши

$$\frac{d\chi_1}{dt} = -\mathcal{A}\chi_1 + \mathcal{G}(t), \quad \chi_1(0) = \zeta^0 - \sum_{k=0}^{n}\mathcal{R}_{i\sigma_k}(\mathcal{A})\mathcal{F}_k(0) \in \mathcal{D}(\mathcal{A}),$$

$$\frac{d\chi_2}{dt} = -\mathcal{A}\chi_2 - \sum_{k=0}^{n} e^{-i\sigma_k t}\mathcal{R}_{i\sigma_k}(\mathcal{A})\mathcal{F}_k'(t), \quad \chi_2(0) = 0 \in \mathcal{D}(\mathcal{A}),$$

но эти задачи однозначно разрешимы в смысле определения 2.1 (см. рассуждения, применённые к задачам (2.17) и (2.18)).

Итак, из (2.23) и представления $\zeta(t)=\sum\limits_{k=0}^{n} e^{-i\sigma_k t}\mathcal{R}_{i\sigma_k}(\mathcal{A})\mathcal{F}_k(t)+\chi(t)$ найдём, что

$$\zeta(t)=\sum_{k=0}^{n} e^{-i\sigma_k t}\mathcal{R}_{i\sigma_k}(\mathcal{A})\mathcal{F}_k(t)+\mathcal{U}(t)\Big(\zeta^0-\sum_{k=0}^{n}\mathcal{R}_{i\sigma_k}(\mathcal{A})\mathcal{F}_k(0)\Big)+ \\ +\int\limits_0^t \mathcal{U}(t-s)\Big(\mathcal{G}(s)-\sum_{k=0}^{n} e^{-i\sigma_k s}\mathcal{R}_{i\sigma_k}(\mathcal{A})\mathcal{F}_k'(s)\Big)\,ds.$$

Отсюда следует, что

$$\Big\|\zeta(t)-\sum_{k=0}^{n} e^{-i\sigma_k t}\mathcal{R}_{i\sigma_k}(\mathcal{A})\mathcal{F}_k(t)\Big\|_{\mathcal{E}}= \\ =\Big\|\mathcal{U}(t)\Big(\zeta^0-\sum_{k=0}^{n}\mathcal{R}_{i\sigma_k}(\mathcal{A})\mathcal{F}_k(0)\Big)+\int\limits_0^t \mathcal{U}(t-s)\Big(\mathcal{G}(s)-\sum_{k=0}^{n} e^{-i\sigma_k s}\mathcal{R}_{i\sigma_k}(\mathcal{A})\mathcal{F}_k'(s)\Big)\,ds\Big\|_{\mathcal{E}}\leqslant \\ \leqslant Me^{-\omega t}\Big(\|\zeta^0\|_{\mathcal{E}}+\sup_{\lambda\in i\mathbb{R}}\|\mathcal{R}_\lambda(\mathcal{A})\|_{\mathcal{L}(\mathcal{E})}\sum_{k=0}^{n}\|\mathcal{F}_k(0)\|_{\mathcal{E}}\Big)+ \\ +M\int\limits_0^t e^{-\omega(t-s)}\Big(\|\mathcal{G}(s)\|_{\mathcal{E}}+\sup_{\lambda\in i\mathbb{R}}\|\mathcal{R}_\lambda(\mathcal{A})\|_{\mathcal{L}(\mathcal{E})}\sum_{k=0}^{n}\|\mathcal{F}_k'(s)\|_{\mathcal{E}}\Big)\,ds,$$

т. е. оценка (2.22) выполнена с константой $M_0:=M\max\big\{1,\sup\limits_{\lambda\in i\mathbb{R}}\|\mathcal{R}_\lambda(A)\|_{\mathcal{L}(E)}\big\}$. □

Лемма 2.7. *В условиях теоремы* 1.1 *имеют место формулы* (1.4) *и* (1.5).

Доказательство. Пусть в задаче (1.3) выполнены условия $u^0,u^1\in\mathcal{D}(A)$ и

$$f(t)=g(t)+\sum_{k=0}^{n} e^{-i\sigma_k t}f_k(t),\quad \sigma_0=0,\quad 0\neq\sigma_k\in\mathbb{R}\quad (k=\overline{1,n}), \tag{2.24}$$

где $f_k\in C^1(\mathbb{R}_+;H)$ $(k=\overline{0,n})$, а функция g локально гёльдерова. По (единственному) решению задачи Коши (1.3) построим решение задачи Коши (2.8). При выполнении условия (2.24) задача (2.8) примет вид задачи Коши (2.21) с

$$\begin{gathered}\mathcal{G}(t):=(g(t);T^{-1/2}Q_0^*\exp(-Gt)Q_0A^{1/2}u^0;0)^\tau,\\ \mathcal{F}_k(t):=(f_k(t);0;0)^\tau\ \ (k=\overline{0,n}),\quad \zeta^0=\xi^0+\xi(u^0,0).\end{gathered} \tag{2.25}$$

Применим лемму 2.6 к сложившейся ситуации. Учитывая связь $\zeta(t)=\xi(t)+\xi(u^0,t)$ между решениями задач Коши (2.8) и (2.6), формулы для $\xi(u^0,t)$, ξ^0, обозначения (2.25), найдём, что

$$\Big\|\xi(t)-\sum_{k=0}^{n} e^{-i\sigma_k t}\mathcal{R}_{i\sigma_k}(\mathcal{A})\mathcal{F}_k(t)\Big\|_{\mathcal{H}}\leqslant\Big\|\zeta(t)-\sum_{k=0}^{n} e^{-i\sigma_k t}\mathcal{R}_{i\sigma_k}(\mathcal{A})\mathcal{F}_k(t)\Big\|_{\mathcal{H}}+\big\|\xi(u^0,t)\big\|_{\mathcal{H}}\leqslant \\ \leqslant M_0e^{-\omega t}\Big(\|\xi^0+\xi(u^0,0)\|_{\mathcal{H}}+\sum_{k=0}^{n}\|\mathcal{F}_k(0)\|_{\mathcal{H}}\Big)+\|\xi(u^0,t)\|_{\mathcal{H}}+ \\ +M_0\int\limits_0^t e^{-\omega(t-s)}\Big(\|\mathcal{G}(s)\|_{\mathcal{H}}+\sum_{k=0}^{n}\|\mathcal{F}_k'(s)\|_{\mathcal{H}}\Big)\,ds\leqslant \\ \leqslant M_0e^{-\omega t}\Big(\|u^1\|+\Big\{\|T^{1/2}\|+\|T^{-1/2}\|\|G^{-1}\|\|Q_0\|^2\Big\}\|A^{1/2}u^0\|+\sum_{k=0}^{n}\|f_k(0)\|\Big)+ \\ +e^{-\omega_G t}\|T^{-1/2}\|\|G^{-1}\|\|Q_0\|^2\|A^{1/2}u^0\|+\frac{M_0\|T^{-1/2}\|\|Q_0\|^2}{\omega_G-\omega}\big(1-e^{-(\omega_G-\omega)t}\big)e^{-\omega t}\|A^{1/2}u^0\|+$$

$$+ M_0 \int\limits_0^t e^{-\omega(t-s)} \left(\|g(s)\| + \sum_{k=0}^n \|f_k'(s)\| \right) ds \leqslant$$

$$\leqslant e^{-\omega t} \Biggl(\left\{ M_0 \|T^{1/2}\| + (M_0+1)\|T^{-1/2}\|\|G^{-1}\|\|Q_0\|^2 + \frac{M_0 \|T^{-1/2}\|\|Q_0\|^2}{\omega_G - \omega} \right\} \|A^{1/2}u^0\| + M_0\|u^1\| +$$

$$+ M_0 \sum_{k=0}^n \|f_k(0)\| \Biggr) + M_0 \int\limits_0^t e^{-\omega(t-s)} \left(\|g(s)\| + \sum_{k=0}^n \|f_k'(s)\| \right) ds \leqslant$$

$$\leqslant \widetilde{M}_1 e^{-\omega t} \left(\|A^{1/2}u^0\| + \|u^1\| + \sum_{k=0}^n \|f_k(0)\| \right) + \widetilde{M}_2 \int\limits_0^t e^{-\omega(t-s)} \left(\|g(s)\| + \sum_{k=0}^n \|f_k'(s)\| \right) ds, \tag{2.26}$$

где

$$\widetilde{M}_1 := \max \left\{ M_0, M_0\|T^{1/2}\| + (M_0+1)\|T^{-1/2}\|\|G^{-1}\|\|Q_0\|^2 + \frac{M_0\|T^{-1/2}\|\|Q_0\|^2}{\omega_G - \omega} \right\}, \quad \widetilde{M}_2 := M_0.$$

Учитывая формулу (2.11) для оператора $\mathcal{A}^{-1}$, формулу (2.14) для резольвенты оператора $\mathcal{A}$, связи (2.4), найдём, что

$$\left\| \xi(t) - \sum_{k=0}^n e^{-i\sigma_k t} \mathcal{R}_{i\sigma_k}(\mathcal{A}) \mathcal{F}_k(t) \right\|_{\mathcal{H}}^2 = \left\| \xi(t) - \mathcal{A}^{-1}\mathcal{F}_0(t) - \sum_{k=1}^n e^{-i\sigma_k t} \mathcal{R}_{i\sigma_k}(\mathcal{A}) \mathcal{F}_k(t) \right\|_{\mathcal{H}}^2 =$$

$$= \left\| \begin{pmatrix} z(t) \\ v(t) \\ w(t) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} A^{-1/2} & 0 & 0 \\ 0 & I & -T^{-1/2}Q_0^* G^{-1} \\ 0 & 0 & G^{-1/2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -T^{-1/2} & 0 \\ T^{-1/2} & T^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A^{-1/2} f_0(t) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \right.$$

$$\left. - \sum_{k=1}^n e^{-i\sigma_k t} \begin{pmatrix} A^{-1/2} & 0 & 0 \\ -(i\sigma_k)^{-1} T^{1/2} & I & 0 \\ G^{-1/2}\mathcal{R}_{i\sigma_k}(G) Q_0 & 0 & G^{-1/2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} L^{-1}(i\sigma_k) A^{-1/2} f_k(t) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\|_{\mathcal{H}}^2 =$$

$$= \left\| \begin{pmatrix} z(t) \\ v(t) \\ w(t) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ T^{-1/2}A^{-1/2} f_0(t) \\ 0 \end{pmatrix} - \sum_{k=1}^n e^{-i\sigma_k t} \begin{pmatrix} A^{-1/2} L^{-1}(i\sigma_k) A^{-1/2} f_k(t) \\ -(i\sigma_k)^{-1} T^{1/2} L^{-1}(i\sigma_k) A^{-1/2} f_k(t) \\ G^{-1/2}\mathcal{R}_{i\sigma_k}(G) Q_0 L^{-1}(i\sigma_k) A^{-1/2} f_k(t) \end{pmatrix} \right\|_{\mathcal{H}}^2 \geqslant$$

$$\geqslant \left\| u'(t) - \sum_{k=1}^n e^{-i\sigma_k t} A^{-1/2} L^{-1}(i\sigma_k) A^{-1/2} f_k(t) \right\|^2 +$$

$$+ \left\| T^{1/2}A^{1/2}u(t) - T^{-1/2}A^{-1/2} f_0(t) + \sum_{k=1}^n \frac{e^{-i\sigma_k t}}{i\sigma_k} T^{1/2} L^{-1}(i\sigma_k) A^{-1/2} f_k(t) \right\|^2 \geqslant$$

$$\geqslant \left\| u'(t) - \sum_{k=1}^n e^{-i\sigma_k t} A^{-1/2} L^{-1}(i\sigma_k) A^{-1/2} f_k(t) \right\|^2 +$$

$$+ \gamma \left\| A^{1/2} \left(u(t) - A^{-1/2}T^{-1}A^{-1/2} f_0(t) + \sum_{k=1}^n \frac{e^{-i\sigma_k t}}{i\sigma_k} A^{-1/2} L^{-1}(i\sigma_k) A^{-1/2} f_k(t) \right) \right\|^2. \tag{2.27}$$

Из (2.26), (2.27) следует оценка (1.4) с константами $M_l := \widetilde{M}_l \max\{1, \gamma^{-1/2}\}$ $(l = 1, 2)$.

Докажем формулу (1.5). Пусть $\|g(t)\| = o(1)$, $\|f_k'(t)\| = o(1)$ $(k = \overline{0, n})$ при $t \to +\infty$. Достаточно доказать, что интегральное слагаемое в (1.4) стремится к нулю при $t \to +\infty$. Обозначим $h(t) := \|g(t)\| + \sum\limits_{k=0}^n \|f_k'(t)\|$. Фиксируем $\varepsilon > 0$ и выберем последовательно числа $t_{\varepsilon,1}$ и $t_{\varepsilon,2}$ следующим образом:

$$t_{\varepsilon,1} > 0: \sup_{t \geqslant t_{\varepsilon,1}} h(t) < \frac{\varepsilon\omega}{2}, \quad t_{\varepsilon,2} := \frac{1}{\omega} \ln \Bigl(\frac{2}{\varepsilon\omega} \bigl(e^{\omega t_{\varepsilon,1}} - 1 \bigr) \sup_{t \geqslant 0} h(t) \Bigr).$$

Теперь для любого $t \geqslant t(\varepsilon) := \max\{t_{\varepsilon,1}, t_{\varepsilon,2}\}$ найдём, что

$$\int_0^t e^{-\omega(t-s)}h(s)\,ds = \int_0^{t_{\varepsilon,1}} e^{-\omega(t-s)}h(s)\,ds + \int_{t_{\varepsilon,1}}^t e^{-\omega(t-s)}h(s)\,ds \leqslant$$
$$\leqslant \frac{e^{-\omega t}}{\omega}\bigl(e^{\omega t_{\varepsilon,1}} - 1\bigr)\sup_{t\geqslant 0} h(t) + \frac{1}{\omega}\sup_{t\geqslant t_{\varepsilon,1}} h(t) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Лемма доказана. □

3. Приложения

3.1. Операторные ядра экспоненциального типа. Рассмотрим пример реализации операторного ядра в интегральном слагаемом из (1.3). Пусть H_{k0} $(k = \overline{1,m})$ — гильбертовы пространства. Определим m гильбертовых пространств H_k со скалярными произведениями и нормами:

$$H_k := \bigoplus_{l\in\mathbb{N}} H_{k0} = \Bigl\{X_k = \{x_l\}_{l\in\mathbb{N}} : x_l \in H_{k0},\ \sum_{l\in\mathbb{N}} \|x_l\|^2_{H_{k0}} < +\infty\Bigr\},$$
$$(X_k, Y_k)_{H_k} := \sum_{l\in\mathbb{N}} (x_l, y_l)_{H_{k0}}, \quad \|X_k\|^2_{H_k} = \sum_{l\in\mathbb{N}} \|x_l\|^2_{H_{k0}}, \quad k = \overline{1,m}.$$

Определим гильбертово пространство H_0 со скалярным произведением и нормой:

$$H_0 := \bigoplus_{k=1}^m H_k = \Bigl\{X = (X_1; X_2; \ldots; X_m)^\tau : X_k \in H_k,\ k = \overline{1,m}\Bigr\},$$
$$(X^{(1)}, X^{(2)})_{H_0} := \sum_{k=1}^m (X_k^{(1)}, X_k^{(2)})_{H_k}, \quad \|X\|^2_{H_0} = \sum_{k=1}^m \|X_k\|^2_{H_k}.$$

Пусть C_{k0} $(k = \overline{1,m})$ — плотно определённые замкнутые операторы, действующие из H в H_{k0}: $C_{k0} : \mathcal{D}(C_{k0}) \subset H \to H_{k0}$, $\{\alpha_{kl}\}_{l\in\mathbb{N}}$, $\{\gamma_{kl}\}_{l\in\mathbb{N}}$ $(k = \overline{1,m})$ — последовательности положительных чисел. Будем считать, что выполнены следующие условия:

$$\mathcal{D}(A) \subset \mathcal{D}(C^*_{k0}C_{k0}), \quad \sum_{l\in\mathbb{N}} \alpha_{kl} < +\infty, \quad \inf_{l\in\mathbb{N}} \gamma_{kl} > 0, \quad k = \overline{1,m}. \tag{3.1}$$

Определим операторы C_k, G_k $(k = \overline{1,m})$ по следующим формулам:

$$C_k u := \bigl\{\sqrt{\alpha_{kl}}C_{k0}u\bigr\}_{l\in\mathbb{N}}, \quad \mathcal{D}(C_k) = \mathcal{D}(C_{k0}), \quad C_k : \mathcal{D}(C_k) \subset H \to H_k,$$
$$G_k X_k := \bigl\{\gamma_{kl}x_l\bigr\}_{l\in\mathbb{N}}, \quad \mathcal{D}(G_k) := \Bigl\{X_k \in H_k : \sum_{l\in\mathbb{N}} \|\gamma_{kl}x_l\|^2_{H_{k0}} < +\infty\Bigr\} \subset H_k.$$

Несложно видеть, что оператор G_k самосопряжён и положительно определён в H_k, а плотно определённый оператор C_k замкнут на $\mathcal{D}(C_k)$ и

$$C_k^* X_k = \sum_{l\in\mathbb{N}} \sqrt{\alpha_{kl}}C^*_{k0}x_l, \quad \mathcal{D}(C_k^*) = \Bigl\{X_k \in H_k : \Bigl\|\sum_{l\in\mathbb{N}} \sqrt{\alpha_{kl}}C^*_{k0}x_l\Bigr\|_H < +\infty\Bigr\} \subset H_k.$$

Определим, наконец, операторы C и G по следующим формулам:

$$C := (C_1; C_2; \ldots; C_m)^\tau, \quad G := \operatorname{diag}(G_1, G_2, \ldots, G_m),$$

тогда

$$C^* \exp(-Gt)C = \sum_{k=1}^m C_k^* \exp(-G_k t)C_k = \sum_{k=1}^m \sum_{l\in\mathbb{N}} \alpha_{kl}e^{-\gamma_{kl}t}C^*_{k0}C_{k0}. \tag{3.2}$$

Лемма 3.1. *Оператор-функция $C^* \exp(-tG)CA^{-1}$ сильно непрерывна на $\mathbb{R}_+$.*

Доказательство. Из условия на области определения в (3.1) следует, что $C_{k0}^* C_{k0} A^{-1} \in \mathcal{L}(H)$. Таким образом, для любых $t, t_0 \in \mathbb{R}_+$ и $u \in H$ имеем

$$\left\|C^* \exp(-Gt)CA^{-1}u - C^* \exp(-Gt_0)CA^{-1}u\right\| = \left\|\sum_{k=1}^{m}\sum_{l\in\mathbb{N}} \alpha_{kl}(e^{-\gamma_{kl}t} - e^{-\gamma_{kl}t_0})C_{k0}^* C_{k0}A^{-1}u\right\| \leqslant$$
$$\leqslant \sum_{k=1}^{m} \left\|C_{k0}^* C_{k0}A^{-1}u\right\| \sum_{l\in\mathbb{N}} \alpha_{kl}\left|e^{-\gamma_{kl}t} - e^{-\gamma_{kl}t_0}\right|. \tag{3.3}$$

Фиксируем произвольное $\varepsilon > 0$. Из (3.1) получим, что

$$\exists\, N(\varepsilon, u) \in \mathbb{N}: \ \sum_{k=1}^{m} \left\|C_{k0}^* C_{k0}A^{-1}u\right\| \sum_{l=N(\varepsilon,u)+1}^{\infty} 2\alpha_{kl} < \frac{\varepsilon}{2},$$

$$\exists\, \delta(\varepsilon, u) > 0: \ \sum_{k=1}^{m} \left\|C_{k0}^* C_{k0}A^{-1}u\right\| \sum_{l=1}^{N(\varepsilon,u)} \alpha_{kl}\left|e^{-\gamma_{kl}t} - e^{-\gamma_{kl}t_0}\right| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \forall\, t \in (t_0 - \delta, t_0 + \delta).$$

Отсюда и из (3.3) следует, что

$$\left\|C^* \exp(-Gt)CA^{-1}u - C^* \exp(-Gt_0)CA^{-1}u\right\| < \varepsilon \quad \forall\, t \in (t_0 - \delta(\varepsilon, u), t_0 + \delta(\varepsilon, u)),$$

т. е. оператор-функция (3.2) сильно непрерывна в точке t_0. □

Таким образом, для оператор-функции (3.2) выполнена гипотеза 2).

Гипотеза 3) (см. (1.1)), связывающая введённые операторы и числовые коэффициенты и призванная обеспечить положительную определённость оператора T (см. (1.2)), принимает следующий вид:

3) существует $\gamma > 0$ такое, что

$$\|B^{1/2}u\|_H^2 - \sum_{k=1}^{m}\sum_{l\in\mathbb{N}} \frac{\alpha_{kl}}{\gamma_{kl}} \|C_{k0}u\|_{H_{k0}}^2 \geqslant \gamma\|A^{1/2}u\|_H^2 \quad \forall\, u \in \mathcal{D}(A^{1/2}). \tag{3.4}$$

Из проведённых рассуждений следует, что при выполнении гипотезы 1) и условий (3.1), (3.4) к задаче Коши (1.3) с операторным ядром (3.2) применима теорема 1.1.

3.2. Задача о вынужденных продольных колебаниях вязкоупругого стержня с трением Кельвина—Фойгта. В гильбертовом пространстве $L_2(a, b)$ определим оператор A:

$$Au := -u'', \quad \mathcal{D}(A) := \left\{u \in L_2(a, b) : u \in W_2^2(a, b), \ \ u(a) = u(b) = 0\right\}.$$

Оператор A самосопряжён и положительно определён, спектр оператора A дискретен. Система собственных элементов и собственных значений оператора A имеет следующий вид:

$$u_j(A) = \sqrt{\frac{2}{b-a}}\sin\left(\pi j\frac{x-a}{b-a}\right), \quad \lambda_j(A) = \left(\frac{\pi j}{b-a}\right)^2, \quad j = 1, 2, \ldots \tag{3.5}$$

Задача о вынужденных продольных колебаниях вязкоупругого стержня, закреплённого на концах отрезка $[a, b]$, имеет следующий вид:

$$\begin{gathered}\frac{d^2u}{dt^2} = -\alpha A\frac{du}{dt} - \beta Au + \int_0^t \sum_{l\in\mathbb{N}} \alpha_l e^{-\gamma_l(t-s)}Au(s)\,ds + \sum_{k=0}^{n} e^{-i\sigma_k t}f_k,\\ u(0) = u^0, \quad u'(0) = u^1.\end{gathered} \tag{3.6}$$

Здесь $\alpha > 0$ и $\beta > 0$, а $\{\alpha_l\}_{l\in\mathbb{N}}$, $\{\gamma_l\}_{l\in\mathbb{N}}$ — последовательности положительных чисел, удовлетворяющих следующим неравенствам (см. (3.1), (3.4)):

$$\sum_{l\in\mathbb{N}} \alpha_l < +\infty, \quad \inf_{l\in\mathbb{N}} \gamma_l > 0, \quad \frac{\beta}{\alpha} - \sum_{l\in\mathbb{N}} \frac{\alpha_l}{\gamma_l} > 0. \tag{3.7}$$

Для простоты считаем в (3.6), что $g(t) \equiv 0$, $f_k \in L_2(a, b)$ $(k = \overline{1, n})$ не зависят от времени, а числа σ_k $(k = \overline{1, n})$ те же, что и в теореме 1.1.

Непосредственно проверяется, что операторный пучок $L(\lambda)$ из (1.2) в рассматриваемом случае имеет следующий вид:

$$L(\lambda) = \left\{1 - \frac{1}{\lambda}\left(\frac{\beta}{\alpha} - \sum_{l\in\mathbb{N}} \frac{\alpha_l}{\gamma_l}\right) + \sum_{l\in\mathbb{N}} \frac{\alpha_l}{\gamma_l(\gamma_l - \lambda)}\right\} I - \lambda A^{-1}. \tag{3.8}$$

Применение теоремы 1.1 к задаче Коши (3.6) с учётом (3.5), (3.7), (3.8) приводит к следующему утверждению.

Лемма 3.2. *Пусть* $u^0, u^1 \in \mathcal{D}(A)$, $f_k \in L_2(a,b)$, $k = \overline{0,n}$. *Тогда существуют константы* $\omega > 0$ *и* $M_1 > 0$ *такие, что для решения задачи Коши* (3.6) *выполнено неравенство*

$$\left(\left\| A^{1/2}\left(u(t) - u_0 + \sum_{k=1}^{n} \frac{e^{-i\sigma_k t}}{i\sigma_k}\, u_k\right)\right\|^2_{L_2(a,b)} + \left\| u'(t) - \sum_{k=1}^{n} e^{-i\sigma_k t} u_k\right\|^2_{L_2(a,b)}\right)^{1/2} \leqslant$$

$$\leqslant M_1 e^{-\omega t}\left(\|A^{1/2}u^0\|_{L_2(a,b)} + \|u^1\|_{L_2(a,b)} + \sum_{k=0}^{n} \|f_k\|_{L_2(a,b)}\right),$$

где (*см.* (3.5))

$$u_0 := \left(\frac{\beta}{\alpha} - \sum_{l\in\mathbb{N}} \frac{\alpha_l}{\gamma_l}\right)^{-1} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_j(A)} \left(f_0, u_j(A)\right)_{L_2(a,b)},$$

$$u_k := \sum_{j=1}^{\infty} \left(\left\{1 - \frac{1}{i\sigma_k}\left(\frac{\beta}{\alpha} - \sum_{l\in\mathbb{N}} \frac{\alpha_l}{\gamma_l}\right) + \sum_{l\in\mathbb{N}} \frac{\alpha_l}{\gamma_l(\gamma_l - i\sigma_k)}\right\}\lambda_j(A) - i\sigma_k\right)^{-1} \left(f_k, u_j(A)\right)_{L_2(a,b)},$$

$$k = 1, 2, \ldots, n.$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Власов В. В., Раутиан Н. А.* Спектральный анализ функционально-дифференциальных уравнений. — М.: МАКС Пресс, 2016.
2. *Власов В. В., Раутиан Н. А.* Экспоненциальная устойчивость полугрупп, порождаемых вольтерровыми интегро-дифференциальными уравнениями с сингулярными ядрами// Дифф. уравн. — 2021. — *57*, № 10. — С. 1426–1430.
3. *Голдстейн Дж.* Полугруппы линейных операторов и их приложения. — Киев: Выща школа, 1989.
4. *Закора Д. А.* Экспоненциальная устойчивость одной полугруппы и приложения// Мат. заметки. — 2018. — *103*, № 5. — С. 702–719.
5. *Закора Д. А.* Асимптотика решений в задаче о малых движениях сжимаемой жидкости Максвелла// Дифф. уравн. — 2019. — *55*, № 9. — С. 1195–1208.
6. *Ильюшин А. А., Победря Б. Е.* Основы математической теории термовязко-упругости. — М.: Наука, 1970.
7. *Като Т.* Теория возмущений линейных операторов. — М.: Мир, 1972.
8. *Крейн С. Г.* Линейные дифференциальные уравнения в банаховом пространстве. — М.: Наука, 1967.
9. *Alabau-Boussouria F., Cannarsa P.* A general method for proving sharp energy decay rates for memory-dissipative evolution equations// C. R. Math. Acad. Sci. Paris. — 2009. — *347*. — С. 867–872.
10. *Alabau-Boussouria F., Cannarsa P., Sforza D.* Decay estimates for second order evolution equations with memory// J. Funct. Anal. — 2008. — *254*. — С. 1342–1372.
11. *Ammar-Khodja F., Benabdallah A., Muñoz Rivera J. E., Racke R.* Energy decay for Timoshenko systems of memory type// J. Differ. Equ. — 2003. — *194*, № 1. — С. 82–115.
12. *Amendola G., Fabrizio M., Golden J. M.* Thermodynamics of Materials with Memory. — Boston: Springer, 2012.
13. *Dafermos C. M.* Asymptotic stability in viscoelasticity// Arch. Ration. Mech. Anal. — 1970. — *37*. — С. 297–308.
14. *Dafermos C. M.* An abstract Volterra equation with applications to linear viscoelasticity// J. Differ. Equ. — 1970. — *7*, № 3. — С. 554–569.
15. *Dell'Oro F.* Asymptotic stability of thermoelastic systems of Bresse type// J. Differ. Equ. — 2015. — *258*, № 11. — С. 3902–3927.
16. *Engel K. -J., Nagel R.* One-Parameter Semigroups for Linear Evolution Eqations. — New York: Springer, 2000.

17. *Fabrizio M., Morro A.* Mathematical Problems in Linear Viscoelasticity. — Philadelphia: SIAM, 1992.
18. *Fatori L. H., Monteiro R. N., Sare H. D. F.* The Timoshenko system with history and Cattaneo law// Appl. Math. Comput. — 2014. — *228*, № 1. — С. 128–140.
19. *Liu Z., Zheng S.* Semigroups Associated with Dissipative Systems. — London: Chapman & Hall/CRC, 1999.
20. *Ma Z., Zhang L., Yang X.* Exponential stability for a Timoshenko-type system with history// J. Math. Anal. Appl. — 2011. — *380*, № 1. — С. 299–312.
21. *Messaoudi S. A., Apalara T. A.* General stability result in a memory-type porous thermoelasticity system of type III// Arab J. Math. Sci. — 2014. — *20*, № 2. — С. 213–232.
22. *Muñoz Rivera J. E., Naso M. G.* Asymptotic stability of semigroups associated with linear weak dissipative systems with memory// J. Math. Anal. Appl. — 2007. — *326*. — С. 691–707.
23. *Pandolfi L.* Linear systems with persistent memory: An overview of the biblography on controllability// ArXiv. — 2018. — 1804.01865 [math.OC].
24. *Racke R., Said-Houari B.* Global existence and decay property of the Timoshenko system in thermoelasticity with second sound// Nonlinear Anal. — 2012. — *75*, № 13. — С. 4957–4973.
25. *Renardy M., Hrusa W. J., Nohel J. A.* Mathematical problems in viscoelasticity. — Harlow: Longman Scientific & Technical, 1987.
26. *Zakora D.* On the spectrum of rotating viscous relaxing fluid// Журн. мат. физ. анал. геом. — 2016. — *12*, № 4. — С. 338–358.

Д. А. Закора
Крымский федеральный университет им. В. И. Вернадского, Симферополь, Россия
E-mail: `dmitry.zkr@gmail.com`

DOI: 10.22363/2413-3639-2022-68-3-451-466 UDC 517.968.72

Asymptotic Behavior of Solutions of a Complete Second-Order Integro-Differential Equation

© 2022 **D. A. Zakora**

Abstract. In this paper, we study a complete second-order integro-differential operator equation in a Hilbert space. The difference-type kernel of an integral perturbation is a holomorphic semigroup bordered by unbounded operators. The asymptotic behavior of solutions of this equation is studied. Asymptotic formulas for solutions are proved in the case when the right-hand side is close to an almost periodic function. The obtained formulas are applied to the study of the problem of forced longitudinal vibrations of a viscoelastic rod with Kelvin–Voigt friction.

REFERENCES

1. V. V. Vlasov and N. A. Rautian, *Spektral'nyy analiz funktsional'no-differentsial'nykh uravneniy* [Spectral Analysis of Functional Differential Equations], MAKS Press, Moscow, 2016 (in Russian).
2. V. V. Vlasov and N. A. Rautian, "Eksponentsial'naya ustoychivost' polugrupp, porozhdaemykh vol'terrovymi integro-differentsial'nymi uravneniyami s singulyarnymi yadrami" [Exponential stability of semigroups generated by Volterra integro-differential equations with singular kernels], *Diff. uravn.* [Differ. Equ.], 2021, **57**, No. 10, 1426–1430 (in Russian).
3. J. Goldstein, *Polugruppy lineynykh operatorov i ikh prilozheniya* [Semigroups of Linear Operators and Applications], Vyshcha shkola, Kiev, 1989 (Russian translation).

4. D. A. Zakora, “Eksponentsial’naya ustoychivost’ odnoy polugruppy i prilozheniya” [Exponential stability of one semigroup and applications], *Mat. zametki* [Math. Notes], 2018, **103**, No. 5, 702–719 (in Russian).
5. D. A. Zakora, “Asimptotika resheniy v zadache o malykh dvizheniyakh szhimaemoy zhidkosti Maksvella” [Asymptotics of solutions in the problem of small motions of a Maxwell compressible fluid], *Diff. uravn.* [Differ. Equ.], 2019, **55**, No. 9, 1195–1208 (in Russian).
6. A. A. Il’yushin and B. E. Pobedrya, *Osnovy matematicheskoy teorii termovyazko-uprugosti* [Fundamentals of Mathematical Theory of Thermovisco-Elasticity], Nauka, Moscow, 1970 (in Russian).
7. T. Kato, *Teoriya vozmushcheniy lineynykh operatorov* [Perturbation Theory for Linear Operators], Mir, Moscow, 1972 (Russian translation).
8. C. G. Kreyn, *Lineynye differentsial’nye uravneniya v banakhovom prostranstve* [Linear Differential Equations in a Banach Space], Nauka, Moscow, 1967 (in Russian).
9. F. Alabau-Boussouria and P. Cannarsa, “A general method for proving sharp energy decay rates for memory-dissipative evolution equations,” *C. R. Math. Acad. Sci. Paris*, 2009, **347**, 867–872.
10. F. Alabau-Boussouria, P. Cannarsa, and D. Sforza, “Decay estimates for second order evolution equations with memory,” *J. Funct. Anal.*, 2008, **254**, 1342–1372.
11. F. Ammar-Khodja, A. Benabdallah, J. E. Muñoz Rivera, and R. Racke, “Energy decay for Timoshenko systems of memory type,” *J. Differ. Equ.*, 2003, **194**, No. 1, 82–115.
12. G. Amendola, M. Fabrizio, and J. M. Golden, *Thermodynamics of Materials with Memory*, Springer, Boston, 2012.
13. C. M. Dafermos, “Asymptotic stability in viscoelasticity,” *Arch. Ration. Mech. Anal.*, 1970, **37**, 297–308.
14. C. M. Dafermos, “An abstract Volterra equation with applications to linear viscoelasticity,” *J. Differ. Equ.*, 1970, **7**, No. 3, 554–569.
15. F. Dell’Oro, “Asymptotic stability of thermoelastic systems of Bresse type,” *J. Differ. Equ.*, 2015, **258**, No. 11, 3902–3927.
16. K.-J. Engel and R. Nagel, *One-Parameter Semigroups for Linear Evolution Eqations*, Springer, New York, 2000.
17. M. Fabrizio and A. Morro, *Mathematical Problems in Linear Viscoelasticity*, SIAM, Philadelphia, 1992.
18. L. H. Fatori, R. N. Monteiro, and H. D. Sare, “The Timoshenko system with history and Cattaneo law,” *Appl. Math. Comput.*, 2014, **228**, No. 1, 128–140.
19. Z. Liu and S. Zheng, *Semigroups Associated with Dissipative Systems*, Chapman & Hall/CRC, London, 1999.
20. Z. Ma, L. Zhang, and X. Yang, “Exponential stability for a Timoshenko-type system with history,” *J. Math. Anal. Appl.*, 2011, **380**, No. 1, 299–312.
21. S. A. Messaoudi and T. A. Apalara, “General stability result in a memory-type porous thermoelasticity system of type III,” *Arab J. Math. Sci.*, 2014, **20**, No. 2, 213–232.
22. J. E. Muñoz Rivera and M. G. Naso, “Asymptotic stability of semigroups associated with linear weak dissipative systems with memory,” *J. Math. Anal. Appl.*, 2007, **326**, 691–707.
23. L. Pandolfi, “Linear systems with persistent memory: An overview of the biblography on controllability,” *ArXiv*, 2018, 1804.01865 [math.OC].
24. R. Racke and B. Said-Houari, “Global existence and decay property of the Timoshenko system in thermoelasticity with second sound,” *Nonlinear Anal.*, 2012, **75**, No. 13, 4957–4973.
25. M. Renardy, W. J. Hrusa, and J. A. Nohel, *Mathematical problems in viscoelasticity*, Longman Scientific & Technical, Harlow, 1987.
26. D. Zakora, “On the spectrum of rotating viscous relaxing fluid,” *Zhurn. mat. fiz. anal. geom.*, 2016, **12**, No. 4, 338–358.

D. A. Zakora
Vernadsky Crimean Federal University, Simferopol’, Russia
E-mail: dmitry.zkr@gmail.com