Современная математика. Фундаментальные направления. Том 68, № 3 (2022). С. 424–450
Contemporary Mathematics. Fundamental Directions. ISSN 2413-3639 (Print)

DOI: 10.22363/2413-3639-2022-68-3-424-450 УДК 515.16

ХАОС В ТОПОЛОГИЧЕСКИХ СЛОЕНИЯХ

© 2022 г. **Н. И. ЖУКОВА, Г. С. ЛЕВИН, Н. С. ТОНЫШЕВА**

Аннотация. Мы называем слоение (M, F) на топологическом многообразии M хаотическим, если оно топологически транзитивно и объединение всех замкнутых слоев всюду плотно в M. При этом компактность слоеного многообразия не предполагается. Исследуемые нами топологические слоения можно рассматривать как многомерные обобщения хаотических динамических систем в смысле Дивани. Для топологических слоений (M, F), накрытых расслоениями, мы доказываем, что существование хаоса в (M, F) эквивалентно хаотичности его глобальной группы голономии. Мы вводим понятие интегрируемой связности Эресмана для топологических слоений как естественное обобщение интегрируемой связности Эресмана для гладких слоений. Получены описание глобальной структуры топологических слоений с интегрируемой связностью Эресмана и критерий хаотичности таких слоений. Применяя метод надстройки, нами построено новое счетное семейство хаотических, попарно не изоморфных топологических слоений коразмерности два на 3-мерных замкнутых и незамкнутых многообразиях.

ОГЛАВЛЕНИЕ

1. Введение

Целью данной работы является исследование хаотического поведения топологических слоений. Обращение к топологическим слоениям мотивировано тем, что, как теперь известно, при всех $n \geqslant 4$ существуют n-мерные топологические многообразия, не допускающие гладкой структуры. Первый пример такого топологического многообразия был построен М. А. Кервером при $n = 10$ (см. [19]). Для $n \leqslant 3$ на всех n-мерных топологических многообразиях существуют гладкие структуры, причем все гладкие структуры эквивалентны. С. К. Дональдсон и М. Х. Фридман показали, что многие односвязные компактные 4-мерные многообразия не допускают гладкой структуры. Обсуждение фундаментальных результатов С. К. Дональдсона и М. Х. Фридмана ведется в [21].

Отметим, что топологические слоения могут существовать и на гладких многообразиях. Кроме того, для топологических слоений возможны такие явления, которые недопустимы для гладких слоений.

Р. Черчилль дал определение гладкого хаотического слоения в статье [15] «Об определении хаоса в отсутствии времени» (подробности см. в разделе 3.2). Я. В. Базайкин, А. С. Галаев и

Н. И. Жукова в работе [10] «Хаос в картановых слоениях» предложили более общее определение хаотических слоений, которое совпадает с определением Р. Черчилля на компактных многообразиях. В данной работе мы следуем этому определению и называем топологическое слоение (M, F) *хаотическим*, если оно топологически транзитивно и объединение всех замкнутых слоев всюду плотно в M. При таком подходе исследуемые нами топологические слоения можно рассматривать как многомерные обобщения хаотических динамических систем в смысле Дивани [16].

Статья организована следующим образом. В разделе 2 мы напоминаем понятия, относящиеся к категории топологических слоений $\mathfrak{Fol}$, изоморфизмами в которой являются гомеоморфизмы, переводящие слои в слои.

В разделе 3.2 мы приводим определение Дивани хаотичности динамической системы и, следуя [10], даем определение хаотичности топологического слоения. Свойство слоения (или группы гомеоморфизмов) называется *трансверсальным*, если оно выражается в терминах пространства слоев (соответственно, пространства орбит). Цель раздела 3 — доказательство трансверсальности свойства хаотичности топологических слоений и групп гомеоморфизмов (теоремы 3.2 и 3.3), что обобщает аналогичные утверждения для гладких слоений из [10]. Оба эти критерия применяются при доказательстве критерия хаотичности топологических слоений, накрытых расслоениями (теоремы 5.2), что значительно упрощает и сокращает это доказательство.

Раздел 4 посвящен топологической транзитивности слоений. Здесь мы доказываем аналог теоремы Биркгофа об эквивалентности существования всюду плотного слоя топологического слоения (M, F) следующему условию: для любых открытых подмножеств U и V в M найдется слой, пересекающий оба этих подмножества (теорема 4.1).

Топологические слоения (M, F), которые, будучи подняты на универсальное накрывающее многообразие, образованы слоями локально тривиального расслоения, называются слоениями, *накрытыми расслоением*, и исследуются нами в разделе 5. К таким слоениям относятся гладкие (G, X)-слоения со связностью Эресмана (см. [1, теорема 2]), полные картановы слоения постоянной трансверсальной кривизны [10], полные конформные слоения коразмерности $q \geqslant 3$ (см. [1]), полные лоренцевы слоения коразмерности два на замкнутых многообразиях, не являющиеся римановыми слоениями [3], слоения с интегрируемой связностью Эресмана (точное определение приведено в разделе 6.1), параллельные слоения на полных римановых многообразиях [5, 6], надстроечные слоения, исследуемые в разделах 7-8, а также многие другие классы слоений.

Для слоений, накрытых расслоением, определяется глобальная группа голономии, индуцированная группой накрывающих преобразований на базе упомянутого расслоения. Основным результатом раздела 5 является доказательство критерия хаотичности для топологических слоений, накрытых расслоением (теорема 5.2), утверждающего, что (M, F) хаотично тогда и только тогда, когда хаотична его глобальная группа голономии. В разделе 5 доказана также теорема 5.3 о необходимых условиях изоморфности слоений, накрытых расслоением, в категории $\mathfrak{Fol}$.

В разделе 6 мы обобщаем понятие интегрируемой связности Эресмана, введенное для гладких слоений Р. А. Блюменталем и Дж. Хебдой [11], на топологические слоения. Следуя работам Я. Л. Шапиро [5,6] и Н. И. Жуковой, К. И. Шеиной [4], вводится понятие канонического слоения с интегрируемой связностью Эресмана и доказывается, что любое слоение (M, F) с интегрируемой связностью Эресмана изоморфно в категории $\mathfrak{Fol}$ некоторому каноническому слоению (теорема 6.2). Определяется понятие структурной группы слоения (M, F) и доказывается, что хаотичность (M, F) эквивалентна хаотичности ассоциированного действия его структурной группы (теорема 6.3). Следует отметить пример 7.1, показывающий, что структурная группа слоения (M, F) не является инвариантом в категории слоений $\mathfrak{Fol}$, однако ее применение оказывается полезным, как показано в разделах 7-8.

В разделе 7 мы распространяем понятие надстроечного слоения, принадлежащее А. Хефлигеру, на топологические слоения. Надстроечные слоения являются обобщением на слоения надстройки Смейла, хорошо известной конструкции в теории динамических систем. Слоения, полученные надстройкой гомоморфизма $\rho : \pi_1(B, b_0) \to Homeo(T)$, обозначаются через $(M, F) = Sus(B, T, \rho)$. Аналогично гладким надстроечным слоениям [29] установлено, что топологическое слоение (M, F) является надстроечным тогда и только тогда, когда существует локально тривиальное расслоение $p : M \to B$, слои которого образуют интегрируемую связность Эресмана для (M, F) (теорема 7.3). Выясняется специфика канонического надстроечного слоения (теорема 7.2). Поскольку надстроечные слоения образуют подкласс слоений, накрытых расслоениями, применяя указанные выше результаты, мы получаем, что для хаотичности слоения (M, F) необходимо и достаточно хаотичности группы гомеоморфизмов $\rho(\pi_1(B, b_0))$ топологического многообразия T (теорема 7.1). Мы доказываем, что надстроечные слоения $(M, F) = Sus(B, T, \rho)$ и $(M', F') = Sus(B, T', \rho')$ с односвязными многообразиями T и T', соответственно, изоморфны в категории слоений $\mathfrak{Fol}$ тогда и только тогда, когда топологически сопряжены группы гомеоморфизмов $\rho(\pi_1(B, b_0))$ и $\rho'(\pi_1(B, b'_0))$ (теорема 7.4).

Раздел 8 посвящен исследованию хаотичности топологических надстроечных слоений на трехмерных многообразиях. Теорема 8.1 описывает структуру таких слоений и указывает способ их построения. Применение метода настройки и теоремы 7.4 позволило нам построить новое счетное семейство хаотических, попарно не изоморфных слоений на замкнутых трехмерных топологических многообразиях (теорема 8.2) и на незамкнутых трехмерных топологических многообразиях (теорема 8.3).

Обозначения. Символом $\cong$ обозначаются изоморфные объекты в соответствующей категории. Орбита подмножества $A \subset X$ относительно группы гомеоморфизмов G топологического пространства X обозначается через $G.A$, а образ точки x относительно $g \in G$ обозначается через $g.x$. Слоение обозначается как одной буквой F, так и парой (M, F), где M — объемлющее многообразие.

Предположения. Все окрестности предполагаются открытыми. Мы считаем, что включение $A \subset B$ не исключает и равенство. Конечное множество мы относим к счетным.

2. Категория топологических слоений

2.1. Определение топологического слоения. Напомним, что хаусдорфово топологическое пространство M со счетной базой называется *n-мерным топологическим многообразием*, если в каждой точке $x \in M$ существует окрестность U и гомеоморфизм $\varphi : U \to \mathbb{R}^n$ на n-мерное арифметическое пространство $\mathbb{R}^n$ с обычной топологией. Мы отождествляем $\mathbb{R}^n$ с произведением $\mathbb{R}^{n-q} \times \mathbb{R}^q$, где $1 \leqslant q \leqslant n$. Напомним, что разбиение $F_{st} = \{\mathbb{R}^{n-q} \times \{c\} \,|\, c \in \mathbb{R}^q\}$ называется *стандартным* слоением коразмерности q в $\mathbb{R}^n$, а $\mathbb{R}^{n-q} \times \{c\}$ называются его *слоями* (см. рис. 1).

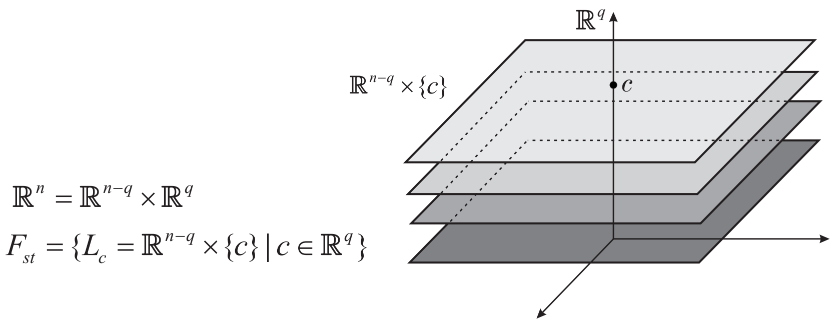

Рис. 1. Стандартное слоение коразмерности q в $\mathbb{R}^n$.
Fig. 1. Standard foliation of codimension q in $\mathbb{R}^n$.

Определение 2.1. Пусть M — n-мерное топологическое многообразие. Разбиение

$$F = \{L_\alpha \,|\, \alpha \in J\}$$

многообразия M на линейно связные подмножества L_α называется *топологическим слоением* коразмерности q, $1 \leqslant q \leqslant n$, если в каждой точке $x \in M$ существует такая карта (U, φ) многообразия M, что гомеоморфизм $\varphi : U \to \mathbb{R}^n$ отображает каждую компоненту связности пересечения $L_\alpha \cap U$, называемую *локальным слоем*, на соответствующий слой $\mathbb{R}^{n-q} \times \{c\}$, $c \in \mathbb{R}^q$, стандартного слоения коразмерности q в $\mathbb{R}^n$ (см. рис. 2).

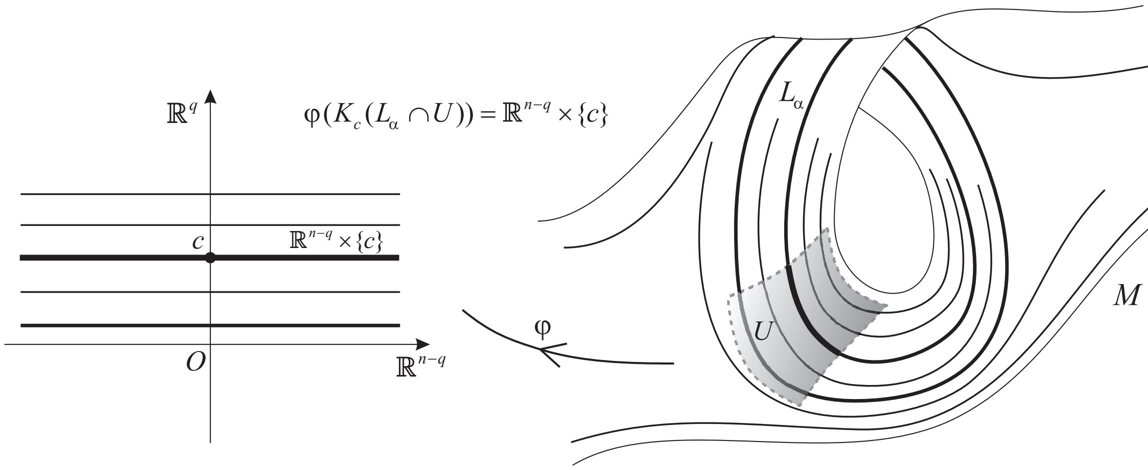

Рис. 2. Расслоенная карта (U, φ) многообразия M.
Fig. 2. Foliated chart (U, φ) of manifold M.

Слоение обозначается парой (M, F), а для краткости F. Подмножества $L_\alpha \subset M$ называются *слоями* слоения (M, F). Карта (U, φ), удовлетворяющая определению 2.1, называется *расслоенной картой*, а U называется *зоной* этой карты.

Таким образом, топологическое слоение (M, F) на n-мерном многообразии M определяется как разбиение F многообразия M на линейно связные подмножества, локально (с точностью до координатного гомеоморфизма) устроенное как стандартное слоение в $\mathbb{R}^n$. Семейство расслоенных карт $\mathcal{A} = \{(U_i, \varphi_i) \,|\, i \in J\}$ называется *атласом*, если $\xi = \{U_i \,|\, i \in J\}$ — покрытие многообразия M. Атлас $\mathcal{A}$ называется *ассоциированным* со слоением (M, F). Атлас $\mathcal{A} = \{(U_i, \varphi_i) \,|\, i \in \mathcal{J}\}$ называется *максимальным*, если он максимален по включению, т. е. совпадает с каждым атласом, его содержащим.

Предложение 2.1. *Пусть (M, F) — топологическое слоение. Тогда:*

(1) *семейство всех его локальных слоев в картах максимального атласа $\mathcal{A} = \{(U_i, \varphi_i) \,|\, i \in \mathcal{J}\}$ образует базу некоторой новой топологии τ_F на множестве M;*
(2) *относительно топологии, индуцированной τ_F, каждый слой L_α, $\alpha \in J$, является $(n-q)$-мерным подмногообразием в M.*

Доказательство.

(1) Обозначим через τ_o обычную топологию в $\mathbb{R}^{n-q}$, а через τ_D — дискретную топологию в $\mathbb{R}^q$. Рассмотрим произведение топологических пространств $(\mathbb{R}^{n-q}, \tau_o) \times (\mathbb{R}^q, \tau_D)$. Пусть $\mathcal{A} = \{(U_i, \varphi_i) \,|\, i \in \mathcal{J}\}$ — максимальный атлас из расслоенных карт. Требованием, чтобы $\varphi_i : U_i \to \mathbb{R}^{n-q} \times \mathbb{R}^q$ было гомеоморфизмом на произведение $(\mathbb{R}^{n-q}, \tau_o) \times (\mathbb{R}^q, \tau_D)$, мы определяем новую топологию τ_F на U_i, относительно которой локальные слои в окрестности U_i открыты. Пусть L_i, L_j — локальные слои в картах (U_i, φ_i) и (U_j, φ_j), соответственно, и $x \in L_i \cap L_j$. Так как $\mathcal{A}$ — максимальный атлас, то существует карта $(U_k, \varphi_k) \in \mathcal{A}$ такая, что $x \in U_k \subset U_i \cap U_j$. Следовательно, локальный слой L_k в карте (U_k, φ_k), проходящий через x, удовлетворяет включению $x \in L_k \subset L_i \cap L_j$. Отсюда вытекает, что семейство всех локальных слоев в картах из $\mathcal{A}$ образует базу новой топологии τ_F на M. Таким образом, утверждение (1) доказано.

(2) Пусть L_α — любой слой слоения (M, F). В каждой точке $x \in L_\alpha$ существует расслоенная карта (U_i, φ_i), $x \in U_i$. Следовательно, через x проходит локальный слой L_x этой карты. Положим $\varphi_x := \varphi_i|_{L_x}$. Тогда $\varphi_x : (L_x, \tau_F) \to (\mathbb{R}^{n-q}, \tau_o)$ — гомеоморфизм, поэтому L_α — $(n-q)$-мерное топологическое многообразие. $\square$

Координаты в расслоенных картах называются *расслоенными*.

Предложение 2.2. *Пусть (M, F) — топологическое слоение и $\mathcal{A} = \{(U_i, \varphi_i) \,|\, i \in \mathcal{J}\}$ — максимальный атлас из расслоенных карт. Предположим, что (U_i, φ_i), $(U_j, \varphi_j) \in \mathcal{A}$, причем пересечение $U_i \cap U_j$ непусто и связно. Тогда определены преобразования расслоенных координат*

$$\psi_{ij} : \varphi_j(U_i \cap U_j) \to \varphi_i(U_i \cap U_j),$$

причем $\varphi_i = \psi_{ij} \circ \varphi_j$ на пересечении $U_i \cap U_j$.

Если $\varphi_j(z) = (x, y)$, $\varphi_i(z) = (x', y')$, где $z \in U_i \cap U_j$, $x, x' \in \mathbb{R}^{n-q}$, $y, y' \in \mathbb{R}^q$, то формулы преобразования координат имеют вид:

$$(x', y') = \psi_{ij}(x, y) = (\lambda_{ij}(x, y), \gamma_{ij}(y)).$$

Доказательство. Пусть (U_i, φ_i), (U_j, φ_j) — расслоенные карты, причем пересечение $U_i \cap U_j$ связно и существует $z \in U_i \cap U_j$. Обозначим через L_i, L_j локальные слои в указанных картах, проходящие через z. Пусть при фиксированном y точка z движется по пересечению $L_i \cap L_j$. Заметим, что при этом изменяются x и x', а точка y' остается неподвижной. Следовательно, y' зависит только от y, что отражено в формулах преобразования расслоенных координат. $\square$

Замечание 2.1. Топологические слоения образуют подкласс обобщенных слоений, введенных Ж. Рибом [23].

2.2. Задание топологического слоения атласом. Как известно, топологическое слоение можно определить с помощью слоеного атласа, не предполагая априори существование разбиения на линейно связные подмножества $F = \{L_\alpha \,|\, \alpha \in I\}$ на линейно связные подмножества L_α многообразия M. Пусть M — n-мерное топологическое многообразие. Рассмотрим карты (U_i, φ_i) и (U_j, φ_j) многообразия M, где $\varphi_i(U_i) = \mathbb{R}^{n-q} \times \mathbb{R}^q = \varphi_j(U_j)$. Подмножества $\varphi_i^{-1}(\mathbb{R}^{n-q} \times \{c\})$, $c \in \mathbb{R}^q$, называются *локальными слоями* в карте (U_i, φ_i), которая называется *расслоенной картой* коразмерности q. Предположим τ_o — обычная топология на $\mathbb{R}^{n-q}$, τ_D — дискретная топология на $\mathbb{R}^q$. Потребуем, чтобы $\varphi_i : U_i \to \mathbb{R}^{n-q} \times \mathbb{R}^q$ и $\varphi_j : U_j \to \mathbb{R}^{n-q} \times \mathbb{R}^q$ являлись гомеоморфизмами на произведение топологических пространств $(\mathbb{R}^{n-q}, \tau_o) \times (\mathbb{R}^q, \tau_D)$. Тогда на U_i и U_j индуцируются новые топологии ω_i и ω_j, относительно которых φ_i и φ_j являются указанными гомеоморфизмами. Подчеркнем, что все локальные слои в (U_i, φ_i) открыты в топологии ω_i, а локальные слои в (U_j, φ_j) принадлежат топологии ω_j. Карты (U_i, φ_i) и (U_j, φ_j) называются *q-согласованными*, если на пересечении $U_i \cap U_j$ топологии, индуцированные ω_i и ω_j, совпадают. Это условие эквивалентно тому, что для любых локальных слоев L_i, L_j в картах (U_i, φ_i) и (U_j, φ_j), соответственно, пересечение $L_i \cap L_j$ открыто как в L_i, так и в L_j.

Определение 2.2. Семейство расслоенных карт $\mathcal{A} = \{(U_i, \varphi_i) \,|\, i \in J\}$ n-мерного топологического многообразия M называется *q-атласом из расслоенных карт*, если выполняются следующие два условия:

(1) $\{U_i \,|\, i \in J\}$ — открытое покрытие M, т. е. $M = \bigcup\limits_{i \in J} U_i$;

(2) любые две карты из $\mathcal{A}$ являются q-согласованными, где $1 \leqslant q \leqslant n - 1$.

Задание q-атласа $\mathcal{A} = \{(U_i, \varphi_i) \,|\, i \in J\}$ из расслоенных карт на M эквивалентно заданию топологического слоения F коразмерности q. Действительно, из определения q-согласованности карт атласа вытекает, что на M определена новая топология Ω, для которой $\Omega|_{U_i} = \omega_i$. Само слоение F представляет собой разбиение M на компоненты связности топологического пространства (M, Ω). Подчеркнем, что топология Ω совпадает со слоевой топологией τ_F, определенной в разделе 2.1, при этом атлас $\mathcal{A}$ является ассоциированным атласом со слоением (M, F).

2.3. Регулярный атлас слоения. Приведем определение регулярного атласа топологического слоения, известное из [14, определение 1.2.11]. Напомним, что семейство $\xi = \{V_i \,|\, i \in J\}$ подмножеств топологического пространства M называется *локально конечным*, если для каждой точки $x \in M$ существует окрестность V, которая пересекает лишь конечное число множеств из ξ.

Определение 2.3. Пусть (M, F) — топологическое слоение коразмерности q. q-Атлас $\mathcal{A} = \{(U_i, \varphi_i)\}$ из расслоенных карт этого слоения называется *регулярным*, если выполняются следующие условия:

(1) для любой расслоенной карты $(U_i, \varphi_i) \in \mathcal{A}$ существует расслоенная карта (W, ψ) (не обязательно из атласа $\mathcal{A}$) такая, что замыкание $\overline{U_i}$ является компактным подмножеством в W и $\varphi_i = \psi|_{U_i}$;
(2) покрытие $\{U_i\}_{i\in J}$ является локально конечным;
(3) для любых двух карт (U_i, φ_i) и (U_j, φ_j) внутренность любого замкнутого локального слоя $L_i \subset \overline{U_i}$ пересекает не более одного локального слоя в $\overline{U_j}$.

Определение 2.4. Пусть (M, F) — топологическое слоение коразмерности q на n-мерном многообразии M и $\mathcal{A} = \{(U_i, \varphi_i) \mid i \in J\}$ — атлас из расслоенных карт этого слоения. Карта $(U, \varphi) \in \mathcal{A}$ называется *кубической с центром в точке* x, если выполняются следующие условия:
(1) $\varphi(U) = (-1, 1)^k \times (-a, a)^q$, где $a > 0$,
(2) $\varphi(x) = (0, 0) \in (-1, 1)^k \times (-a, a)^q$;
(3) существует карта $(V, \psi) \in \mathcal{A}$ такая, что $\overline{U} \subset V$ и $\psi|_U = \varphi$.

Из [14, раздел 1.2] вытекает следующее утверждение.

Предложение 2.3. *С любым топологическим слоением ассоциирован регулярный атлас из кубических карт.*

Таким образом, не нарушая общности, можно считать, что любое топологическое слоение (M, F) задано регулярным атласом.

2.4. Категория топологических слоений. Обозначим через $\mathfrak{Fol}$ категорию, объектами которой служат топологические слоения, а морфизмом слоений $(M, F), (M', F') \in Ob(\mathfrak{Fol})$ является непрерывное отображение $f : M \to M'$, переводящее слои в слои. Произведением $(M, F)\times(M', F')$ является слоение $(M \times M', F \times F')$ на произведении многообразий $M \times M'$, слои которого равны произведению слоев указанных слоений. Будем называть $\mathfrak{Fol}$ *категорией топологических слоений*, или просто *категорией слоений*.

3. Хаотичность топологических слоений

3.1. Свойства слоев топологических слоений. Для полноты обоснования дальнейших наших теорем, в этом разделе для топологических слоений мы доказываем утверждения, которые хорошо известны в классе гладких слоений.

Лемма 3.1. *Пусть L — произвольный слой топологического слоения (M, F) и (U, φ) — кубическая карта с центром в точке $x \in L$. Тогда в любой точке $y \in L$ существует кубическая карта (V, ϕ) с центом в точке y такая, что любой слой слоения, пересекающий V, пересекает и U.*

Доказательство. Пусть $h : [0, 1] \to L$ — путь в L такой, что $h(0) = x$ и $h(1) = y$. В каждой точке $h(t)$, $t \in [0, 1]$, существует кубическая расслоенная карта (U_t, φ_t) с центром в $h(t)$, принадлежащая регулярному атласу. В силу компактности и связности множества $h([0, 1])$ из открытого покрытия $\{U_t \mid t \in [0, 1]\}$ можно выделить такое конечное подпокрытие $\{U_1, U_2, \dots, U_m\}$ множества $h([0, 1])$, что $L \cap U_i \cap U_{i+1} \neq \varnothing$ для каждого $i \in \overline{1, m-1}$. Обозначим через x_i центр кубической карты (U_i, φ_i). Пусть $\varphi_i(U_i) = (-1, 1)^k \times (-a_i, a_i)^q$. Не уменьшая общности, считаем, что $U = U_1$, тогда (U_1, φ_1) — кубическая карта с центром в $x = x_1$. Обозначим через $pr_2 : (-1, 1)^k \times (-a_2, a_2)^q \to (-a_2, a_2)^q$ проекцию на второй сомножитель.

Так как $pr_2(\varphi_2(U_1 \cap U_2))$ — открытая окрестность нуля в $\mathbb{R}^q$, то существует число b_2, $0 < b_2 < a_2$, такое, что $(-b_2, b_2)^q \subset pr_2(\varphi_2(U_1 \cap U_2))$. Положим $V_2 := \varphi_2^{-1}((-1, 1)^k \times (-b_2, b_2)^q)$, $\psi_2 := \varphi_2|_{V_2}$. Заметим, что (V_2, ψ_2) — такая кубическая карта с центром в точке x_2, что любой слой слоения, пересекающий V_2, пересекает и U_1. Аналогичным образом мы определяем такую кубическую карту (V_3, ψ_3) с центром в точке x_3, что любой слой слоения, пересекающий V_3, пересекает и V_2. Подчеркнем, что любой слой слоения, пересекающий V_3, пересекает и U_1. Продолжая этот процесс, за конечное число шагов мы построим кубическую карту (V_m, ψ_m), $V_m \subset U_m$, с центром в точке $y = x_m$ такую, что любой слой слоения, пересекающий V_m, пересекает и U_1. Напоминание о том, что $U_1 = U$, завершает доказательство леммы. □

Пусть (M, F) — топологическое слоение. Подмножество A многообразия M называется *насыщенным*, если оно является объединением слоев. Пусть $F = \{L_\alpha \mid \alpha \in J\}$ — слоение многообразия M. Для подмножества $A \subset M$ множество $\mathcal{N}(A) := \bigcup\limits_{L_\alpha \cap A \neq \varnothing} L_\alpha$ называется *насыщением* подмножества A относительно слоения (M, F).

Лемма 3.2. *Пусть (M, F) — произвольное топологическое слоение. Тогда насыщение $\mathcal{N}(U)$ любого открытого подмножества U в M является открытым подмножеством в M.*

Доказательство. Пусть $x \in \mathcal{N}(U)$. Тогда $x \in L$, где $L \cap U \neq \varnothing$, поэтому существует $y \in L \cap U$. Поскольку координатные окрестности кубических карт с центром в y образуют базу окрестностей в точке y, найдется кубическая карта (U_y, φ_y) такая, что $U_y \subset U$. Согласно лемме 3.1, существует кубическая карта (U_x, φ_x) с центром в точке x такая, что все слои, пересекающие U_x, пересекают и U_y, поэтому пересекают U. Следовательно, $U_x \subset \mathcal{N}(U)$. Таким образом, каждая точка x содержится в $\mathcal{N}(U)$ вместе с окрестностью U_x, следовательно, $\mathcal{N}(U)$ открыто в M. $\square$

Напомним, что отображение топологических пространств называется *открытым*, если образ любого открытого множества открыт.

Теорема 3.1. *Проекция $\pi : M \to M/F$ на пространство слоев M/F топологического слоения (M, F) является открытым отображением.*

Доказательство. Пусть U — любое открытое подмножество в M. Покажем, что $W = \pi(U)$ открыто в M/F. Для любой точки $y \in M/F$ множество $\pi^{-1}(y)$ является слоем слоения (M, F), поэтому $\pi^{-1}(W)$ — объединение всех слоев, пересекающих U, т. е. $\pi^{-1}(W) = \mathcal{N}(U)$. Согласно лемме 3.2, насыщение $\mathcal{N}(U)$ любого открытого подмножества U в M открыто, следовательно, $\pi^{-1}(W)$ открыто в M. По определению фактор-топологии, W открыто в M/F. Таким образом, отображение $\pi : M \to M/F$ — открытое. $\square$

3.2. Определение хаотического слоения. Пусть $T : X \to X$ — непрерывное отображение метрического пространства X в себя. Семейство итераций $\{T^n\}_{n\in\mathbb{N}}$ обозначается через (X, T) и называется *динамической системой*. Дивани [16] ввел следующее понятие хаоса, который теперь называется хаосом Дивани.

Определение 3.1. Динамическая система (X, T) называется *хаотической*, если она обладает следующими тремя свойствами:

(1) топологически транзитивна;
(2) множество периодических точек всюду плотно в X;
(3) чувствительна к начальным условиям.

В работе [9] было доказано, что в определении хаоса Дивани чувствительность динамической системы к начальным условиям следует из транзитивности и всюду плотности периодических точек. В [8] было обнаружено, что ни транзитивность, ни всюду плотность периодических точек не выводится из оставшихся двух условий.

Следуя [10], мы используем следующее определение хаотического топологического слоения, которое можно рассматривать как обобщение хаоса в смысле Дивани на многомерные интегрируемые системы.

Напомним, что слой L слоения (M, F) называется *замкнутым*, если L — замкнутое подмножество в M.

Определение 3.2. Топологическое слоение (M, F) называется *хаотическим*, если:

(1) существует всюду плотный слой (топологическая транзитивность);
(2) объединение замкнутых слоев всюду плотно в M (плотность замкнутых слоев).

Это определение хаотического слоения более общее, чем определение Р. Черчилля [15], в котором первое условие совпадает с (1), а вторым является следующее условие:

(2*) объединение компактных слоев всюду плотно в M.

В случае компактного многообразия M наше определение совпадает с определением Р. Черчилля.

Нам понадобится понятие хаотической группы гомеоморфизмов топологического многообразия. По аналогии с [10] в данной работе мы используем следующее определение, которое также можно рассматривать как обобщение хаоса Дивани.

Определение 3.3. Группа гомеоморфизмов G топологического многообразия M называется *хаотической*, если:

(1) существует всюду плотная орбита;
(2) объединение всех замкнутых орбит всюду плотно в M.

При этом также будем говорить, что группа G имеет *хаотическое поведение*. Если абстрактная группа действует на M как группа гомеоморфизмов, удовлетворяющая условиям (1) и (2), то будем называть это действие *хаотическим*.

В данной работе мы рассматриваем только эффективные действия групп, т. е. такие действия, при которых только нейтральный элемент группы оставляет каждую точку неподвижной.

Определение 3.3 отличается от определения хаотической группы гомеоморфизмов в [12, 22] условием (2). Вместо (2) в [12, 22] требуется выполнение более сильного условия:

(2**) объединение конечных орбит всюду плотно в M.

Кроме того, в отличие от нашей работы в [22] предполагается компактность многообразия M.

3.3. Критерий хаотичности топологических слоений и групп гомеоморфизмов.

Теорема 3.2. *Для хаотичности топологического слоения (M, F) необходимо и достаточно выполнения следующих двух условий для его пространства слоев M/F:*

(1) *существует всюду плотное одноточечное подмножество в M/F;*
(2) *множество замкнутых одноточечных подмножеств всюду плотно в M/F.*

Доказательство. Обозначим через $\pi : M \to M/F$ проекцию на пространство слоев слоения (M, F). Предположим, что топологическое слоение (M, F) имеет всюду плотный слой L, т. е. $\overline{L} = M$. Пусть $[L] = \pi(L)$. По определению фактор-топологии в M/F, для любого открытого подмножества $W \subset M/F$ прообраз $\pi^{-1}(W)$ открыт в M. Подчеркнем, что $\pi^{-1}(W)$ — насыщенное подмножество в M. Так как $\overline{L} = M$, то $\pi^{-1}(W) \cap L \neq \varnothing$, следовательно, $L \subset \pi^{-1}(W)$. Отсюда вытекает, что $[L] \in W$ для любого открытого подмножества W в M/F, т. е. одноточечное подмножество $[L]$ всюду плотно в M/F, поэтому выполняется условие (i).

Пусть теперь выполняется условие (i), т. е. существует всюду плотное одноточечное подмножество $[L]$ в M/F. Рассмотрим любое открытое подмножество U в M. По теореме 3.1, проекция $\pi : M \to M/F$ — непрерывное и открытое отображение, поэтому $V := \pi(U)$ открыто в M/F. Согласно предположению, $[L]$ всюду плотно в M/F, поэтому $[L] \cap V \neq \varnothing$, что эквивалентно выполнению неравенства $\pi^{-1}(V) \cap L \neq \varnothing$, следовательно, $L \subset \pi^{-1}(V)$. Заметим, что

$$\pi^{-1}(V) = \bigcup_{L_\alpha \cap U \neq \varnothing} L_\alpha,$$

где $L_\alpha \in F$. Таким образом, включение $L \subset \pi^{-1}(V)$ влечет неравенство $L \cap U \neq \varnothing$. Так как U — любое открытое подмножество в M, то слой L всюду плотен в M.

Таким образом, топологическая транзитивность слоения (M, F) эквивалентна выполнению условия (i).

Пусть L_α — любой замкнутый слой и $[L_\alpha] = \pi(L_\alpha)$. Так как $\pi^{-1}(M/F \setminus [L_\alpha]) = M \setminus L_\alpha$ открыто в M как дополнение к замкнутому множеству, то $M/F \setminus [L_\alpha] = \pi(M \setminus L_\alpha)$ — открытое подмножество в M/F как образ открытого подмножества $M \setminus L_\alpha$ при открытом отображении $\pi : M \to M/F$. Следовательно, одноточечное подмножество $[L_\alpha]$ замкнуто в M/F. Верно и обратное, в силу непрерывности $\pi : M \to M/F$, если одноточечное подмножество $[L_\alpha]$ замкнуто, то его прообраз $L_\alpha = \pi^{-1}([L_\alpha])$ — замкнутый слой.

Аналогично предыдущему доказывается, что всюду плотность объединения замкнутых слоев слоения (M, F) эквивалентна условию (ii) всюду плотности объединения замкнутых одноточечных подмножеств в M/F.

Таким образом, выполнение условий (1) и (2) в определении 3.2 хаотичности слоения (M, F) эквивалентно выполнению условий (i) и (ii) теоремы 3.2. $\square$

Лемма 3.3. *Проекция $\mu : B \to B/\Psi$ на пространство орбит произвольной группы гомеоморфизмов топологического пространства B является непрерывным и открытым отображением.*

Доказательство. Отображение μ непрерывно как фактор-отображение. Пусть $U \subset B$ — любое открытое подмножество. Покажем, что $W = \mu(U)$ открыто в фактор-топологии пространства орбит B/Ψ. Имеют место равенства $\mu^{-1}(W) = \bigcup\limits_{x \in U} \Psi.x = \bigcup\limits_{\psi \in \Psi} \psi(U)$, где $\Psi.x$ — орбита точки $x \in B$. Поскольку Ψ — группа гомеоморфизмов, то множество $\psi(U)$ является открытым. Множество $\mu^{-1}(W)$ открыто в B как объединение открытых множеств. По определению фактор-топологии W открыто в B/Ψ. Следовательно, отображение $\mu : B \to B/\Psi$ является открытым. $\square$

Применяя лемму 3.3, аналогично теореме 3.2 доказывается следующее утверждение.

Теорема 3.3. *Для хаотичности группы гомеоморфизмов Ψ топологического пространства B необходимо и достаточно выполнения следующих двух условий для пространства орбит слоев B/Ψ этой группы:*

(1) *существует всюду плотное одноточечное подмножество в B/Ψ;*
(2) *множество замкнутых одноточечных подмножеств всюду плотно в B/Ψ.*

Определение 3.4. Свойство топологического слоения (M, F) называется *трансверсальным*, если оно может быть выражено в терминах пространства слоев M/F этого слоения.

Определение 3.5. Свойство группы гомеоморфизмов Ψ топологического пространства B называется *трансверсальным*, если оно может быть выражено в терминах пространства орбит B/Ψ этой группы.

Из теорем 3.2 и 3.3 вытекает следующее утверждение.

Следствие 3.1. *Хаотичность топологических слоений и хаотичность групп гомеоморфизмов топологических пространств являются трансверсальными свойствами.*

4. Топологическая транзитивность слоений

По аналогии с динамическими системами мы даем следующее определение топологической транзитивности непрерывных слоений.

Определение 4.1. Слоение (M, F) называется *топологически транзитивным*, если для непустых открытых подмножеств U и V в M существует слой L такой, что $L \cap U \neq \varnothing$ и $L \cap V \neq \varnothing$.

В [10] топологическая транзитивность слоения определена следующим образом.

Определение 4.2. Если существует всюду плотный слой слоения (M, F), то (M, F) называется *топологически транзитивным.*

Напомним, что G_δ-множество есть счетное пересечение открытых подмножеств топологического пространства.

Следующая теорема является аналогом теоремы Биркгофа, доказанной в 1920 году в случае дискретной динамической системы на компактном подмножестве $\mathbb{R}^n$.

Теорема 4.1. *Пусть (M, F) — топологическое слоение. Тогда:*

(1) *определения 4.1 и 4.2 топологической транзитивности слоения (M, F) эквивалентны;*
(2) *если слоение (M, F) топологически транзитивно, то объединение всюду плотных слоев является всюду плотным G_δ-подмножеством в M.*

Доказательство. Предположим, что (M, F) удовлетворяет определению 4.1. Через $D(F)$ обозначим объединение всех всюду плотных слоев (M, F). Пусть τ — топология многообразия M. Подчеркнем, что подмножество A всюду плотно в M тогда и только тогда, когда $A \cap U \neq \varnothing$ для любого непустого открытого подмножества $U \subset M$. Это значит, что

$$L \in D(F) \Leftrightarrow L \subset \mathcal{N}(U) \quad \forall U \in \tau. \tag{4.1}$$

По условию теоремы, M — топологическое многообразие, следовательно, топологическое пространство (M,τ) имеет счетную базу $\Sigma = \{W_m \,|\, m \in \mathbb{N}\}$. Согласно определению базы, каждое открытое подмножество U является объединением подмножеств из Σ, поэтому, с учетом (4.1), мы получаем:

$$L \in D(F) \Leftrightarrow L \subset \mathcal{N}(W_m) \ \ \forall m \in \mathbb{N} \Leftrightarrow L \subset \bigcap_{m\in\mathbb{N}} \mathcal{N}(W_m). \tag{4.2}$$

Из (4.2) вытекает включение $D(F) \subset \bigcap_{m\in\mathbb{N}} \mathcal{N}(W_m)$. Если слой L_α принадлежит пересечению $\bigcap_{m\in\mathbb{N}} \mathcal{N}(W_m)$, то $L_\alpha \subset \mathcal{N}(W_m)$ для любого $m \in \mathbb{N}$, поэтому L_α пересекает любое подмножество из базы Σ топологии τ. Следовательно, L_α — всюду плотный слой, т. е. $L_\alpha \subset D(F)$. Таким образом, выполняется равенство:

$$D(F) = \bigcap_{m\in\mathbb{N}} \mathcal{N}(W_m). \tag{4.3}$$

По лемме 3.2, насыщение $\mathcal{N}(U)$ открытого подмножества U открыто в M. Следовательно, согласно (4.3), $D(F)$ является G_δ-подмножеством в M. Поскольку каждое топологическое многообразие локально компактно и имеет счетную базу, оно является польским пространством и, следовательно, пространством Бэра. Так как всюду плотный слой L удовлетворяет включению $L \subset \mathcal{N}(W_m)$ $\forall m \in \mathbb{N}$, то каждое подмножество $\mathcal{N}(W_m)$ всюду плотно в M. По теореме Бэра, в полном метрическом пространстве пересечение счетного числа открытых всюду плотных подмножеств всюду плотно. Следовательно, $D(F)$ всюду плотно в M. В частности, $D(F) \neq \varnothing$, т. е. существует всюду плотный слой слоения (M,F). Таким образом, из определения 4.1 вытекает определение 4.2. Допустим теперь, что (M,F) удовлетворяет определению 4.2, и существует всюду плотный слой L, т. е. $\overline{L} = M$. Тогда L пересекает любое непустое открытое подмножество в M. Таким образом, $\overline{L} = M$ влечет $L \cap U \neq \varnothing$ и $L \cap V \neq \varnothing$ для любых непустых открытых подмножеств U, V в M. Следовательно, (M,F) удовлетворяет определению 4.1. ☐

Замечание 4.1. Далее топологическое слоение называется *транзитивным*, если оно удовлетворяет одному из эквивалентных определений 4.1 или 4.2.

Замечание 4.2. Утверждение, аналогичное теореме 4.1, известно для динамических систем (X,T) (см. [17, Theorem 1.16]) и для групп гомеоморфизмов компактных пространств [13].

5. Слоения, накрытые расслоениями

5.1. Глобальная группа голономии слоений, накрытых расслоениями. Предположим, что $\theta : \widetilde{B} \to B$ — накрывающее отображение топологических пространств. Напомним, что группа гомеоморфизмов G называется *группой накрывающих преобразований*, если каждый гомеоморфизм $g \in G$ удовлетворяет коммутативной диаграмме:

$$\begin{tikzcd} \widetilde{B} \arrow[rr, "g"] \arrow[dr, "\theta"'] & & \widetilde{B} \arrow[dl, "\theta"] \\ & B. & \end{tikzcd}$$

Имеет место следующая легко доказываемая лемма.

Лемма 5.1. *Пусть $\kappa : \widetilde{M} \to M$ — универсальное накрывающее отображение для n-мерного топологического многообразия M. Если (M,F) — топологическое слоение, то $\widetilde{M}$ — также n-мерное топологическое многообразие, на котором индуцируется топологическое слоение $(\widetilde{M},\widetilde{F})$, слои которого накрывают соответствующие слои слоения (M,F).*

Будем обозначать индуцированное слоение $\widetilde{F}$, удовлетворяющее лемме 5.1, также через κ^*F и называть *поднятием слоения* (M,F) на $\widetilde{M}$.

Определение 5.1. Топологическое слоение (M,F) коразмерности q называется *накрытым расслоением*, если слоение $(\widetilde{M},\widetilde{F})$, индуцированное универсальным накрывающим отображением $\kappa : \widetilde{M} \to M$, образовано слоями некоторого локально тривиального расслоения $r : \widetilde{M} \to \widetilde{T}$ над q-мерным топологическим многообразием $\widetilde{T}$.

Теорема 5.1. *Пусть слоение (M,F) накрыто расслоением $r:\widetilde{M}\to\widetilde{T}$, где $\widetilde{M}$ — пространство универсального накрывающего отображения $\kappa:\widetilde{M}\to M$. Зафиксируем $x\in M$ и $\widetilde{x}\in\widetilde{M}$. Обозначим через $\pi:M\to M/F$ фактор-отображение на пространство слоев. Тогда определены:*

(1) *группа накрывающих преобразований $G\cong\pi_1(M,x)$, гомоморфизм групп $\chi:G\to Homeo(\widetilde{T})$ и группа $\Psi_0:=\chi(G)$;*
(2) *гомеоморфизм $d:M/F\to\widetilde{T}/\Psi_0$ на пространство орбит $\widetilde{T}/\Psi_0$ группы Ψ_0, удовлетворяющий коммутативной диаграмме*

$$\begin{tikzcd} & \widetilde{M} \arrow[dl, "\kappa"'] \arrow[dr, "r"] & \\ M \arrow[d, "\pi"'] & & \widetilde{T} \arrow[d, "\mu"] \\ M/F \arrow[rr, "d"] & & \widetilde{T}/\Psi_0, \end{tikzcd} \tag{5.1}$$

где $\mu:\widetilde{T}\to\widetilde{T}/\Psi_0$ — проекция на пространство орбит группы Ψ_0.

Доказательство. Пусть $\kappa:\widetilde{M}\to M$ — универсальное накрывающее отображение. При фиксированных точках $x\in M$ и $\widetilde{x}\in\widetilde{M}$ существует изоморфизм фундаментальной группы $\pi_1(M,x)$ на группу накрывающих преобразований G накрытия $\kappa:\widetilde{M}\to M$. Отождествим эти группы по указанному изоморфизму. По условию, индуцированное слоение $(\widetilde{M},\widetilde{F})$, $\widetilde{F}=\kappa^*F$, образовано слоями локально тривиального расслоения с проекцией $r:\widetilde{M}\to\widetilde{T}$, поэтому $B=\widetilde{M}/\widetilde{F}$ — многообразие слоев поднятого слоения. Так как каждое преобразование $g\in G$ — изоморфизм индуцированного слоения $(\widetilde{M},\widetilde{F})$ в категории $\mathfrak{Fol}$, то g индуцирует биекцию $\psi(g):\widetilde{T}\to\widetilde{T}$, удовлетворяющую коммутативной диаграмме

$$\begin{tikzcd} \widetilde{M} \arrow[r, "r"] \arrow[d, "g"'] & \widetilde{T} \arrow[d, "\psi(g)"] \\ \widetilde{M} \arrow[r, "r"] & \widetilde{T}. \end{tikzcd} \tag{5.2}$$

Поскольку r и g — одновременно непрерывные и открытые отображения, биекция $\psi(g)$ также непрерывна и открыта, следовательно, $\psi(g)$ — гомеоморфизм многообразия B. Из 5.2 вытекает, что отображение

$$\chi:G\to Homeo(B),\ \ \chi(g):=\psi(g)\quad\forall g\in G$$

— гомоморфизм на группу $\Psi_0:=\chi(G)$.

Обозначим через $\mu:\widetilde{T}\to\widetilde{T}/\Psi_0$ проекцию на пространство орбит группы Ψ_0. Согласно лемме 5.1, для любого слоя L слоения (M,F) произвольный слой $\widetilde{L}$ индуцированного слоения из прообраза $\kappa^{-1}(L)$ накрывает L. Следовательно, прообраз $\kappa^{-1}(L)$ равен $G.\widetilde{L}=\bigcup\limits_{z\in\widetilde{L}}G.z$. Так как $\mu(\widetilde{L})=[\widetilde{L}]$ — точка в B и, по определению Ψ_0, $\mu(G.\widetilde{L})=\Psi_0.[\widetilde{L}]$, то равенство $d([L]):=\Psi_0.[\widetilde{L}]$ определяет биективное отображение $d:M/F\to\widetilde{T}/\Psi_0$, удовлетворяющее коммутативной диаграмме 5.1. Поскольку отображения κ, π, r и μ непрерывны и открыты, d также непрерывно и открыто, следовательно, d — гомеоморфизм. $\square$

Определение 5.2. Группа гомеоморфизмов Ψ_0 многообразия $\widetilde{T}$, определенная в теореме 5.1, называется *глобальной группой голономии* слоения (M,F), накрытого расслоением $r:\widetilde{M}\to\widetilde{T}$.

5.2. Критерий хаотичности топологических слоений, накрытых расслоениями. Следующий критерий сводит существование хаоса в топологическом слоении, накрытом расслоением, к существованию хаотического поведения его глобальной группы голономии.

Теорема 5.2. *Пусть (M,F) — топологическое слоение, накрытое расслоением $r:\widetilde{M}\to\widetilde{T}$, и $\Psi_0\subset Homeo(\widetilde{T})$ — его глобальная группа голономии. Тогда для того, чтобы слоение (M,F) было хаотическим, необходимо и достаточно хаотичности группы Ψ_0.*

Доказательство. Согласно следствию 3.1, хаотичность слоения (M, F) и хаотичность группы гомеоморфизмов Ψ_0 является трансверсальными свойствами, т. е. выражаются в одних и тех же терминах топологического пространства слоев M/F и топологического пространства орбит $\widetilde{T}/\Psi_0$, соответственно. Как доказано в теореме 5.1, топологические пространства M/F и $\widetilde{T}/\Psi_0$ гомеоморфны. Следовательно, слоение (M, F) имеет хаотическое поведение тогда и только тогда, когда его глобальная группа голономии Ψ_0 хаотична на $\widetilde{T}$. □

5.3. Необходимые условия изоморфности топологических слоений, накрытых расслоениями. Напомним понятие топологической сопряженности. Предположим, что на топологических пространствах X и X' заданы группы гомеоморфизмов G и G', соответственно. Говорят, что группы G и G' *топологически сопряжены*, если существуют изоморфизм групп $\tau : G \to G'$ и гомеоморфизм топологических пространств $f : X \to X'$ такие, что для любого элемента $g \in G$ диаграмма

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & X' \\ {\scriptstyle g}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \tau(g)} \\ X & \xrightarrow{f} & X' \end{array} \tag{5.3}$$

коммутативна. Будем говорить, что указанная пара (τ, f) реализует *сопряжение групп G и G'*.

Теорема 5.3. *Пусть (M, F), (M', F') — топологические слоения, накрытые расслоениями $r : \widetilde{M} \to \widetilde{T}$ и $r' : \widetilde{M}' \to \widetilde{T}'$, соответственно, а $\Psi_0 \subset Homeo(\widetilde{T})$ и $\Psi_0' \subset Homeo(\widetilde{T}')$ — их глобальные группы голономии. Тогда для того, чтобы слоения (M, F) и (M', F') были изоморфны в категории слоений $\mathfrak{Fol}$, необходимо, чтобы их глобальные группы голономии были топологически сопряжены.*

Доказательство. Предположим, что существует гомеоморфизм $f : M \to M'$, являющийся изоморфизмом слоений (M, F) и (M', F') в категории слоений $\mathfrak{Fol}$. Обозначим через $\kappa : \widetilde{M} \to M$ и $\kappa' : \widetilde{M}' \to M'$ универсальные накрывающие отображения. Тогда $f \circ \kappa : \widetilde{M} \to M'$ и $\kappa' : \widetilde{M}' \to M'$ — два универсальных накрывающих отображения для M'. Следовательно, существует гомеоморфизм $\widetilde{f} : \widetilde{M} \to \widetilde{M}'$, удовлетворяющий коммутативной диаграмме

$$\begin{array}{ccc} \widetilde{M} & \xrightarrow{\widetilde{f}} & \widetilde{M}' \\ {\scriptstyle \kappa}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \kappa'} \\ M & \xrightarrow{f} & M'. \end{array} \tag{5.4}$$

Зафиксируем точки $\widetilde{x} \in \widetilde{M}$ и $\widetilde{x}' = \widetilde{f}(\widetilde{x}) \in \widetilde{M}$. Пусть $x = \kappa(\widetilde{x}) \in M$ и $x' = \kappa'(\widetilde{x}') \in M'$, тогда $x' = f(x)$. При этом фундаментальная группа $\pi_1(M, x)$ свободно и собственно разрывно действует на $\widetilde{M}$ как группа накрывающих преобразований универсального накрытия κ, а фундаментальная группа $\pi_1(M', x')$ — на $\widetilde{M}'$ как группа накрывающих преобразований универсального накрытия κ'. Определен индуцированный гомеоморфизмом $f : M \to M'$ изоморфизм групп $f_* : \pi_1(M, x) \cong G \to \pi_1(M', x') \cong G'$. Подчеркнем, что пара $(f_*, \widetilde{f})$ реализует топологическую сопряженность групп гомеоморфизмов G и G'. Так как κ, κ', f — морфизмы в категории $\mathfrak{Fol}$, то из коммутативности диаграммы (5.4), учитывая, что $\widetilde{f}$ — гомеоморфизм, мы получаем, что $\widetilde{f}$ — изоморфизм поднятых слоений $\kappa^* F$ и $\kappa'^* F'$. Следовательно, существует гомеоморфизм пространств слоев этих слоений $\delta : \widetilde{T} \to \widetilde{T}'$, удовлетворяющий коммутативной диаграмме

$$\begin{array}{ccc} \widetilde{M} & \xrightarrow{r} & \widetilde{T} \\ {\scriptstyle \widetilde{f}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \delta} \\ \widetilde{M}' & \xrightarrow{r'} & \widetilde{T}'. \end{array} \tag{5.5}$$

Поскольку слоения (M, F) и (M', F') накрыты расслоениями, определены их глобальные группы голономии Ψ_0 и Ψ_0', соответственно, и эпиморфизмы групп $\chi : G \to \Psi_0$, $\chi' : G' \to \Psi_0'$. Заметим, что изоморфизм $\widetilde{f}$ в категории $\mathfrak{Fol}$ и определение групп голономии влекут существование такой биекции $\nu : \Psi_0 \to \Psi'_0$, что коммутативна диаграмма

$$\begin{array}{ccc} G & \xrightarrow{\chi} & \Psi_0 \\ {\scriptstyle\tau}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle\nu} \\ G' & \xrightarrow{\chi'} & \Psi'_0. \end{array} \tag{5.6}$$

Из коммутативности диаграммы (5.6) вытекает, что $\nu : \Psi_0 \to \Psi'_0$ — изоморфизм групп. Суммируя доказанное, мы видим, что пара (ν, δ) реализует топологическую сопряженность глобальных групп голономии Ψ_0 и Ψ'_0 изоморфных слоений (M, F) и (M', F'), что завершает доказательство теоремы. □

6. Интегрируемая связность Эресмана для топологических слоений

6.1. Понятие интегрируемой связности Эресмана для топологических слоений. Понятие связности Эресмана для гладких слоений введено Р. А. Блюменталем и Дж. Хебдой [11] как естественное обобщение связности Эресмана в расслоениях.

Напомним, что гладкое q-мерное распределение $\mathfrak{M}$ на n-мерном многообразии M называется *интегрируемым,* если через каждую точку $x \in M$ проходит q-мерное интегральное многообразие этого распределения. Как известно, распределение $\mathfrak{M}$ интегрируемо тогда и только тогда, когда оно образовано касательными векторными пространствами к некоторому слоению (M, F^t), т. е. $\mathfrak{M}_x = T_x F^t$ для любой точки $x \in M$, где $T_x F^t$ — касательное пространство к слою слоения (M, F^t), а $\mathfrak{M}_x$ — значение распределения $\mathfrak{M}$ в точке x.

Пусть (M, F) — слоение коразмерности q и $\mathfrak{M}$ — гладкое q-мерное интегрируемое распределение на n-мерном гладком многообразии M, трансверсальное к слоению (M, F). Это означает, что в любой точке $x \in M$ касательное векторное пространство $T_x M$ к M раскладывается в прямую сумму векторных подпространств $T_x M = T_x F \oplus \mathfrak{M}_x$. Кусочно гладкие интегральные кривые в слоях слоения (M, F^t) называются *горизонтальными,* а кусочно гладкие кривые в слоях слоения (M, F) называются *вертикальными.* Пусть $I_1 = I_2 = I = [0, 1]$. Кусочно гладкое отображение H квадрата $I_1 \times I_2$ в M называется *вертикально-горизонтальной гомотопией*, если кривая $H|_{\{s\} \times I_2}$ является вертикальной для любого $s \in I_1$ и кривая $H|_{I_1 \times \{t\}}$ является горизонтальной для любого $t \in I_2$. В этом случае, пара путей $(H|_{I_1 \times \{0\}}, H|_{\{0\} \times I_2})$ называется *базой* H. Известно, что существует не более одной вертикально-горизонтальной гомотопии с данной базой.

Пара путей (σ, h) в M с общей начальной точкой $\sigma(0) = h(0)$ называется *допустимой*, если σ — горизонтальная кривая, а h — вертикальная кривая.

Отождествляя интегрируемое распределение с определяемым им слоением, мы получаем следующее определение.

Определение 6.1. Гладкое слоение (M, F^t) называется *интегрируемой связностью Эресмана* для слоения (M, F), если для любой допустимой пары путей (σ, h) в M существует вертикально-горизонтальная гомотопия H с базой (σ, h).

Следующую теорему можно рассматривать как критерий существования интегрируемой связности Эресмана для гладкого слоения.

Теорема 6.1. *Пусть (M, F) — гладкое слоение произвольной коразмерности q на n-мерном многообразии M и $\kappa : \widetilde{M} \to M$ — универсальное накрывающее отображение. Тогда для существования интегрируемой связности Эресмана (M, F^t) для (M, F) необходимо и достаточно выполнения следующих двух условий:*

1. *универсальное накрывающее многообразие $\widetilde{M}$ диффеоморфно произведению гладких многообразий $\widetilde{L} \times \widetilde{T}$;*
2. *индуцированные слоения $\kappa^* F$ и $\kappa^* F^t$ на $\widetilde{M}$ совпадают с тривиальными слоениями произведения $\widetilde{L} \times \widetilde{T}$.*

Доказательство. Предположим, что существует интегрируемая связность Эресмана (M, F^t) для слоения (M, F). Пусть $\widetilde{F} = \kappa^* F$ и $\widetilde{F}^t = \kappa^* F^t$ — индуцированные слоения на универсальном накрывающем многообразии $\widetilde{M}$. Покажем, что $\widetilde{F}^t$ — интегрируемая связность Эресмана для слоения $(\widetilde{M}, \widetilde{F})$. Пусть $(\widetilde{\sigma}, \widetilde{h})$ — произвольная допустимая пара путей с началом в $\widetilde{x} \in \widetilde{M}$. Здесь $\widetilde{\sigma} : I_1 \to \widetilde{M}$ — путь в слое слоения $\widetilde{F}$, а $\widetilde{h} : I_2 \to \widetilde{M}$ — путь в слое слоения $\widetilde{F}^t$. Положим $\sigma := \kappa \circ \widetilde{\sigma}$ и $h := \kappa \circ \widetilde{h}$, тогда (σ, h) — допустимая пара путей с началом в $x = \kappa(\widetilde{x})$ в M. Согласно определению интегрируемой связности Эресмана F^t для слоения (M, F), существует вертикально-горизонтальная гомотопия H с базой (σ, h). При любом фиксированном $t \in I_2$ сужение $\sigma_t := H|_{I_1 \times \{t\}}$ есть путь в слое $L = L(h(t))$ слоения (M, F) с началом $\sigma_t(0) = h(t)$. Так как $\kappa(\widetilde{h}(t)) = h(t)$, то существует единственный путь $\widetilde{\sigma_t}$ с началом в точке $\widetilde{h}(t)$, накрывающий путь σ_t. Положим по определению

$$\widetilde{H} : I_1 \times I_2 \to \widetilde{M}, \quad \widetilde{H}(s,t) := \widetilde{\sigma_t}(s) \ \ \forall (s,t) \in I_1 \times I_2,$$

тогда $\kappa \circ \widetilde{H} = H$. Следовательно, $\widetilde{H}$ — кусочно гладкое отображение. Так как при любом фиксированном $s \in I_1$ сужение $\widetilde{H}|_{\{s\} \times I_2}$ — путь в слое слоения $(\widetilde{M}, \widetilde{F})$, то $\widetilde{H}$ — вертикально-горизонтальная гомотопия с базой $(\widetilde{\sigma}, \widetilde{h})$. Это означает, что $\widetilde{F}^t$ — интегрируемая связность Эресмана для слоения $(\widetilde{M}, \widetilde{F})$. Так как многообразие $\widetilde{M}$ односвязно, то по теореме о разложении, доказанной Ш. Касивабарой [18] и переоткрытой Р. А. Блюменталем и Дж. Хебдой [11], существует диффеоморфизм $\theta : \widetilde{M} \to \widetilde{M}_1 \times \widetilde{M}_2$ на произведение многообразий $\widetilde{M}_1 \times \widetilde{M}_2$, который является изоморфизмом в категории слоений $\mathfrak{Fol}$ каждой пары слоений $\widetilde{F}$ и $\widetilde{F}_1$, $\widetilde{F}^t$ и $\widetilde{F}_2$, где $\widetilde{F}_1 := \{\widetilde{M}_1 \times \{b\} \,|\, b \in \widetilde{M}_2\}$, $\widetilde{F}_2 := \{\{a\} \times \widetilde{M}_2 \,|\, a \in \widetilde{M}_1\}$ — тривиальные слоения произведения $\widetilde{M}_1 \times \widetilde{M}_2$. Это означает, что для (M, F) выполняются оба условия (1) и (2).

Обратно, предположим, что гладкое слоение (M, F) удовлетворяет условиям (1) и (2). Введем обозначения: $\widetilde{F}_1 = \kappa^* F$ и $\widetilde{F}_2 = \kappa^* F^t$. Из (2) вытекает, что $\kappa^* F^t$ — интегрируемая связность Эресмана для слоения $\widetilde{F}_1$. Рассмотрим произвольную пару путей (σ, h) с общим началом в $x \in M$. Пусть $\widetilde{x} \in \kappa^{-1}(x)$. Существуют пути $\widetilde{\sigma}$ и $\widetilde{h}$ в $\widetilde{M}$ с общим началом в $\widetilde{x}$, накрывающие пути σ и h, соответственно. Из условий (1) и (2) вытекает, что $(\widetilde{\sigma}, \widetilde{h})$ — допустимая пара путей, поэтому существует вертикально-горизонтальная гомотопия $\widetilde{H}$ с базой $(\widetilde{\sigma}, \widetilde{h})$. Тогда $H := \kappa \circ \widetilde{H}$ — вертикально-горизонтальная гомотопия с базой $\sigma, h)$, т. е., F^t — интегрируемая связность Эресмана для слоения (M, F). ☐

Теорема 6.1 позволяет нам следующим образом ввести понятие интегрируемой связности Эресмана для топологических слоений.

Определение 6.2. Предположим, что универсальное накрывающее отображение $\kappa : \widetilde{M} \to M$ для топологического многообразия M обладает тем свойством, что $\widetilde{M} = \widetilde{M}_1 \times \widetilde{M}_2$ — произведение топологических многообразий $\widetilde{M}_1$ и $\widetilde{M}_2$. Пусть $\widetilde{F_1}$ и $\widetilde{F_2}$ — тривиальные слоения произведения $\widetilde{M}_1 \times \widetilde{M}_2$. Если на M заданы два слоения F_1 и F_2, слои которых являются образами слоев соответствующих слоений $\widetilde{M}_1$ и $\widetilde{M}_2$ при накрытии $\kappa : \widetilde{M} \to M$, то будем говорить, что тройка (M, F_1, F_2) — *топологическое двуслоение, накрытое произведением.*

Определение 6.3. Пусть (M, F) — топологическое слоение. Топологическое слоение (M, F^t) такое, что тройка (M, F, F^t) образует топологическое двуслоение, накрытое произведением, называется *интегрируемой связностью Эресмана* для слоения (M, F).

Далее топологическое слоение (M, F) с интегрируемой связностью Эресмана (M, F^t) будем обозначать тройкой (M, F, F^t).

Замечание 6.1. Топологизация, включающая классификационные теоремы, простых трансверсальных двурасслоений, образующих класс двуслоений, накрытых произведением, получена Я. Л. Шапиро и Н. И. Жуковой в [7]. В [7] гладкие локально тривиальные расслоения заменены расслоениями Гуревича. Общий подход к топологизации гладких двуслоений, накрытых произведением, предложен И. Вайсманом [27]. В отличие от нас И. Вайсман рассматривает не топологические многообразия, а допустимые топологические пространства M, накрытые произведением.

6.2. Структура топологических слоений с интегрируемой связностью Эресмана. Пусть Ψ — некоторая группа гомеоморфизмов топологического многообразия M. Говорят, что Ψ действует на M *свободно*, если $\psi.x = x$ для некоторой точки $x \in M$ влечет $\psi = id_M$.

Действие группы Ψ называется *собственно разрывным*, если оно удовлетворяет следующим условиям:

(1) если для любых двух точек x и x' из M и любого $\psi \in \Psi$ выполняется неравенство $\psi(x) \neq x'$, то существуют окрестности U и U' точек x и x', соответственно, такие, что $\psi(U) \cap U' = \varnothing$;
(2) для всех $x \in M$ группа $\Psi_x = \{\psi \in \Psi \mid \psi(x) = x\}$ конечна;
(3) каждая точка $x \in M$ имеет окрестность U такую, что $\psi_x(U) = U$ для любого $\psi_x \in \Psi_x$ и такую, что $U \cap \psi(U) = \varnothing$ для всех $\psi \notin \Psi_x$.

Группа Ψ, $\psi \in \Psi$, действует *эффективно* на многообразии M, если $\psi.x = x$ для всех $x \in M$ влечет $\psi = id_M$.

Обозначим через $\mathfrak{BiF}$ категорию, объектами которой служат двуслоения (M, F_1, F_2), накрытые произведением. *Морфизмом* двух объектов (M, F_1, F_2) и (M', F_1', F_2') будем называть непрерывное отображение $f\colon M \to M'$, являющееся морфизмом каждой пары слоений F_1 и F_1', F_2 и F_2' в категории слоений $\mathfrak{Fol}$.

Пусть X_1 и X_2 — топологические многообразия размерности n_1 и n_2, соответственно. Пусть заданы

$$\Phi_1\colon \Psi \times X_1 \to X_1 \quad \text{и} \quad \Phi_2\colon \Psi \times X_2 \to X_2$$

— непрерывные эффективные действия группы Ψ, обладающие тем свойством, что индуцированное диагональное эффективное действие группы Ψ

$$\Phi\colon \Psi \times X_1 \times X_2 \to X_1 \times X_2\colon (\psi.(x_1, x_2)) \mapsto (\psi.x_1, \psi.x_2) \ \ \forall \psi \in \Psi$$

является свободным и собственно разрывным. Следовательно, проекция

$$\kappa\colon X_1 \times X_2 \to (X_1 \times X_2)/\Psi$$

на пространство орбит является регулярным накрывающим отображением. При этом группа Ψ действует посредством Φ на произведении топологических многообразий $X_1 \times X_2$ как группа накрывающих преобразований. Поэтому на фактор-пространстве $(X_1 \times X_2)/\Psi$ индуцируется структура топологического многообразия. Поскольку действие Φ группы Ψ на $X_1 \times X_2$ сохраняет структуру произведения, то на $(X_1 \times X_2)/\Psi$ индуцируется двуслоение $(\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2)$, накрытое произведением $X_1 \times X_2$.

Определение 6.4. Топологическое фактор-многообразие $(X_1 \times X_2)/\Psi$ называется *каноническим*, а тройка $((X_1 \times X_2)/\Psi, \mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2)$, полученная указанным выше образом, называется *каноническим топологическим двуслоением.* Слоение $((X_1 \times X_2)/\Psi, \mathcal{F}_1)$ называется *каноническим топологическим слоением с интегрируемой связностью Эресмана.*

В [4] исследуются гладкие слоения (M, F) коразмерности q на n-мерных многообразиях M с интегрируемой связностью Эресмана. Доказана теорема о глобальной структуре таких слоений [4, теорема 1.1]. Доказательство указанной теоремы опирается на упомянутую выше теорему Касивабары [18] о разложении односвязного многообразия в произведение и результаты работ Я. Л. Шапиро [5, 6]. Согласно теореме 6.1, универсальное накрывающее многообразие $\widetilde{M}$ для M представляет собой произведение $\widetilde{M}_1 \times \widetilde{M}_2$, слои которого накрывают соответствующие слои слоений (M, F) и (M, F^t) посредством универсального накрывающего отображения $\kappa : \widetilde{M} \to M$. Таким образом, тройка (M, F, F^t) — двуслоение, накрытое произведением. Поэтому схема доказательства предложения 2 и следствия 3 из [4] применима и к топологическим многообразиям. Используя ее, мы доказываем следующую теорему о структуре топологических двуслоений, накрытых произведением.

Теорема 6.2. *Пусть (M, F_1, F_2) — топологическое двуслоение, накрытое произведением. Тогда*:

(1) *существует каноническое топологическое двуслоение $((X_1 \times X_2)/\Psi, \mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2)$ и гомеоморфизм $\Theta : M \to (X_1 \times X_2)/\Psi$, являющийся изоморфизмом двуслоений (M, F_1, F_2) и $((X_1 \times X_2)/\Psi, \mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2)$ в категории $\mathfrak{BiF}$*;

(2) *группа* Ψ *изоморфна факторгруппе* $\pi_1(M)/(G_{11} \times G_{22})$ *фундаментальной группы* $\pi_1(M)$ *многообразия* M *по нормальной подгруппе* $G_{11} \times G_{22}$, *где группа* G_{ii}, $i = 1, 2$, *изоморфна фундаментальной группе* $\pi_1(X_i)$ *многообразия* X_i.

Следствие 6.1. *Для топологического слоения* (M, F) *с интегрируемой связностью Эресмана* F^t *существует гомеоморфизм* $\Theta : M \to (X \times T)/\Psi$ *многообразия* M *на некоторое каноническое фактор-многообразие* $(X \times T)/\Psi$, *являющийся изоморфизмом слоений* (M, F) *и* $((X \times T)/\Psi, \mathcal{F})$ *в категории слоений* $\mathfrak{Fol}$.

Определение 6.5. Изоморфизм $\Theta : (M, F) \to ((X \times T)/\Psi, \mathcal{F})$, указанный в следствии 6.1, называется *представлением* топологического слоения (M, F) с интегрируемой связностью Эресмана F^t каноническим слоением, а абстрактная группа Ψ, удовлетворяющая теореме 6.2, называется *структурной группой* как этого слоения (M, F), так и двуслоения (M, F, F^t).

Замечание 6.2. Для слоения с интегрируемой связностью Эресмана каноническое двуслоение, удовлетворяющее теореме 6.2, — единственное (с точностью до изоморфизма) в категории двуслоений $\mathfrak{Bif}$, а представление не является единственным в категории слоений $\mathfrak{Fol}$, как показывает пример 7.1.

6.3. Хаотичность топологических слоений с интегрируемой связностью Эресмана. Докажем критерий, сводящий существование хаоса в топологическом слоении коразмерности q с интегрируемой связностью Эресмана к хаотичности действия его структурной группы Ψ на ассоциированном q-мерном многообразии T.

Теорема 6.3. *Пусть* (M, F) *— топологическое слоение с интегрируемой связностью Эресмана* F^t, *а* $\Theta : (M, F) \to ((X \times T)/\Psi, \mathcal{F})$ *— некоторое его представление. Тогда для хаотичности слоения* (M, F) *необходимо и достаточно хаотичности действия группы* Ψ *на топологическом многообразии* T.

Доказательство. Поскольку (M, F) — топологическое слоение с интегрируемой связностью Эресмана F^t, согласно теореме 6.1, для универсального накрывающего отображения $\kappa : \widetilde{M} \to M$ выполняются следующие два условия:

(1) универсальное накрывающее многообразие $\widetilde{M}$ диффеоморфно произведению гладких многообразий $\widetilde{L} \times \widetilde{T}$;

(2) индуцированные слоения $\kappa^* F$ и $\kappa^* F^t$ на $\widetilde{M}$ совпадают с тривиальными слоениями произведения $\widetilde{L} \times \widetilde{T}$.

Следовательно, слоение (M, F) накрыто посредством κ тривиальным расслоением, образованным слоями проекции на второй сомножитель $r : \widetilde{L} \times \widetilde{T} \to \widetilde{T}$. Зафиксируем точки $\widetilde{x} = (\widetilde{y}, \widetilde{z}) \in \widetilde{L} \times \widetilde{T}$ и $x = \kappa(\widetilde{x}) \in M$. Тогда определена группа накрывающих преобразований $G \cong \pi_1(M, x)$ универсального накрытия $\kappa : \widetilde{M} \to M$. Так как G сохраняет структуру произведения $\widetilde{L} \times \widetilde{T}$, то на $\widetilde{T}$ индуцируется группа гомеоморфизмов Ψ_0. Из конструкции канонического многообразия следует, что Ψ_0 совпадает с группой всех гомеоморфизмов односвязного многообразия $\widetilde{T}$, лежащих над гомеоморфизмами из группы Ψ_2, образованной эффективным действием группы Ψ на T. Следовательно, $\Psi_2 \cong \Psi_0/\Gamma$, где Γ — группа накрывающих преобразований универсального накрытия $\kappa_2 : \widetilde{T} \to T$. Отсюда вытекает гомеоморфность пространств орбит $\widetilde{T}/\Psi_0 \cong T/\Psi_2$. При доказательстве теоремы 5.1 показано, что $M/F \cong \widetilde{T}/\Psi_0$, следовательно, $M/F \cong T/\Psi_2 = T/\Psi$. Согласно теоремам 3.2 и 3.3, гомеоморфность пространства слоев M/F и пространства орбит T/Ψ влечет эквивалентность между существованием хаоса в топологическом слоении (M, F) и хаотичностью действия группы Ψ (посредством Ψ_2) на топологическом многообразии T. $\square$

7. Топологические надстроечные слоения

7.1. Метод надстройки. Мы обобщаем на топологические многообразия метод построения слоений с помощью надстройки гомоморфизма фундаментальной группы k-мерного многообразия B в группу гомеоморфизмов $Homeo(T)$ q-мерного топологического многообразия T, предложенный А. Хефлигером.

Пусть заданы топологические многообразия B и T размерностей $\dim B = k$, $\dim T = q$. Предположим, что задан гомоморфизм $\rho : \pi_1(B, b_0) \to Homeo(T)$ фундаментальной группы $\pi_1(B, b_0)$ в точке b_0 многообразия B в группу гомеоморфизмов $Homeo(T)$ многообразия T. Обозначим через $\theta : \widetilde{B} \to B$ универсальное накрывающее отображение. Зафиксируем точку $\widetilde{b} \in \theta^{-1}(b_0) \subset \widetilde{B}$. При этом группа $G := \pi_1(B, b_0)$ действует на $\widetilde{B}$ посредством группы накрывающих преобразований. Равенство

$$g.(x,t) := (g.x, \rho(g)(t)) \ \ \forall\, (x,t) \in \widetilde{B} \times T,\ g \in G \tag{7.1}$$

определяет левое свободное собственно разрывное действие группы G на произведении многообразий $\widetilde{B} \times T$, поэтому определено топологическое фактор-многообразие $M := (\widetilde{B} \times T)/G$. Пусть $\lambda : \widetilde{B} \times T \to M$ — фактор-отображение на пространство орбит $(\widetilde{B} \times T)/G$. Подчеркнем, что $\lambda : \widetilde{B} \times T \to M$ — регулярное накрывающее отображение на M, поэтому размерность $\dim M$ равна $k + q$. Так как

$$g.(\widetilde{B} \times \{z\}) = \widetilde{B} \times \{\rho(g)(z)\} \ \ \forall\, g \in G,\ \ \forall z \in T,$$

то каждое преобразование $g \in G$ сохраняет тривиальное слоение $F_{tr} = \{\widetilde{B} \times \{z\} \,|\, z \in T\}$ произведения $\widetilde{B} \times T$. Следовательно, на многообразии M индуцируется слоение $F = \{\lambda(\widetilde{B} \times \{t\}) \,|\, t \in T\}$ коразмерности q.

Топологическое слоение (M, F) называется *надстроечным*. Говорят также, что слоение (M, F) получено *надстройкой гомоморфизма*

$$\rho : \pi_1(B, b_0) \to Homeo(T).$$

Как и в гладком случае [28], для указанного надстроечного слоения будем использовать обозначение $(M, F) := Sus(T, B, \rho)$.

Определение 7.1. Абстрактная группа Ψ, изоморфная группе $\rho(\pi_1(B, b_0))$, называется *структурной группой* надстроечного слоения $(M, F) := Sus(T, B, \rho)$. Многообразие B называется *базой*, а T называется *трансверсальным* многообразием для надстроечного слоения (M, F).

7.2. Каноническое надстроечное слоение. Используя те же аргументы, что и при доказательстве теоремы 3.1 в статье Н. И. Жуковой и Г. В. Чубарова [29], мы доказываем теорему 7.1, характеризующую топологические надстроечные слоения.

Теорема 7.1. *Слоение (M, F) является надстроечным тогда и только тогда, когда существует локально тривиальное расслоение $p : M \to B$, слои которого образуют интегрируемую связность Эресмана для (M, F).*

Следующая теорема вытекает из теоремы 6.2 о существовании канонического слоения для топологического слоения с интегрируемой связностью Эресмана и доказательства теоремы 6.3. Она демонстрирует специфику канонического надстроечного слоения.

Теорема 7.2. *Пусть (M, F) — слоение, полученное надстройкой гомоморфизма групп*

$$\rho : \pi_1(B, b_0) = G \to Homeo(T).$$

Тогда слоение (M, F) изоморфно в категории слоений $\mathfrak{Fol}$ каноническому надстроечному слоению $((\widehat{B} \times T)/\Psi, \mathcal{F})$, где группа Ψ изоморфна фактор-группе $G/Ker(\rho)$, причем Ψ действует на топологическом многообразии $\widehat{B}$ свободно и собственно разрывно, а на топологическом многообразии T эффективно как группа гомеоморфизмов $\rho(G)$.

Следующий пример [28, Example 5.5] показывает, что структурная группа надстроечного слоения не является его инвариантом в категории топологических слоений $\mathfrak{Fol}$.

Пример 7.1. Отождествим окружность $\mathbb{S}^1$ с подмножеством $\{e^{2\pi i t} \,|\, t \in \mathbb{R}\}$ множества комплексных чисел, а фундаментальную группу $\pi(\mathbb{S}^1, x_0)$, $x_0 \in \mathbb{S}^1$, с группой $\mathbb{Z}$. Отображение $\kappa : \mathbb{R} \to \mathbb{S}^1$, $\kappa(t) = e^{2\pi i t}$, является универсальным накрытием для окружности $\mathbb{S}^1$.

Пусть $m \in \mathbb{N}$. Определим слоение (M_m, F_m) следующим образом. Рассмотрим диффеоморфизм окружности $g_m : e^{2\pi i t} \to e^{2\pi i (t + \frac{1}{m})}$, $m \in \mathbb{N}$, тогда

$$\rho_m : \pi_1(\mathbb{S}^1, x_0) = \mathbb{Z} \to Homeo(\mathbb{S}^1), \rho_m(n) := (g_m)^n \ \ \forall n \in \mathbb{N}$$

— гомоморфизм групп. Следовательно, на двумерном торе $\mathbb{T}^2 \cong M_m$ определено счетное семейство надстроечных слоений $\{(M_m, F_m) := Sus(\mathbb{S}^1, \mathbb{S}^1, \rho_m)\}_{m\in\mathbb{N}}$. Группа $\Psi_m = \rho_m(\pi_1(\mathbb{S}^1, x_0))$ изоморфна конечной абелевой группе $\mathbb{Z}_m$. По определению, $\mathbb{Z}_m$ — структурная группа надстроечного слоения (M_m, F_m).

Как известно [28], слоения (M_m, F_m), $m \in \mathbb{N}$, изоморфны в категории гладких слоений, следовательно, слоения (M_m, F_m) изоморфны и в категории топологических слоений $\mathfrak{Fol}$. Отсюда вытекает, что структурная группа надстроечного слоения не является инвариантом в категории $\mathfrak{Fol}$. Кроме того, действия групп $\Psi_m = \rho_m(\pi_1(\mathbb{S}^1, x_0)) \cong \mathbb{Z}_m$ на окружности $\mathbb{S}^1$ при разных $m \in \mathbb{N}$ не являются топологически сопряженными.

7.3. Критерии хаотичности и изоморфности надстроечных слоений. Согласно теореме 7.2, структурная группа Ψ действует на T посредством группы гомеоморфизмов $\rho(\pi_1(B, b_0))$, поэтому применение теоремы 6.2 позволило нам получить следующий критерий хаотичности для надстроечных слоений.

Теорема 7.3. *Слоение $(M, F) = Sus(T, B, \rho)$, заданное надстройкой гомоморфизма групп*

$$\rho : \pi_1(B, b_0) \to Homeo(T),$$

является хаотическим тогда и только тогда, когда группа $\rho(\pi_1(B, b_0))$ имеет хаотическое поведение на многообразии T.

Используя теорему 5.3, мы доказываем следующий критерий изоморфности надстроечных слоений в категории $\mathfrak{Fol}$.

Теорема 7.4. *Пусть $(M, F) = Sus(T, B, \rho)$, $(M', F') = Sus(T', B, \rho')$ — топологические слоения, заданные надстройкой гомоморфизмов $\rho : \pi_1(B, b) \to Homeo(T)$ и $\rho' : \pi_1(B, b) \to Homeo(T')$, соответственно. Если многообразия T и T' односвязны, то для того, чтобы слоения (M, F) и (M', F') были изоморфны в категории слоений $\mathfrak{Fol}$, необходимо и достаточно топологической сопряженности групп гомеоморфизмов $\rho(\pi_1(B, b))$ и $\rho'(\pi_1(B, b))$.*

Доказательство. Предположим, что слоения (M, F) и (M', F') удовлетворяют условию теоремы. Пусть $\Theta : M \to (\widehat{B} \times T)\Psi$ и $\Theta' : M' \to (\widehat{B}' \times T')/\Psi'$ — их представления. В силу односвязности многообразий T и T', глобальные группы голономии слоений (M, F) и (M', F') равны $\Psi_0 = \rho(\pi_1(B, b))$ и $\Psi'_0 = \rho'(\pi_1(B, b))$, соответственно.

Необходимость. Если слоения (M, F) и (M', F') изоморфны, то, согласно теореме 5.3, группы $\Psi_0 = \rho(\pi_1(B, b))$ и $\Psi'_0 = \rho'(\pi_1(B', b'))$ топологически сопряжены. Таким образом, необходимость доказана.

Достаточность. Предположим, что группы $\Psi_0 = \rho(\pi_1(B, b))$ и $\Psi'_0 = \rho'(\pi_1(B, b'))$ гомеоморфизмов топологических многообразий T и T' топологически сопряжены. Пусть пара (ν, δ) реализует эту топологическую сопряженность. Это означает, что $\nu : \Psi_0 \to \Psi'_0$ — изоморфизм групп, а $\delta : T \to T'$ — гомеоморфизм, причем для любого элемента $\psi_0 \in \Psi_0$ диаграмма

$$\begin{array}{ccc} T & \xrightarrow{\delta} & T \\ {\scriptstyle\psi_0}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle\nu(\psi_0)} \\ T & \xrightarrow{\delta} & T \end{array} \tag{7.2}$$

коммутативна. Пусть $\theta : \widetilde{B} \to B$ — универсальное накрывающее отображение. При фиксированной точке $\widetilde{b} \in \theta^{-1}(b) \subset \widetilde{B}$ можно отождествить фундаментальную группу $\pi_1(B, b)$ с группой накрывающих преобразований G накрытия θ. Заметим, что в данном случае гомоморфизмы групп ρ и ρ' удовлетворяют коммутативной диаграмме:

$$\begin{tikzcd} & G \arrow[dl, "\rho"'] \arrow[dr, "\rho'"] & \\ \Psi_0 \arrow[rr, "\nu"'] & & \Psi'_0. \end{tikzcd}$$

Отсюда вытекает равенство $Ker(\rho) = Ker(\rho')$, поэтому $\Psi = G/Ker(\rho)$ совпадает с $\Psi' = G/Ker(\rho')$. Следовательно, совпадают многообразия $\widehat{B} = \widetilde{B}/Ker(\rho)$ и $\widehat{B}' = \widetilde{B}/Ker(\rho')$, фигурирующие в представлениях слоений (M, F) и (M', F'). Гомеоморфизм $(id_{\widehat{B}}, \delta) : \widehat{B} \times T \to \widehat{B} \times T'$ сопрягает действия группы Ψ, соответствующие указанным представлениям, поэтому он индуцирует изоморфизм канонических слоений $((\widehat{B} \times T)/\Psi, \mathcal{F})$ и $((\widehat{B} \times T')/\Psi, \mathcal{F}')$. Это влечет изоморфность слоений (M, F) и (M', F') и завершает доказательство теоремы. □

8. Хаотические надстроечные слоения на 3-многообразиях

8.1. Структура хаотического надстроечного слоения на замкнутом 3-многообразии. Применяя доказанные выше свойства надстроечных слоений, мы получаем следующую теорему, выясняющую специфику трехмерного случая.

Теорема 8.1. *Пусть (M, F) — хаотическое надстроечное слоение на замкнутом 3-многообразии M, полученное надстройкой гомоморфизма групп $\rho : \pi_1(B, b_0) \to Homeo(T)$. Тогда*:

(1) *база B гомеоморфна окружности $\mathbb{S}^1$, а трансверсальное многообразие T представляет собой произвольную замкнутую поверхность, т. е. одно из многообразий*: $\mathbb{S}^2$ *(сфера)*, $\mathbb{S}^2_k$ *(сфера с $k \geqslant 1$ ручками)*, N^2_s *(сфера с $s \geqslant 1$ пленками Мебиуса)*;

(2) *структурная группа Ψ изоморфна группе $\mathbb{Z}$ и хаотически действует посредством ρ на T. Определено действие группы Ψ на произведении $\mathbb{R}^1 \times T$*:

$$\mathbb{Z} \times \mathbb{R}^1 \times T \to \mathbb{R}^1 \times T, \;\; n.(x, z) := (x + n, \rho(n)(z)) \;\; \forall\, (x, z) \in \mathbb{R}^1 \times T, \;\; \forall n \in \mathbb{Z}; \tag{8.1}$$

(3) *многообразие M гомеоморфно пространству орбит $(\mathbb{R}^1 \times T)/\mathbb{Z}$, а фактор-отображение $f : \mathbb{R}^1 \times T \to (\mathbb{R}^1 \times T)/\mathbb{Z} \cong M$ индуцирует слоение (M, F) такое, что поднятое слоение f^*F образовано слоями канонической проекции произведения $\mathbb{R}^1 \times T$ на второй сомножитель $pr : \mathbb{R}^1 \times T \to T$*;

(4) *определено локально тривиальное расслоение $p : M \to \mathbb{S}^1$ над окружностью $B = \mathbb{S}^1$ со стандартным слоем T, причем каждый слой расслоения $p^{-1}(b)$, $b \in B$, пересекает все слои слоения (M, F).*

Доказательство. Пусть (M, F) — хаотическое топологическое слоение на замкнутом трехмерном многообразии M, полученное надстройкой гомоморфизма $\rho : \pi_1(B, b_0) \to \mathrm{Homeo}(T)$. Тогда, согласно теореме 7.3, группа $\rho(\pi_1(B, b_0))$ хаотически действует на многообразии T. Так как T гомеоморфно слою ассоциированного расслоения $p : M \to B$, то T либо одномерное, либо двумерное замкнутое топологическое многообразие.

Случай 1: $\dim T = 1$. Как известно из [12], на окружности не существует хаотических групп гомеоморфизмов, поэтому этот случай невозможен.

Случай 2: $\dim T = 2$, т. е. T — замкнутая поверхность. При этом B — замкнутое одномерное многообразие, т. е. окружность. Таким образом, утверждение (1) доказано. Отсюда вытекает, что $G = \pi_1(\mathbb{S}^1, b_0) \cong \mathbb{Z}$ и $M = (\mathbb{R}^1 \times T)/\mathbb{Z}$, причем структурная группа $\Psi \cong \rho(\mathbb{Z})$ действует хаотически на замкнутой поверхности T. Образом группы $\mathbb{Z}$ при гомоморфизме ρ может быть либо группа $\mathbb{Z}$, либо конечная группа $\mathbb{Z}_n$, где $n \in \mathbb{N}$. Поскольку хаотически может действовать только бесконечная группа, необходимо, чтобы Ψ была изоморфна группе $\mathbb{Z}$. Следовательно, действие группы Ψ на произведении $\mathbb{R}^1 \times T$ определено равенством (8.1). Таким образом, выполняется утверждение (2).

Утверждения (3) и (4) вытекают из общих свойств надстроечных слоений при $B = \mathbb{S}^1$ и $\Psi \cong \mathbb{Z}$. □

Замечание 8.1. Для одномерных хаотических надстроечных слоений на некомпактных n-мерных многообразиях всегда $B = \mathbb{S}^1$ и $\Psi \cong \mathbb{Z}$.

8.2. Хаотические действия группы $\mathbb{Z}$ на сфере и на плоскости. Напомним понятие орбифолда, которое далее существенно используется.

Определение 8.1. Пусть $\mathcal{X}$ — хаусдорфово топологическое пространство со счетной базой, U — открытое подмножество в $\mathcal{X}$. Предположим, что V — связное открытое подмножество n-мерного арифметического пространства $\mathbb{R}^n$ и Γ — конечная группа диффеоморфизмов V. Тройка (V, Γ, φ) называется *картой* на $\mathcal{X}$, если существует гомеоморфизм $h : V/\Gamma \to U$ такой, что

$\varphi = h \circ q$, где $q : V \to V/\Gamma$ — фактор-отображение на пространство орбит группы Γ. Открытое подмножество U называется *зоной* карты (V, Γ, φ).

Рассмотрим две карты (V, Γ, φ) и $(\widetilde{V}, \widetilde{\Gamma}, \widetilde{\varphi})$ с зонами U и $\widetilde{U}$ такими, что $U \subset \widetilde{U}$. Гладкое включение $\psi_{\widetilde{U}U} : V \to \widetilde{V}$, такое, что $\varphi = \widetilde{\varphi} \circ \psi_{\widetilde{U}U}$, называется *включением* карты (V, Γ, φ) в карту $(\widetilde{V}, \widetilde{\Gamma}, \widetilde{\varphi})$.

Определение 8.2. Две карты (V, Γ, φ) и $(\widehat{V}, \widehat{\Gamma}, \widehat{\varphi})$ называются *согласованными*, если для каждой точки $x \in U \cap \widehat{U}$ существует карта $(\widetilde{V}, \widetilde{\Gamma}, \widetilde{\varphi})$ с зоной $W = \widetilde{\varphi}(\widetilde{V}) \subset U \cap \widehat{U}$, для которой существуют включения $\psi_{UW} : \widetilde{V} \to V$ и $\psi_{\widehat{U}W} : \widetilde{V} \to \widehat{V}$.

Определение 8.3. Семейство карт $\mathcal{A} = \{(V_\alpha, \Gamma_\alpha, \varphi_\alpha) \mid \alpha \in \mathfrak{J}\}$ называется *гладким атласом* на $\mathcal{X}$, если выполняются следующие условия:

(1) семейство $\{U_\alpha = \varphi_\alpha(V_\alpha) \mid \alpha \in \mathfrak{J}\}$ является открытым покрытием пространства $\mathcal{X}$;
(2) любые две карты из семейства $\mathcal{A}$ согласованы.

Атлас $\mathcal{A}$ называется *максимальным* по включению, если он совпадает с каждым атласом, его содержащим.

Определение 8.4. Пара $(\mathcal{X}, \mathcal{A})$, где $\mathcal{A}$ — максимальный атлас, называется гладким n-мерным *орбифолдом* и также обозначается через $\mathcal{X}$. При этом атлас $\mathcal{A}$ называется структурой орбифолда.

Если M — многообразие и Γ — конечная группа диффеоморфизмов M, то на пространстве орбит M/Γ естественным образом определена структура орбифолда, который называется *очень хорошим* и обозначается также через M/Γ. Эта терминология предложена У. Терстеном, применившим классификацию двумерных орбифолдов при классификации трехмерных замкнутых многообразий [26].

Топологическое пространство орбифолда называется *подстилающим.*

Определение 8.5. Пусть $\mathcal{X}$ и $\mathcal{X}'$ — два орбифолда с атласами $\mathcal{A}$ и $\mathcal{A}'$, соответственно. Непрерывное отображение $f : \mathcal{X} \to \mathcal{X}'$ называется *гладким*, если для каждой точки $x \in \mathcal{X}$ существуют карты $(V, \Gamma, \varphi) \in \mathcal{A}$ и $(V', \Gamma', \varphi') \in \mathcal{A}'$ такие, что $x \in U = \varphi(V)$, $f(U) \subset U' = \varphi'(V')$ и существует гладкое отображение $f_{U'U} : V \to V'$, удовлетворяющее равенству $\varphi' \circ f_{U'U} = f|_U \circ \varphi$.

Определение 8.6. Пусть $f : X \to X$ и $g : Y \to Y$ — непрерывные отображения топологических пространств. Говорят, что f *полусопряжено* с g, если существует непрерывное сюръективное отображение $h : X \to Y$, удовлетворяющее коммутативной диаграмме:

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{h} & Y \\ f\big\downarrow & & \big\downarrow g \\ X & \xrightarrow{h} & Y. \end{array} \tag{8.2}$$

Лемма 8.1. *Пусть $f : X \to X$ и $g : Y \to Y$ — гомеоморфизмы топологических пространств, причем существует непрерывное открытое сюръективное отображение $h : X \to Y$, являющееся полусопряжением f с g. Если группа $G = \langle f \rangle$, порожденная f, действует хаотически на X, то группа $H = \langle g \rangle$, порожденная g, действует хаотически на Y.*

Доказательство. Согласно определению полусопряжения $h : X \to Y$ выполняется равенство $g \circ h = h \circ f$, откуда вытекает $g^n \circ h = h \circ f^n$ для любого $n \in \mathbb{Z}$.

Заметим, что при непрерывном сюръективном отображении всюду плотное подмножество отображается в плотное подмножество. Орбита $G.x$ произвольной точки $x \in X$ удовлетворяет цепочке равенств:

$$h(G.x) = h(\bigcup_{n\in\mathbb{Z}} f^n(x)) = \bigcup_{n\in\mathbb{Z}} h(f^n(x)) = \bigcup_{n\in\mathbb{Z}} g^n(h(x)) = H.h(x).$$

Таким образом, полусопряжение h отображает орбиту $G.x$ точки $x \in X$ в орбиту $H.h(x)$ точки $h(x) \in Y$. Поскольку $h : X \to Y$ — непрерывное и сюръективное отображение, всюду плотная орбита группы G проектируется во всюду плотную орбиту группы H. Пусть $G.y$ — замкнутая орбита точки y в X, тогда $X \setminus G.y$ — открытое подмножество в X, поэтому $Y \setminus H.h(y) = h(X \setminus G.y)$ — открытое подмножество в Y как образ открытого множества при открытом отображении $h : X \to Y$. Следовательно, образ замкнутой орбиты при открытом полусопряжении является замкнутой орбитой.

Предположим, что группа $G = \langle f \rangle$ является хаотической, т. е. существует всюду плотная орбита $G.x$ группы G и объединение замкнутых орбит всюду плотно в X. Тогда $H.h(x)$ — всюду плотная орбита группы H в Y. Пусть $\bigcup\limits_{i \in J} G.y_i$ — объединение замкнутых в X орбит группы G, тогда его образ есть объединение $\bigcup\limits_{i \in J} H.h(y_i)$ замкнутых в Y орбит, и он всюду плотен в Y. Это означает, что группа $H = \langle g \rangle$ хаотична на Y. $\square$

Пусть $\mathbb{T}^2$ — стандартный двумерный тор. Представим $\mathbb{T}^2$ как квадрат $[-1/2, 1/2] \times [-1/2, 1/2]$ в декартовой системе координат Oxy на плоскости $\mathbb{R}^2$ с отождествленными противоположными сторонами. Другими словами, на торе $\mathbb{T}^2$ введены координаты $(x, y) (\mathrm{mod}\ 1)$, т. е. x и y являются периодическими с периодом 1. Определим диффеоморфизм $\gamma : \mathbb{T}^2 \to \mathbb{T}^2$, равенством $\gamma(x, y) = (-x, -y)$, $(x, y) \in \mathbb{T}^2$. Тогда $\Gamma = \langle \gamma \rangle$ — группа диффеоморфизмов тора $\mathbb{T}^2$, изоморфная $\mathbb{Z}_2$, причем определен очень хороший гладкий орбифолд $\mathcal{P} = \mathbb{T}^2/\Gamma$, который называется «подушкой». В качестве фундаментального многоугольника Σ для «подушки» $\mathcal{P}$ возьмем прямоугольник $[-1/2, 1/2] \times [0, 1/2]$ в квадрате $[-1/2, 1/2] \times [-1/2, 1/2]$, правило склейки сторон которого изображено на рис. 3, где одинаковыми буквами обозначены склеиваемые отрезки, а стрелки указывают направление склейки.

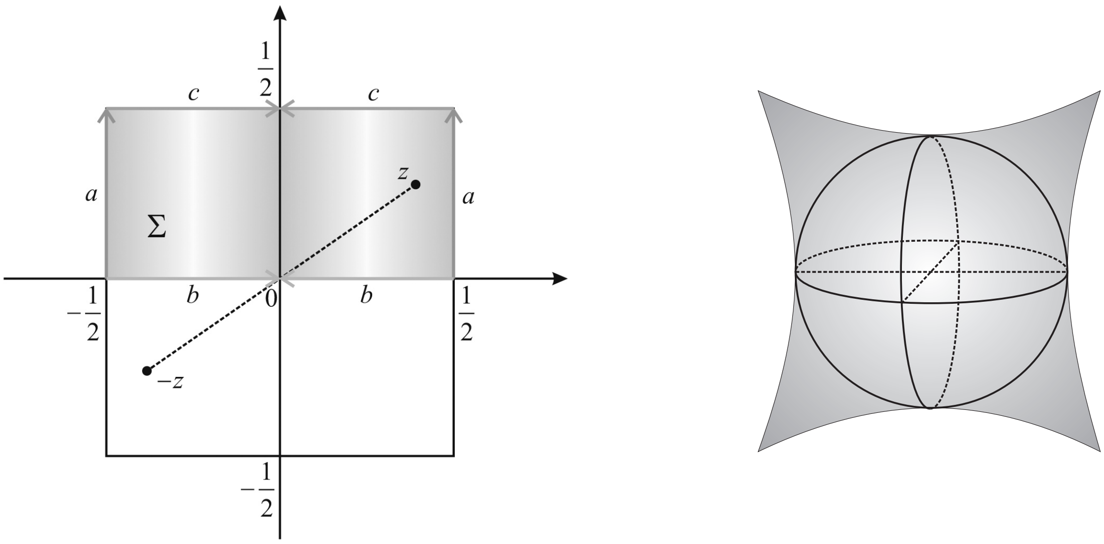

Рис. 3. Орбифолд «подушка».
Fig. 3. Orbifold “pillow.”

Аносовский автоморфизм тора $\mathbb{T}^2$, задаваемый матрицей $A \in SL(2, \mathbb{Z})$, обозначается через f_A. Как известно, любая матрица

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \tag{8.3}$$

удовлетворяющая условиям $ad - bc = 1$ и $a + d > 2$, определяет аносовский автоморфизм f_A тора $\mathbb{T}^2$, сохраняющий ориентацию. Группа $G = \langle f_A \rangle \cong \mathbb{Z}$, порожденная автоморфизмом f_A, действует хаотически на торе $\mathbb{T}^2$ (см. [2]). Так как $f_A(-z) = -f_A(z)$ $\forall z \in \mathbb{T}^2$, то отображение f_A индуцирует на $\mathcal{P}$ гомеоморфизм g_A. Поскольку проекция на пространство орбит $\eta : \mathbb{T}^2 \to \mathcal{P} = \mathbb{T}^2/\Gamma$ непрерывна, открыта (по лемме 3.3) и сюръективна, η — полусопряжение гомеоморфизма f_A тора $\mathbb{T}^2$ с гомеоморфизмом g_A «подушки» $\mathcal{P}$. Тогда, согласно лемме 8.1, любая матрица вида (8.3) определяет хаотический гомеоморфизм g_A «подушки».

Заметим, что подстилающее пространство «подушки» $\mathcal{P}$ гомеоморфно стандартной сфере $\mathbb{S}^2$. Отождествим топологическое пространство «подушки» $\mathcal{P}$ с $\mathbb{S}^2$. Таким образом, группа гомеоморфизмов $\langle g_A \rangle \cong \mathbb{Z}$ хаотически действует на сфере $\mathbb{S}^2$.

Напомним, что точка $x \in X$ называется *неподвижной точкой группы гомеоморфизмов* G топологического пространства X, если $g(x) = x$ для любого $g \in G$. Множество всех неподвижных точек гомеоморфизма g и группы G обозначается, соответственно, через $fix(g)$ и $fix(G)$. Заметим, что в случае, когда $G = \langle g \rangle \cong \mathbb{Z}$, выполняется равенство $fix(G) = fix(g)$.

Лемма 8.2. *При любом* $m \in \mathbb{N}$ *матрица*

$$A_m = \begin{pmatrix} 2m & 2m-1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \tag{8.4}$$

определяет хаотический гомеоморфизм g_{A_m} *подстилающей сферы* $\mathbb{S}^2$ *орбифолда «подушка», причем* g_{A_m} *имеет ровно* m *неподвижных точек, а группа* $G_m = \langle g_{A_m} \rangle$ *имеет счетное всюду плотное множество периодических орбит.*

Доказательство. Как и выше, представим $\mathbb{T}^2$ как квадрат $[-1/2, 1/2] \times [-1/2, 1/2]$ в декартовой системе координат Oxy на плоскости $\mathbb{R}^2$ с отождествленными противоположными сторонами, и представим «подушку» $\mathcal{P}$ как прямоугольник $\Sigma = [-1/2, 1/2] \times [0, 1/2]$ на той же плоскости $\mathbb{R}^2$ с правилом склейки сторон, указанном стрелками на рис. 3. Пусть $\eta : \mathbb{T}^2 \to \mathcal{P}$ — проекция тора $\mathbb{T}^2$ на «подушку» $\mathcal{P}$ как на пространство орбит. Матрица A_m вида (8.4) определяет аносовский автоморфизм f_{A_m} тора $\mathbb{T}^2$. Следовательно, группа $G = \langle f_{A_m} \rangle$ действует хаотически на торе $\mathbb{T}^2$. Как показано выше, аносовский автоморфизм f_{A_m} тора индуцирует на фактор-пространстве $\mathcal{P}$ хаотический гомеоморфизм g_{A_m}, удовлетворяющий равенству $g_{A_m} \circ \eta = \eta \circ f_{A_m}$.

Пусть $w \in \mathcal{P}$ — произвольная неподвижная относительно g_{A_m} точка, $g_{A_m}(w) = w$. Так как $\eta : \mathbb{T}^2 \to \mathcal{P}$ сюръективно, то существует такая точка $z \in \mathbb{T}^2$ на торе, что $\eta(z) = w$. Возьмем в качестве z точку из прямоугольника Σ, с теми же координатами, что и точка w. Так как $g_{A_m}(\eta(z)) = \eta(f_{A_m}(z))$, то $g_{A_m}(\eta(z)) = g_{A_m}(w) = w = \eta(z) = \eta(f_{A_m}(z))$. Последнее равенство выполняется, только если либо $f_{A_m}(z) = z$, либо $f_{A_m}(z) = -z$. Из определения аносовского автоморфизма f_{A_m} вытекает, что эти условия эквивалентны существованию чисел $p, q \in \mathbb{Z}$ и точки $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $(x, y)(\mathrm{mod}\ 1) = z$, удовлетворяющих равенству $A_m \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \pm \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$.

Пары точек из Σ с координатами $(-x, 0)$ и $(x, 0)$; $(-x, 1/2)$ и $(x, 1/2)$; $(-1/2, y)$ и $(1/2, y)$ отождествляются, поэтому можно считать, не уменьшая общности, что каждая неподвижная относительно g_{A_m} точка $w \in \mathcal{P}$ принадлежит множеству:

$$W := (-1/2, 0) \times (0, 1/2) \bigsqcup [0, 1/2] \times [0, 1/2] \subset \Sigma.$$

Положим $w = (x, y) \in W$. Тогда

$$A_m \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2m & 2m-1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} (2m-1)x + (2m-1)y \\ x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}.$$

Следовательно, $x = 0$ и $y = \dfrac{p}{2m-1}$, где $p = 0, 1, \ldots, m-2, m-1$. Так как подстилающее многообразие орбифолда «подушка» $\mathcal{P}$ гомеоморфно $\mathbb{S}^2$, то гомеоморфизм g_{A_m} сферы $\mathbb{S}^2$ имеет ровно m неподвижных точек.

Как известно, точка $(x, y) \in [-1/2, 1/2] \times [-1/2, 1/2]$ является периодической точкой произвольного аносовского автоморфизма f_{A_m} тора $\mathbb{T}^2$ тогда и только тогда, когда обе ее координаты x и y — рациональные числа. Следовательно, на торе $\mathbb{T}^2$ существует счетное семейство периодических орбит, объединение которых всюду плотно в $\mathbb{T}^2$. Подчеркнем, что других замкнутых орбит нет. Так как проекция $\eta : \mathbb{T}^2 \to \mathcal{P} \cong \mathbb{S}^2$ отображает периодическую орбиту в периодическую орбиту, то группа $G_m = \langle g_{A_m} \rangle$ имеет счетное всюду плотное множество периодических орбит в $\mathbb{S}^2$. $\square$

Следствие 8.1. *Пусть* $\eta : \mathbb{T}^2 \to \mathcal{P} \cong \mathbb{S}^2$ *— проекция на пространство орбит.*

Точка $O := \eta((0, 0))$ *является неподвижной относительно любого гомеоморфизма* g_{A_m}*, заданного матрицей* (8.4)*, а для гомеоморфизма* g_{A_1}*, определенного матрицей*

$$A_1 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \tag{8.5}$$

O *— единственная неподвижная точка.*

Лемма 8.3. *Если гомеоморфизмы $f : X \to X$ и $g : Y \to Y$ многообразий X и Y топологически сопряжены, то множества их неподвижных точек эквивалентны, т. е. $|fix(f)| = |fix(g)|$.*

Доказательство. Пусть $x \in fix(f)$, т. е. $f(x) = x$. Пусть $h : X \to Y$ реализует топологическую сопряженность f и g, т. е. удовлетворяет равенству $g \circ h = h \circ f$. Тогда $g(h(x)) = h(f(x))$, поэтому $g(h(x)) = h(x)$, т. е. $h(x) \in fix(g)$. Так как h — гомеоморфизм, то

$$\widehat{h} : fix(f) \to fix(g) : \ \ x \mapsto h(x) \ \ \forall x \in fix(f)$$

— биекция, следовательно, множества $fix(f)$ и $fix(g)$ эквивалентны. Если число неподвижных точек гомеоморфизма f конечно, то оно равно числу неподвижных точек гомеоморфизма g. □

Предложение 8.1. *Счетное семейство $\{G_m = \langle g_{A_m} \rangle\}_{m\in\mathbb{N}}$, где g_{A_m} — гомеоморфизм сферы $\mathbb{S}^2$, определенный указанным выше способом матрицей A_m(8.4), состоит из попарно топологически не сопряженных хаотических групп гомеоморфизмов G_m сферы $\mathbb{S}^2$.*

Доказательство. Согласно лемме 8.2, гомеоморфизмы g_{A_m}, g_{A_n} сферы $\mathbb{S}^2$ при различных m, n из $\mathbb{N}$ имеют разное число неподвижных точек, поэтому, в силу леммы 8.3, группы $G_m = \langle g_{A_m} \rangle$ и $G_n = \langle g_{A_n} \rangle$ топологически не сопряжены. Таким образом, $\{G_m = \langle g_{A_m} \rangle\}_{m\in\mathbb{N}}$ — счетное семейство попарно топологически не сопряженных хаотических групп гомеоморфизмов сферы $\mathbb{S}^2$. □

Предложение 8.2. *Пусть, в обозначениях предложения* 8.1, $h_{A_m} := g_{A_m}|_{\mathbb{S}^2\setminus\{O\}}$. *Тогда* h_{A_m} — *гомеоморфизм* $\mathbb{S}^2 \setminus \{O\} \cong \mathbb{R}^2$, *а* $\{H_m = \langle h_{A_m} \rangle\}_{m\in\mathbb{N}}$ — *счетное семейство попарно топологически не сопряженных хаотических групп гомеоморфизмов* H_m *плоскости* $\mathbb{R}^2$.

Доказательство. Так как точка O неподвижна относительно любого гомеоморфизма g_{A_m}, заданного матрицей (8.4), то $\mathbb{S}^2 \setminus \{O\}$ инвариантно относительно g_{A_m}. Подмногообразие сферы $\mathbb{S}^2 \setminus \{O\}$ гомеоморфно плоскости $\mathbb{R}^2$, отождествим их. Тогда сужение $h_{A_m} := g_{A_m}|_{\mathbb{R}^2}$ является гомеоморфизмом плоскости $\mathbb{R}^2$ для любого $m \in \mathbb{N}$, причем группа $H_m := \langle h_{A_m} \rangle \cong \mathbb{Z}$ имеет хаотическое поведение на $\mathbb{R}^2$. Из предложения 8.1 вытекает, что группы H_m и H_n не сопряжены при $m \neq n$. Таким образом, $\{H_m = \langle h_{A_m} \rangle\}_{m\in\mathbb{N}}$— счетное семейство, состоящее из попарно топологически не сопряженных хаотических групп гомеоморфизмов плоскости $\mathbb{R}^2$. □

8.3. Построение хаотических надстроечных слоений на 3-многообразиях. Следующие две теоремы доказаны нами конструктивным путем.

Теорема 8.2. *Пусть g_{A_m} — гомеоморфизм сферы $\mathbb{S}^2$, индуцированный матрицей A_m вида* (8.4), *и (M_m, F_m), $m \in \mathbb{N}$, — слоение, полученное надстройкой гомоморфизма*

$$\rho_m : \pi_1(\mathbb{S}^1, b_0) \cong \mathbb{Z} \to \mathit{Homeo}(\mathbb{S}^2), \ \ \rho_m(n) = (g_{A_m})^n \ \ \forall n \in \mathbb{Z}.$$

Тогда $\{(M_m, F_m)\}_{m\in\mathbb{N}}$ — счетное семейство хаотических топологических слоений, попарно не изоморфных в категории $\mathfrak{Fol}$.

Доказательство. Применим метод надстройки. В качестве базы B надстроечного слоения возьмем окружность $\mathbb{S}^1$, а в качестве трансверсального многообразия T — двумерную сферу $\mathbb{S}^2$. Определим гомоморфизм групп

$$\rho_m : \pi_1(\mathbb{S}^1, b) \cong \mathbb{Z} \to \mathit{Homeo}(\mathbb{S}^2), \ \ \rho_m(n) := (g_{A_m})^n \ \ \forall n \in \mathbb{Z},$$

где g_{A_m} — гомеоморфизм сферы $\mathbb{S}^2$, заданный матрицей A_m, указанной в (8.4). При этом $\rho_m(\mathbb{Z}) = G_m = \langle g_{A_m} \rangle$ — хаотическая группа гомеоморфизмов сферы $\mathbb{S}^2$, определенная при доказательстве предложения 8.1, причем $G_m \cong \mathbb{Z}$. По теореме 7.3, слоение $(M_m, F_m) = Sus(\mathbb{S}^2, \mathbb{S}^1, \rho_m)$, полученное надстройкой гомоморфизма $\rho_m : \pi_1(\mathbb{S}^1, b_0) \to \mathit{Homeo}(\mathbb{S}^2)$, является хаотическим.

Согласно предложению 8.1 группы $\rho_m(\mathbb{Z}) = G_m$ и $\rho_k(\mathbb{Z}) = G_k$ топологически не сопряжены при $m \neq k$, $m, k \in \mathbb{N}$. Следовательно, по теореме 7.4 слоения (M_m, F_m) и (M_k, F_k) не изоморфны в категории $\mathfrak{Fol}$. Таким образом, $\{(M_m, F_m)\}_{m\in\mathbb{N}}$ — счетное семейство хаотических топологических надстроечных слоений, попарно не изоморфных в категории топологических слоений $\mathfrak{Fol}$. □

Напомним, что топологическое пространство называется *пространством Эйленберга—Маклейна*, если все его гомотопические группы, кроме одной, равны нулю. Если $\pi_n(X, x_0) = G \neq 0$, то говорят, что X — пространство Эйленберга—Маклейна типа $K(G, n)$.

Теорема 8.3. *Пусть h_{A_m} — гомеоморфизм плоскости $\mathbb{R}^2$, определенный в предложении* 8.2, *и (M_m, F_m), $m \in \mathbb{N}$, — слоение, полученное надстройкой гомоморфизма*

$$\rho_m : \pi_1(\mathbb{S}^1, b_0) \cong \mathbb{Z} \to Homeo(\mathbb{R}^2), \ \ \rho_m(n) = (h_{A_m})^n \ \ \forall n \in \mathbb{Z}.$$

Тогда $\{(M_m, F_m)\}_{m\in\mathbb{N}}$ — счетное семейство хаотических топологических слоений, попарно не изоморфных в категории $\mathfrak{Fol}$, причем каждое многообразие M_m не компактно и является пространством Эйленберга—Маклейна типа $K(\mathbb{Z}, 1)$.

Доказательство. Применим метод надстройки. В качестве базы B возьмем окружность $\mathbb{S}^1$, а в качестве трансверсального многообразия T — плоскость $\mathbb{R}^2$. Определим гомоморфизм групп $\rho_m : \pi_1(\mathbb{S}^1, b) \cong \mathbb{Z} \to Homeo(\mathbb{R}^2)$ равенством $\rho_m(n) \mapsto (h_{A_m})^n$ для любого $n \in \mathbb{Z}$, где h_{A_m} — гомеоморфизм плоскости $\mathbb{R}^2$, определенный при доказательстве предложения 8.2. Следовательно, группа $\rho_m(\mathbb{Z}) = H_m$, где $H_m := \langle h_{A_m}\rangle \cong \mathbb{Z}$, является хаотической. По теореме 7.3, слоение $(M_m, F_m) = Sus(\mathbb{R}^2, \mathbb{S}^1, \rho_m)$, полученное надстройкой гомоморфизма $\rho_m : \pi_1(\mathbb{S}^1, b) \to Homeo(\mathbb{R}^2)$, является хаотическим.

Согласно предложению 8.2, группы $H_m = \rho_m(\mathbb{Z})$ и $H_k = \rho_k(\mathbb{Z})$ гомеоморфизмов плоскости $\mathbb{R}^2$ топологически не сопряжены при $m \neq k$, $m, k \in \mathbb{N}$. Следовательно, по теореме 7.4, слоения (M_m, F_m) и (M_k, F_k) не изоморфны в категории топологических слоений $\mathfrak{Fol}$.

Многообразие M_m, на котором определено слоение (M_m, F_m), гомеоморфно пространству орбит $(\mathbb{R}^1 \times \mathbb{R}^2)/\mathbb{Z}$ и является трехмерным многообразием. Определено локально тривиальное расслоение $p : M_m \to \mathbb{S}^1$ со стандартным слоем $\mathbb{R}^2$. Некомпактность стандартного слоя влечет некомпактность пространства расслоения M_m. Из точной последовательности расслоения $p : M_m \to \mathbb{S}^1$ вытекает изоморфность гомотопических групп: $\pi_n(M_m, x_0) \cong \pi_n(\mathbb{R}^2, s_0) \cong 0 \ \forall n \geqslant 2$ и $\pi_1(M_m, x_0) \cong \pi_1(\mathbb{S}^1, b_0) \cong \mathbb{Z}$. Таким образом, M_m — пространство Эйленберга—Маклейна типа $K(\mathbb{Z}, 1)$. □

Предложение 8.3. *Пусть (M_m, F_m) — любое из слоений, построенных при доказательстве теорем* 8.2 *и* 8.3. *Тогда множество замкнутых слоев слоения (M_m, F_m) счетно, а их объединение всюду плотно в M_m, причем каждый замкнутый слой гомеоморфен окружности.*

Доказательство. В силу односвязности трансверсального многообразия T, глобальная группа голономии $(\Psi_0)_m$ слоения (M_m, F_m) совпадает с группой $\rho_m(\pi_1(\mathbb{S}^1, b_0)) = G_m$. Обозначим через $\kappa : \mathbb{R}^1 \times T \to (\mathbb{R}^1 \times T)/\mathbb{Z} = M_m$ универсальное накрывающее отображение. Обозначим через $pr : \mathbb{R}^1 \times T \to T$ каноническую проекцию. Заметим, что слой $L = L(x)$, $x \in M$, замкнут тогда и только тогда, когда замкнута орбита $G_m.z$ точки $z \in pr(\kappa^{-1}(x)) \in T$. Следовательно, существует биекция между множеством замкнутых слоев слоения (M_m, F_m) и множеством замкнутых орбит группы G_m, которое, согласно лемме 8.2, счетно. Поскольку слоение (M_m, F_m) хаотично, объединение замкнутых слоев всюду плотно в M_m. Предположим, что слой $L = L(x)$ замкнут. По лемме 8.2, любая замкнутая орбита конечна, поэтому стационарная подгруппа $G_m|_z$ в точке z изоморфна $\mathbb{Z}$. Так как сужение $\kappa|_{\mathbb{R}^1\times\{z\}} : \mathbb{R}^1 \times \{z\} \to L$ — универсальное накрывающее отображение с группой накрывающих преобразований, изоморфной группе $G_m|_z \cong \mathbb{Z}$, то слой L гомеоморфен окружности $\mathbb{S}^1$. □

Благодарности

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 22-21-00304, https://rscf.ru/project/22-21-00304.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Жукова Н. И.* Глобальные аттракторы полных конформных слоений // Мат. сб. — 2012. — *203*, № 3. — С. 79–106.
2. *Жукова Н. И., Рогожина Е. А.* Классификация компактных лоренцевых 2-орбифолдов с некомпактной полной группой изометрий// Сиб. мат. ж. — 2012. — *53*, № 6. — С. 1292–1309.
3. *Жукова Н. И., Чебочко Н. Г.* Структура лоренцевых слоений коразмерности два// Изв. вузов. Сер. Мат. — 2020. — *64*, № 11. — С. 87–92.
4. *Жукова Н. И., Шеина К. И.* Структура слоений с интегрируемой связностью Эресмана// Уфимск. мат. ж. — 2022. — *14*, № 1. — С. 23–40.

5. *Шапиро Я. Л.* О приводимых римановых многообразиях в целом // Изв. вузов. Сер. Мат. — 1972. — № 6. — С. 78–85.
6. *Шапиро Я. Л.* О двулистной структуре на приводимом римановом многообразии// Изв. вузов. Сер. Мат. — 1972. — № 12. — С. 102–110.
7. *Шапиро Я. Л., Жукова Н. И.* О простых двуслоениях// Изв. вузов. Сер. Мат. — 1976. — № 4. — С. 95–104.
8. *Assaf D. IV, Gadbois S.* Definition of chaos// Am. Math. Monthly. — 1992. — *99*, № 9. — С. 865.
9. *Banks J., Brooks J., Cairns G., Davis G., Stacey P.* On Devaney's definition of chaos// Am. Math. Monthly. — 1992. — *99*, № 4. — С. 332–334.
10. *Bazaikin Y. V., Galaev A. S., Zhukova N. I.* Chaos in Cartan foliations// Chaos. — 2020. — *30*, № 10. — С. 1–9.
11. *Blumenthal R. A., Hebda J. J.* Ehresmann connection for foliations// Indiana Univ. Math. J. — 1984. — *33*, № 4. — С. 597–611.
12. *Cairns G., Davis G., Elton E., Kolganova A., Perversi P.* Chaotic group actions// Enseign. Math. — 1995. — *41*. — С. 123–133.
13. *Cairns G., Kolganova A., Nielsen A.* Topological transitivity and mixing notions for group actions// Rocky Mountain J. Math. — 2007. — *37*, № 2. — С. 371–397.
14. *Candel A., Conlon L.* Foliations I. — Providence: Amer. Math. Soc., 2000.
15. *Churchill R. C.* On defining chaos in absent of time// В сб.: «Deterministic Chaos in General Relativity». — 1994. — С. 107–112.
16. *Devaney R. L.* An Introduction to Chaotic Dynamical Systems. — Menlo Park, etc.: The Benjamin/Cummings Publishing Co., Inc., 1986.
17. *Grosse-Erdmann K.-G., Manguillot A. P.* Linear Chaos. — London: Springer, 2011.
18. *Kashiwabara S.* The decomposition of differential manifolds and its applications// Tohoku Math. J. — 1959. — *11*. — С. 43–53.
19. *Kervaire M. A.* A manifold which does not admit any differentiable structure// Comment. Math. Helv. — 1960. — *34*, № 1. — С. 257–270.
20. *Kobayashi S., Nomizu K.* Foundations of Differential Geometry. I. — New York–London: Interscience Publishers, 1963.
21. *Manolescu C.* Four-dimensional topology. — https://web.stanford.edu/∼cm5/4D.pdf.
22. *Polo F.* Sensitive dependence on initial conditions and chaotic group actions// Proc. Am. Math. Soc. — 2010. — *138*, № 8. — С. 2815–2826.
23. *Reeb G.* Sur la theorie generale des systemes dynamiques// Ann. Inst. Fourier (Grenoble). — 1955. — *6*. — С. 89–115.
24. *Suda T.* Poincare maps and suspension flows: A categorical remarks// ArXive. — 2021. — 2107.06567 [math.DS].
25. *Tamura I.* Topology of Foliations: An Introduction. — Providence: AMS, 1992.
26. *Thurston W. P.* Three-Dimensional Geometry and Topology. — Prinston: Prinston Univ. Press, 1997.
27. *Vaisman I.* On some spaces which are covered by a product space// Ann. Inst. Fourier (Grenoble). — 1977. — *27*, № 1. — С. 107–134.
28. *Zhukova N. I., Chubarov G. V.* Aspects of the qualitative theory of suspended foliations// J. Differ. Equ. Appl. — 2003. — *9*, № 3-4. — С. 393–405.
29. *Zhukova N. I., Chubarov G. V.* Structure of graphs of suspended foliations// J. Math. Sci. (N.Y.) — 2022. — *261*, № 3. — С. 410–425.

Н. И. Жукова
НИУ ВШЭ, Международная лаборатория динамических систем и приложений, Нижний Новгород, Россия
E-mail: `nzhukova@hse.ru`

Г. С. Левин
НИУ ВШЭ, Факультет информатики, математики и компьютерных наук, Нижний Новгород, Россия
E-mail: `gslevin@edu.hse.ru`

Н. С. Тонышева
НИУ ВШЭ, Факультет информатики, математики и компьютерных наук, Нижний Новгород, Россия
E-mail: `nstonysheva@edu.hse.ru`

DOI: 10.22363/2413-3639-2022-68-3-424-450 UDC 515.16

Chaos in Topological Foliations

© 2022 **N. I. Zhukova, G. S. Levin, N. S. Tonysheva**

Abstract. We call a foliation (M, F) on a manifold M chaotic if it is topologically transitive and the union of closed leaves is dense in M. A foliated manifold M is not assumed to be compact. The chaotic foliations can be considered as multidimensional generalization of chaotic dynamical systems in the sense of Devaney. For foliations covered by fibrations we prove that a foliation is chaotic if and only if its global holonomy group is chaotic. We introduce the concept of the integrable Ehresmann connection for a foliation as a natural generalization of the integrable Ehresmann connection for smooth foliations. A description of the global structure of foliations with integrable Ehresmann connection and a criterion for the chaotic behavior of such foliations are obtained. Applying the method of suspension, a new countable family of pairwise nonisomorphic chaotic foliations of codimension two on 3-dimensional closed and nonclosed manifolds is constructed.

REFERENCES

1. N. I. Zhukova, "Global'nye attraktory polnykh konformnykh sloeniy" [Global attractors of complete conformal foliations], *Mat. sb.* [Math. Digest], 2012, **203**, No. 3, 79–106 (in Russian).
2. N. I. Zhukova and E. A. Rogozhina, "Klassifikatsiya kompaktnykh lorentsevykh 2-orbifoldov s nekompaktnoy polnoy gruppoy izometriy" [Classification of compact Lorentzian 2-orbifolds with noncompact complete isometry group], *Sib. mat. zh.* [Siberian Math. J.], 2012, **53**, No. 6, 1292–1309 (in Russian).
3. N. I. Zhukova and N. G. Chebochko, "Struktura lorentsevykh sloeniy korazmernosti dva" [The structure of Lorentzian foliations of codimension two], *Izv. vuzov. Ser. Mat.* [Bull. Higher Edu. Inst. Ser. Math.], 2020, **64**, No. 11, 87–92 (in Russian).
4. N. I. Zhukova and K. I. Sheina, "Struktura sloeniy s integriruemoy svyaznost'yu Eresmana" [Structure of foliations with integrable Ehresmann connection], *Ufimsk. mat. zh.* [Ufa Math. J.], 2022, **14**, No. 1, 23–40 (in Russian).
5. Ya. L. Shapiro, "O privodimykh rimanovykh mnogoobraziyakh v tselom" [On reducible Riemannian manifolds in the large], *Izv. vuzov. Ser. Mat.* [Bull. Higher Edu. Inst. Ser. Math.], 1972, No. 6, 78–85 (in Russian).
6. Ya. L. Shapiro, "O dvulistnoy strukture na privodimom rimanovom mnogoobrazii" [On the two-sheeted structure on a reducible Riemannian manifold], *Izv. vuzov. Ser. Mat.* [Bull. Higher Edu. Inst. Ser. Math.], 1972, No. 12, 102–110 (in Russian).
7. Ya. L. Shapiro and N. I. Zhukova, "O prostykh dvusloeniyakh" [On simple bifibrations], *Izv. vuzov. Ser. Mat.* [Bull. Higher Edu. Inst. Ser. Math.], 1976, No. 4, 95–104 (in Russian).
8. D. Assaf IV and S. Gadbois, "Definition of chaos," *Am. Math. Monthly*, 1992, **99**, No. 9, 865.
9. J. Banks, J. Brooks, G. Cairns, G. Davis, and P. Stacey, "On Devaney's definition of chaos," *Am. Math. Monthly*, 1992, **99**, No. 4, 332–334.
10. Y. V. Bazaikin, A. S. Galaev, and N. I. Zhukova, "Chaos in Cartan foliations," *Chaos*, 2020, **30**, No. 10, 1–9.
11. R. A. Blumenthal and J. J. Hebda, "Ehresmann connection for foliations," *Indiana Univ. Math. J.*, 1984, **33**, No. 4, 597–611.
12. G. Cairns, G. Davis, E. Elton, A. Kolganova, and P. Perversi, "Chaotic group actions," *Enseign. Math.*, 1995, **41**, 123–133.
13. G. Cairns, A. Kolganova, and A. Nielsen, "Topological transitivity and mixing notions for group actions," *Rocky Mountain J. Math.*, 2007, **37**, No. 2, 371–397.
14. A. Candel and L. Conlon, *Foliations I*, Amer. Math. Soc., Providence, 2000.

15. R. C. Churchill, "On defining chaos in absent of time," In: *Deterministic Chaos in General Relativity*, 1994, pp. 107–112.
16. R. L. Devaney, *An Introduction to Chaotic Dynamical Systems*, The Benjamin/Cummings Publishing Co., Menlo Park, etc., 1986.
17. K.-G. Grosse-Erdmann and A. P. Manguillot, *Linear Chaos*, Springer, London, 2011.
18. S. Kashiwabara, "The decomposition of differential manifolds and its applications," *Tohoku Math. J.*, 1959, **11**, 43–53.
19. M. A. Kervaire, "A manifold which does not admit any differentiable structure," *Comment. Math. Helv.*, 1960, **34**, No. 1, 257–270.
20. S. Kobayashi and K. Nomizu, *Foundations of Differential Geometry. I*, Interscience Publishers, New York–London, 1963.
21. C. Manolescu, *Four-Dimensional Topology*, Stanford University, Stanford, https://web.stanford.edu/~cm5/4D.pdf.
22. F. Polo, "Sensitive dependence on initial conditions and chaotic group actions," *Proc. Am. Math. Soc.*, 2010, **138**, No. 8, 2815–2826.
23. G. Reeb, "Sur la theorie generale des systemes dynamiques," *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)*, 1955, **6**, 89–115.
24. T. Suda, "Poincare maps and suspension flows: A categorical remarks," *ArXive*, 2021, 2107.06567 [math.DS].
25. I. Tamura, *Topology of Foliations: An Introduction*, AMS, Providence, 1992.
26. W. P. Thurston, *Three-Dimensional Geometry and Topology*, Prinston Univ. Press, Prinston, 1997.
27. I. Vaisman, "On some spaces which are covered by a product space," *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)*, 1977, **27**, No. 1, 107–134.
28. N. I. Zhukova and G. V. Chubarov, "Aspects of the qualitative theory of suspended foliations," *J. Differ. Equ. Appl.*, 2003, **9**, No. 3-4, 393–405.
29. N. I. Zhukova and G. V. Chubarov, "Structure of graphs of suspended foliations," *J. Math. Sci. (N.Y.)*, 2022, **261**, No. 3, 410–425.

N. I. Zhukova

HSE University, International Laboratory of Dynamical Systems and Applications, Nizhny Novgorod, Russia

E-mail: nzhukova@hse.ru

G. S. Levin

HSE University, Faculty of Informatics, Mathematics, and Computer Science, Nizhny Novgorod, Russia

E-mail: gslevin@edu.hse.ru

N. S. Tonysheva

HSE University, Faculty of Informatics, Mathematics, and Computer Science, Nizhny Novgorod, Russia

E-mail: nstonysheva@edu.hse.ru