Современная математика. Фундаментальные направления. Том 68, № 3 (2022). С. 407–423
Contemporary Mathematics. Fundamental Directions. ISSN 2413-3639 (Print)

DOI: 10.22363/2413-3639-2022-68-3-407-423 УДК 517.98+519.46

ПОРЯДКОВОЕ ПРОЕКТИРОВАНИЕ В $\mathcal{OA}_r(E,F)$

© 2022 г. **Н. А. ДЖУСОЕВА, С. Ю. ИТАРОВА, М. А. ПЛИЕВ**

Аннотация. В работе изучается операторы порядкового проектирования на различные полосы в пространстве регулярных ортогонально аддитивных операторов. Указаны формулы проектирования на полосу, порожденную направленным семейством положительных ортогонально аддитивных операторов, а также на полосу латерально непрерывных операторов.

ОГЛАВЛЕНИЕ

1. Введение

Порядковое проектирование является полезным и важным инструментом для исследования различных классов операторов, действующих в упорядоченных векторных пространствах. Если упорядоченное векторное пространство E является порядково полной векторной решеткой, то для каждой полосы $\mathcal{B}$ в E существует линейный оператор $\pi_{\mathcal{B}}\colon E \to \mathcal{B}$ порядкового проектирования на $\mathcal{B}$. Выяснением точного вида проекционных операторов на различные полосы в векторной решетке линейных регулярных операторов на протяжении десятилетий занимались многие математики (см. [2–4, 8, 14, 15, 22, 26]). В конце прошлого столетия ряд исследователей занялся исследование порядковой структуры нелинейных операторов. Порядково ограниченные ортогонально аддитивные операторы (абстрактные операторы Урысона в другой терминологии) изучались в работе [23]. Вопросы порядкового проектирования в пространстве абстрактных операторов Урысона рассматривались в работах [18, 31]. Более общий класс регулярных ортогонально аддитивных операторов (ОАО) был введен [30]. Там же было установлено, что порядковая полнота пространства образов операторов обеспечивает существование решеточной структуры пространства регулярных ортогонально аддитивных операторов. Регулярные и близкие к ним ортогонально аддитивные операторы изучались в работах [1, 9, 10, 13, 20, 21, 25, 28, 29]. Отметим публикации [11, 12], затрагивающие вопросы порядкового проектирования в пространствах регулярных ОАО. В настоящей работе мы продолжим исследования в данном направлении и получим формулы порядкового проектирования на полосы, порожденные направленными семействами положительных ОАО, а также на полосу латерально непрерывных ортогонально аддитивных операторов.

Н. А. Джусоева была поддержана Министерством науки и высшего образования Российской Федерации (соглашение 075-02-2022-890).

2. Предварительные сведения

В настоящем разделе мы приведем некоторые предварительные сведения, необходимые для дальнейшего чтения, а также зафиксируем терминологию и обозначения. В качестве стандартного источника для ссылок по теории векторных решеток используются монографии [6, 16]. Все встречающиеся ниже в тексте векторные решетки являются архимедовыми.

Сеть $(x_\alpha)_{\alpha\in A}$ элементов векторной решетки E *порядково сходится* к элементу $x \in E$, если существует убывающая сеть $(e_\beta)_{\beta\in B}$ положительных элементов решетки E такая, что $\inf\limits_{\beta\in B} e_\beta = 0$ и для любого e_β найдется индекс $\alpha(\beta)$ такой, что неравенство $|x - x_\alpha| \leqslant e_\beta$ выполняется для всех x_α где $\alpha \geqslant \alpha(\beta)$. В этом случае пишут, что $x = o\text{-}\lim\limits_{\alpha\in A} x_\alpha$. Подмножество D векторной решетки E называется *порядковым замкнутым*, если оно содержит пределы всех порядковых сетей, составленных из элементов D. Векторное подпространство J векторной решетки E называется *порядковым идеалом* E, если для любых $x \in E$, $y \in J$ неравенство $|x| \leqslant |y|$ влечет включение $x \in J$. Будем говорить, что элементы x, y векторной решетки E являются *дизъюнктными*, и писать $x \perp y$, если $|x| \wedge |y| = 0$. Для произвольного подмножества $D \subset E$ будем использовать следующие обозначения:

$$D^\perp := \{x \in E : x \perp y \ \ \forall y \in D\};$$
$$D^{\perp\perp} := (D^\perp)^\perp.$$

Множество $\mathcal{B}$ такое, что $\mathcal{B} = D^\perp$ для некоторого множества D, называется *полосой* в E. Заметим, что любая полоса в E является порядково замкнутым порядковым идеалом E. Будем говорить что полоса $\mathcal{B}$ *порождена множеством* D, если $\mathcal{B} = D^{\perp\perp}$. Для суммы $x = \sum\limits_{i=1}^n x_i$ попарно дизъюнктных элементов x_i, $i \in \{1, \ldots, n\}$ будем использовать обозначение $x = \bigsqcup\limits_{i=1}^n x_i$. В частном случае $n = 2$ используем обозначение $x = x_1 \sqcup x_2$. Элемент y векторной решетки E называется *осколком* элемента $x \in E$, если $y \perp (x - y)$. Запись $y \sqsubseteq x$ выражает тот факт, что y — осколок x. Множество всех осколков элемента x обозначается через $\mathcal{F}_x$. Бинарное отношение $\sqsubseteq$ на векторной решетке E является отношением частичного порядка на E, который называется *латеральным порядком*. Латеральный порядок важен для изучения ортогонально аддитивных операторов [19, 25]. Следующая латеральная версия леммы Рисса часто будет использоваться в тексте.

Лемма 2.1 (см. [27, Proposition 3.1]). *Пусть E — векторная решетка и $\bigsqcup\limits_{i=1}^n x_i = \bigsqcup\limits_{k=1}^m y_k$ для некоторых $(x_i)_{i=1}^n$ и $(y_k)_{k=1}^m \subset E$. Тогда существует семейство попарно дизъюнктных элементов $(z_{ik}) \subset E$, где $i \in \{1, \ldots, n\}$ и $k \in \{1, \ldots, m\}$, таких, что*

1. $x_i = \bigsqcup\limits_{k=1}^m z_{ik}$ *для любого* $i \in \{1, \ldots, n\}$;
2. $y_k = \bigsqcup\limits_{i=1}^n z_{ik}$ *для любого* $k \in \{1, \ldots, m\}$;
3. $\bigsqcup\limits_{i=1}^n \bigsqcup\limits_{k=1}^m z_{ik} = \bigsqcup\limits_{i=1}^n x_i = \bigsqcup\limits_{k=1}^m y_k$.

Пусть Λ — некоторое индексное множеств и Θ — множество всех конечных подмножеств Λ, упорядоченное по включению. Семейство $(u_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ элементов векторной решетки E называется *порядково суммируемым*, если сеть $(u_\theta)_{\theta\in\Theta}$ порядково сходится и $u = o\text{-}\lim u_\theta$. Здесь $u_\theta = \sum\limits_{\lambda\in\theta} u_\lambda$. При этом элемент u обозначается $o\text{-}\sum\limits_\lambda u_\lambda$. Характеристическая функция множества D обозначается 1_D.

Напомним, что с каждой полосой $\mathcal{B}$ в порядково полной векторной решетке E ассоциирован порядковой проектор $\pi_\mathcal{B}\colon E \to \mathcal{B}$ на эту полосу, действующий по следующему правилу:

$$\pi_\mathcal{B}(x) = x_1, \quad x = x_1 \sqcup x_2, \quad x_1 \in \mathcal{B}, \quad x_2 \in \mathcal{B}^\perp.$$

В этом случае $x_1 \in \mathcal{B}$ и $x_2 \in \mathcal{B}^\perp$ называются *проекциями* элемента x на полосы $\mathcal{B}$ и $\mathcal{B}^\perp$ соответственно. Через π_x обозначим проектор на главную полосу $\{x\}^{\perp\perp}$, порожденную элементом x, и через $\pi_x^\perp$ обозначим порядковый проектор на дополнительную полосу $\{x\}^\perp$. Отметим, что $\pi_x^{\perp\perp} = \pi_x$. Приведем полезные для дальнейшего общие формулы порядкового проектирования, справедливые для произвольной порядково полной векторной решетки. Будем полагать, что $0 \leqslant x \in E$ и $\mathcal{B}$ — полоса в E.

$$\pi_{\mathcal{B}}(x) = \sup\{y \in \mathcal{B}\colon 0 \leqslant y \leqslant x\} \quad \text{и} \quad \pi_x(u) = \sup_{n\in\mathbb{N}}\{u \wedge (nx)\}, \quad u \in E_+.$$

Множество всех порядковых проекторов в E обозначается $\mathfrak{P}(E)$. Известно, что в случае порядково полной векторной решетки E множество $\mathfrak{P}(E)$ является полной булевой алгеброй, где частичный порядок и булевы операции вводятся следующим образом:

$$\pi' \leqslant \pi'' \Leftrightarrow \pi' \circ \pi'' = \pi', \tag{2.1}$$

$$\pi' \wedge \pi'' = \pi' \circ \pi'', \quad \pi' \vee \pi'' = \pi' + \pi'' - \pi' \circ \pi'', \quad \pi^* = I_E - \pi, \tag{2.2}$$

$$\pi, \pi', \pi'' \in \mathfrak{P}(E),\ I_E \text{ — тождественный оператор на } E. \tag{2.3}$$

Отметим, что равенства $\pi \circ \pi' = \pi' \circ \pi$ и $\pi \circ \pi = \pi$ выполняются для любых порядковых проекторов π, $\pi' \in \mathfrak{P}(E)$. Ниже мы будем пользоваться следующими полезными формулами:

$$\pi_x \wedge \pi_y = \pi_{x\wedge y},\ \ \pi_x \circ \pi_x^\perp = 0,\ \ \pi_x x = x,\ \ \pi_x(x \wedge y) = x \wedge y,\ \ \pi_x(v) + \pi_x^\perp(v) = v.$$

В качестве иллюстрации докажем первую из них. Пусть $v \in E_+$. Тогда имеем

$$\begin{aligned}(\pi_x \wedge \pi_y)v &= (\pi_x \circ \pi_y)v = \pi_x(\pi_y v) = \pi_x\big(\sup_n\{v \wedge ny\}\big) = \\ &= \sup_{m\in\mathbb{N}}\big\{\sup_{n\in\mathbb{N}}\{v \wedge ny\} \wedge mx\}\big\} = \sup_m \sup_n\{v \wedge \inf\{m,n\}y \wedge x\big\} = \\ &= \sup_k\{v \wedge k(x \wedge y)\} = \pi_{x\wedge y}(v).\end{aligned}$$

Ниже для обозначения порядковых проекторов мы будем использовать буквы греческого алфавита: π, ρ, σ и т. д. Семейство $(\rho_\xi)_{\xi\in\Xi} \subset \mathfrak{P}(F)$ попарно дизъюнктных порядковых проекторов таких, что $\sup\limits_{\xi\in\Xi} \rho_\xi = I_E$, будем называть *разбиением единицы* в E. Положительный элемент u векторной решетки E называется *слабой порядковой единицей*, если $\{u\}^{\perp\perp} = E$.

3. Векторная решетка регулярных ортогонально аддитивных операторов

В данном разделе мы рассмотрим порядковую структуру пространства регулярных ортогонально аддитивных операторов и приведем некоторые важные для приложений примеры таких операторов.

Определение 3.1. Пусть E — векторная решетка и X — действительное векторное пространство. Оператор $T : E \to X$ называется *ортогонально аддитивным* (ОАО для краткости), если $T(x + y) = Tx + Ty$ для любых дизъюнктных $x, y \in E$.

Определение 3.2. Пусть E, F — векторные решетки. Ортогонально аддитивный оператор $T : E \to F$ называется:

1. *положительным*, если $T(E) \subset F_+$;
2. *регулярным*, если $T = S_1 - S_2$, где S_1, S_2 — позитивные ОАО из E в F;
3. *порядково ограниченным*, или *абстрактным оператором Урысона*, если T отображает порядково ограниченные подмножества E в порядково ограниченные подмножества векторной решетки F;
4. *осколочно ограниченным*, или *оператором Попова*, если любого элемента $x \in E$ множество $T(\mathcal{F}_x)$ порядково ограниченно в F.

Векторные пространства всех регулярных, порядково ограниченных и осколочно ограниченных ОАО из E в F обозначаются через $\mathcal{OA}_r(E,F)$, $\mathcal{OA}_b(E,F)$ и $\mathcal{P}(E,F)$ соответственно. Конус всех положительных ОАО из E в F обозначается $\mathcal{OA}_+(E,F)$. В пространстве $\mathcal{OA}_r(E,F)$ существует естественный частичный порядок, задаваемый следующим образом: $S \leqslant T$, если

$(T - S) \in \mathcal{OA}_+(E, F)$. В случае порядковой полноты векторной решетки F упорядоченное векторное пространство $\mathcal{OA}_r(E, F)$ является порядково полной операторной векторной решеткой.

Лемма 3.1 (см. [30, Theorem 3.6]). *Пусть E и F — векторные решетки, причем решетка F порядково полна. Тогда $\mathcal{OA}_r(E, F) = \mathcal{P}(E, F)$ и $\mathcal{OA}_r(E, F)$ является порядково полной векторной решеткой. При этом для любых S, $T \in \mathcal{OA}_r(E, F)$ и $x \in E$ решеточные операции имеют следующий вид*:

1. $(T \vee S)x = \sup\{Ty + Sz : x = y \sqcup z\}$;
2. $(T \wedge S)x = \inf\{Ty + Sz : x = y \sqcup z\}$;
3. $T^+x = \sup\{Ty : y \sqsubseteq x\}$;
4. $T^-x = -\inf\{Ty : y \sqsubseteq x\}$;
5. $|Tx| \leqslant |T|x$.

Рассмотрим несколько примеров ортогонально аддитивных операторов. Нам потребуются некоторые предварительные сведения.

Определение 3.3. Пусть (A, Σ, μ) и (B, Ξ, ν) — пространства с конечными мерами. Через $(A \times B, \mu \otimes \nu)$ обозначим пополненное произведение пространств с мерами. Отображение $K\colon A \times B \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ называется *функцией Каратеодори*, если выполняются следующие условия:

(C_1) функция $K(\cdot, \cdot, r)$ является $\mu \otimes \nu$-измеримой для любого $r \in \mathbb{R}$;
(C_2) функция $K(s, t, \cdot)$ является непрерывной на $\mathbb{R}$ для $\mu \otimes \nu$-почти всех $(s, t) \in A \times B$.

Будем говорить, что функция Каратеодори K *нормализована* , если $K(s, t, 0) = 0$ для $\mu \otimes \nu$-почти всех $(s, t) \in A \times B$.

Пример 3.1. Пусть E — порядковый идеал в $L_0(\nu)$, $K\colon A \times B \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ — нормализованная функция Каратеодори, и для любого элемента $f \in E$ неравенство

$$\int\limits_B |K(s, t, f(t))|\, d\nu(t) < \infty$$

выполняется для почти всех $s \in A$. Тогда формула 3.1

$$Tf(s) = \int\limits_B K(s, t, f(t))\, d\nu(t) \tag{3.1}$$

задает регулярный ортогонально аддитивный оператор $T\colon E \to L_0(\mu)$.

Заметим, вышеприведенный интегральный оператор T известен в литературе как *интегральный оператор Урысона*. Нормализованная функция Каратеодори K называется *ядром* интегрального оператора (см. [5]).

Частным случаем интегрального оператора Урысона является оператор Гаммерштейна, заданный формулой

$$(Tf)(s) := \int\limits_B K(s, t) N(t, f(t))\, d\nu(t),$$

где $K(\cdot, \cdot)$ — это $\mu \times \nu$-измеримая функция на $A \times B$, а $N : B \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ — такая функция, что $u(t, \cdot)$ непрерывна на $\mathbb{R}$ для ν-почти всех $t \in B$, $N(\cdot, r)$ ν-измерима для любого $r \in \mathbb{R}$ и $N(t, 0) = 0$ для ν-почти всех $t \in B$ (для соблюдения условия C_0).

Рассмотрим следующий типичный пример ортогонально аддитивного оператора.

Пример 3.2. Пусть (A, Σ, μ) — пространство с конечной мерой. Будем говорить, что функция $N : A \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *суперпозиционно измерима* (*супер-измерима* для краткости), если функция $N(\cdot, f(\cdot))$ μ-измерима для любой измеримой функции $f \in L_0(\mu)$. Супер-измеримая функция называется N называется *нормализованной*, если $N(s, 0) = 0$ для μ-почти всех $s \in A$.

С каждой нормализованной супер-измеримой функцией N связан ортогонально аддитивный оператор $\mathcal{N}\colon L_0(\mu) \to L_0(\mu)$, заданный по следующему правилу:

$$\mathcal{N}(f)(s) = N(s, f(s)), \quad f \in L_0(\mu).$$

Ортогональная аддитивность оператора $\mathcal{N}$ выводится из включения

$$\mathcal{N}(f) \in \{f\}^{\perp\perp}, \quad f \in L_0(\mu).$$

Действительно, для почти всех $s \in A$ справедливо равенство

$$\mathcal{N}(f)(s) = N(s, f(s)) = N(s, f1_{\operatorname{supp} f}(s)) = N(s, f(s))1_{\operatorname{supp} f}(s).$$

Отсюда выводим, что $\operatorname{supp}\mathcal{N}(f) \subset \operatorname{supp} f$, в силу чего $\mathcal{N}(f) \in \{f\}^{\perp\perp}$. Операторы, обладающие данным свойством, называются *нерастягивающими.*

Оператор $\mathcal{N}$ известен в литературе как *нелинейный оператор суперпозиции*, или *оператор Немыцкого* (см. [17]).

4. Проектирование на полосу, порожденную семейством операторов

В данном разделе мы исследуем операторы порядкового проектирования в векторной решетке $\mathcal{OA}_r(E,F)$ на полосы, порожденные направленными вверх семействами положительных ОАО.

Для дальнейшего нам потребуется одно вспомогательное утверждение, доказанное методами булевозначного анализа.

Лемма 4.1 (см. [7, теорема 10.4.8])**.** *Пусть F — порядково полная векторная решетка со слабой порядковой единицей u, а $(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ — порядково ограниченная сеть в F. Тогда сеть $(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ порядково сходится к элементу $x \in F$ тогда и только тогда, когда для любого $\varepsilon > 0$ найдется разбиение единицы $(\rho_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ такое, что*

$$\rho_\lambda|x_\beta - x| \leqslant \varepsilon u, \quad \beta \geqslant \lambda.$$

Лемма 4.2. *Пусть E, F — векторные решетки, причем решетка F порядково полна, и $\mathcal{A}$ — множество слабых порядковых единиц в F. Если операторы $T, S \in \mathcal{OA}_+(E,F)$ дизъюнктны, тогда для любых $x \in E$, $u \in \mathcal{A}$ и $\varepsilon > 0$ найдется разбиение единицы $(\pi_\alpha)_{\alpha\in\Delta}$ в $\mathfrak{P}(F)$ и семейство осколков $(x_\alpha)_{\alpha\in\Delta}$ элемента x такие, что*

$$\pi_\alpha\bigl(Tx_\alpha + S(x - x_\alpha)\bigr) \leqslant \varepsilon u \text{ для любого } \alpha \in \Delta.$$

Доказательство. Возьмем произвольный элемент $x \in E$. Через Δ обозначим множество всех пар $\alpha = (y, z) \in \mathcal{F}_x \times \mathcal{F}_x$ попарно дизъюнктных осколков элемента x таких, что $y \sqcup z = x$. Для любого $\alpha = (y, x - y) \in \Delta$ положим $f_\alpha = Ty + S(x - y)$. Согласно формуле 2 леммы 3.1 дизъюнктность операторов S и T влечет равенство $\inf\limits_{\alpha\in\Delta}\{f_\alpha\} = 0$. Обозначим через Ξ набор всех конечных подмножеств Δ, упорядоченный по включению, т. е. $\xi \leqslant \xi'$, если $\xi \subset \xi'$. Рассмотрим множество $(y_\xi)_{\xi\in\Xi}$ инфимумов всех конечных подмножеств множества $\{f_\alpha\colon \alpha \in \Delta\}$, т. е. если $\xi \in \Xi$ — конечное множество $\xi = \{\alpha_{\xi_1}, \dots, \alpha_{\xi_n}\}$, где $\alpha_{\xi_k} \in \Delta$ для любого $k = 1, \dots, n$, тогда

$$y_\xi = \bigwedge_{i=1}^{n} f_{\alpha_{\xi_i}}.$$

Отметим, что множество $(y_\xi)_{\xi\in\Xi}$ является убывающей сетью и $o\text{-}\lim\limits_{\xi\in\Xi} y_\xi = 0$. Согласно лемме 4.1, для любого $\varepsilon > 0$ и $u \in \mathcal{A}$ существует разбиение единицы $(\rho_\xi)_{\xi\in\Xi}$ в F такое, что

$$\rho_\xi(y_\xi) \leqslant \varepsilon u \ \text{ для любого } \ \xi \in \Xi.$$

Отсюда легко вывести, что $\rho_\xi(f_\alpha) < \varepsilon u$, если $\xi = \alpha$. Отождествим F с векторной подрешеткой порядково полной векторной решетки $C_\infty(Q)$ всех непрерывных функций, заданных на экстремальном компакте Q, принимающих бесконечные значения на нигде не плотных множества. При этом в качестве слабой порядковой единицы выбираем характеристическую функцию 1_Q множества Q. Тогда порядковые проекторы $(\rho_\xi)_{\xi\in\Xi}$ — это операторы умножения на характеристические функции 1_{Q_ξ} открыто-замкнутых множеств. Супремум $\sup\limits_{\xi\in\Xi}\rho_\xi$ является тождественным оператором I_F на F. Для $\xi \in \Xi$ и $\alpha \in \Delta$ введем следующее множество:

$$A_\alpha^\xi = \{t \in Q_\xi\colon f_\alpha(t) < f_\beta(t),\, \beta \in \xi,\, \beta \neq \alpha\}$$

и обозначим через $\overline{A^{\xi}_{\alpha}}$ его замыкание в Q_ξ и соответственно Q. Отметим, что $\overline{A^{\xi}_{\alpha}}$ являются открыто-замкнутыми подмножествами Q для любого $\xi \in \Xi$ и $\alpha \in \Delta$. Также отметим, что подмножества $\overline{A^{\xi}_{\alpha}}$ попарно дизъюнктны в случае, когда $\alpha \neq \alpha'$ либо $\xi \neq \xi'$. Через ρ^{ξ}_{α} обозначим оператор умножения на характеристическую функцию $1_{\overline{A^{\xi}_{\alpha}}}$, т. е. $\rho^{\xi}_{\alpha}(f) = f \cdot 1_{\overline{A^{\xi}_{\alpha}}}$ для любого элемента $f \in C_\infty(Q)$. Оператор ρ^{ξ}_{α} является порядковым проектором в $C_\infty(Q)$, и включение $\overline{A^{\xi}_{\alpha}} \subset Q_\xi$ влечет $\rho^{\xi}_{\alpha} \leqslant \rho_\xi$. Таким образом, $\rho^{\xi}_{\alpha}(f_\alpha) \leqslant \varepsilon u$ для любого $\alpha \in \Delta$ и $\xi \in \Xi$. Отсюда выводим, что порядковые проекторы ρ^{ξ}_{α} попарно дизъюнктны в случае, когда $\alpha \neq \alpha'$ или $\xi \neq \xi'$. Таким образом, порядковые проекторы $\pi_\alpha = \sup\limits_{\xi\in\Xi} \rho^{\xi}_{\alpha}$ и $\pi_{\alpha'} = \sup\limits_{\xi\in\Xi} \rho^{\xi}_{\alpha'}$ также дизъюнктны. Покажем, что $\bigvee\limits_{\alpha} \pi_\alpha = I_F$. Предположим, что верно обратное утверждение. Тогда найдется порядковый проектор ϱ, который дизъюнктен всем порядковым проекторам π_α, в силу чего ϱ дизъюнктен каждому проектору ρ_ξ. Это противоречит тому, что семейство $(\rho_\xi)_{\xi\in\Xi}$ является разбиением единицы. Таким образом, семейство $(\pi_\alpha)_{\alpha\in\Delta}$ является разбиением единицы и

$$\pi_\alpha\big(Tx_\alpha + S(x - x_\alpha)\big) \leqslant \varepsilon u \ \text{ для любого } \alpha \in \Delta.$$

□

Следующая лемма представляет необходимые и достаточные условия дизъюнктности положительных ортогонально аддитивных операторов.

Лемма 4.3. *Пусть E, F — векторные решетки, причем решетка F порядково полна. Операторы $S, T \in \mathcal{OA}_+(E, F)$ являются дизъюнктными тогда и только тогда, когда для произвольных $x \in E$ и $\varepsilon > 0$ найдется разбиение единицы $(\rho_\alpha)_{\alpha\in\Delta}$ в F и семейство осколков $(x_\alpha)_{\alpha\in\Delta} \subset \mathfrak{F}_x$ такие, что неравенства*

$$\rho_\alpha Tx_\alpha \leqslant \varepsilon Tx \quad \text{и} \quad \rho_\alpha S(x - x_\alpha) \leqslant \varepsilon Sx$$

выполняются для любых $\alpha \in \Delta$.

Доказательство. Предположим, что $S \wedge T = 0$. Пусть $u := Sx \wedge Tx + \rho^{\perp}_{Sx\wedge Tx}(Sx + Tx)$. Тогда для $v_1 = \rho_{Sx\wedge Tx}(Sx \vee Tx)$, $v_2 = \rho^{\perp}_{Sx\wedge Tx}(Sx \vee Tx)$ и дизъюнктных v_1 и v_2 можем написать

$$\begin{aligned} Sx + Tx &= Sx \wedge Tx + Sx \vee Tx, \\ Sx \vee Tx &= v_1 + v_2. \end{aligned}$$

Отметим, что $v_1 \in (Sx \wedge Tx)^{\perp\perp}$. Если $w \in F$ дизъюнктен u, то

$$w \perp (Sx \wedge Tx) \ \text{ и } \ w \perp \rho^{\perp}_{Sx\wedge Tx}(Sx + Tx).$$

Отсюда выводим, что $w \perp (Sx \wedge Tx)^{\perp\perp}$ и $w \perp v_1$. В силу $Sx \vee Tx = \rho_{Sx\wedge Tx}(Sx \vee Tx) + \rho^{\perp}_{Sx\wedge Tx}(Sx \vee Tx)$ получаем, что $w \perp \rho^{\perp}_{Sx\wedge Tx}(Sx \vee Tx)$, т. е. $w \perp v_2$. Так как $w \perp (v_1 + v_2)$ и $w \perp (Sx \wedge Tx)^{\perp\perp}$, то $w \perp (Sx + Tx)$. Таким образом, $Sx + Tx \in \{u\}^{\perp\perp}$ и u — слабая порядковая единица в $\{Sx + Tx\}^{\perp\perp}$. Покажем, что

$$\rho_{Sx} u \leqslant Sx \text{ и } \ \rho_{Tx} u \leqslant Tx.$$

Для этого сначала установим два вспомогательных равенства

$$(a)\ \ \rho_{Sx} \circ \rho^{\perp}_{Sx\wedge Tx} Tx = 0 \quad \text{и} \quad (b)\ \ \rho_{Sx} \circ \rho^{\perp}_{Sx\wedge Tx}(Sx + Tx) = \rho^{\perp}_{Sx\wedge Tx} Sx.$$

Тогда

$$\rho_{Sx} \circ \rho^{\perp}_{Sx\wedge Tx} Tx = \rho^{\perp}_{Sx\wedge Tx} \circ \rho_{Sx} Tx = \rho^{\perp}_{Sx\wedge Tx} \circ \rho_{Sx} \circ \rho_{Tx} Tx = \rho^{\perp}_{Sx\wedge Tx} \circ \rho_{Sx\wedge Tx} Tx = 0$$

и равенство (a) установлено. Равенство (b) следует из следующей цепочки формул:

$$\begin{aligned} &\rho_{Sx} \circ \rho^{\perp}_{Sx\wedge Tx}(Sx + Tx) = \\ &= \rho_{Sx} \circ \rho^{\perp}_{Sx\wedge Tx} Sx + \rho_{Sx} \circ \rho^{\perp}_{Sx\wedge Tx} Tx = \\ &= \rho^{\perp}_{Sx\wedge Tx} \circ \rho_{Sx} Sx + \rho_{Sx} \circ \rho^{\perp}_{Sx\wedge Tx} Tx = \rho^{\perp}_{Sx\wedge Tx} Sx + \rho_{Sx} \circ \rho^{\perp}_{Sx\wedge Tx} Tx = \\ &= \rho^{\perp}_{Sx\wedge Tx} Sx. \end{aligned}$$

Далее имеем:

$$\begin{aligned}\rho_{Sx}u &= \rho_{Sx}\bigl(Sx\wedge Tx+\rho^{\perp}_{Sx\wedge Tx}(Sx+Tx)\bigr)=\\ &= \rho_{Sx}(Sx\wedge Tx)+\rho_{Sx}\circ\rho^{\perp}_{Sx\wedge Tx}(Sx+Tx)=\\ &= \rho_{Sx\wedge Tx}(Sx\wedge Tx)+\rho^{\perp}_{Sx\wedge Tx}Sx=\\ &\leqslant \rho_{Sx\wedge Tx}Sx+\rho^{\perp}_{Sx\wedge Tx}Sx=Sx.\end{aligned}$$

Те же аргументы имеют место для $\rho_{Tx}u$.

Отметим, что элемент $u+v$ будет слабой порядковой единицей в F, так как u — слабая порядковая единица в $\{Sx+Tx\}^{\perp\perp}$, а v — слабая порядковая единица в $\{Sx+Tx\}^{\perp}$. В силу дизъюнктности T и S, применяя лемму 4.3, для любого $\varepsilon>0$ найдем разбиение единицы $(\rho_\alpha)_{\alpha\in\Delta}$ в F и семейство осколков $(x_\alpha)_{\alpha\in\Delta}$ элемента x такие, что

$$\rho_\alpha(Tx_\alpha+S(x-x_\alpha))\leqslant\varepsilon u\ \text{ для любых } \alpha\in\Delta.$$

Таким образом, для любого $\alpha\in\Delta$ имеем

$$\begin{aligned}\rho_\alpha Tx_\alpha &= \rho_{Tx}\circ\rho_\alpha Tx_\alpha\leqslant\rho_{Tx}\varepsilon u\leqslant\varepsilon Tx \quad \text{и}\\ \rho_\alpha S(x-x_\alpha) &= \rho_{Sx}\circ\rho_\alpha S(x-x_\alpha)\leqslant\rho_{Sx}\varepsilon u\leqslant\varepsilon Sx.\end{aligned}$$

Докажем теперь обратное утверждение. Возьмем произвольный элемент $x\in E$. Требуется установить, что

$$(T\wedge S)x=\inf\{Ty+Sz\colon x=y\sqcup z\}=0.$$

Согласно предположению, для любого $\varepsilon>0$ найдется разбиение единицы $(\rho_\alpha)_{\alpha\in\Delta}$ в F и семейство $(x_\alpha)_{\alpha\in\Delta}\subset\mathcal{F}_x$ осколков элемента x, удовлетворяющие необходимым вышеуказанным условиям. Тогда можем написать

$$\begin{aligned}(T\wedge S)x &= \inf_{y\in\mathcal{F}_x}\{Ty+Sz\colon x=y\sqcup(x-y)\}\leqslant\\ &\leqslant \inf_{\alpha\in\Delta}\{Tx_\alpha+S(x-x_\alpha)\}=\\ &= \sup_{\alpha\in\Delta}\rho_\alpha\bigl(\inf_{\alpha\in\Delta}\{Tx_\alpha+S(x-x_\alpha)\}\bigr)=\\ &= \sup_{\alpha\in\Delta}\rho_v\bigl(Tx_\alpha+S(x-x_\alpha)\bigr)\leqslant\varepsilon(Tx+Sx).\end{aligned}$$

В силу произвольности $\varepsilon>0$ окончательно получаем $(T\wedge S)x=0$. ☐

Для множества $A\subset\mathcal{OA}_r(E,F)$ через π_A обозначим порядковый проектор в $\mathcal{OA}_r(E,F)$ на полосу $A^{\perp\perp}$, порожденную A, а через $\pi^{\perp}_A=(\pi_A)^{\perp}$ обозначим проектор на дополнительную полосу $A^{\perp}$.

Множество $A\subset\mathcal{OA}_+(E,F)$ называется *направленным вверх*, если для любых $R,T\in A$ найдется оператор $G\in A$ такой, что $R,T\leqslant G$. Следующая теорема устанавливает правило вычисления проекции на полосу, порожденную направленным вверх множеством положительных ортогонально аддитивных операторов.

Теорема 4.1. *Пусть E,F — векторные решетки, причем решетка F порядково полна, $A\subset\mathcal{OA}_+(E,F)$ — направленное вверх множество. Тогда для произвольных $T\in\mathcal{OA}_+(E,F)$ $x\in E$ имеют место формулы*:

$$(\pi_A T)(x)=\sup_{\substack{\varepsilon>0\\ S\in A}}\ \inf_{\substack{y\in\mathcal{F}_x\\ \rho\in\mathfrak{P}(F)}}\{\rho Ty+\rho^{\perp}Tx\colon \rho S(x-y)\leqslant\varepsilon Sx\},\tag{4.1}$$

$$(\pi^{\perp}_A T)(x)=\inf_{\substack{\varepsilon>0\\ S\in A}}\ \sup_{\substack{y\in\mathcal{F}_x\\ \rho\in\mathfrak{P}(F)}}\{\rho Ty\colon \rho Sy\leqslant\varepsilon Sx\}.\tag{4.2}$$

Доказательство. Достаточно доказать вторую формулу. Для произвольного $x\in E$ обозначим правую часть равенства (4.2) через $\eta(T)(x)$. Покажем, что $\eta(T)\in\mathcal{OA}_+(E,F)$. Пусть $x=x_1\sqcup x_2$. Используя лемму 2.1, выводим, что каждый осколок $y\in\mathcal{F}_x$ представляется в виде $y=y_1\sqcup y_2$, где $y_i\in\mathcal{F}_{x_i}$, $i=1,2$. Отметим, что $\eta(T)(z)\geqslant0$ для любого $z\in E$ в силу положительности $T:E\to F$. Отсюда получаем, что $\eta(T):E\to F$ — положительный ортогонально аддитивный оператор. Для

$T \in \mathcal{OA}_+(E,F)$ положим $\kappa(T) = T - \eta(T)$. Теперь покажем, что $\kappa(T) = \pi_A T$. Действительно, так как для любых $y \in \mathcal{F}_x$ и $\rho \in \mathfrak{P}(F)$

$$Tx = \rho Ty + \rho^\perp Ty + T(x-y) = \rho Ty + \rho^\perp Ty + \rho^\perp T(x-y) + \rho T(x-y),$$

в силу чего

$$Tx - \rho Ty = \rho^\perp Tx + \rho T(x-y),$$

то выводим

$$\begin{aligned} \kappa(T)(x) &= Tx - \eta(T)(x) = \\ &= \sup_{\substack{\varepsilon>0\\ S\in A}} \inf_{\substack{y\in\mathcal{F}_x\\ \rho\in\mathfrak{P}(F)}} \{Tx - \rho Ty\colon \rho Sy \leqslant \varepsilon Sx\} = \\ &= \sup_{\substack{\varepsilon>0\\ S\in A}} \inf_{\substack{y\in\mathcal{F}_x\\ \rho\in\mathfrak{P}(F)}} \{\rho^\perp Tx + \rho T(x-y)\colon \rho Sy \leqslant \varepsilon Sx\}, \end{aligned}$$

откуда получаем

$$\kappa(T)(x) = \sup_{\substack{\varepsilon>0\\ S\in A}} \inf_{\substack{y\in\mathcal{F}_x\\ \rho\in\mathfrak{P}(F)}} \{\rho^\perp Tx + \rho Ty\colon \rho S(x-y) \leqslant \varepsilon Sx\}.$$

Порядковый идеал, порожденный множеством A, порядково плотен в векторной решетке $A^{\perp\perp}$, в силу чего найдется операторная сеть $(T_\gamma)_{\gamma\in\Gamma} \subset \mathcal{OA}_+(E,F)$, где

$$T_\gamma = \sum_{i=1}^{n(\gamma)} \lambda_i S_i, \quad \text{где} \quad S_i \in A, \quad n(\gamma) \in \mathbb{N}, \quad \gamma \in \Gamma, \quad \lambda_i \in \mathbb{R}_+$$

и $T_\gamma \uparrow \pi_A T$. Используя тот факт, что множество A направлено вверх, получаем

$$(T_\gamma)_{\gamma\in\Gamma} \subset \bigcup_{\substack{S\in A\\ n\in\mathbb{N}}} [0, nS].$$

Зафиксируем некоторый индекс $\gamma_0 \in \Gamma$. Тогда $T_{\gamma_0} \leqslant nS_0$ для некоторого $S_0 \in A$ и $n \in \mathbb{N}$. Для произвольного $\varepsilon > 0$ найдется проектор $\rho \in \mathfrak{P}(F)$ и осколок $y \in \mathcal{F}_x$ такие, что $\rho S_0(x-y) \leqslant \varepsilon S_0 x$. Заметим, что множество таких проекторов и осколков непусто. Действительно, достаточно взять $y = x$ и произвольный проектор $\rho \in \mathfrak{P}(F)$. Следовательно, для y и ρ в силу $T_{\gamma_0} \leqslant \pi_A T \leqslant T$ выводим

$$T_{\gamma_0}x \leqslant \rho T_{\gamma_0}(x-y) + \rho Ty + \rho^\perp Tx \leqslant \rho n S_0(x-y) + \rho Ty + \rho^\perp Tx \leqslant \varepsilon n S_0 x + \rho Ty + \rho^\perp Tx.$$

Переходя к сначала инфимуму относительно $y \in \mathcal{F}_x$ и $\rho \in \mathfrak{P}(F)$, а затем к супремуму относительно $\varepsilon > 0$ и $S \in A$ в правой части вышеприведенного неравенства, получаем следующую цепочку формул:

$$\begin{aligned} T_{\gamma_0}x &\leqslant \varepsilon n S_0 x + \inf_{\substack{y\in\mathcal{F}_x\\ \rho\in\mathfrak{P}(F)}} \{\rho Ty + \rho^\perp Tx\colon \rho S_0(x-y) \leqslant \varepsilon S_0 x\} \leqslant \\ &\leqslant \varepsilon n S_0 x + \sup_{\substack{\varepsilon>0\\ S\in A}} \inf_{\substack{y\in\mathcal{F}_x\\ \rho\in\mathfrak{P}(F)}} \{\rho Ty + \rho^\perp Tx\colon \rho S(x-y) \leqslant \varepsilon Sx\} \leqslant \\ &\leqslant \varepsilon n S_0 x + \kappa(T)(x). \end{aligned}$$

В силу произвольности ε получаем, что $T_{\gamma_0}x \leqslant \kappa(T)(x)$. Тогда $\sup\limits_{\gamma\in\Gamma} T_\gamma x \leqslant \kappa(T)(x)$ и

$$(\pi_A T)x = \sup_{\gamma\in\Gamma} T_\gamma x \leqslant \kappa(T)(x) \Rightarrow \eta(T)(x) \leqslant (\pi_A^\perp T)x.$$

В силу произвольности $x \in E$ получаем $\eta(T) \leqslant \pi_A^\perp T$.

Докажем теперь обратное неравенство. Для произвольного $T \in \mathcal{OA}_+(E,F)$ можем написать

$$\eta(\pi_A^\perp T) \leqslant \eta(T) = \eta(\pi_A^\perp T) + \eta(\pi_A T).$$

С другой стороны, имеем

$$\eta(\pi_A T) \leqslant \pi_A^\perp \pi_A T = 0.$$

Тогда $\eta(T) = \eta(\pi_A^\perp T)$ и $\kappa T = T - \eta T = \pi_A T + \pi_A^\perp T - \eta(\pi_A^\perp T)$. В завершение осталось показать, что $\eta(\pi_A^\perp T) = \pi_A^\perp T$. Пусть $C = \pi_A^\perp T$ и $S \in A$. Тогда $C \geqslant 0$ и $C \wedge S = 0$. Если $\kappa(C) = 0$, то равенство $\kappa(\pi_A^\perp T) = \pi_A^\perp T - \eta(\pi_A^\perp T)$ влечет $\pi_A^\perp T = \eta(\pi_A^\perp T)$.

Согласно лемме 4.3 для любого $\varepsilon > 0$ и $x \in E$ найдется разбиение единицы $(\rho_\alpha)_{\alpha\in\Delta}$ в F и семейство осколков $(x_\alpha)_{\alpha\in\Delta}$ элемента x такие, что

$$\rho_\alpha C x_\alpha \leqslant \varepsilon C x \ \text{и}\ \rho_\alpha S(x - x_\alpha) \leqslant \varepsilon S x.$$

Тогда

$$\varepsilon C x \geqslant \rho_\alpha C x_\alpha = \rho_\alpha(\rho_\alpha C x_\alpha + \rho_\alpha^\perp C x) \geqslant \rho_\alpha \inf_{\substack{y\in\mathcal{F}_x\\ \rho\in\mathfrak{P}(F)}} \{\rho C y + \rho^\perp C x \colon \rho S(x-y) \leqslant \varepsilon S x\},$$

откуда выводим, что

$$\varepsilon C x \geqslant \sup_{\alpha\in\Delta} \rho_\alpha \inf_{\substack{y\in\mathcal{F}_x\\ \rho\in\mathfrak{P}(F)}} \{\rho C y + \rho^\perp C x \colon \rho S(x-y) \leqslant \varepsilon S x\} = \inf_{\substack{y\in\mathcal{F}_x\\ \rho\in\mathfrak{P}(F)}} \{\rho C y + \rho^\perp C x \colon \rho S(x-y) \leqslant \varepsilon S x\}.$$

Левая часть вышеприведенного неравенства не зависит от S. Кроме того, выражение в правой части возрастает при убывании ε. Для фиксированного $\varepsilon_0 > 0$ получаем

$$\varepsilon_0 C x \geqslant \inf_{\substack{y\in\mathcal{F}_x\\ \rho\in\mathfrak{P}(F)}} \{\rho C y + \rho^\perp C x \colon \rho S(x-y) \leqslant \varepsilon_0 S x\}$$

и для $0 < \varepsilon' < \varepsilon_0$ имеем

$$\varepsilon_0 C x \geqslant \varepsilon' C x \geqslant \inf_{\substack{y\in\mathcal{F}_x\\ \rho\in\mathfrak{P}(F)}} \{\rho C y + \rho^\perp C x \colon \rho S(x-y) \leqslant \varepsilon' S x\} \geqslant \inf_{\substack{y\in\mathcal{F}_x\\ \rho\in\mathfrak{P}(F)}} \{\rho C y + \rho^\perp C x \colon \rho S(x-y) \leqslant \varepsilon_0 S x\}.$$

Отсюда выводим

$$\varepsilon_0 C x \geqslant \sup_{\substack{\varepsilon'>0\\ S\in A}} \inf_{\substack{y\in\mathcal{F}_x\\ \rho\in\mathfrak{P}(F)}} \{\rho C y + \rho^\perp C x \colon \rho S(x-y) \leqslant \varepsilon' S x\}.$$

Таким образом, $\varepsilon_0 C x \geqslant \kappa(C)$ для произвольного $\varepsilon_0 > 0$ и следовательно $\kappa(C) = 0$. □

Для проектора на главную полосу в $\mathcal{OA}_+(E,F)$ формулы (4.1) и (4.2) упрощаются. Для $S \in \mathcal{OA}_+(E,F)$ порядковые проекторы на полосы $\{S\}^{\perp\perp}$ и $\{S\}^\perp$ обозначим через π_S и $\pi_S^\perp$ соответственно.

Замечание 4.1. Пусть E, F — такие же, как в теореме 4.1. Тогда для произвольных $S, T \in \mathcal{OA}_+(E,F)$ и $x \in E$ имеют место формулы:

$$\begin{aligned}
(\pi_S T)x &= \sup_{\varepsilon>0} \inf_{\substack{y\in\mathcal{F}_x\\ \rho\in\mathfrak{P}(F)}} \{\rho T y + \rho^\perp T x \colon \rho S(x-y) \leqslant \varepsilon S x\},\\
(\pi_S^\perp T)x &= \inf_{\varepsilon>0} \sup_{\substack{y\in\mathcal{F}_x\\ \rho\in\mathfrak{P}(F)}} \{\rho T y \colon \rho S y \leqslant \varepsilon S x\}.
\end{aligned}$$

Доказательство. Формула для $(\pi_S^\perp T)x$ получается следующим образом. Во-первых, отметим, что имеет место равенство $\rho_{Sx}^\perp((\pi_S^\perp T)x) = \rho_{Sx}^\perp(Tx)$. Действительно, элемент $\rho_{Sx}^\perp$ лежит в полосе $\mathfrak{P}(F)$, в силу чего неравенство $\rho_{Sx}^\perp S(x-0) \leqslant \varepsilon S x$ выполняется для любого $\varepsilon > 0$. Отсюда выводим

$$\begin{aligned}
\rho_{Sx}^\perp(\pi_S T)x &= \sup_{\varepsilon>0} \inf_{\substack{y\in\mathcal{F}_x\\ \rho\in\mathfrak{P}(F)}} \{\rho_{Sx}^\perp(\rho T y + \rho^\perp T x) \colon \rho S(x-y) \leqslant \varepsilon S x\} \leqslant\\
&\leqslant \sup_{\varepsilon>0} \{\rho_{Sx}^\perp \circ (\rho_{Sx}^\perp(T0) + \rho_{Sx}^\perp(Tx)) \colon \rho_{Sx}^\perp S(x) \leqslant \varepsilon S x\} =\\
&= \rho_{Sx}^\perp \circ (\rho_{Sx}^\perp(T0) + \rho_{Sx}^\perp(Tx)) = \rho_{Sx}^\perp \circ \rho_{Sx}(Tx) = 0.
\end{aligned}$$

Таким образом, $\rho_{Sx}^\perp(\pi_S T)x = 0$. Во-вторых, для любого элемента $\rho'(Ty)$ такого, что $\rho' \in \mathfrak{P}(F)$ и $y \in \mathcal{F}_x$, справедливы формулы

$$(\rho_{Sx} \circ \rho')Ty = (\rho_{Sx} \wedge \rho')Ty = \rho(Ty),$$

где $\rho \in [0, \rho_{Sx}]$. Тогда можем написать

$$(\pi_S^\perp T)x = (\rho_{Sx}^\perp + \rho_{Sx})(\pi_S^\perp T)x = \rho_{Sx}^\perp(Tx) + \inf_{\varepsilon>0} \sup_{\substack{y\in\mathfrak{F}_x\\ \rho\in[0,\rho_{Sx}]}} \{\rho(Ty) \colon \rho(Sy) \leqslant \varepsilon S x\}.$$

□

Пусть E, F — векторные решетки. Зафиксируем $\varphi \in \mathcal{OA}_r(E,\mathbb{R})$, и пусть $u \in F$. Тогда одномерный ортогонально аддитивный оператор $\varphi\otimes u\colon E \to F$ задается формулой $(\varphi\otimes u)x = \varphi(x)u$. В качестве приложения мы найдем формулу проекции на полосу $\{\varphi\otimes u\}^{\perp\perp}$ и полосу, дополнительную ей.

Лемма 4.4. *Пусть E, F — такие же, как и в теореме 4.1, $\varphi\otimes u$ — положительный ортогонально аддитивный оператор ранга 1, где $\varphi \in \mathcal{OA}_+(E,\mathbb{R})$, $u \in F_+$ и $T \in \mathcal{OA}_+(E,F)$. Тогда для любого $x \in E$ справедливы следующие формулы:*

$$(\pi_{\varphi\otimes u}T)x = \sup_{\varepsilon>0}\inf_{y\in\mathfrak{F}_x}\{\rho_u(Ty)\colon \varphi(x-y)\leqslant\varepsilon\varphi(x)\}, \tag{4.3}$$

$$(\pi^{\perp}_{\varphi\otimes u}T)x = \rho_u^{\perp}(Tx)+\inf_{\varepsilon>0}\sup_{y\in\mathfrak{F}_x}\{\rho_u(Ty)\colon \varphi(y)\leqslant\varepsilon\varphi(x)\}. \tag{4.4}$$

Доказательство. Достаточно доказать формулу (4.4). Для $\rho \in [0,\rho_u]$ выражение в правой части (4.3) может быть записано как $\varphi(y)\rho u \leqslant \varepsilon\varphi(x)u$. Согласно формуле

$$\sup_{0\leqslant\rho\leqslant\rho_u}\phi(y)\rho u = \phi(y)\rho_u u = \phi(y)u,$$

последнее неравенство равносильно неравенству $\varphi(y)\leqslant\varepsilon\varphi(x)$. Заметим, что для произвольного $x \in E$ такого, что $\varphi(x)>0$, справедлива формула

$$\varphi_{(\phi\otimes u)x}(y) = \sup_{n\in\mathbb{N}}\{y\wedge n\phi(x)u\} = \rho_u(y), \quad y \in F.$$

Отсюда выводим $\rho_{(\varphi\otimes u)x} = \rho_u$. Таким образом,

$$\rho\left((\phi\otimes u)y\right) = \phi(y)\rho u \leqslant \varepsilon\phi(x)u = \varepsilon(\phi\otimes u)x,$$

т. е. $\rho((\varphi\otimes u)x)\leqslant\varepsilon(\varphi\otimes u)x$. Отсюда выводим, что супремум в правой части формулы (4.3) достигается, когда $\rho=\rho_u$. □

Замечание 4.2. Для любых $S, T \in \mathcal{OA}_+(E,F)$, $e \in E$, справедливы формулы:

$$\pi_S Te = \sup_{\epsilon>0}\inf\{\pi Tf + \pi^{\perp}Te : f \in \mathcal{F}_e,\ \pi S(e-f)\leqslant\epsilon Se\},$$

$$r_S Te = \inf_{\epsilon>0}\sup\{\pi Tf : f\in\mathcal{F}_e,\ \pi Sf\leqslant\epsilon Se\}.$$

Замечание 4.3.

$$\pi_{\psi\otimes f}Te = \sup_{\epsilon>0}\inf\{\pi_f Te : \psi(e-g)\leqslant\epsilon\psi(e),\ g\in\mathcal{F}_e\};$$

$$r_{\psi\otimes f}Te = \inf_{\epsilon>0}\sup\{\pi_f Tg :\ \psi(g)\leqslant\epsilon\psi(g),\ g\in\mathcal{F}_e\}.$$

Доказательство. Достаточно доказать вторую формулу. Пусть $\pi\in[0,\pi_f]$. Если $\pi Sg\leqslant\epsilon Se$, то справедлива формула $\psi(g)\pi f\leqslant\epsilon\psi(e)f$. Отсюда следует, что $\psi(g)\leqslant\epsilon\psi(e)$. Кроме того, если $e\in E$ и $\psi(e)\neq 0$, то $\pi_{Se}=\pi_f$. Условие $\pi Sg\leqslant\epsilon Se$ не зависит от π. Поэтому верхняя грань достигается при $\pi=\pi_f$. Отсюда получаем

$$r_S Te = \inf_{\epsilon>0}\sup\{\pi_f Tg :\ \psi(g)\leqslant\epsilon\psi(g),\ g\in\mathcal{F}_e\}.$$

□

5. Проектирование на полосу латерально непрерывных операторов

В настоящем разделе мы продолжим начатое в работе [30] исследование порядковых проекторов на полосу латерально непрерывных операторов в $\mathcal{OA}_r(E,F)$. Если для линейного регулярного оператора в векторной решетке естественной областью определения является порядковый идеал, то для ортогонально аддитивного оператора такой областью является в общем случае нелинейное множество, обладающее некоторой специфической структурой. Дадим точное определение.

Подмножество D векторной решетки E называется *латеральным идеалом*, если выполняются следующие условия:

- если $x\in D$, то $y\in D$ для любого $y\in\mathcal{F}_x$;
- если $x, y\in D$, $x\perp y$, то $x+y\in D$.

Приведем некоторые примеры.

Пример 5.1. Пусть E — векторная решетка. Каждый порядковый идеал в E является латеральным идеалом.

Пример 5.2. Пусть E — векторная решетка и $x \in V$. Тогда $\mathcal{F}_x$ — это латеральный идеал.

Пример 5.3. Пусть E, F — векторные решетки и $T \in \mathcal{OA}_+(E,F)$. Тогда $\mathfrak{K}_T := \{x \in E\colon Tx = 0\}$ является латеральным идеалом в E.

Говорят, что сеть $(v_\alpha)_{(\alpha\in A)} \subset V$ *латерально сходится* к элементу v, если $v = o\text{-}\lim_\alpha v_\alpha$ и $(v_\alpha - v_\beta)\perp v_\beta$ для любых $\alpha, \beta \in A, \beta \leqslant \alpha$. При этом пишут $v = l\text{-}\lim_\alpha v_\alpha$. Ортогонально аддитивный оператор T называется *латерально непрерывным* (*латерально σ-непрерывным*), если для всякой латерально сходящейся сети (f_α) (последовательности (f_n)) такой, что $f = l\text{-}\lim_\alpha f_\alpha$ ($f = l\text{-}\lim_n f_n$), выполняется $Tf = o\text{-}\lim_\alpha Tf_\alpha$ (соответственно $Tf = o\text{-}\lim_n Tf_n$).

Если T — ортогонально аддитивный оператор, то следующие условия эквивалентны:

1. T — латерально σ-непрерывный оператор;
2. для каждой последовательности $(f_n)_{n=1}^\infty$ попарно дизъюнктных элементов справедлива импликация $\sum\limits_{k=1}^\infty f_k = f \Rightarrow \sum\limits_{k=1}^\infty Tf_k = Tf$.

Множество всех латерально непрерывных (латерально σ-непрерывных) ортогонально аддитивных операторов обозначается через $\mathcal{OA}_c(E,F)$ ($\mathcal{OA}_{\sigma,c}(E,F)$). Если E и F — векторные решетки и решетка F порядково полна, то пространства $\mathcal{OA}_c(E,F)$ ($\mathcal{OA}_{\sigma,c}(E,F)$) являются полосами в $\mathcal{OA}_r(E,F)$ (см. [30, Theorem 3.13]). Для векторной решетки E множество $M \subset E$ называется *латерально замкнутым* (*σ-латерально замкнутым*), если оно содержит пределы всех латерально сходящихся сетей (последовательностей), составленных из элементов M.

Пример 5.4. Нелинейный оператор суперпозиции $\mathcal{N}\colon L_0(\mu) \to L_0(\mu)$ из примера 3.2 является латерально непрерывным (см. [19, Proposition 3.2]).

Пример 5.5. Каждый интегральный оператор Урысона $T : E \to F$ является σ-латерально непрерывным (см. [24, Proposition 2.9]).

В [30] был установлен следующий критерий латеральной непрерывности. Пусть $T\colon E \to F$ — положительный ортогонально аддитивный оператор, E — произвольная векторная решетка и F — порядково полная векторная решетка. Множество векторов, на которых оператор T обращается в нуль, называется *ядром* оператора и обозначается $\ker(T)$. Оператор T латерально непрерывен (латерально σ-непрерывен) тогда и только тогда, когда ядро любого оператора $S \in \mathcal{O}A_+(E,F)$, $0 \leqslant S \leqslant T$, латерально замкнуто (латерально σ-замкнуто). В [30] также были указаны формулы проекции положительного ортогонально аддитивного оператора на полосы латерально непрерывных и латерально σ-непрерывных операторов. С каждым положительным ортогонально аддитивным оператором $T\colon E \to F$ свяжем операторы T_c и $T_{\sigma c}$, определяемые по формулам:

$$T_c u := \inf\{\sup_\alpha Tu_\alpha : u = l\text{-}\lim_\alpha u_\alpha\};$$
$$T_{\sigma c} u := \inf\{\sup_n Tu_n : u = l\text{-}\lim_n u_n\}.$$

Инфимум берется по всем сетям u_α, латерально сходящимся к u. Аналогично и в отношении последовательностей. Операторы T_c и $T_{\sigma c}$ являются проекциями положительного оператора T на полосы латерально непрерывных и латерально σ-непрерывных операторов соответственно и называются *латерально непрерывной* и *латерально σ-непрерывной составляющей* оператора T.

Ниже мы рассмотрим проблему вычисления латерально непрерывной составляющей ортогонально аддитивного оператора с более общих позиций, использовав порядковое проектирование в векторной решетке $\mathcal{O}A_r(E,F)$. Отметим также, что интерес вызывает изучение полосы $\mathcal{O}A_c^\perp(E,F)$, дизъюнктной полосе латерально непрерывных операторов. Пусть E — векторная решетка. Латеральный идеал $I \subset E$ называется *латерально плотным* (*σ-латерально плотным*), если для любого $e \in E$ найдется сеть (e_α) в I (найдется последовательность (e_n) в I) такая, что e_α латерально сходится к e (e_n латерально сходится к e). Для дальнейшего важно отметить, что для любого латерально плотного латерального идеала (σ-латерально плотного латерального идеала) его латеральное замыкание (латеральное σ-замыкание) совпадает с E.

Всюду ниже будем полагать, что E — это векторная решетка с проекциями на главные полосы, F — порядково полная векторная решетка. Оператор $T \in \mathcal{O}A_r(E,F)$ называется *сингулярным* (*σ-сингулярным*), если он равен нулю на некотором латерально плотном латеральном идеале (σ-латерально плотном латеральном идеале). Множество всех сингулярных (σ-сингулярных) операторов обозначим через $\mathcal{O}A_s(E,F)$ ($\mathcal{O}A_{\sigma s}(E,F)$).

Теорема 5.1. $\mathcal{OA}_c(E,F) = \mathcal{OA}_s^{\perp}(E,F)$, *т. е. классы латерально непрерывных операторов и операторов, дизъюнктных сингулярным, совпадают.*

Доказательство. Рассуждения достаточно провести для положительных операторов. Пусть положительный ортогонально аддитивный оператор T латерально непрерывен. Допустим, что $T \notin \mathcal{OA}_s^{\perp}(E,F)$. Тогда существует регулярный ортогонально аддитивный оператор $S \in \mathcal{OA}_c(E,F)$, $S > 0$, для которого $G := T \wedge S > 0$. Так как $0 \leqslant G \leqslant S$, то G равен нулю на некотором латерально плотном латеральном идеале. Но, с другой стороны, $G \in \mathcal{OA}_c(E,F)$. Следовательно, оператор G тождественно равен нулю. Обратно, пусть $T \in \mathcal{OA}_s^{\perp}(E,F)$ и $T \geqslant 0$. Покажем, что T — латерально непрерывный оператор. Предположим, что существует сеть $(x_\alpha)_{\alpha\in\Lambda}$, латерально сходящаяся к x и удовлетворяющая неравенству $y = o\text{-}\lim_\alpha Tx_\alpha < Tx$. Через π_α обозначим проектор на полосу $\{x - x_\alpha\}^{\perp\perp}$. Для каждого элемента $e \in E$ положим

$$Ge := o\text{-}\lim_\alpha T\pi_\alpha e.$$

Ясно, что соответствующие пределы существуют для всех $e \in E$. Таким образом, определен положительный ортогонально аддитивный оператор $0 \leqslant G \leqslant T$ и, кроме того, $G \in \mathcal{OA}_s^{\perp}(E,F)$. Оператор G ненулевой, так как

$$Gx = o\text{-}\lim_\alpha T\pi_\alpha x = o\text{-}\lim_\alpha T(x - x_\alpha) = Tx - o\text{-}\lim_\alpha Tx_\alpha > 0.$$

Теперь покажем, что оператор G одновременно и сингулярный. Обозначим через E' множество всех $e \in E$, которые дизъюнктны с некоторым $x - x_{\alpha_0}$. Если $e \in E'$, то $Ge = 0$. Ясно, что E' — латеральный идеал в E. Докажем, что латеральный идеал E' латерально плотен в E. Если бы это было не так, то нашелся бы элемент $e' > 0$, который бы принадлежал всем полосам $\{x - x_\alpha\}^{\perp\perp}$. Пусть $\pi_{e'}$ — проектор на полосу $\{e'\}^{\perp\perp}$. Тогда для любого индекса α_0 мы бы имели

$$0 < e' \wedge (x - x_{\alpha_0}) \leqslant \pi_{e'}(x - x_\alpha) \leqslant \pi_\alpha(x - x_\alpha).$$

Но последняя формула противоречит условию, что $o\text{-}\lim_\alpha(x - x_\alpha) = 0$. Таким образом, E' — латерально плотный латеральный идеал и оператор G сингулярен. Однако из определений следует, что оператор G нулевой. Полученное противоречие доказывает, что оператор T латерально непрерывен. $\square$

С каждым латерально плотным латеральным идеалом $I \subset E$ свяжем множество операторов $\mathcal{N}_I := \{T \in \mathcal{OA}_r(E,F) : I \subset \ker(T)\}$.

Лемма 5.1. *Множество $\mathcal{N}_I$ является полосой в пространстве $\mathcal{OA}_r(E,F)$. Проектор на полосу $\mathcal{N}_I^{\perp}$ задается формулой*

$$\pi_I Te = \sup\{Te' : e' \in I,\, e' \in \mathcal{F}_e\}.$$

Доказательство. Ясно, что для любых положительных $T_1, T_2 \in \mathcal{N}_I$ их произвольная линейная комбинация также принадлежит $\mathcal{N}_M$. Кроме того, для операторов $S, T \in \mathcal{OA}_r(E,F)$ можно написать $|S| \leqslant |T|$, $T \in \mathcal{N}_I \Rightarrow S \in \mathcal{N}_I$. Рассмотрим возрастающую сеть $(T_\alpha \in \mathcal{N}_I)_{\alpha\in\Lambda}$, $T = o\text{-}\lim_\alpha T_\alpha$, и возьмем $e \in I$. Очевидно, что

$$Te = o\text{-}\lim_\alpha T_\alpha e = 0 \Rightarrow T \in \mathcal{N}_I.$$

Таким образом, множество $\mathcal{N}_I$ является полосой в пространстве $\mathcal{OA}_r(E,F)$. Чтобы установить, что оператор π_I является проектором на полосу $\mathcal{N}_I$, достаточно доказать, что для любого $T \in \mathcal{O}A_+(E,F)$ оператор $\pi_I T$ ортогонально аддитивен и, кроме того, выполняются следующие соотношения:

1. $0 \leqslant \pi_I T \leqslant T$;
2. $\pi_I(\pi_I T) = \pi_I T$;
3. $\pi_I T = T \Leftrightarrow T \in \mathcal{N}_I^{\perp}$;
4. π_I — линейный оператор.

Ортогональная аддитивность легко выводится, если принять во внимание, что для дизъюнктных e, $f \in E^+$ любой элемент $0 \leqslant c \leqslant e + f$ допускает представление $c = e^{'} + f^{'}$, где $0 \leqslant e^{'} \leqslant e$ и $0 \leqslant f^{'} \leqslant f$. Пусть $e \in E$ и $e' \in \mathcal{F}(e)$. Тогда можем написать:

$$e = (e - e') + e';\ Te = T((e - e') + e')) = T(e - e') + Te' \geqslant Te' \Rightarrow \pi_I Te \leqslant Te.$$

Для оператора $T \in \mathcal{OA}_+(E,F)$ справедливы формулы:

$$\pi_I(\pi_I T)(e) = \sup\{\pi_I Te' : e' \in \mathcal{F}_e, e' \in I\} = \sup\{Te' : e' \in \mathcal{F}_e, e' \in I\} = \pi_I T.$$

Для доказательства пункта 3 установим следующее соотношение:

$$T \in \mathcal{I}_I^{\perp} \Leftrightarrow\ \forall e \in E, Te = \sup\{Te' : e' \in \mathcal{F}_e, e' \in I\}.$$

Действительно, пусть $\forall e \in E$, $Te = \sup\{Te' : e' \in \mathcal{F}_e, e' \in I\}$ и существует оператор $S \in \mathcal{N}_I$, $G := S \wedge T > 0$. Теперь можем написать:

$$Ge - Ge' = G(e - e' + e') - Ge'G(e - e') \leqslant T(e - e') = Te - Te'.$$

Переходя к супремуму по всем $e' \in \mathcal{F}_e$, $e' \in I$, получим, что $Ge = \sup\{Ge' : e' \in \mathcal{F}_e, e' \in I\}$. Но так как $\mathcal{N}_I$ является полосой и $0 \leqslant G \leqslant S$, то $G \in \mathcal{N}_I$ и $G = 0$. Обратно, пусть $T \in \mathcal{N}_I^{\perp}$ и найдется такой $e \in E$, $e \notin M$, что $Te - \sup\{Te' : e' \in \mathcal{F}_e, e' \in I\} > 0$. В этом случае можно полагать, что неравенство

$$Te > \sup\{Te' :\ e' \in \mathcal{F}_e\}$$

имеет место. В противном случае заменим оператор T на оператор T', определяемый формулой

$$T'(v) = \sup\{T(v'),\ v' \in \mathcal{F}_v,\ v' \in I\}.$$

Пусть $Te - \sup\{Te' :\ e' \in \mathcal{F}_e\} = v > 0$. Определим положительный ортогонально аддитивный оператор G формулой $G := T - \pi_I T$. Ясно, что $Gf = 0$ для всех $f \in I$. Оператор G ненулевой, так как

$$Ge = Te - \sup\{Te' : e' \in I,\ e' \in \mathcal{F}_e\} > 0.$$

Итак, оператор G определен корректно, $G \in \mathcal{N}_I$ и $Ge > 0$. Далее, по условию $T \perp G$. Отсюда получаем

$$\begin{aligned} T(e) < T(e) + G(e) = (T + G)(e) = (T \vee G)(e) = \\ = \sup\{T(e_1) + G(e_2) : e_1 + e_2 = e,\ e_1 \perp e_2\} = \\ = \sup\{T(e) - \pi_I T(e_2) :\ e_2 \in \mathcal{F}_e\} \leqslant T(e). \end{aligned}$$

Получили противоречие, доказывающее пункт 3. Далее для T, $S \in \mathcal{OA}_+(E,F)$ очевидно, что $\pi_I(T+S) \leqslant \pi_I(S)+\pi_I(T)$. Докажем противоположное неравенство. Для этого возьмем e_1, $e_2 \in \mathcal{F}_e$ и положим $e_0 = e_1 \cap e_2$, где $e_1 \cap e_2$ — латеральный инфимум e_1 и e_2 (см. [25]). Латеральный супремум элементов e_1 и e_2 обозначим через $e_1 \cup e_2$ Далее положим $e^{'} := e_1 - e_0$ и $e^{''} := e_2 - e_0$. Тогда

$$\begin{aligned} e_0,\ e^{'},\ e^{''} \in \mathcal{F}_e,\ e^{'} \perp e^{''},\ e^{'} \perp e_0,\ e^{''} \perp e_0, \\ e_1 \cup e_2 = e^{'} \sqcup e^{''} \sqcup e_0 \in \mathcal{F}_e. \end{aligned}$$

Теперь можем написать

$$\begin{aligned} Se_1 + Te_2 = S(e^{'} \sqcup e_0) + T(e^{''} \sqcup e_0) \leqslant \\ \leqslant S(e^{'} \sqcup e_0 \sqcup e^{''}) + T(e^{'} \sqcup e_0 \sqcup e^{''}) = \\ = (S + T)(e_1 \cup e_2) = \pi_I(T + S)(e). \end{aligned}$$

Переходя в этом неравенстве к супремуму сначала по $e_1 \in \mathcal{F}_e$, а затем по $e_2 \in \mathcal{F}_e$, получим

$$\pi_I S + \pi_I T \leqslant \pi_I(S + T) = \pi_I S + \pi_I T,$$

что доказывает аддитивность π_I. Однородность оператора π_I очевидна. $\square$

Напомним, что семейство множеств $\mathfrak{A}$ называется *насыщенным вверх*, если $\forall A \in \mathfrak{A}, B \supset A \Rightarrow B \in \mathfrak{A}$.

Лемма 5.2. *Пусть $\mathfrak{A}$ — насыщенное вверх семейство латерально плотных латеральных идеалов. Тогда оператор $\pi_{\mathfrak{A}} := \inf\{\pi_I : I \in \mathfrak{A}\}$ является проектором на полосу $\mathcal{O}A_{\mathfrak{A}}(E,F)^{\perp}$, где $\mathcal{O}A_{\mathfrak{A}}(E,F) = \{T \in \mathcal{OA}_r(E,F) : \forall I \in \mathfrak{A},\ I \subset ker(T)\}$.*

Доказательство. Оператор $\pi_{\mathfrak{A}}$ является проектором на некоторую полосу в пространстве $\mathcal{OA}_r(E,F)$. Обозначим через σ проектор на полосу $\mathcal{OA}_{\mathfrak{A}}(E,F)^{\perp}$ и покажем, что $\pi_{\mathfrak{A}} = \sigma$. Если $T \in \mathcal{OA}_+(E,F)$, то $\pi_{\mathfrak{A}}T \leqslant \pi_{\ker(T)}T = 0$. Значит, $\pi_{\mathfrak{A}} \leqslant \sigma$. Пусть теперь $T \in \mathcal{OA}_{\mathfrak{A}}(E,F)^{\perp}$. Для любого латерально плотного латерального идеала $I \in \mathfrak{A}$ оператор $T - \pi_I T$ равен нулю на I. Так как

$$T - \pi_I T = (I - \pi_I T) \geqslant (I - \pi_{\mathfrak{A}} T),$$

то оператор $T - \pi_{\mathfrak{A}}T$ равен нулю на любом латерально плотном латеральном идеале $I \in \mathfrak{A}$. Отсюда следует, что $T - \pi_{\mathfrak{A}}T \in \mathcal{OA}_{\mathfrak{A}}(E,F) \cap \mathcal{OA}_{\mathfrak{A}}(E,F)^{\perp} = \{0\}$. Таким образом, получаем, что $T = \pi_{\mathfrak{A}}T$ и $\pi_{\mathfrak{A}} = \sigma$. ☐

Замечание 5.1. Пусть $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{A}_\sigma$ обозначают множества латерально плотных латеральных идеалов и σ-латерально плотных латеральных идеалов соответственно. Тогда проекторы

$$\pi_c = \inf\{\pi_A : A \in \mathfrak{A}\}, \quad \pi_{\sigma c} := \inf\{\pi_A;\ A \in \mathfrak{A}_\sigma\}$$

являются проекторами в пространстве $\mathcal{OA}_r(E,F)$ на полосы $\mathcal{OA}_s(E,F)^{\perp}$ и $\mathcal{OA}_{s\sigma}(E,F)^{\perp}$ соответственно.

Из теоремы 5.1 следует, что π_c и $\pi_{\sigma c}$ являются проекторами на полосы $\mathcal{OA}_c(E,F)$ и $\mathcal{OA}_{c\sigma}(E,F)$.

Замечание 5.2. Для любого оператора $T \in \mathcal{OA}_+(E,F)$ справедливы следующие формулы (см. [30]):

$$T_c v = \inf\{\sup_\alpha T v_\alpha : v = l\text{-}\lim_\alpha v_\alpha\}, \qquad T_{\sigma c} v = \inf\{\sup_n T v_n : v = l\text{-}\lim_n v_n\}.$$

Доказательство. Докажем первую формулу, вторая доказывается аналогично. С оператором T и элементом v свяжем выражение

$$G(T,v) = \inf\{\sup_\alpha T v_\alpha : v = l\text{-}\lim_\alpha v_\alpha\}.$$

Для каждой сети $(v_\alpha), v = l\text{-}\lim_\alpha v_\alpha$ рассмотрим семейство латерально плотных латеральных идеалов $\mathfrak{C}(v)$, содержащих сеть (v_α). Ясно, что $\sup T v_\alpha \leqslant \pi_I T v$, где $I \in \mathfrak{C}(v)$. В то же время каждый латерально плотный латеральный идеал I содержит некоторую сеть (v_α), $v = l\text{-}\lim_\alpha v_\alpha$. Таким образом, $G(T,v) \leqslant \pi_c T v$ и $G(T - \pi_c T, v) \leqslant \pi_c (T - \pi_c T) v = 0$. Оператор $\pi_c T$ — латерально непрерывный. Ясно, что $G(\pi_c T, v) = \pi_c T v$. Далее можем написать

$$G(T,v) = G(\pi_c T, v) + G(T - \pi_c T, v),$$

в силу чего выводим, что $G(T,v) = \pi_c T v$. ☐

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Абасов Н. М.* О сумме узких ортогонально аддитивных операторов// Изв. вузов. Сер. Мат. — 2020. — *64*, № 7. — С. 3–9.
2. *Колесников Е. В.* Разложение положительного оператора// Сиб. мат. ж. — 1989. — *30*, № 5. — С. 77–79.
3. *Колесников Е. В.* Несколько порядковых проекторов, поржденных идеалами векторной решетки// Сиб. мат. ж. — 1995. — *36*, № 6. — С. 1342–1349.
4. *Колесников Е. В.* В тени положительного оператора// Сиб. мат. ж. — 1996. — *37*, № 3. — С. 592–598.
5. *Красносельский М. А., Забрейко П. П., Пустыльник Е. И., Соболевский П. Е.* Интегральные операторы в пространствах суммируемых функций. — М.: Наука, 1966.
6. *Кусраев А. Г.* Мажорируемые операторы. — М.: Наука, 2003.
7. *Кусраев А. Г., Кутателадзе С. С.* Введение в булевозначный анализ. — М.: Наука, 2005.
8. *Кутателадзе С. С.* Об осколках положительных операторов// Сиб. мат. ж. — 1989. — *30*, № 5. — С. 111–119.
9. *Плиев М. А., Попов М. М.* О продолжении абстрактных операторов Урысона// Сиб. мат. ж. — 2016. — *57*, № 3. — С. 700–708.

10. *Abasov N.* Completely additive and C-compact operators in lattice-normed spaces// Ann. Funct. Anal. — 2020. — *11*, № 4. — С. 914–928.
11. *Abasov N.* On band preserving orthogonally additive operators// Sib. Èlektron. Mat. Izv. — 2021. — *18*, № 1. — С. 495–510.
12. *Abasov N.* On a band generated by a disjointness dreserving orthogonally additive operator// Lobachevskii J. Math. — 2021. — *42*, № 5. — С. 851–856.
13. *Abasov N., Pliev M.* On extensions of some nonlinear maps in vector lattices// J. Math. Anal. Appl. — 2017. — *455*, № 1. — С. 516–527.
14. *Aliprantis C., Burkinshaw O.* The components of the positive operator// Math. Z. — 1983. — *185*. — С. 245–257.
15. *Aliprantis C., Burkinshaw O.* Projecting onto the band of kernel operators// Houston J. Math. — 1985. — *11*, № 1. — С. 7–13.
16. *Aliprantis C., Burkinshaw O.* Positive Operators. — Dordrecht: Springer, 2006.
17. *Appell J., Zabrejko P. P.* Nonlinear superposition operators. — Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1990.
18. *Ben Amor M., Pliev M.* Laterally continuous part of an abstract Uryson operator// Int. J. Math. Anal. — 2013. — *7*, № 58. — С. 2853–2860.
19. *Erkursun Ozcan N., Pliev M.* On orthogonally additive operators in C-complete vector lattices// Banach J. Math. Anal. — 2022. — *16*, № 1. — Article No. 6.
20. *Feldman W. A.* A factorization for orthogonally additive operators on Banach lattices// J. Math. Anal. Appl. — 2019. — *472*, № 1. — С. 238–245.
21. *Fotiy O., Gumenchuk A., Krasikova I., Popov M.* On sums of narrow and compact operators// Positivity. — 2012. — *24*, № 1. — С. 69–80.
22. *Huijsmans C. B., de Pagter B.* Disjointness preserving and diffuse operators// Compos. Math. — 1991. — *79*. — С. 351–374.
23. *Mazón J. M., Segura de León S.* Order bounded ortogonally additive operators// Rev. Roumaine Math. Pures Appl. — 1990. — *35*, № 4. — С. 329–353.
24. *Mazón J. M., Segura de León S.* Uryson operators// Rev. Roumaine Math. Pures Appl. — 1990. — *35*, № 5. — С. 441–449.
25. *Mykhaylyuk V., Pliev M., Popov M.* The lateral order on Riesz spaces and orthogonally additive operators// Positivity. — 2021. — *25*, № 2. — С. 291–327.
26. *de Pagter B.* The components of a positive operator// Indag. Math. — 1983. — *48*. — С. 229–241.
27. *Pliev M.* On C-compact orthogonally additive operators// J. Math. Anal. Appl. — 2021. — *494*. — Article No. 124594.
28. *Pliev M., Polat F., Weber M. R.* Narrow and C-compact orthogonally additive operators in lattice-normed spaces// Results Math. — 2019. — *74*, № 4. — Article No. 157.
29. *Pliev M., Popov M.* Dominated Uryson operators// Int. J. Math. Anal. — 2014. — *8*, № 22. — С. 1051–1059.
30. *Pliev M., Ramdane K.* Order unbounded orthogonally additive operators in vector lattices// Mediterr. J. Math. — 2018. — *15*, № 2. — Article No. 55.
31. *Pliev M., Weber M. R.* Disjointness and order projections in the vector lattices of abstract Uryson operators// Positivity. — 2016. — *20*, № 3. — С. 695–707.

Н. А. Джусоева
Северо-Осетинский государственный университет им. К. Л. Хетагурова, Владикавказ, Россия
E-mail: `dhusoevanonna@rambler.ru`

С. Ю. Итарова
Северо-Осетинский государственный университет им. К. Л. Хетагурова, Владикавказ, Россия
E-mail: `svetlana.itarova1991@gmail.com`

М. А. Плиев
Южный математический институт ВНЦ РАН, Владикавказ, Россия
E-mail: `plimarat@yandex.ru`

DOI: 10.22363/2413-3639-2022-68-3-407-423 UDC 517.98+519.46

Order Projection in $\mathcal{OA}_r(E, F)$

© 2022 **N. A. Dzhusoeva, S. Yu. Itarova, M. A. Pliev**

Abstract. We investigate order projections onto different bands in the space of all regular orthogonally additive operators. In particular, we obtain formulas for calculation of the order projections onto the band generated by a directed set of positive orthogonally additive operators and onto the band of all laterally continuous operators.

REFERENCES

1. N. M. Abasov, "O summe uzkikh ortogonal'no additivnykh operatorov" [On the sum of narrow orthogonally additive operators], *Izv. vuzov. Ser. Mat.* [Bull. Higher Edu. Inst. Ser. Math.], 2020, **64**, No. 7, 3–9 (in Russian).
2. E. V. Kolesnikov, "Razlozhenie polozhitel'nogo operatora" [Expansion of a positive operator], *Sib. mat. zh.* [Siberian Math. J.], 1989, **30**, No. 5, 77–79 (in Russian).
3. E. V. Kolesnikov, "Neskol'ko poryadkovykh proektorov, porzhdennykh idealami vektornoy reshetki" [Several order projectors generated by vector lattice ideals], *Sib. mat. zh.* [Siberian Math. J.], 1995, **36**, No. 6, 1342–1349 (in Russian).
4. E. V. Kolesnikov, "V teni polozhitel'nogo operatora" [In the shadow of a positive operator], *Sib. mat. zh.* [Siberian Math. J.], 1996, **37**, No. 3, 592–598 (in Russian).
5. M. A. Krasnosel'skii, P. P. Zabreyko, E. I. Pustyl'nik, and P. E. Sobolevskii, *Integral'nye operatory v prostranstvakh summiruemykh funktsiy* [Integral Operators in Spaces of Summable Functions], Nauka, Moscow, 1966 (in Russian).
6. A. G. Kusraev, *Mazhoriruemye operatory* [Majorized Operators], Nauka, Moscow, 2003 (in Russian).
7. A. G. Kusraev and S. S. Kutateladze, *Vvedenie v bulevoznachnyy analiz* [Introduction to Boolean-Valued Analysis], Nauka, Moscow, 2005 (in Russian).
8. S. S. Kutateladze, "Ob oskolkakh polozhitel'nykh operatorov" [On fragments of positive operators], *Sib. mat. zh.* [Siberian Math. J.], 1989, **30**, No. 5, 111–119 (in Russian).
9. M. A. Pliev and M. M. Popov, "O prodolzhenii abstraktnykh operatorov Urysona" [On the extension of abstract Urysohn operators], *Sib. mat. zh.* [Siberian Math. J.], 2016, **57**, No. 3, 700–708 (in Russian).
10. N. Abasov, "Completely additive and C-compact operators in lattice-normed spaces," *Ann. Funct. Anal.*, 2020, **11**, No. 4, 914–928.
11. N. Abasov, "On band preserving orthogonally additive operators," *Sib. Èlektron. Mat. Izv.*, 2021, **18**, No. 1, 495–510.
12. N. Abasov, "On a band generated by a disjointness dreserving orthogonally additive operator," *Lobachevskii J. Math.*, 2021, **42**, No. 5, 851–856.
13. N. Abasov and M. Pliev, "On extensions of some nonlinear maps in vector lattices," *J. Math. Anal. Appl.*, 2017, **455**, No. 1, 516–527.
14. C. Aliprantis and O. Burkinshaw, "The components of the positive operator," *Math. Z.*, 1983, **185**, 245–257.
15. C. Aliprantis and O. Burkinshaw, "Projecting onto the band of kernel operators," *Houston J. Math.*, 1985, **11**, No. 1, 7–13.
16. C. Aliprantis and O. Burkinshaw, *Positive Operators*, Springer, Dordrecht, 2006.
17. J. Appell and P. P. Zabrejko, *Nonlinear superposition operators*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1990.
18. Ben M. Amor and M. Pliev, "Laterally continuous part of an abstract Uryson operator," *Int. J. Math. Anal.*, 2013, **7**, No. 58, 2853–2860.

19. N. Erkursun Ozcan and M. Pliev, "On orthogonally additive operators in C-complete vector lattices," *Banach J. Math. Anal.*, 2022, **16**, No. 1, Article No. 6.
20. W. A. Feldman, "A factorization for orthogonally additive operators on Banach lattices," *J. Math. Anal. Appl.*, 2019, **472**, No. 1, 238–245.
21. O. Fotiy, A. Gumenchuk, I. Krasikova, M. Popov, "On sums of narrow and compact operators," *Positivity*, 2012, **24**, No. 1, 69–80.
22. C. B. Huijsmans and B. de Pagter, "Disjointness preserving and diffuse operators," *Compos. Math.*, 1991, **79**, 351–374.
23. J. M. Mazón and S. Segura de León, "Order bounded ortogonally additive operators," *Rev. Roumaine Math. Pures Appl.*, 1990, **35**, No. 4, 329–353.
24. J. M. Mazón and S. Segura de León, "Uryson operators," *Rev. Roumaine Math. Pures Appl.*, 1990, **35**, No. 5, 441–449.
25. V. Mykhaylyuk, M. Pliev, and M. Popov, "The lateral order on Riesz spaces and orthogonally additive operators," *Positivity*, 2021, **25**, No. 2, 291–327.
26. B. de Pagter, "The components of a positive operator," *Indag. Math.*, 1983, **48**, 229–241.
27. M. Pliev, "On C-compact orthogonally additive operators," *J. Math. Anal. Appl.*, 2021, **494**, Article No. 124594.
28. M. Pliev, F. Polat, and M. R. Weber, "Narrow and C-compact orthogonally additive operators in lattice-normed spaces," *Results Math.*, 2019, **74**, No. 4, Article No. 157.
29. M. Pliev and M. Popov, "Dominated Uryson operators," *Int. J. Math. Anal.*, 2014, **8**, No. 22, 1051–1059.
30. M. Pliev and K. Ramdane, "Order unbounded orthogonally additive operators in vector lattices," *Mediterr. J. Math.*, 2018, **15**, No. 2, Article No. 55.
31. M. Pliev and M. R. Weber, "Disjointness and order projections in the vector lattices of abstract Uryson operators," *Positivity*, 2016, **20**, No. 3, 695–707.

N. A. Dzhusoeva
North Ossetian State University named after K. L. Khetagurov, Vladikavkaz, Russia
E-mail: `dhusoevanonna@rambler.ru`

S. Yu. Itarova
North Ossetian State University named after K. L. Khetagurov, Vladikavkaz, Russia
E-mail: `svetlana.itarova1991@gmail.com`

M. A. Pliev
Southern Mathematical Institute of the Vladikavkaz Scientific Center of the Russian Academy of Sciences, Vladikavkaz, Russia
E-mail: `plimarat@yandex.ru`