Современная математика. Фундаментальные направления. Том 68, № 3 (2022). С. 393–406
Contemporary Mathematics. Fundamental Directions. ISSN 2413-3639 (Print)

DOI: 10.22363/2413-3639-2022-68-3-393-406 УДК 517.968.72

О ПРОСТРАНСТВАХ ВЕКТОР-ФУНКЦИЙ, ГОЛОМОРФНЫХ В УГЛОВОЙ ОБЛАСТИ

© 2022 г. **В. В. ВЛАСОВ, Н. А. РАУТИАН**

Аннотация. Изучаются пространства вектор-функций, голоморфных в угловой области комплексной плоскости, со значениями в сепарабельном гильбертовом пространстве. Показано, что, снабженные соответствующими нормами, указанные пространства являются гильбертовыми пространствами.

ОГЛАВЛЕНИЕ

1. Введение

В статье изучаются пространства вектор-функций со значениями в сепарабельном гильбертовом пространстве, голоморфные в угловой области комплексной плоскости.

2. Функциональные пространства и их основные свойства

2.1. Определения, обозначения и формулировка результатов. В работе М. М. Джрбашяна и В. М. Мартиросяна [5], а также в монографии М. М. Джрбашяна [4] изучен класс функций $\Re_2(S_\theta)$, голоморфных в угловой области

$$S_\theta = \{\tau \in \mathbb{C} : |\arg \tau| < \theta\}$$

и таких, что

$$\sup_{\varphi:|\varphi|<\theta} \left\{ \int_0^\infty \left| f\left(te^{i\varphi}\right)\right|^2 dt \right\} < \infty.$$

В [4, 5] установлено, что, снабженное соответствующей нормой, $\Re_2[\theta]$ является гильбертовым пространством, и для него доказана теорема типа Пэли—Винера.

В предлагаемой работе исследуются классы $\Re_2(S_\theta, H)$ и $W_2^n(S_\theta, A^n)$ функций со значениями в сепарабельном гильбертовом пространстве H, голоморфных в области S_θ.

Работа выполнена в рамках Программы развития Междисциплинарной научно-образовательной школы Московского университета «Математические методы анализа сложных систем» при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований РФФИ (проект № 20-01-00288 А).

В предлагаемой работе исследуются классы $\Re_2(S_\theta, H)$ и $W_2^n(S_\theta, A^n)$ функций со значениями в сепарабельном гильбертовом пространстве H, голоморфных в области S_θ. При этом класс $\Re_2(S_\theta, H)$ состоит из вектор-функций, для которых конечна величина

$$\sup_{\varphi:|\varphi|<\theta} \int_0^\infty \left\| f\left(te^{i\varphi}\right)\right\|^2 dt < \infty,$$

а класс $W_2^n(S_\theta, A^n)$ — из вектор-функций, для которых

$$u(\tau) \in Dom(A^n), \quad \frac{d^n u}{d\tau^n} \in \Re_2(S_\theta, H), \quad A^n u(\tau) \in \Re_2(S_\theta, H)$$

и конечна величина

$$\sup_{\varphi:|\varphi|<\theta} \int_0^\infty \left(\left\| \frac{d^n}{d\tau^n} u\left(te^{i\varphi}\right)\right\|^2 + \left\| A^n u\left(te^{i\varphi}\right)\right\|^2 \right) dt < \infty,$$

где A — самосопряженный положительный оператор в пространстве H, имеющий компактный обратный, при этом $\dfrac{d^n u(\tau)}{d\tau^n}$ — производная в смысле комплексного анализа. Здесь и в дальнейшем через $\|\cdot\|$ обозначается норма в пространстве H.

В работе доказано, что класс $\Re_2(S_\theta, H)$, снабженный соответствующей нормой, образует гильбертово пространство, а также установлен аналог теоремы Пэли—Винера для пространства $\Re_2(S_\theta, H)$. Показано, что класс функций $W_2^n(S_\theta, A^n)$, снабженный соответствующей нормой, является гильбертовым пространством, установлен аналог теоремы о промежуточных производных и теоремы о следах.

Условимся в дальнейшем называть *функцией* (без добавления слова «вектор») функцию со значениями в пространстве H, а функцию со значениями в $\mathbb{C}$ называть *скалярной*, или *числовой*, функцией.

Обозначим через $L_2(\mathbb{R}_+, H)$ пространство (классов) функций со значениями в H, измеримых относительно меры Лебега dt на полуоси $\mathbb{R}_+ = (0, +\infty)$ и таких, что

$$\|f\|_{L_2(\mathbb{R}, H)} = \left(\int_0^{+\infty} \|f(t)\|^2 dt \right)^{1/2} < +\infty.$$

Пусть A — самосопряженный положительный оператор $A^* = A \geqslant \kappa I$ ($\kappa > 0$), действующий в пространстве H, имеющий компактный обратный. Превратим область определения $Dom\left(A^\beta\right)$ оператора A^β, $\beta > 0$, в гильбертово пространство H_β, введя на $Dom\left(A^\beta\right)$ норму $\|\cdot\|_\beta = \left\|A^\beta \cdot\right\|$, эквивалентную норме графика оператора A^β.

Через $W_2^n(\mathbb{R}_+, A^n)$ обозначим пространство Соболева функций на полуоси $\mathbb{R}_+ = (0, +\infty)$ со значениями в пространстве H, снабженное нормой

$$\|u\|_{W_2^n(\mathbb{R}_+, A^n)} \equiv \left(\int_0^{+\infty} \left(\left\|u^{(n)}(t)\right\|_H^2 + \|A^n u(t)\|_H^2 \right) dt \right)^{1/2}.$$

Подробнее о пространствах $W_2^n(\mathbb{R}_+, A^n)$ см. монографию [6, гл. 1]. Для $n = 0$ полагаем $W_2^0\left(\mathbb{R}_+, A^0\right) \equiv L_2(\mathbb{R}_+, H)$. Будем также полагать в дальнейшем, что $\Re_2(S_0, H) = L_2(\mathbb{R}_+, H)$, $W_2^n(S_0, A^n) = W_2^n(\mathbb{R}_+, A^n)$.

Укажем основные свойства пространства $\Re_2(S_\theta, H)$.

Предложение 2.1. *Для функции $f(\tau) \in \Re_2(S_\theta, H)$ существуют такие граничные значения $f\left(te^{\pm\theta}\right) \in L_2(\mathbb{R}_+, H)$, что*

$$\lim_{\varphi \to \pm\theta} \left\| f\left(te^{i\varphi}\right) - f\left(te^{\pm i\theta}\right)\right\|_{L_2(\mathbb{R}_+, H)} = 0. \tag{2.1}$$

Предложение 2.2. *Пусть функция $f(\tau) \in \Re_2(S_\theta, H)$. Тогда для функции $f(\tau)$ справедлива интегральная формула Коши*

$$f(\tau) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_0^{+\infty} \frac{f\left(\varsigma e^{-i\theta}\right)}{\varsigma e^{-i\theta} - \tau} e^{-i\theta} d\varsigma - \frac{1}{2\pi i} \int\limits_0^{+\infty} \frac{f\left(\varsigma e^{i\theta}\right)}{\varsigma e^{i\theta} - \tau} e^{i\theta} d\varsigma, \tau \in S_\theta. \tag{2.2}$$

Предложение 2.3. *Пусть функции $f_{\pm\theta} \in L_2(\mathbb{R}_+, H)$. Тогда функция $f(\tau)$, представимая в виде*

$$f(\tau) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_0^{+\infty} e^{-i\theta} \frac{f_{-\theta}(\varsigma)}{\varsigma e^{-i\theta} - \tau} d\varsigma - \frac{1}{2\pi i} \int\limits_0^{+\infty} e^{i\theta} \frac{f_\theta(\varsigma)}{\varsigma e^{i\theta} - \tau} d\varsigma, \tau \in S_\theta, \tag{2.3}$$

принадлежит классу $\Re_2(S_\theta, H)$.

На основании предложений 2.1–2.3 может быть установлена следующая теорема.

Теорема 2.1.

1^0. *Класс функций $\Re_2(S_\theta, H)$ с нормой*

$$\|f\|^*_{2,\theta} = \sup_{\varphi:|\varphi|<\theta} \left\{ \int\limits_0^{+\infty} \left\|f\left(te^{i\varphi}\right)\right\|^2 dt \right\}^{\frac{1}{2}} \tag{2.4}$$

является банаховым пространством.

2^0. *Класс функций $\Re_2(S_\theta, H)$ со скалярным произведением*

$$\langle f, g\rangle_{2,\theta} = \int\limits_0^{+\infty} \left(f\left(te^{-i\theta}\right), g\left(te^{-i\theta}\right)\right) dt + \int\limits_0^{+\infty} \left(f\left(te^{i\theta}\right), g\left(te^{i\theta}\right)\right) dt \tag{2.5}$$

является гильбертовым пространством.

3^0. *Если $f(\tau)$ — произвольная функция из класса $\Re_2(S_\theta, H)$ и*

$$\|f\|_{2,\theta} = \langle f(\tau), f(\tau)\rangle_{2,\theta}, \tag{2.6}$$

то справедливы неравенства

$$\|f\|^*_{2,\theta} \leqslant \sqrt{2}\|f\|_{2,\theta} \leqslant 2\,\|f\|^*_{2,\theta}. \tag{2.7}$$

Приведем теорему, являющуюся аналогом теоремы Пэли—Винера для классов функций $\Re_2(S_\theta, H)$.

Теорема 2.2. *Пусть $\theta \in (0, \pi/2)$. Справедливы следующие утверждения:*

1^0. *Класс функций $\Re_2\left(S_{\theta+\pi/2}, H\right)$ совпадает с множеством функций, допускающих представление*

$$F(\lambda) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-i\varphi} \int\limits_0^{+\infty} e^{-\lambda te^{-i\varphi}} f\left(te^{-i\varphi}\right) dt, |\arg\lambda - \varphi| < \frac{\pi}{2}, \varphi \in (-\theta, \theta), \tag{2.8}$$

$f(\tau) \in \Re_2(S_\theta, H)$.

2^0. *В представлении (2.8) для каждой фиксированной функции $F(\lambda) \in \Re_2\left(S_{\theta+\pi/2}, H\right)$ функция $f(\tau) \in \Re_{2,\theta}(\mathbb{R}_+, H)$ единственна, и справедлива формула обращения*

$$f\left(te^{i\varphi}\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-i\varphi} \frac{d}{dt} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ity} - 1}{iy} F\left(e^{i\left(\frac{\pi}{2}\operatorname{sign} y - \varphi\right)} |y|\right) dy. \tag{2.9}$$

3^0. *Если функция $F(\lambda) \in \Re_2\left(S_{\theta+\pi/2}, H\right)$ представима функцией $f(\tau) \in \Re_{2,\theta}(\mathbb{R}_+, H)$ по формуле (2.8), то справедливы неравенства*

$$\|F\|_{2,\theta+\pi/2} \leqslant 2\|f\|_{2,\theta} \leqslant 2\sqrt{2}\|F\|_{2,\theta+\pi/2}. \tag{2.10}$$

Уместно отметить, что при $\theta = 0$ теорема 2.2 переходит в хорошо известную теорему Пэли—Винера для пространства $L_2(\mathbb{R}_+, H)$ и пространства Харди в правой полуплоскости $\Re_2(\operatorname{Re}\lambda > 0; H)$. Соответствующий комментарий по этому поводу в скалярном случае приведен в статье [5].

Перейдем к рассмотрению и изучению аналогов пространств Соболева $W_2^n(S_\theta, A^n)$ вектор-функций, голоморфных в угле S_θ. Условимся в дальнейшем обозначать через $\dfrac{du}{d\tau}(\tau)$ производную функции $u(\tau)$ в смысле комплексного анализа. Поскольку

$$\frac{d^k}{d\tau^k}u(\tau) = e^{-ik\varphi}\frac{\partial^k}{\partial t^k}u\left(te^{i\varphi}\right), \quad \left|e^{ik\varphi}\right| = 1, \quad k \in \mathbb{N}, \tag{2.11}$$

то класс функций $W_2^n(S_\theta, A^n)$ совпадает с классом функций, голоморфных в угле S_θ и таких, что конечна величина

$$\|u\|^*_{W_{n,\theta}} \equiv \sup_{\varphi:|\varphi|<\theta}\left\{\int_0^{+\infty}\left(\left\|\frac{\partial^n}{\partial t^n}u\left(te^{i\varphi}\right)\right\|^2 + \left\|A^n u\left(te^{i\varphi}\right)\right\|^2\right)dt\right\}^{1/2} < +\infty. \tag{2.12}$$

В нижеследующей лемме установлен аналог теоремы о промежуточных производных, широко известной для пространств $W_2^n(\mathbb{R}_+, A^n)$ (см. [6, с. 29]).

Лемма 2.1. *Пусть* $u(\tau) \in W_2^n(S_\theta, A^n)$. *Тогда* $A^{n-j}\dfrac{d^j u(\tau)}{d\tau^j} \in \Re_2(S_\theta, H)$, $j = 0, 1, \ldots, n$, *и справедливы неравенства*

$$\left\|A^{n-j}u^{(j)}\right\|_{\Re_2(S_\theta,H)} \leqslant K_j\|u\|^*_{W_{n,\theta}} \tag{2.13}$$

с положительными постоянными K_j, $j = 0, 1, \ldots, n$.

Предложение 2.4. *Для функции* $u(\tau) \in W_2^n(S_\theta, A^n)$ *существуют граничные значения* $u_{\pm\theta}(t) = u\left(te^{\pm i\theta}\right)$ *из класса* $W_2^n(\mathbb{R}_+, A^n)$ *такие, что*

$$\lim_{\varphi\to\pm\theta}\int_0^{+\infty}\left[\left\|\frac{\partial^n}{\partial t^n}u\left(te^{i\varphi}\right) - \frac{\partial^n}{\partial t^n}u\left(te^{\pm i\theta}\right)\right\|^2 + \left\|A^n\left(u\left(te^{i\varphi}\right) - u\left(te^{\pm i\theta}\right)\right)\right\|^2\right]dt = 0. \tag{2.14}$$

Теорема 2.3.

1^0. *Класс функций* $W_2^n(S_\theta, A^n)$ *с нормой*

$$\|u\|^*_{W_2^n(S_\theta,A^n)} = \sup_{\varphi:|\varphi|<\theta}\left\{\int_0^{+\infty}\left(\left\|\frac{d^n}{d\tau^n}u\left(te^{i\varphi}\right)\right\|^2 + \left\|A^n u\left(te^{i\varphi}\right)\right\|^2\right)dt\right\}^{\frac{1}{2}} \tag{2.15}$$

является банаховым пространством.

2^0. *Класс функций* $W_2^n(S_\theta, A^n)$ *со скалярным произведением*

$$\langle u, v\rangle_{W_2^n(S_\theta,A^n)} = \int_0^{+\infty}\left\{\left(\frac{d^n}{d\tau^n}u\left(te^{-i\theta}\right), \frac{d^n}{d\tau^n}v\left(te^{-i\theta}\right)\right) + \left(A^n u\left(te^{-i\theta}\right), A^n v\left(te^{-i\theta}\right)\right) + \right.$$
$$\left. + \left(\frac{d^n}{d\tau^n}u\left(te^{i\theta}\right), \frac{d^n}{d\tau^n}v\left(te^{i\theta}\right)\right) + \left(A^n u\left(te^{i\theta}\right), A^n v\left(te^{i\theta}\right)\right)\right\}dt \tag{2.16}$$

является гильбертовым пространством.

3^0. *Для произвольной функции* $u(\tau) \in W_2^n(S_\theta, A^n)$ *справедливы неравенства*

$$\|u\|^*_{W_2^n(S_\theta,A^n)} \leqslant \sqrt{2}\,\|u\|_{W_2^n(S_\theta,A^n)} \leqslant 2\,\|u\|^*_{W_2^n(S_\theta,A^n)}, \tag{2.17}$$

где

$$\|u\|_{W_2^n(S_\theta,A^n)} = \langle u, u\rangle^{1/2}_{W_2^n(S_\theta,A^n)}.$$

Приведем вариант теоремы о следах для пространства $W_2^n(S_\theta, A^n)$.

Теорема 2.4. *Пусть* $u(\tau) \in W_2^n(S_\theta, A^n)$. *Тогда в смысле нормы* $\|\cdot\|$ *пространства* H *равномерно относительно* $\arg\tau$, *где* $|\arg\tau| < \theta$, *существуют пределы*

$$\lim_{\substack{\tau\in S_\theta,\\ |\tau|\to 0}} A^{n-p-1/2}\frac{d^p u(\tau)}{d\tau^p}, \quad p = 0, 1, \ldots, n-1. \tag{2.18}$$

Уместно отметить, что теоремы 2.3 и 2.4, а также предложение 2.4 приведены в статье [2]; полные подробные доказательства сформулированных утверждений о пространствах $\Re_2(S_\theta, H)$, $W_2^n(S_\theta, A^n)$ приведены в депонированной работе [1].

3. Доказательства некоторых сформулированных утверждений о свойствах функциональных пространств $\Re_2(S_\theta, H)$ и $W_2^n(S_\theta, A^n)$

Доказательство предложения 2.1. Пусть $\{e_j\}_{j=1}^{\infty}$ — ортонормированный базис пространства H. Для функции $f(\tau) \in \Re_{2,\theta}(\mathbb{R}_+, H)$ положим $f_j(\tau) = (f(\tau), e_j)$, $j = 1, 2, \ldots$, $\tau \in S_\theta$. Тогда справедливо представление

$$f(\tau) = \sum_{j=1}^{\infty} f_j(\tau) e_j$$

и следующая цепочка равенств:

$$\left\|f(te^{i\varphi})\right\|^2_{L_2(\mathbb{R}_+,H)} = \int_0^{+\infty} \left\|f(te^{i\varphi})\right\|^2 dt = \sum_{j=1}^{\infty}\int_0^{+\infty} \left|f_j(te^{i\varphi})\right|^2 dt = \sum_{j=1}^{\infty}\left\|f_j(te^{i\varphi})\right\|^2_{L_2(\mathbb{R}_+)}. \tag{3.1}$$

Согласно [5, лемма A, с. 871] числовая функция $f_j(\tau)$, $j = 1, 2, \ldots$, имеет граничные значения $f_j\left(te^{\pm i\theta}\right) \in L_2(\mathbb{R}_+)$, т. е. существуют такие функции $f_j\left(te^{\pm i\theta}\right)$, для которых

$$\lim_{\varphi\to\pm\theta}\int_0^{+\infty}\left|f_j\left(te^{i\varphi}\right) - f_j\left(te^{\pm i\theta}\right)\right|^2 dt = 0. \tag{3.2}$$

Положим $f\left(te^{\pm i\theta}\right) = \sum\limits_{j=1}^{\infty} f_j\left(te^{\pm i\theta}\right) e_j$ и покажем, что $f\left(te^{\pm i\theta}\right) \in L_2(\mathbb{R}_+, H)$, т. е.

$$\sum_{j=1}^{\infty}\left\|f_j\left(te^{\pm i\theta}\right)\right\|^2_{L_2(\mathbb{R}_+)} < \infty. \tag{3.3}$$

Доказательство проведем для $+\theta$, рассуждения для $-\theta$ совершенно аналогичны. Обозначим через M величину

$$M = \sup_{|\varphi|>\theta}\left\|f(te^{i\varphi})\right\|^2_{L_2(\mathbb{R}_+,H)} = \sup_{|\varphi|>\theta}\sum_{j=1}^{\infty}\left\|f_j(te^{i\varphi})\right\|^2_{L_2(\mathbb{R}_+)}. \tag{3.4}$$

Предположим противное. Тогда найдется такое $N \in \mathbb{N}$, что

$$\sum_{j=1}^{N}\left\|f_j\left(te^{i\theta}\right)\right\|^2_{L_2(\mathbb{R}_+)} > 4M.$$

В силу (3.2) для любого $\varepsilon > 0$ можно указать такое $\varphi_0 < \theta$, что для любого φ, удовлетворяющего неравенству $\varphi_0 < \varphi < \theta$, будет выполнено неравенство

$$\sum_{j=1}^{N}\left\|f_j(te^{i\varphi})\right\|^2_{L_2(\mathbb{R}_+)} < 2\sum_{j=1}^{N}\left\|f_j(te^{i\varphi})\right\|^2_{L_2(\mathbb{R}_+)} + \varepsilon \leqslant 2\sup_{|\varphi|>\theta}\sum_{j=1}^{\infty}\left\|f_j(te^{i\varphi})\right\|^2_{L_2(\mathbb{R}_+)} \leqslant 2M + \varepsilon.$$

Следовательно, мы пришли к противоречию с равенством (3.3).

Отсюда в силу (3.1) существует такое $\varphi_0 < \theta$, при котором

$$\sum_{j=1}^{N}\left\|f_j\left(te^{i\varphi}\right)\right\|^2_{L_2(\mathbb{R}_+)} > \frac{1}{4}\sum_{j=1}^{N}\left\|f\left(te^{i\theta}\right)\right\|^2_{L_2(\mathbb{R}_+)} > M, \tag{3.5}$$

что, очевидно, противоречит неравенству

$$\sup_{\varphi:|\varphi|<\theta}\left\|f(te^{i\varphi})\right\|^2_{L_2(\mathbb{R}_+,H)}=\sup_{\varphi:|\varphi|<\theta}\sum_{j=1}^{\infty}\left\|f_j(te^{i\varphi})\right\|^2_{L_2(\mathbb{R}_+,H)}<M<\infty \tag{3.6}$$

в силу произвольности $M_1>4M$. Таким образом, неравенство установлено. Согласно [5, лемма 1.1, с. 873]), для числовых функций $f_j\left(\tau\right)$ справедливо неравенство

$$\frac{1}{2}\sup_{\varphi:|\varphi|<\theta}\left\|f_j\left(te^{i\varphi}\right)\right\|^2_{L_2(\mathbb{R}_+)}\leqslant\left(\left\|f_j\left(te^{-i\theta}\right)\right\|^2_{L_2(\mathbb{R}_+)}+\left\|f_j\left(te^{i\theta}\right)\right\|^2_{L_2(\mathbb{R}_+)}\right). \tag{3.7}$$

Отсюда из (3.2) вытекает, что

$$\sum_{j=1}^{\infty}\sup_{\varphi:|\varphi|<\theta}\left\|f_j\left(te^{i\varphi}\right)\right\|^2_{L_2(\mathbb{R}_+)}\leqslant 2\sum_{j=1}^{\infty}\left(\left\|f_j\left(te^{-i\theta}\right)\right\|^2_{L_2(\mathbb{R}_+)}+\left\|f_j\left(te^{i\theta}\right)\right\|^2_{L_2(\mathbb{R}_+)}\right). \tag{3.8}$$

Установим теперь справедливость соотношения (2.1). Рассмотрим случай $\varphi\to+\theta$, а случай $\varphi\to-\theta$ рассматривается совершенно аналогично. Зафиксируем $\varepsilon>0$. По ε выберем такое $N\in\mathbb{N}$, чтобы выполнялись неравенства

$$\sum_{j=N+1}^{\infty}\sup_{\varphi:|\varphi|<\theta}\left\|f_j\left(te^{i\varphi}\right)\right\|^2_{L_2(\mathbb{R}_+)}<\frac{\varepsilon}{8},\qquad\sum_{j=N+1}^{\infty}\left\|f\left(te^{i\theta}\right)\right\|^2_{L_2(\mathbb{R}_+)}<\frac{\varepsilon}{8}. \tag{3.9}$$

В силу (3.3), (3.8) такой выбор N возможен.

По N выберем такое $\delta>0$, чтобы для $\varphi:\theta-\varphi<\delta$ выполнялись неравенства

$$\left\|f_j\left(te^{i\varphi}\right)-f_j\left(te^{i\theta}\right)\right\|^2_{L_2(\mathbb{R}_+)}<\frac{\varepsilon}{2N},\quad j=1,2,\ldots,N. \tag{3.10}$$

Существование такого δ вытекает из (3.2). Тогда

$$\sum_{j=1}^{N}\left\|f_j\left(te^{i\varphi}\right)-f_j\left(te^{i\theta}\right)\right\|^2_{L_2(\mathbb{R}_+)}<\frac{\varepsilon}{2},\quad\theta-\varphi<\delta. \tag{3.11}$$

Наконец, из (3.9), (3.11) получаем, что

$$\begin{aligned}\left\|f\left(te^{i\varphi}\right)-f\left(te^{i\theta}\right)\right\|^2_{L_2(\mathbb{R}_+,H)}&\leqslant\sum_{j=1}^{N}\left\|f_j\left(te^{i\varphi}\right)-f_j\left(te^{i\theta}\right)\right\|^2_{L_2(\mathbb{R}_+)}+\\&+2\sum_{j=N+1}^{\infty}\sup_{\varphi:|\varphi|<\theta}\left\|f_j\left(te^{i\varphi}\right)\right\|^2_{L_2(\mathbb{R}_+)}+2\sum_{j=N+1}^{\infty}\left\|f_j\left(te^{i\theta}\right)\right\|^2_{L_2(\mathbb{R}_+)}<\varepsilon.\end{aligned}$$

Таким образом, соотношение (2.1) установлено и предложение 2.1 доказано. □

Доказательство предложения 2.2. Сходимость интегралов в правой части (2.2) при $\tau\in S_\theta$ вытекает из оценок

$$\left\|\int_0^{+\infty}\frac{f\left(\varsigma e^{\pm i\theta}\right)}{\varsigma e^{\pm i\theta}-\tau}e^{\pm i\theta}d\varsigma\right\|\leqslant\int_0^{+\infty}\frac{\left\|f\left(\varsigma e^{\pm i\theta}\right)\right\|}{\left|\varsigma e^{\pm i\theta}-\tau\right|}d\varsigma\leqslant\left(\int_0^{+\infty}\left\|f\left(\varsigma e^{\pm i\theta}\right)\right\|^2d\varsigma\right)^{1/2}\left(\int_0^{+\infty}\left|\varsigma e^{\pm i\theta}-\tau\right|^{-2}d\varsigma\right)^{1/2}<\infty.$$

Чтобы обнаружить, что

$$f\left(\tau\right)=\frac{1}{2\pi i}\int_0^{\infty}\frac{f\left(\varsigma e^{-i\theta}\right)}{\varsigma e^{-i\theta}-\tau}e^{-i\theta}d\varsigma-\frac{1}{2\pi i}\int_0^{\infty}\frac{f\left(\varsigma e^{i\theta}\right)}{\varsigma e^{i\theta}-\tau}e^{i\theta}d\varsigma,$$

достаточно проверить последнее равенство покоординатно:

$$\left(f\left(\tau\right),e_j\right)=\frac{1}{2\pi i}\int_0^{\infty}\frac{\left(f\left(\varsigma e^{-i\theta}\right),e_j\right)}{\varsigma e^{-i\theta}-\tau}e^{-i\theta}d\varsigma-\frac{1}{2\pi i}\int_0^{\infty}\frac{\left(f\left(\varsigma e^{i\theta}\right),e_j\right)}{\varsigma e^{i\theta}-\tau}e^{i\theta}d\varsigma,$$

где $\{e_j\}_{j=1}^{\infty}$ — ортонормированный базис пространства H. Интегральная формула Коши справедлива для числовых функций $(f(\tau), e_j)$ (см. [4, теорема 7.5, с. 414]), откуда и вытекает справедливость интегральной Формулы Коши для $f(\tau) \in \Re_{2,\theta}(\mathbb{R}_+, H)$. □

Доказательство предложения 2.3. Пусть $h_{\pm\theta}(\varsigma) \in L_2(\mathbb{R}_+)$. Тогда для функции $h(\tau)$, представимой в виде

$$h(\tau) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_0^{\infty} \frac{h_{-\theta}(\varsigma)}{\varsigma e^{-i\theta} - \tau} e^{-i\theta} d\varsigma - \frac{1}{2\pi i}\int\limits_0^{\infty} \frac{h_{\theta}(\varsigma)}{\varsigma e^{i\theta} - \tau} e^{i\theta} d\varsigma,$$

справедливо неравенство

$$\sup_{\varphi:|\varphi|<\theta} \int\limits_0^{\infty} \left|h\left(te^{i\varphi}\right)\right|^2 dt \leqslant \mathrm{const}\left\{\int\limits_0^{\infty} |h_{-\theta}(\varsigma)|^2 d\varsigma + \int\limits_0^{\infty} |h_{\theta}(\varsigma)|^2 d\varsigma\right\},$$

где постоянная const не зависит от функций $h_{-\theta}(\varsigma)$ и $h_{\theta}(\varsigma)$, а кроме того, функция $h(\tau)$ голоморфна в секторе S_θ.

Используя разложение функции $f(\tau)$ по ортонормированному базису $\{e_j\}_{j=1}^{\infty}$

$$f(\tau) = \sum_{j=1}^{\infty} (f(\tau), e_j) e_j,$$

а также то, что

$$\left\|f\left(te^{i\varphi}\right)\right\|^2_{L_2(\mathbb{R}_+,H)} = \int\limits_0^{\infty} \left\|f\left(te^{i\varphi}\right)\right\|^2 dt = \sum_{j=1}^{\infty} \left\|\left(f\left(te^{i\varphi}\right), e_j\right)\right\|^2_{L_2(\mathbb{R}_+)},$$

получим векторный аналог приведенного утверждения. В самом деле, для любого $\varphi \in (-\theta, \theta)$ справедлива следующая цепочка неравенств:

$$\begin{aligned}\left\|f\left(te^{i\varphi}\right)\right\|^2_{L_2(\mathbb{R}_+,H)} &= \sum_{j=1}^{\infty} \left\|\left(f\left(te^{i\varphi}\right), e_j\right)\right\|^2_{L_2(\mathbb{R}_+)} \leqslant \\ &\leqslant \mathrm{const}\sum_{j=1}^{\infty}\left(\|(f_{-\theta}(t), e_j)\|^2_{L_2(\mathbb{R}_+)} + \|(f_{\theta}(t), e_j)\|^2_{L_2(\mathbb{R}_+)}\right) = \\ &= \mathrm{const}\left(\|f_{-\theta}(t)\|^2_{L_2(\mathbb{R}_+,H)} + \|f_{+\theta}(t)\|^2_{L_2(\mathbb{R}_+,H)}\right),\end{aligned}$$

откуда вытекает, что

$$\sup_{\varphi:|\varphi|<\theta} \left\|f\left(te^{i\varphi}\right)\right\|^2_{L_2(\mathbb{R}_+,H)} \leqslant \mathrm{const}\int\limits_0^{\infty}\left(\|f_{-\theta}(t)\|^2 + \|f_{+\theta}(t)\|^2\right) dt. \tag{3.12}$$

Голоморфность функции $f(\tau)$ при $\tau \in S_\theta$ очевидным образом следует из свойств интегралов типа Коши. □

Доказательство теоремы 2.1. Вначале докажем пункт 3^0. Установим неравенство (2.7). Неравенство

$$\|f\|^*_{2,\theta} \leqslant \sqrt{2}\|f\|_{2,\theta}$$

вытекает из более сильного неравенства (3.7). Перейдем к доказательству второго неравенства. Для этого воспользуемся соотношением (2.1) из предложения 2.1, согласно которому для любого $\varepsilon > 0$ можно указать такое $\delta > 0$, что для $\varphi : \theta - \varphi < \delta$

$$\left\|f\left(te^{i\varphi}\right) - f\left(te^{i\theta}\right)\right\|_{L_2(\mathbb{R}_+,H)} < \varepsilon.$$

Отсюда из неравенства

$$\left|\left\|f\left(te^{i\varphi}\right)\right\|_{L_2(\mathbb{R}_+,H)} - \left\|f\left(te^{i\theta}\right)\right\|_{L_2(\mathbb{R}_+,H)}\right| \leqslant \left\|f\left(te^{i\varphi}\right) - f\left(te^{i\theta}\right)\right\|_{L_2(\mathbb{R}_+,H)},$$

в частности, следует, что

$$\left\| f\left(te^{i\theta}\right)\right\|_{L_2(\mathbb{R}_+,H)} \leqslant \left\| f\left(te^{i\varphi}\right)\right\| + \varepsilon,$$

и, тем более,

$$\left\| f\left(te^{i\theta}\right)\right\|_{L_2(\mathbb{R}_+,H)} \leqslant \sup_{\varphi:|\varphi|<\theta} \left\| f\left(te^{i\varphi}\right)\right\|_{L_2(\mathbb{R}_+,H)} + \varepsilon.$$

Отсюда, в силу произвольности ε, получаем

$$\left\| f\left(te^{i\theta}\right)\right\|_{L_2(\mathbb{R}_+,H)} \leqslant \sup_{\varphi:|\varphi|<\theta} \left\| f\left(te^{i\varphi}\right)\right\|_{L_2(\mathbb{R}_+,H)} = \| f(\tau)\|^*_{2,\theta}.$$

Дословно повторяя проведенные рассуждения для $-\theta$, получим

$$\left\| f\left(te^{-i\theta}\right)\right\|_{L_2(\mathbb{R}_+,H)} \leqslant \| f(\tau)\|^*_{2,\theta}.$$

Из последних двух неравенств и следует, что

$$\| f(\tau)\|_{2,\theta} \leqslant \sqrt{2}\, \| f(\tau)\|^*_{2,\theta}.$$

Докажем пункт 1^0. В доказательстве нуждается лишь доказательство утверждения о полноте, т. к. проверка того, что $\|\cdot\|^*_{2,\theta}$ обладает свойствами нормы, вытекает из соответствующих свойств нормы $\|\cdot\|_{L_2(\mathbb{R}_+,H)}$. Итак, пусть имеется фундаментальная по норме $\|\cdot\|^*_{2,\theta}$ последовательность функций $\{f_k(\tau)\}_{k=1}^\infty$, т. е.

$$\| f_k(\tau) - f_l(\tau)\|^*_{2,\theta} \to 0, \quad k,l\to\infty.$$

Покажем, что существует функция $f(\tau)\in \Re_{2,\theta}(\mathbb{R}_+,H)$ такая, что

$$\| f_k(\tau) - f(\tau)\|^*_{2,\theta} \to 0, \quad k\to\infty.$$

Согласно предложению 2.1, каждая из функций $f_k(\tau)$ имеет граничные значения $f_k\left(te^{\pm i\theta}\right)\in L_2(\mathbb{R}_+,H)$, и в соответствии с неравенством (2.7) из сходимости последовательности функций $\{f_k(\tau)\}_{k=1}^\infty$ по норме $\|\cdot\|^*_{2,\theta}$ вытекает сходимость последовательностей $\left\{f_k\left(te^{\pm i\theta}\right)\right\}_{k=1}^\infty$ по норме пространства $L_2(\mathbb{R}_+,H)$. Но пространство $L_2(\mathbb{R}_+,H)$ является полным. Следовательно, существуют функции $f_{\pm\theta}(t)\in L_2(\mathbb{R}_+,H)$ такие, что

$$\lim_{k\to\infty}\left\| f_k\left(te^{\pm i\theta}\right) - f_{\pm\theta}(t)\right\|_{L_2(\mathbb{R}_+,H)} = 0.$$

По функциям $f_{\pm\theta}(t)$ образуем интеграл типа Коши

$$f(\tau) = \frac{1}{2\pi i}\int_0^\infty e^{-i\theta}\frac{f_{-\theta}(t)}{te^{-i\theta}-\tau}dt - \frac{1}{2\pi i}\int_0^\infty e^{i\theta}\frac{f_{\theta}(t)}{te^{i\theta}-\tau}dt.$$

Тогда в соответствии с предложением 2.3 имеем $f(\tau)\in\Re_2(S_\theta,H)$, и последовательность $\{f_k(\tau)\}_{k=1}^\infty$ сходится к функции $f(\tau)$ по норме $\|\cdot\|^*_{2,\theta}$.

2^0. Полнота пространства $\Re_2(S_\theta,H)$ с нормой $\|\cdot\|_{2,\theta}$, порождаемой скалярным произведением (2.6), вытекает из неравенства (2.7) и утверждения пункта 1^0. Проверка остальных аксиом гильбертова пространства со скалярным произведением (2.7) проводится непосредственно. Теорема 2.1 доказана. □

Доказательство теоремы 2.2.

1^0. Пусть $F(\lambda)\in\Re_2(S_\theta,H)$. Положим $F_j(\lambda) = (F(\lambda), e_j)$, где $\{e_j\}_{j=1}^\infty$ — ортонормированный базис пространства H. Тогда $F_j(\lambda)\in\Re_2\left(S_{\theta+\pi/2}\right)$ и, согласно [5, теорема 1], существует скалярная функция $f_j(\tau)\in\Re_2(S_\theta)$ такая, что

$$F_j(\lambda) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-i\varphi}\int_o^\infty e^{-\lambda te^{-i\varphi}} f_j\left(te^{-i\varphi}\right)dt.$$

При этом функция $f_j(\tau)$ определяется единственным образом по функции $F_j(\lambda)$, и согласно теореме Пэли—Винера (см. [5]) имеют место неравенства

$$|F_j(\lambda)|_{2,\theta+\pi/2} \leqslant 2|f_j(\tau)|_{2,\theta} \leqslant 2\sqrt{2}|F_j(\lambda)|_{2,\theta+\pi/2}, \tag{3.13}$$

где (здесь и в дальнейшем)

$$|f|^2_{2,\kappa} = \int\limits_0^{+\infty} \left|f\left(te^{-i\kappa}\right)\right|^2 dt + \int\limits_0^{+\infty} \left|f\left(te^{+i\kappa}\right)\right|^2 dt,$$

$$|f|^*_{2,\kappa} = \sup_{\varphi:|\varphi|<\kappa} \left(\int\limits_0^{+\infty} \left|f\left(te^{i\varphi}\right)\right|^2 dt\right)^{1/2}, \quad 0 \leqslant \kappa < \pi.$$

По набору скалярных функций $\{f_j(\tau)\}_{j=1}^{\infty}$ образуем вектор-функцию $f(\tau) = \sum\limits_{j=1}^{\infty} f_j(\tau)\,e_j$. Покажем, что $f(\tau) \in \Re_2(S_\theta, H)$. Поскольку для числовых функций $f_j(\tau)$ справедлива оценка

$$\frac{1}{2}\,|f_j(\tau)|^2_{2,\theta} \leqslant \sup_{\varphi:|\varphi|<\theta} \int\limits_0^{+\infty} \left|f_j\left(te^{i\varphi}\right)\right|^2 dt \leqslant 2\,|f_j(\tau)|^2_{2,\theta}\,, \tag{3.14}$$

то из неравенств (3.13), (3.14) получаем следующую цепочку неравенств:

$$\|F(\lambda)\|^2_{2,\theta+\pi/2} = \sum_{j=1}^{\infty} |F_j(\lambda)|^2_{2,\theta+\pi/2} \geqslant \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{\infty} |f_j(\tau)|^2_{2,\theta} \geqslant \frac{1}{4}\sum_{j=1}^{\infty} \sup_{\varphi:|\varphi|<\theta} \int\limits_0^{+\infty} \left|f_j\left(te^{i\varphi}\right)\right|^2 dt \geqslant$$

$$\geqslant \frac{1}{4} \sup_{\varphi:|\varphi|<\theta} \int\limits_0^{+\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \left|f_j\left(te^{i\varphi}\right)\right|^2 dt = \frac{1}{4} \sup_{\varphi:|\varphi|<\theta} \int\limits_0^{+\infty} \left\|f\left(te^{i\varphi}\right)\right\|^2 dt.$$

Искомое утверждение вытекает теперь из того, что слабая голоморфность в банаховых пространствах влечет за собой сильную голоморфность (см. [7, теорема 3.10.1]), и значит из голоморфности скалярных функций $f_j(\tau)$ следует голоморфность вектор-функции $f(\tau)$.

2^0. Так как интеграл в правой части (2.9) существует при $\varphi : |\varphi| < \theta$, то достаточно установить равенство (2.9) покоординатно. Но покоординатное равенство справедливо в силу [5, теорема 1] (см. пункт 2^0).

3^0. Неравенство (2.10) вытекает из того, что для числовых функций $F_j(\lambda)$ и $f_j(\tau)$ согласно [5, теорема 1, пункт 3^0] справедливы оценки

$$|F_j(\lambda)|^2_{2,\theta+\pi/2} \leqslant 4\,|f_j(\tau)|^2_{2,\theta} \leqslant 8\,|F_j(\lambda)|^2_{2,\theta+\pi/2}\,,$$

и, кроме того, имеют место очевидные равенства

$$\|F(\lambda)\|^2_{2,\theta+\pi/2} = \sum_{j=1}^{\infty} |F_j(\lambda)|^2_{2,\theta+\pi/2}, \, \|f(\tau)\|^2_{2,\theta} = \sum_{j=1}^{\infty} |f_j(\tau)|^2_{2,\theta}.$$

Теорема 2.2 доказана. □

Доказательство леммы 2.1. Опираясь на теорему о промежуточных производных для пространства $W_2^1(\mathbb{R}_+, A)$ (см. [6, с. 29]), получаем неравенства

$$\sup_{\varphi:|\varphi|<\theta} \left\|A^{n-j}\frac{d^n}{d\tau^n}u\left(te^{i\varphi}\right)\right\|^2_{L_2(\mathbb{R}_+,H)} = \sup_{\varphi:|\varphi|<\theta} \int\limits_0^{+\infty} \left\|A^{n-j}\frac{\partial^j}{\partial t^j}u\left(te^{i\varphi}\right)\right\|^2 dt \leqslant$$

$$\leqslant K_j^2 \sup_{\varphi:|\varphi|<\theta} \int\limits_0^{+\infty} \left(\left\|\frac{\partial^n}{\partial t^n}u\left(te^{i\varphi}\right)\right\|^2 + \left\|A^n u\left(te^{i\varphi}\right)\right\|^2\right) dt. \tag{3.15}$$

Принимая во внимание то, что

$$\frac{d^k}{d\tau^k}u(\tau) = e^{-ik\varphi}\frac{\partial^k}{\partial t^k}u\left(te^{i\varphi}\right), \quad \left|e^{ik\varphi}\right| = 1, \quad k \in \mathbb{N},$$

из неравенства (3.15) получим неравенство (2.13). □

В свою очередь доказательство предложения 2.4 опирается на лемму 2.1, а также на предложение 2.1 применительно к функциям $A^{n-j}\dfrac{d^j u(\tau)}{d\tau^j} \in \Re_2(S_\theta, H)$, $j = 0, 1, \ldots, n$.

Доказательство предложения 2.4. Согласно лемме 2.1, из принадлежности функции $u(\tau)$ пространству $W_2^n(S_\theta, A^n)$ вытекает, что

$$A^{n-j}\frac{d^j}{d\tau^j}u(\tau) \in \Re_2(S_\theta, H), \quad j = 0, 1, \ldots, n.$$

В соответствии с предложением 2.1 функции $u(\tau), \dfrac{d^j u}{d\tau^j}(\tau)$ имеют граничные значения $u_{\pm\theta}(t) = u\left(te^{\pm i\theta}\right)$ и $y_{\pm\theta,j}(t), j = 1, 2, \ldots, n$, такие, что

$$\lim_{\varphi\to\pm\theta}\left\|u\left(te^{i\varphi}\right) - u\left(te^{\pm i\theta}\right)\right\|_{L_2(\mathbb{R}_+,H)} = 0, \tag{3.16}$$

$$\lim_{\varphi\to\pm\theta}\left\|\frac{d^j}{d\tau^j}u\left(te^{i\varphi}\right) - y_{\pm\theta,j}(t)\right\|_{L_2(\mathbb{R}_+,H)} = 0, \quad j = 1, 2, \ldots, n. \tag{3.17}$$

Покажем вначале, что

$$\frac{\partial}{\partial t}u\left(te^{\pm\theta}\right) = e^{\pm\theta}y_{\pm\theta,1}(t)$$

почти всюду на полуоси $\mathbb{R}_+$.

Из соотношения (3.17) и неравенства Коши—Буняковского следует, что

$$\int_0^{+\infty}\left\|\frac{d}{d\tau}\left(te^{i\varphi}\right) - y_{\pm\theta,1}(t)\right\|^2 dt \geqslant \frac{1}{r}\left(\int_0^r\left\|\frac{d}{d\tau}u\left(te^{i\varphi}\right) - y_{\pm\theta.1}(t)\right\|dt\right)^2 \to 0$$

при $\varphi \to \pm\theta$. Таким образом, функция $\dfrac{d}{d\tau}u\left(te^{i\varphi}\right)$ сходится к функции $y_{\pm\theta,1}(t)$ по норме $L_1((0,r), H)$. Следовательно, функция $\dfrac{\partial}{\partial t}u\left(te^{i\varphi}\right)$ сходится к функции $e^{\pm i\theta}y_{\pm\theta}(t)$ в пространстве $L_1((0,r), H)$ при $\varphi \to \pm\theta$. В самом деле, это вытекает из того, что

$$\frac{\partial}{\partial t}u\left(te^{i\varphi}\right) = e^{i\varphi}\frac{d}{d\tau}u\left(te^{i\varphi}\right), \int_0^r\left\|\frac{d}{d\tau}u\left(te^{i\varphi}\right) - y_{\pm\theta,1}(t)\right\|^2 dt = \int_0^r\left\|\frac{\partial}{\partial t}u\left(te^{i\varphi}\right) - e^{i\varphi}y_{\pm\theta,1}(t)\right\|^2 dt,$$

а также того, что

$$\int_0^{+\infty}\left\|e^{i\varphi}y_{\pm\theta,1}(t) - e^{\pm i\theta}y_{\pm\theta,1}(t)\right\|^2 dt \to 0$$

при $\varphi \to \pm\theta$. Таким образом, из сказанного следует, что

$$\lim_{\varphi\to\pm\theta}\sup_{t\in(0,r)}\left\|\int_0^r\frac{\partial}{\partial\varsigma}u\left(\varsigma e^{i\varphi}\right)d\varsigma - e^{\pm i\theta}\int_0^r y_{\pm\theta,1}(\varsigma)\,d\varsigma\right\| = 0. \tag{3.18}$$

Но

$$\int_0^t\frac{\partial}{\partial\varsigma}u\left(\varsigma e^{i\varphi}\right)d\varsigma = u\left(te^{i\varphi}\right) - \lim_{t\to0}u\left(te^{i\varphi}\right), \tag{3.19}$$

и, как будет показано в конце этого предложения, для любых $\varphi_1, \varphi_2 \in (-\theta, \theta)$

$$\lim_{t\to0}u^{(j)}\left(te^{i\varphi_1}\right) = \lim_{t\to0}u^{(j)}\left(te^{i\varphi_2}\right) = a \in H, \quad j = 0, 1, 2, \ldots, n-1. \tag{3.20}$$

Отсюда и из соотношений (3.18), (3.19) вытекает, что

$$\lim_{\varphi\to\pm\theta}\sup_{t\in(0,r)}\left\|u\left(te^{i\varphi}\right)-e^{\pm i\theta}\int\limits_0^t y_{\pm\theta,1}(\varsigma)\,d\varsigma-a\right\|=0.$$

Таким образом, $u\left(te^{\pm i\theta}\right)=\int\limits_0^t e^{\pm i\theta}y_{\pm\theta,1}(\varsigma)d\varsigma+a$. Отметим, что в силу произвольности $r\in\mathbb{R}_+$ приведенное равенство справедливо на полуоси $\mathbb{R}_+$. Отсюда получаем, что функция $u\left(te^{\pm i\theta}\right)$ дифференцируема почти всюду на полуоси $\mathbb{R}_+$, и

$$\frac{\partial}{\partial t}u\left(te^{\pm i\theta}\right)=e^{\pm i\theta}y_{\pm\theta,1}(t),$$

и, кроме того, согласно (3.17)

$$\lim_{\varphi\to\pm\theta}\left\|\frac{\partial}{\partial t}u\left(te^{i\varphi}\right)-\frac{\partial}{\partial t}u\left(te^{\pm i\theta}\right)\right\|_{L_2(\mathbb{R}_+,H)}=0.$$

Повторяя рассуждения, приведенные для функций $\frac{d^j}{d\tau^j}u\left(te^{i\varphi}\right)$, $j=2,3,\ldots,n$, приходим к тому, что функция $u\left(te^{\pm i\theta}\right)$ n раз дифференцируема по t, и

$$\lim_{\varphi\to\pm\theta}\left\|\frac{\partial^n}{\partial t^n}u\left(te^{i\varphi}\right)-\frac{\partial^n}{\partial t^n}u(te^{\pm i\theta})\right\|_{L_2(\mathbb{R},H)}=0.$$

Согласно определению пространства $W_2^n\left(S_\theta,A^n\right)$, функции $A^ju(\tau)$ имеют граничные значения $z_{\pm\theta,j}(t)\in L_2(\mathbb{R}_+,H)$:

$$\lim_{\varphi\to\pm\theta}\left\|A^ju\left(te^{i\varphi}\right)-z_{\pm\theta,j}(t)\right\|_{L_2(\mathbb{R}_+,H)}=0. \tag{3.21}$$

Откуда, в силу того, что оператор A^{-1} компактен и, стало быть, ограничен, следует соотношение

$$\lim_{\varphi\to\pm\theta}\left\|u\left(te^{i\varphi}\right)-A^{-j}z_{\pm\theta}(t)\right\|_{L_2(\mathbb{R}_+,H)}=0. \tag{3.22}$$

Сравнивая (3.21) и (3.22), приходим к равенствам

$$u\left(te^{\pm i\theta}\right)=A^{-j}z_{\pm\theta,j}(t),\quad j=0,1,\ldots,n.$$

Следовательно,

$$A^ju\left(te^{\pm i\theta}\right)=z_{\pm\theta,j}(t),\quad j=0,1,\ldots,n,$$

и на основании (3.21) получаем

$$\lim_{\varphi\to\pm\theta}\left\|A^j\left(u\left(te^{i\varphi}\right)-u\left(te^{\pm i\theta}\right)\right)\right\|_{L_2(\mathbb{R}_+,H)}=0. \tag{3.23}$$

Для завершения доказательства осталось показать, что для любых $\varphi_1,\varphi_2\in(-\theta,\theta),\varphi_1\neq\varphi_2$,

$$\lim_{\varsigma\to 0}u^{(j)}\left(\varsigma e^{i\varphi_1}\right)=\lim_{\varsigma\to 0}u^{(j)}\left(\varsigma e^{i\varphi_2}\right),\quad j=0,1,\ldots,n-1.$$

Пусть $\{t_k\}_{k=1}^\infty$ — сходящаяся к нулю последовательность положительных вещественных чисел такая, что $\frac{t_{k+1}}{t_k}<\frac{1}{2}$. Рассмотрим последовательность $\{\gamma_{k,j}(\varphi)\}_{k=1}^\infty$:

$$\gamma_{k,j}(\varphi)=\int\limits_0^{t_k}\left\|u^{(j+1)}\left(se^{i\varphi}\right)\right\|ds,\quad \varphi\in(-\theta,\theta),\quad j=0,1,\ldots,n-1.$$

Из неравенства Коши—Буняковского, теоремы о промежуточных (см. [6, с. 29]), а также положительной определенности оператора A вытекает, что

$$\gamma_{k,j}(\varphi)=\int_0^{t_k}\left\|u^{(j+1)}\left(se^{i\varphi}\right)\right\|ds\leqslant t_k\left(\int_0^{t_k}\left\|u^{(j+1)}\left(se^{i\varphi}\right)\right\|^2ds\right)^{1/2}\leqslant$$

$$\leqslant ct_k^{1/2}\sup_{\varphi:|\varphi|<\theta}\left(\int_o^{+\infty}{}^{-}\left(\left\|\frac{\partial^n}{\partial t^n}u\left(te^{i\varphi}\right)\right\|^2+\left\|A^nu\left(te^{i\varphi}\right)\right\|^2\right)dt\right)^{1/2}$$

с положительной постоянной c, не зависящей от функции $u(\tau)$, индексов k и j. Отсюда получаем

$$\int_{\varphi_1}^{\varphi_2}\gamma_{k,j}(\varphi)d\varphi\leqslant c2\theta t_k^{1/2}\sup_{\varphi:|\varphi|<\theta}\left(\int_0^{+\infty}\left(\left\|\frac{\partial^n}{\partial t^n}u\left(te^{i\varphi}\right)\right\|^2+\left\|Au\left(te^{i\varphi}\right)\right\|^2\right)dt\right)^{1/2}.$$

Следовательно, для любого $\varepsilon>0$ найдется такое $N\in\mathbb{N}$, что для $k>N$

$$\int_{\varphi_1}^{\varphi_2}\gamma_{k,j}(\varphi)d\varphi=\int_{\varphi_1}^{\varphi_2}\int_0^{t_k}\left\|u^{(j+1)}\left(se^{i\varphi}\right)\right\|dsd\varphi<\varepsilon.$$

Согласно теореме Фубини

$$\int_{\varphi_1}^{\varphi_2}\int_0^{t_k}\left\|u^{(j+1)}\left(se^{i\varphi}\right)\right\|dsd\varphi=\int_0^{t_k}\int_{\varphi_1}^{\varphi_{22}}\left\|u^{(j+1)}\left(se^{i\varphi}\right)\right\|d\varphi ds,$$

и значит,

$$\int_{\frac{t_k}{2}}^{t_k}\int_{\varphi_1}^{\varphi_2}\left\|u^{(j+1)}\left(se^{i\varphi}\right)\right\|d\varphi ds\leqslant\int_0^{t_k}\int_{\varphi_1}^{\varphi_2}\left\|u^{(j+1)}\left(se^{i\varphi}\right)\right\|d\varphi ds<\varepsilon.\tag{3.24}$$

Из (3.24), в силу непрерывности функции

$$l_j(s)=\int_{\varphi_1}^{\varphi_2}\left\|u^{(j+1)}\left(se^{i\varphi}\right)\right\|d\varphi,$$

вытекает существование $s_k\in\left(\frac{t_k}{2},t_k\right)$ такого, что

$$l_j(s_k)=\int_{\varphi_1}^{\varphi}\left\|u^{(j+1)}\left(s_ke^{i\varphi}\right)\right\|d\varphi<\frac{2\varepsilon}{t_k}\tag{3.25}$$

(ибо в противном случае выполнялось бы неравенство

$$\int_{t_k/2}^{t_k}l_j(s)\,ds\geqslant\frac{2\varepsilon}{t_k}\frac{t_k}{2}=\varepsilon,$$

противоречащее неравенству (3.24)). Следовательно, для любого $\varepsilon>0$ можно указать такое $N\in\mathbb{N}$, начиная с которого

$$\int_{\varphi_1}^{\varphi_2}\left\|u^{(j+1)}\left(s_ke^{i\varphi}\right)\right\|d\varphi<\frac{2\varepsilon}{t_k},\quad j=0,1,\ldots,n-1,\quad k=1,2,\ldots$$

Отсюда

$$s_k \int\limits_{\varphi_1}^{\varphi_2} \left\| u^{(j+1)} \left(s_k e^{i\varphi} \right) \right\| d\varphi < \frac{2\varepsilon}{t_k} s_k < 2\varepsilon.$$

Обозначив через δ_k дугу $\{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| = s_k, \varphi_1 \leqslant \arg \lambda \leqslant \varphi_2\}$, можно записать

$$u^{(j)} \left(s_k e^{i\varphi_2} \right) - u \left(s_k e^{i\varphi_1} \right) = \int\limits_{\delta_k} u^{(j+1)} (\lambda) \, d\lambda.$$

Далее, из неравенства (3.25) получаем

$$\left\| u^{(j)} \left(s_k e^{i\varphi_2} \right) - u^{(j)} \left(s_k e^{i\varphi_1} \right) \right\| \leqslant \int\limits_{\delta_k} \left\| u^{(j+1)} (\lambda) \right\| |d\lambda| < s_k \int\limits_{\varphi_1}^{\varphi_2} \left\| u^{(j+1)} \left(s_k e^{i\varphi} \right) \right\| d\varphi < 2\varepsilon,$$

$j = 0, 1, \ldots, n-1$. Таким образом, для любого $\varepsilon > 0$ можно указать такое $N \in \mathbb{N}$, начиная с которого

$$\left\| u^{(j)} \left(s_k e^{i\varphi_1} \right) - u^{(j)} \left(s_k e^{i\varphi_2} \right) \right\| < \varepsilon \quad \forall k > N.$$

Следовательно,

$$\lim_{k \to \infty} u^{(j)} \left(s_k e^{i\varphi_1} \right) = \lim_{k \to \infty} u^{(j)} \left(s_k e^{i\varphi_2} \right) = a \in H.$$

Но по уже упоминавшейся теореме о следах (см. [6, с. 33]) существуют пределы

$$\lim_{\varsigma \to +0} u^{(j)} \left(\varsigma e^{i\varphi_1} \right), \quad \lim_{\varsigma \to +0} u^{(j)} \left(\varsigma e^{i\varphi_2} \right),$$

и значит,

$$\lim_{\varsigma \to +0} u^{(j)} \left(\varsigma e^{i\varphi_1} \right) = \lim_{\varsigma \to +0} u^{(j)} \left(\varsigma e^{i\varphi_2} \right) = a \in H, \quad j = 0, 1, \ldots, n-1.$$

Предложение 2.4 доказано. □

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Власов В. В.* О некоторых пространствах вектор-функций, голоморфных в угле// ВИНИТИ. — 1981. — № 4177-81.
2. *Власов В. В.* Кратная минимальность части системы корневых векторов пучка М. В. Келдыша// Докл. АН СССР. — 1982. — *263*, № 6. — С. 1289–1293.
3. *Григорян Ш. А.* О базисности неполных систем рациональных функций в угловых областях// Изв. АН АрмССР. Мат. — 1978. — *13*, № 5-6. — С. 461–489.
4. *Джрбашян М. М.* Интегральные преобразования и представление функций в комплексной области. — М.: Наука, 1966.
5. *Джрбашян М. М., Мартиросян В. М.* Теоремы Винера—Пэли и Мюнца—Саса// Изв. АН СССР. — 1977. — *41*, № 4. — С. 868–894.
6. *Лионс Ж. Л., Madженес Э.* Неоднородные граничные задачи и их приложения. — М.: Мир, 1971.
7. *Хилле Э., Филипс Р.* Функциональный анализ и полугруппы. — М.: Иностранная литература, 1962.

В. В. Власов
Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, Россия, Москва
E-mail: vicvvlasov@rambler.ru

Н. А. Раутиан
Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, Россия, Москва
E-mail: nrautian@mail.ru

DOI: 10.22363/2413-3639-2022-68-3-393-406 UDC 517.968.72

On Spaces of Vector Functions that Are Holomorphic in an Angular Domain

 V. V. Vlasov, N. A. Rautian

Abstract. In this paper, we study spaces of vector functions that are holomorphic in the angular domain of the complex plane and with values in a separable Hilbert space. We show that, equipped with the appropriate norms, these spaces are Hilbert spaces.

REFERENCES

1. V. V. Vlasov, "O nekotorykh prostranstvakh vektor-funktsiy, golomorfnykh v ugle" [On some spaces of vector functions that are holomorphic in an angle], *VINITI* [VINITI], 1981, No. 4177-81 (in Russian).
2. V. V. Vlasov, "Kratnaya minimal'nost' chasti sistemy kornevykh vektorov puchka M. V. Keldysha" [Multiple minimality of a part of the system of root vectors of the Keldysh pencil], *Dokl. AN SSSR* [Rep. Acad. Sci. USSR], 1982, **263**, No. 6, 1289–1293 (in Russian).
3. Sh. A. Grigoryan, "O bazisnosti nepolnykh sistem ratsional'nykh funktsiy v uglovykh oblastyakh" [On the basis property of incomplete systems of rational functions in corner domains], *Izv. AN ArmSSR. Mat.* [Bull. Acad. Sci. Armenian SSR. Ser. Math.], 1978, **13**, No. 5-6, 461–489 (in Russian).
4. M. M. Dzhrbashyan, *Integral'nye preobrazovaniya i predstavlenie funktsiy v kompleksnoy oblasti* [Integral Transformations and Representation of Functions in the Complex Domain], Nauka, Moscow, 1966 (in Russian).
5. M. M. Dzhrbashyan and V. M. Martirosyan, "Teoremy Vinera—Peli i Myuntsa—Sasa" [Wiener–Paley and Müntz–Szász theorems], *Izv. AN SSSR* [Bull. Acad. Sci. USSR], 1977, **41**, No. 4, 868–894 (in Russian).
6. J.-L. Lions and E. Magenes, *Neodnorodnye granichnye zadachi i ikh prilozheniya* [Non-Homogeneous Boundary-Value Problems and Their Applications], Mir, Moscow, 1971 (Russian translation).
7. E. Hille and R. S. Phillips, *Funktsional'nyy analiz i polugruppy* [Functional Analysis and Semi-Groups], Inostr. lit., Moscow, 1962 (Russian translation).

V. V. Vlasov
Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia
E-mail: vicvvlasov@rambler.ru

N. A. Rautian
Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia
E-mail: nrautian@mail.ru