Современная математика. Фундаментальные направления. Том 68, № 2 (2022). С. 376–391
Contemporary Mathematics. Fundamental Directions. ISSN 2413-3639 (Print)

DOI: 10.22363/2413-3639-2022-68-2-376-391 УДК 517.968.4

АСИМПТОТИЧЕСКОЕ ПОВЕДЕНИЕ РЕШЕНИЯ ДЛЯ ОДНОГО КЛАССА НЕЛИНЕЙНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ТИПА ГАММЕРШТЕЙНА НА ВСЕЙ ПРЯМОЙ

© 2022 г. **Х. А. ХАЧАТРЯН, А. С. ПЕТРОСЯН**

Аннотация. Исследуется класс нелинейных интегральных уравнений на всей прямой с некомпактным интегральным оператором типа Гаммерштейна. Данный класс уравнений имеет приложения в самых различных областях естествознания. В частности, такие уравнения встречаются в математической биологии, в кинетической теории газов, в теории переноса излучения и т. д. Доказывается существование неотрицательного нетривиального и ограниченного решения. Изучается асимптотическое поведение построенного решения на $\pm\infty$. В одном важном частном случае устанавливается единственность построенного решения в определенном весовом пространстве. В конце работы приводятся конкретные прикладные примеры исследуемых уравнений.

ОГЛАВЛЕНИЕ

1. Введение

Рассмотрим следующее нелинейное интегральное уравнение Гаммерштейна на всей прямой:

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} K(x-t)H(t, f(t))dt, \quad x \in \mathbb{R} := (-\infty, +\infty), \tag{1.1}$$

относительно искомой измеримой функции $f(x)$. В уравнении (1.1) ядро K удовлетворяет следующим основным условиям:

I) $K \in L_1(\mathbb{R}) \cap M(\mathbb{R})$, $K(x) > 0$, $x \in \mathbb{R}$, $\int\limits_{-\infty}^{\infty} K(x)dx = 1$;

II) существует $\nu(K) := \int\limits_{-\infty}^{\infty} xK(x)dx > 0$, причем данный интеграл сходится абсолютно;

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект № 19-11-00223).

III) существует число $\lambda_1 > 0$ такое, что

$$\int_{-\infty}^{\infty} K(x)e^{-\lambda x}dx < +\infty \text{ при } \lambda \in [0, \lambda_1].$$

Нелинейность $H(t,u)$ определена на множестве $\mathbb{R}^2 := \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, принимает вещественные значения, удовлетворяет условию *критичности*

$$H(t,0) \equiv 0, \quad t \in \mathbb{R} \tag{1.2}$$

и некоторым другим условиям (см. ниже).

Здесь и далее через $L_1(\mathbb{R})$ обозначено пространство суммируемых на $\mathbb{R}$ функций, а через $M(\mathbb{R})$ — пространство существенно ограниченных функций на множестве $\mathbb{R}$.

Указанный класс уравнений возникает в различных направлениях современного естествознания. В частности, уравнения вида (1.1) встречаются в математической биологии (в математической теории пространственно временного распространения эпидемии), в физической кинетике (в кинетической теории газов), в астрофизике (в теории переноса излучения в спектральных линиях), см. [2, 9–13].

В случае, когда для монотонной нелинейности $H(t,u)$ мажорантой в смысле М. А. Красносельского служит некоторая линейная (по u) функция, при условиях I)-II) уравнение (1.1) достаточно подробно исследовалось в [7, 14]. Когда $H(t,u)$ не зависит от переменной t, является выпуклой (вверх) монотонной функцией и минорантой для H служит квадратная функция определенной структуры, при условиях I)–III) уравнение (1.1) изучалось в работах [9, 11, 15]. В этих работах построены неотрицательные нетривиальные ограниченные (а в некоторых случаях также суммируемые) решения. Следует отметить, что в случае четных ядер K (не выполняется условие II)) и выпуклых (вверх) по u функций H (удовлетворяющих определенным естественным условиям) уравнение (1.1) не обладает неотрицательным нетривиальным и ограниченным решением (см. [16]). Такие уравнения могут иметь только знакопеременные нетривиальные и ограниченные решения (см. [1, 6]).

Из условия критичности (1.2) немедленно следует, что уравнение (1.1) обладает тривиальным решением $f(x) \equiv 0$. Основной целью настоящей работы является построение второго неотрицательного и ограниченного решения уравнения (1.1). В данной статье, при существенно иных ограничениях на функцию $H(t,u)$, мы займемся построением такого рода решения. Более того, мы будем исследовать асимптотическое поведение построенного решения на $\pm\infty$. В одном важном случае установим единственность решения в определенном весовом пространстве. В конце работы приведем конкретные примеры нелинейности $H(t,u)$, удовлетворяющие всем условиям доказанных теорем. Прежде чем накладывать соответствующие условия на функцию H, ниже приведем некоторые обозначения и вспомогательные факты.

2. Обозначения и вспомогательные факты

2.1. Функция Дикмана. Основная лемма. Пусть $y = G(u)$ определенная на множестве $\mathbb{R}^+ := [0, +\infty)$ — непрерывно дифференцируемая функция удовлетворяющая следующим условиям (см. рис. 1):

a) существует конечная производная $G'(0) > 1$, такая, что $G(u) \leqslant G'(0)u$, $u \in \mathbb{R}^+$;
b) функция $y = G(u)$ монотонно возрастает и выпукла вверх на множестве $\mathbb{R}^+$;
c) существует число $\eta > 0$ такое, что $G(\eta) = \eta$;
d) существуют числа $\varepsilon > 0$ и $c > 0$ такие, что $G(u) \geqslant G'(0)u - cu^{1+\varepsilon}$, $u \in [0, \eta]$.

Рассмотрим теперь известную в литературе функцию Дикмана для ядра K (см. [11]):

$$L(\lambda) := G'(0) \int_{-\infty}^{\infty} K(t)e^{-\lambda t}dt, \quad \lambda \in [0, \lambda_1]. \tag{2.1}$$

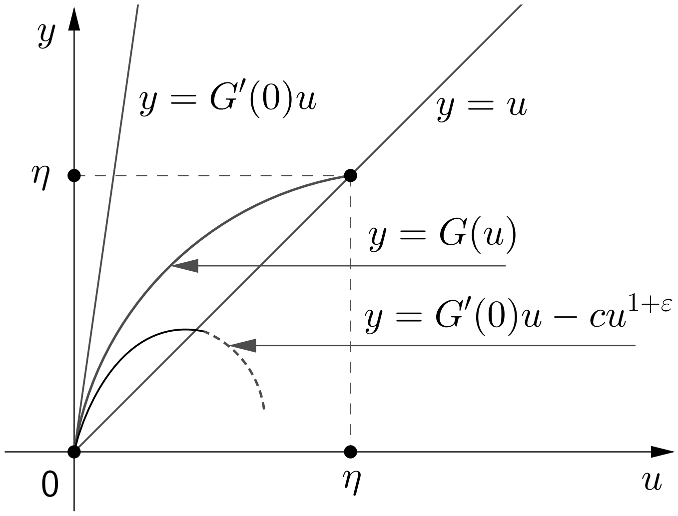

Рис. 1

Из условий II) и a) можно утверждать, что

$$L'(0) = -G'(0)\int_{-\infty}^{\infty} K(t)tdt < 0.$$

Благодаря непрерывности $L'(\lambda)$ существует число $\lambda^* \in (0, \lambda_1]$ такое, что

$$L'(\lambda) < 0, \text{ при } \lambda \in [0, \lambda^*]. \tag{2.2}$$

В наших дальнейших рассуждениях будем предполагать, что

$$L(\lambda^*) < 1. \tag{2.3}$$

Заметим, что $L''(\lambda) = G'(0)\int\limits_{-\infty}^{\infty} K(t)t^2e^{-\lambda t}dt > 0$ (может быть и бесконечность). Следовательно, функция $L(\lambda)$ выпукла вниз. Таким образом, из перечисленных выше свойств функции $L(\lambda)$ следует, что существует единственное число $\sigma \in (0, \lambda^*)$ такое, что

$$L(\sigma) = 1. \tag{2.4}$$

Зафиксируем число σ (см. рис. 2). В силу свойств функции $L(\lambda)$ можно также утверждать, что при $\delta \in (\sigma, \lambda^*]$

$$L(\delta) < 1. \tag{2.5}$$

Следующая простая лемма играет важную роль при доказательстве основных результатов настоящей работы.

Лемма. *Пусть существует*

$$\gamma := \lim_{u\to+\infty} G(u) < +\infty. \tag{2.6}$$

Тогда при условиях a)–d) характеристическое уравнение $G(u) = u - c_0$ для любого $c_0 > 0$ имеет единственное решение ξ, причем $\xi > \eta$.

Доказательство. Рассмотрим функцию $\chi(u) := G(u) - u + c_0$, $u \in \mathbb{R}^+$. Из условий a) и d) сразу следует, что $\chi \in C^1(\mathbb{R}^+)$, $\chi(0) = c_0 > 0$. С другой стороны, так как $\gamma < +\infty$, то $\chi(+\infty) = -\infty$. Следовательно, существует $\xi > 0$ такое, что $\chi(\xi) = 0$. Благодаря выпуклости $y = G(u)$ на $\mathbb{R}^+$ и неравенства $G'(0) > 1$ имеем $\chi'(u) = G'(u) - 1 \leqslant G'(0) - 1 < 0$, откуда следует, что $\chi(u) \downarrow$ на $\mathbb{R}^+$. Следовательно, единственность решения характеристического уравнения $\chi(u) = 0$ доказана. Убедимся теперь, что $\xi > \eta$. Предположим обратное: $\xi \in (0, \eta]$. Тогда в силу выпуклости функции $G(u)$ будем иметь (см. рис. 3):

$$\frac{G(\xi)}{\xi} \geqslant \frac{G(\eta)}{\eta} = 1,$$

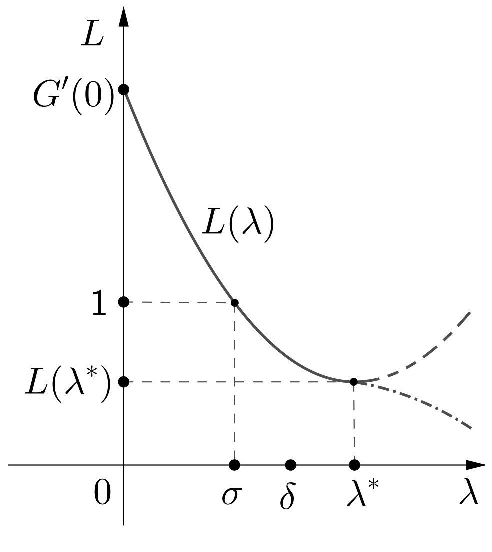

Рис. 2

откуда $G(\xi) \geqslant \xi$. Но $G(\xi) = \xi - c_0$. Последнее означает, что $c_0 \leqslant 0$. В силу полученного противоречия заключаем, что $\xi > \eta$. □

2.2. О вспомогательном интегральном уравнении с нелинейностью G. Наряду с уравнением (1.1) рассмотрим следующее вспомогательное нелинейное интегральное уравнение на $\mathbb{R}$:

$$\varphi(x) = \int_{-\infty}^{\infty} K(x-t)G(\varphi(t))dt, \quad x \in \mathbb{R} \tag{2.7}$$

относительно искомой ограниченной и неотрицательной функции $\varphi(x)$.

Согласно результатам работы [15], при условиях $I)$–$III)$, (2.3) и $a)$–$d)$ уравнение (2.7) обладает неотрицательным нетривиальным непрерывным ограниченным и монотонно возрастающим решением $\varphi(x)$. Более того

$$\varphi(x) \leqslant \begin{cases} \eta e^{\sigma x}, & x \leqslant 0, \quad \eta - \varphi \in L_1(\mathbb{R}^+), \\ \eta, & x > 0, \quad \varphi \in L_1(\mathbb{R} \setminus \mathbb{R}^+), \end{cases} \tag{2.8}$$

где число σ определяется из характеристического уравнения (2.4).

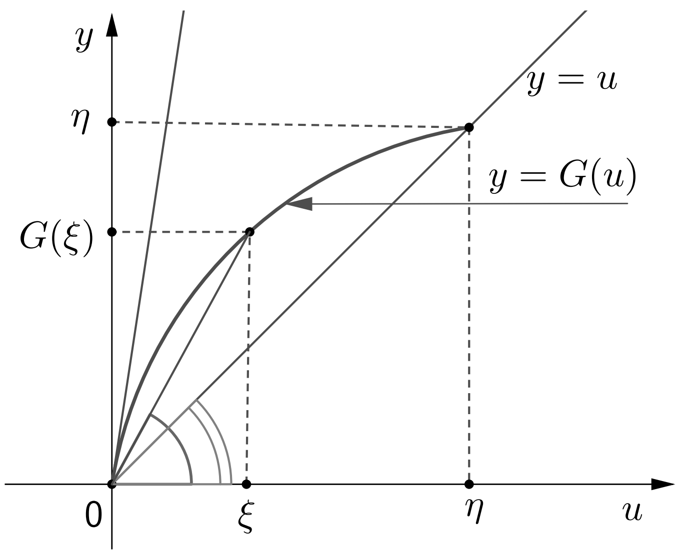

Рис. 3

3. Теорема существования

3.1. Основные условия на функцию $H(t,u)$ и формулировка теоремы существования. Относительно нелинейности $H(t,u)$ предположим выполнение следующих условий:

i) при всяком фиксированном $t \in \mathbb{R}$ функция $H(t,u)$ монотонно возрастает по u на $\mathbb{R}^+$;

j) функция $H(t,u)$ на множестве $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$ удовлетворяет условию Каратеодори по аргументу u, т. е. при всяком фиксированном $u \in \mathbb{R}^+$ функция $H(t,u)$ измерима по t на $\mathbb{R}$ и почти при всех $t \in \mathbb{R}$ данная функция непрерывна по u на множестве $\mathbb{R}^+$;

k) существует число $\delta \in (\sigma, \lambda^*]$ и измеримая неотрицательная ограниченная на $\mathbb{R}$ функция $\beta(t)$ со свойством

$$\beta(t)e^{-\delta t} \in L_1(\mathbb{R}) \cap M(\mathbb{R}) \tag{3.1}$$

такие, что

$$G(u) \leqslant H(t,u) \leqslant G(u) + \beta(t), \quad t \in \mathbb{R},\ u \in \mathbb{R}^+, \tag{3.2}$$

где $G(u)$ обладает свойствами $a)$–$d)$.

Справедлива следующая теорема.

Теорема 3.1. *При условиях* $I)$–$III)$, (2.3), $i)$, $j)$, $k)$ *уравнение* (1.1) *обладает неотрицательным, нетривиальным и ограниченным на* $\mathbb{R}$ *решением* $f(x)$. *Более того* $(f(x) - \varphi(x))e^{-\delta x} \in L_1(-\infty, 0) \cap M(-\infty, 0)$, *где* $\varphi(x)$ *— неотрицательное, непрерывное, ограниченное, монотонно возрастающее на* $\mathbb{R}$ *решение уравнения* (2.7), *обладающее свойством* (2.8).

3.2. Доказательство теоремы 3.1. Сперва наряду с уравнением (1.1) рассмотрим второе вспомогательное нелинейное интегральное уравнение на $\mathbb{R}$:

$$\phi(x) = g(x) + \int_{-\infty}^{\infty} K(x-t)G(\phi(t))dt, \quad x \in \mathbb{R}, \tag{3.3}$$

относительно искомой функции $\phi(x)$, где

$$g(x) = \int_{-\infty}^{\infty} K(x-t)\beta(t)dt, \quad x \in \mathbb{R}. \tag{3.4}$$

Так как $\beta \in M(\mathbb{R})$, то в силу условия $I)$ из (3.4) получаем, что $g \in M(\mathbb{R})$. Убедимся, что

$$g(x)e^{-\delta x} \in L_1(\mathbb{R}) \cap M(\mathbb{R}). \tag{3.5}$$

Действительно, с учетом (3.1) и определения функции Дикмана из (3.4) будем иметь

$$0 \leqslant g(x)e^{-\delta x} \leqslant \sup_{t\in\mathbb{R}}(\beta(t)e^{-\delta t}) \int_{-\infty}^{\infty} K(x-t)e^{-\delta(x-t)}dt = \sup_{t\in\mathbb{R}}(\beta(t)e^{-\delta t})\frac{L(\delta)}{G'(0)} < +\infty.$$

С другой стороны используя теорему Фубини (см. [4]) получаем, что

$$\int_{-\infty}^{\infty} g(x)e^{-\delta x}dx = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\delta x} \int_{-\infty}^{\infty} K(x-t)e^{\delta t}\beta(t)e^{-\delta t}dtdx =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \beta(t)e^{-\delta t} \int_{-\infty}^{\infty} K(x-t)e^{-\delta(x-t)}dxdt = \frac{L(\delta)}{G'(0)} \int_{-\infty}^{\infty} \beta(t)e^{-\delta t}dt < +\infty.$$

Следовательно, включение (3.5) доказано.

Рассмотрим теперь следующие итерации для вспомогательного уравнения (3.3):

$$\begin{gathered} \phi_{n+1}(x) = g(x) + \int_{-\infty}^{\infty} K(x-t)G(\phi_n(t))dt, \quad x \in \mathbb{R}, \\ \phi_0(x) = g(x), \quad n = 0, 1, 2, \ldots \end{gathered} \tag{3.6}$$

Индукцией по n легко можно проверить, что

$$\phi_n(x) \uparrow \text{ по } n. \tag{3.7}$$

Обозначим через

$$c_0 := \sup_{t\in\mathbb{R}} \beta(t) < +\infty \tag{3.8}$$

и убедимся, что

$$\phi_n(x) \leqslant \xi, \quad n = 0, 1, 2, \ldots, \quad x \in \mathbb{R}, \tag{3.9}$$

где число ξ единственным образом определяется из характеристического уравнения $G(u) = u - c_0$ (см. лемму).

В случае $n = 0$ неравенство (3.9) сразу следует из $\xi = G(\xi) + c_0 \geqslant c_0 \geqslant g(x)$, $x \in \mathbb{R}$. Предположим, что $\phi_n(x) \leqslant \xi$, $x \in \mathbb{R}$ при некотором $n \in \mathbb{N}$. Тогда, учитывая вспомогательную лемму, условие I) и монотонность функции G, из (3.6) получим

$$\phi_{n+1}(x) \leqslant g(x) + \int\limits_{-\infty}^{\infty} K(x-t)G(\xi)dt \leqslant c_0 + G(\xi) = \xi.$$

Индукцией также можно убедиться, что все элементы функциональной последовательности $\{\phi_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ представляют из себя измеримые функции. Ниже индукцией по n докажем, что

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-\delta x}\phi_n(x)dx \leqslant \frac{\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-\delta x}g(x)dx}{1-L(\delta)}, \; \delta \in (\sigma, \lambda^*], \; n = 0, 1, 2, \ldots \tag{3.10}$$

Так как $L(\delta) < 1$, то неравенство (3.10) в случае $n = 0$ выполняется совершенно очевидным образом. Предположим, что (3.10) имеет место при некотором натуральном n. Тогда, учитывая условия I), a), b), а также (2.1), (2.5) из (3.6) для произвольных чисел $\delta_1, \delta_2 \in \mathbb{R}$ имеем

$$\int\limits_{\delta_1}^{\delta_2} e^{-\delta x}\phi_{n+1}(x)dx \leqslant \int\limits_{\delta_1}^{\delta_2} e^{-\delta x}g(x)dx + G'(0)\int\limits_{\delta_1}^{\delta_2} e^{-\delta x}\int\limits_{-\infty}^{\infty} K(x-t)\phi_n(t)dtdx \leqslant$$

$$\leqslant \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-\delta x}g(x)dx + G'(0)\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-\delta t}\phi_n(t)\int\limits_{\delta_1}^{\delta_2} K(x-t)e^{-\delta(x-t)}dxdt \leqslant \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-\delta x}g(x)dx +$$

$$+ G'(0)\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-\delta t}\phi_n(t)dt\int\limits_{-\infty}^{\infty} K(y)e^{-\delta y}dy = \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-\delta x}g(x)dx + L(\delta)\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-\delta t}\phi_n(t)dt \leqslant$$

$$\leqslant \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-\delta x}g(x)dx + \frac{L(\delta)\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-\delta x}g(x)dx}{1-L(\delta)} = \frac{\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-\delta x}g(x)dx}{1-L(\delta)}.$$

Устремляя $\delta_1 \to -\infty, \delta_2 \to +\infty$ приходим к неравенству:

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \phi_{n+1}(x)e^{-\delta x}dx \leqslant \frac{\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-\delta x}g(x)dx}{1-L(\delta)}.$$

Таким образом, из (3.7) и (3.9) получаем поточечную сходимость функциональной последовательности $\{\phi_n(x)\}_{n=0}^{\infty} : \lim\limits_{n\to\infty} \phi_n(x) = \phi(x)$, причем

$$g(x) \leqslant \phi(x) \leqslant \xi, \quad x \in \mathbb{R}. \tag{3.11}$$

Из (3.11), (3.10) и условия a) в силу предельной теоремы Б. Леви (см. [4]) получаем, что $\phi(x)$ удовлетворяет уравнению (3.3) и

$$\int_{-\infty}^{\infty} \phi(x)e^{-\delta x}dx \leqslant \frac{\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\delta x}g(x)dx}{1-L(\delta)}. \tag{3.12}$$

Вернемся теперь к основному уравнению (1.1).

Введем следующие последовательные приближения для уравнения (1.1):

$$\begin{gathered} f_{n+1}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} K(x-t)H(t, f_n(t))dt, \\ f_0(x) = \varphi(x), \quad n = 0, 1, 2, \ldots, \quad x \in \mathbb{R}. \end{gathered} \tag{3.13}$$

Используя неотрицательность ядра K, левую часть двустороннего неравенства (3.2) и тот факт, что $\varphi(x)$ является решением уравнения (2.7), из (3.13) получим, что $f_1(x) \geqslant \varphi(x) = f_0(x)$. Предполагая, что $f_n(x) \geqslant f_{n-1}(x)$ при некотором $n \in \mathbb{N}$, используя условие i), а также неотрицательность ядра K, из (3.13) будем иметь

$$f_{n+1}(x) \geqslant \int_{-\infty}^{\infty} K(x-t)H(t, f_{n-1}(t))dt = f_n(x).$$

Итак, мы доказали, что

$$f_n(x) \uparrow \text{ по } n. \tag{3.14}$$

Учитывая условие Каратеодори (см. условие j)), индукцией по n несложно доказать, что все элементы итерационной последовательности $\{f_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ являются измеримыми на $\mathbb{R}$ функциями.

Ниже подробно докажем, что

$$f_n(x) \leqslant \varphi(x) + \phi(x), \quad n = 0, 1, 2, \ldots, \quad x \in \mathbb{R}. \tag{3.15}$$

Оценка (3.15) для нулевого приближения сразу следует из неотрицательности функции $\phi(x)$. Предположим, что (3.15) имеет место при некотором натуральном n. Тогда, учитывая условия $i), k)$, неотрицательность ядра K, соотношения (2.7) и (3.3), а также следующее легко проверяемое неравенство для выпуклых (вверх) и неотрицательных функций (см. [5]): $G(u+v) \leqslant G(u)+G(v)$, $u, v \in \mathbb{R}^+$, из (3.13) будем иметь

$$f_{n+1}(x) \leqslant \int_{-\infty}^{\infty} K(x-t)H(t, \varphi(t)+\phi(t))dt \leqslant \int_{-\infty}^{\infty} K(x-t)(G(\varphi(t)+\phi(t))+\beta(t))dt \leqslant$$

$$\leqslant \int_{-\infty}^{\infty} K(x-t)G(\varphi(t))dt + \int_{-\infty}^{\infty} K(x-t)G(\phi(t))dt + g(x) = \varphi(x) + \phi(x).$$

Итак, в силу (3.14) и (3.15) заключаем, что последовательность измеримых функций $\{f_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ имеет поточечный предел при $n \to +\infty$:

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x),$$

причем

$$\varphi(x) \leqslant f(x) \leqslant \varphi(x) + \phi(x), \quad x \in \mathbb{R}. \tag{3.16}$$

Согласно теореме Б. Леви, $f(x)$ удовлетворяет уравнению (1.1) почти всюду на $\mathbb{R}$. Из (3.16) в силу (3.11) и (3.12) следует, что $e^{-\delta x}(f(x)-\varphi(x)) \in L_1(-\infty, 0)$. Убедимся, что $e^{-\delta x}(f(x)-\varphi(x))$ является ограниченной функцией на $(-\infty, 0)$. Действительно, сперва заметим, что для любого $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ имеет место оценка:

$$e^{-\delta x}\phi_n(x) \leqslant \frac{\sup\limits_{x\in\mathbb{R}}(e^{-\delta x}g(x))}{1-L(\delta)}, \quad x \in \mathbb{R}. \tag{3.17}$$

Доказательство последнего неравенства осуществляется аналогичным образом, как доказательство оценки (3.10). Из (3.17) сразу следует, что

$$\sup_{x\in\mathbb{R}}(e^{-\delta x}\phi(x)) < +\infty. \tag{3.18}$$

Учитывая (3.16) и (3.18), получаем, что $e^{-\delta x}(f(x)-\varphi(x)) \in M(-\infty,0)$. Теорема полностью доказана.

4. Асимптотическое поведение решения на $+\infty$

В этом разделе при дополнительном ограничении на функцию $H(t,u)$ мы докажем, что

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \xi, \quad \xi - f \in L_1(\mathbb{R}^+). \tag{4.1}$$

Во-первых, предположим, что в условии $k)$ функция $\beta(t)$ удовлетворяет дополнительному ограничению:

$$\lim_{t\to+\infty}\beta(t) = \sup_{t\in\mathbb{R}}\beta(t) := c_0, \tag{4.2}$$

$$c_0 - \beta \in L_1(\mathbb{R}^+). \tag{4.3}$$

Предположим также, что функция $H(t,u)$, помимо условий $i), j), k)$, удовлетворяет ограничению

$$H_0(t,u) := \frac{H(t,u)-G(u)}{\beta(t)}$$

и монотонно возрастает по u на $\mathbb{R}^+$, причем существуют числа $\Delta_0 \in (0, \min\{\varepsilon\sigma, \lambda^* - \sigma\})$ и

$$M > \max\left\{\eta, \frac{c\eta^{1+\varepsilon}L(\sigma+\Delta_0)}{G'(0)(1-L(\sigma+\Delta_0))}\right\}$$

(определения чисел c и ε см. в условии $d)$) такие, что

$$1 - H_0(t,\mathcal{L}(t)) \in L_1(\mathbb{R}^+), \tag{4.4}$$

где

$$\mathcal{L}(t) := \max\{\eta e^{\sigma t} - Me^{(\sigma+\Delta_0)t}, 0\}. \tag{4.5}$$

Имеет место следующая теорема.

Теорема 4.1. *При условиях теоремы* 3.1, *если выполняются* (4.2)–(4.4) *и* $H_0(t,u)\uparrow$ *по* u *на* $\mathbb{R}^+$, *то решение уравнения* (1.1) *обладает дополнительными свойствами* (4.1).

Доказательство. Сперва отметим, что из результатов работы [15] (см. теорему 3.1) следует, что решение уравнения (2.7) удовлетворяет следующей оценке снизу:

$$\varphi(x) \geqslant \mathcal{L}(x), \quad x\in\mathbb{R}. \tag{4.6}$$

С другой стороны, так как $\varphi(x)\uparrow\eta$, $x\to+\infty$, то существует число $r>0$ такое, что

$$\varphi(x) \geqslant \frac{\eta}{2} \text{ при } x \geqslant r. \tag{4.7}$$

Зафиксируем число $r>0$. Ниже убедимся, что существует число $\alpha\in(0,1)$ такое, что

$$G(\xi)-G(u) \leqslant \alpha(\xi-u) \tag{4.8}$$

для всех $u \in \left[\frac{\eta}{2},\xi\right]$.

Действительно, в силу выпуклости (вверх) функции G, с учетом неравенства $\xi>\eta$ (см. лемму) имеем (см. рис. 4):

$$\frac{G(\xi)-G(u)}{\xi-u} \leqslant \frac{G(\xi)}{\xi} := \alpha \in (0,1).$$

Несложно проверить, что если $f(x)$ — решение уравнения (1.1), являющегося поточечным пределом последовательных приближений (3.13), то

$$f(x) \leqslant \xi, \quad x\in\mathbb{R}. \tag{4.9}$$

Действительно, неравенство $f_0(x)\leqslant\xi$ сразу следует из определения нулевого приближения в итерациях (3.13) с учетом свойств функции φ и оценки $\xi<\eta$. Предполагая, что $f_n(x)\leqslant\xi$, $x\in\mathbb{R}$

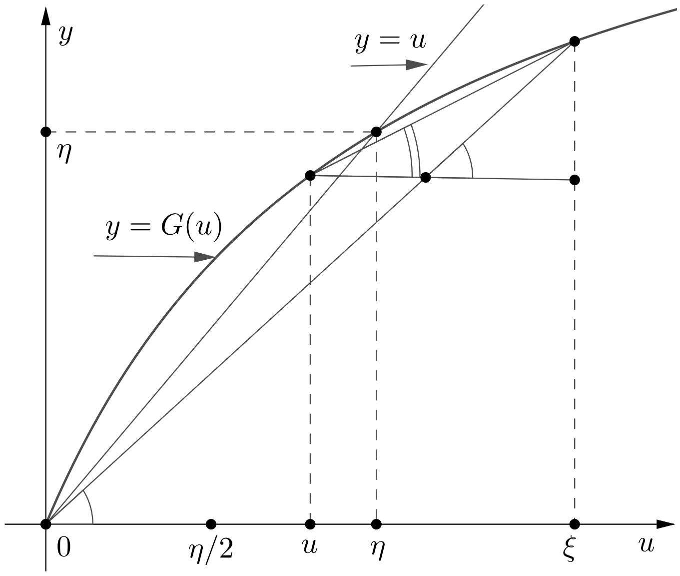

Рис. 4

для некоторого $n \in \mathbb{N}$, и при этом учитывая условия $i), k), I)$ и вспомогательную лемму из (3.13), получим

$$f_{n+1}(x) \leqslant \int_{-\infty}^{\infty} K(x-t)H(t,\xi)dt \leqslant \int_{-\infty}^{\infty} K(x-t)(G(\xi)+\beta(t))dt \leqslant G(\xi)+c_0=\xi, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Устремляя $n \to \infty$ в неравенстве $f_n(x) \leqslant \xi$, приходим к (4.9).

Учитывая $I)$, (3.16), (4.6) и монотонность функции $H_0(t,u)$ по u, оценим следующую разность:

$$0 \leqslant \xi - f(x) = G(\xi)+c_0-\int_{-\infty}^{\infty} K(x-t)H(t,f(t))dt =$$

$$= G(\xi)+c_0-\int_{-\infty}^{\infty} K(x-t)(G(f(t))+\beta(t)H_0(t,f(t)))dt =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} K(x-t)(G(\xi)-G(f(t)))dt + \int_{-\infty}^{\infty} K(x-t)(c_0-\beta(t)H_0(t,f(t)))dt \leqslant$$

$$\leqslant G(\xi)\int_{-\infty}^{0} K(x-t)dt + \int_{0}^{r} K(x-t)(G(\xi)-G(f(t)))dt + \int_{r}^{\infty} K(x-t)(G(\xi)-G(f(t)))dt +$$

$$+ \int_{-\infty}^{\infty} K(x-t)(c_0-\beta(t))dt + \int_{-\infty}^{\infty} K(x-t)\beta(t)(1-H_0(t,f(t)))dt \leqslant$$

$$\leqslant (\xi+c_0)\int_{x}^{\infty} K(y)dy + (\xi+c_0)\int_{0}^{r} K(x-t)dt + c_0\int_{x}^{\infty} K(y)dy +$$

$$+ \int_{0}^{\infty} K(x-t)(c_0-\beta(t))dt + c_0\int_{-\infty}^{\infty} K(x-t)(1-H_0(t,f(t)))dt + \int_{r}^{\infty} K(x-t)(G(\xi)-G(f(t)))dt \leqslant$$

$$\leqslant (\xi+3c_0)\int_{x}^{\infty} K(y)dy + (\xi+c_0)\int_{x-r}^{\infty} K(y)dy + \int_{0}^{\infty} K(x-t)(c_0-\beta(t))dt +$$

$$+ c_0 \int_0^\infty K(x-t)(1-H_0(t,f(t)))dt + \int_r^\infty K(x-t)(G(\xi)-G(f(t)))dt \leqslant$$

$$\leqslant \tilde{g}(x) + \int_r^\infty K(x-t)(G(\xi)-G(f(t)))dt,$$

где

$$\tilde{g}(x) := (\xi + 3c_0)\int_x^\infty K(y)dy + (\xi + c_0)\int_{x-r}^\infty K(y)dy +$$
$$+ \int_0^\infty K(x-t)(c_0-\beta(t))dt + c_0\int_0^\infty K(x-t)\beta(t)(1-H_0(t,\mathcal{L}(t)))dt, \ x \in \mathbb{R}. \tag{4.10}$$

Так как $\int\limits_0^\infty xK(x)dx < +\infty$, то в силу (4.3) и (4.4) из (4.10) согласно теореме Фубини следует, что

$$\tilde{g} \in L_1(\mathbb{R}^+). \tag{4.11}$$

Итак, мы получили следующую оценку:

$$0 \leqslant \xi - f(x) \leqslant \tilde{g}(x) + \int_r^\infty K(x-t)(G(\xi)-G(f(t)))dt, \ x \in \mathbb{R}, \tag{4.12}$$

где $\tilde{g}(x)$ задается по формуле (4.10) и обладает свойством (4.11).

Пусть $R > r$ — произвольное число. Интегрируя обе части неравенства (4.12) по x в пределах от r до R и при этом используя неравенства (3.16), (4.7), (4.8), а также включение (4.11), будем иметь

$$0 \leqslant \int_r^R (\xi - f(x))dx \leqslant \int_r^R \tilde{g}(x)dx + \alpha \int_r^R \int_r^\infty K(x-t)(\xi - f(t))dtdx \leqslant$$

$$\leqslant \int_r^\infty \tilde{g}(x)dx + \alpha \int_r^R \int_r^R K(x-t)(\xi - f(t))dtdx + \alpha\xi \int_r^R \int_R^\infty K(x-t)dtdx \leqslant$$

$$\leqslant \int_r^\infty \tilde{g}(x)dx + \alpha\xi \int_0^R \int_{R-x}^\infty K(-y)dydx + \alpha \int_r^R (\xi - f(t))dt \int_{-\infty}^\infty K(u)du =$$

$$= \int_r^\infty \tilde{g}(x)dx + \alpha\xi \int_0^R \int_z^\infty K(-y)dydz + \alpha \int_r^R (\xi - f(t))dt \leqslant$$

$$\leqslant \int_r^\infty \tilde{g}(x)dx + \alpha\xi \int_0^\infty \int_z^\infty K(-y)dydz + \alpha \int_r^R (\xi - f(t))dt =$$

$$= \int_r^\infty \tilde{g}(x)dx + \alpha\xi \int_0^\infty K(-y)ydy + \alpha \int_r^R (\xi - f(t))dt.$$

Из полученного неравенства следует, что

$$\int_r^R (\xi - f(t))dt \leqslant \frac{\int\limits_r^\infty \tilde{g}(x)dx + \alpha\xi \int\limits_0^\infty K(-y)ydy}{1-\alpha}. \tag{4.13}$$

В (4.13), устремляя $R \to +\infty$, получаем, что $\xi - f \in L_1(r, +\infty)$ и

$$\int_r^\infty (\xi - f(t))dt \leqslant \frac{\int_r^\infty \tilde{g}(x)dx + \alpha\xi \int_0^\infty K(-y)ydy}{1-\alpha}.$$

Так как $\varphi, \phi \in L_1^{loc}(\mathbb{R}^+)$, то из (3.16) следует, что $f \in L_1(0, r)$.

Таким образом, $\xi - f \in L_1(\mathbb{R}^+)$.

Для завершения доказательства осталось проверить предельное соотношение $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \xi$. С этой целью воспользуемся следующим известным предельным соотношением для операции свертки. Хорошо известно (см., например, [8]), что если $u, v \in L_1(\mathbb{R}) \cap M(\mathbb{R})$, то свертка

$$(u * v)(x) := \int_{-\infty}^\infty u(x-t)v(t)dt \to 0 \tag{4.14}$$

при $x \to \pm\infty$.

Введем обозначения

$$Q(t) := (c_0 - \beta(t) + c_0(1 - H(t, \mathcal{L}(t))))I_{(0,+\infty)}(t), \tag{4.15}$$

$$F(t) := (\xi - f(t))I_{(r,+\infty)}(t), \tag{4.16}$$

где $I_A(t)$ — индикатор множества A:

$$I_A(t) := \begin{cases} 1, & t \in A, \\ 0, & t \notin A. \end{cases}$$

В силу (4.2)–(4.4), (4.9), с учетом включения $\xi - f \in L_1(r, +\infty)$ можно утверждать, что

$$Q, F \in L_1(\mathbb{R}) \cap M(\mathbb{R}). \tag{4.17}$$

Следовательно, учитывая условие I) и формулу (4.10), в силу (4.14) получим при $x \to +\infty$

$$\tilde{g}(x) = (\xi + 3c_0)\int_x^\infty K(y)dy + (\xi + c_0)\int_{x-r}^\infty K(y)dy + \int_{-\infty}^\infty K(x-t)Q(t)dt \to 0. \tag{4.18}$$

С другой стороны, если учесть (3.16), (4.7), (4.8), (4.16), (4.17) и предельное соотношение (4.14), то будем иметь при $x \to +\infty$

$$0 \leqslant \int_r^\infty K(x-t)(G(\xi) - G(f(t)))dt \leqslant \alpha \int_r^\infty K(x-t)(\xi - f(t))dt = \alpha \int_{-\infty}^\infty K(x-t)F(t)dt \to 0. \tag{4.19}$$

Таким образом, из (4.18), (4.19) и (4.12) получаем, что $\lim\limits_{x\to+\infty}(\xi - f(x)) = 0$. □

5. Единственность решения уравнения (1.1) в одном частном случае

Предположим, что нелинейность $H(t, u)$ допускает следующее частное представление:

$$H(t, u) = G(u) + \beta(t)G_0(u), \tag{5.1}$$

где $G(u)$ обладает свойствами a)–d), $\beta(t)$ удовлетворяет условиям теоремы 3.1, а $G_0(u)$ — определенная на $\mathbb{R}$ непрерывная функция со следующими свойствами:

p_1) $G_0(0) = 0$, $G_0(u) \uparrow$ на $\mathbb{R}^+$;

p_2) существует производная $G_0'(0)$, причем

$$G_0'(0) < \frac{G'(0)(1 - L(\delta))}{c_0 L(\delta)} \tag{5.2}$$

(определения чисел c_0 и δ см. в (3.8) и в k));

p_3) $G_0(u) \leqslant 1$, $u \in \mathbb{R}^+$ и $G_0(u)$ выпукла вверх на $\mathbb{R}^+$.

Замечание 5.1. Прямой проверкой можно убедиться, что если $G_0(u)$ удовлетворяет условиям p_1)–p_3), то для представления (5.1) функции $H(t, u)$ выполняются условия i), j), k).

Ниже докажем следующую теорему единственности.

Теорема 5.1. *Пусть в уравнении* (1.1) *нелинейность* $H(t,u)$ *допускает представление* (5.1), *где* G *и* G_0 *обладают соответственно свойствами* $a)$–$d)$ *и* $p_1)$–$p_3)$, *а* $\beta(t)$ — *неотрицательная измеримая функция, удовлетворяющая условиям* (3.1), (3.8). *Тогда уравнение* (1.1) *не может иметь более одного решения в следующем классе измеримых функций*:

$$\mathfrak{M} := \{f(x) : \varphi(x) \leqslant f(x) \leqslant \varphi(x) + \phi(x),\ x \in \mathbb{R}\},$$

где φ *и* ϕ *являются решениями уравнений* (2.7) *и* (3.3), *соответственно.*

Доказательство. Предположим обратное: существует два решения уравнения (1.1): $f, \tilde{f} \in \mathfrak{M}$. Так как $\phi(x)e^{-\delta x} \in L_1(\mathbb{R}) \cap M(\mathbb{R})$, $\delta \in (\sigma, \lambda^*]$ (см. доказательства теоремы 3.1), то из определения класса $\mathfrak{M}$ сразу следует, что

$$B_\delta(x) := e^{-\delta x}|f(x) - \tilde{f}(x)| \in L_1(\mathbb{R}) \cap M(\mathbb{R}). \tag{5.3}$$

Учитывая (5.1) и (1.1), оценим разность:

$$B_\delta(x) \leqslant e^{-\delta x}\int\limits_{-\infty}^{\infty} K(x-t)|G(f(t)) - G(\tilde{f}(t))|dt + e^{-\delta x}\int\limits_{-\infty}^{\infty} K(x-t)\beta(t)|G_0(f(t)) - G_0(\tilde{f}(t))|dt. \tag{5.4}$$

Из выпуклости (вверх) функций G и G_0 с учетом условий $a)$–$d)$, $p_1)$–$p_3)$ следует, что

$$|G(u_1) - G(u_2)| \leqslant G'(0)|u_1 - u_2|, \quad |G_0(u_1) - G_0(u_2)| \leqslant G_0'(0)|u_1 - u_2|, \quad u_1, u_2 \in \mathbb{R}^+.$$

Из (5.4), (5.3), (3.8) с учетом последних двух неравенств и определения величины $L(\delta)$ будем иметь

$$B_\delta(x) \leqslant G'(0)\int\limits_{-\infty}^{\infty} K(x-t)e^{-\delta(x-t)}B_\delta(t)dt +$$

$$+ c_0G_0'(0)\int\limits_{-\infty}^{\infty} K(x-t)e^{-\delta(x-t)}B_\delta(t)dt \leqslant \sup_{t\in\mathbb{R}} B_\delta(t)\left(L(\delta) + \frac{c_0G_0'(0)L(\delta)}{G'(0)}\right),$$

откуда следует, что

$$\left(1 - L(\delta) - \frac{c_0G_0'(0)L(\delta)}{G'(0)}\right)\sup_{t\in\mathbb{R}} B_\delta(t) \leqslant 0. \tag{5.5}$$

Так как $G_0'(0) < \dfrac{G'(0)(1 - L(\delta))}{c_0L(\delta)}$, то из (5.5) и (5.3) получаем, что $f(x) = \tilde{f}(x)$ почти всюду на $\mathbb{R}$. Теорема доказана. □

Замечание 5.2. Следует отметить, что вопрос единственности решения уравнения (1.1) в классе $\mathfrak{M}$ для общих нелинейностей $H(t,u)$, удовлетворяющих условиям $i), j), k)$, до сих пор остается открытой проблемой.

6. Примеры

Для полноты и наглядности изложения ниже приведем конкретные прикладные примеры ядра K и нелинейности H.

Сперва приведем конкретные примеры нелинейности G и функции β.

Примеры $G(u)$. В математической теории пространственно-временного распространения эпидемии функция $G(u)$ допускает следующее представление (см. [11]): $G(u) = \gamma(1 - e^{-u})$, $u \in \mathbb{R}$, где $\gamma > 1$ — числовой параметр.

Несложно проверить, что тогда $G(u)$ удовлетворяет условиям $a)$–$d)$.

Приведем также чисто математический пример функции $G(u)$, удовлетворяющий условиям $a)$–$d)$:

$$G(u) = \frac{u + \gamma(1 - e^{-u})}{2}, \quad u \in \mathbb{R}, \quad \gamma > 1.$$

Примеры функции $\beta(t)$. Сперва приведем примеры функции $\beta(t)$, удовлетворяющих условиям теорем 3.1 и 5.1.

Легко можно проверить, что например функции вида

$$\beta(t) = e^{-t^2}, \quad t \in \mathbb{R}; \qquad \beta(t) = e^{-\rho|t|}, \quad \rho > \delta$$

удовлетворяют условиям доказанных теорем 3.1 и 5.1. Теперь приведем пример функции $\beta(t)$ для теоремы 4.1:

$$\beta(t) = 1 + th(lt) := \frac{2e^{2lt}}{e^{2lt}+1}, \quad t \in \mathbb{R}, \tag{6.1}$$

где $l > \dfrac{\delta}{2}$ — параметр.

Подробно остановимся на примере (6.1).

Во-первых, совершенно очевидно, что

$$0 < \beta(t) < 2, \quad t \in \mathbb{R}; \qquad \sup_{x\in\mathbb{R}} \beta(t) = \lim_{t\to+\infty} \beta(t) = 2.$$

С другой стороны, так как $\delta < 2l$, то

$$e^{-\delta t}\beta(t) = \frac{2e^{(2l-\delta)t}}{e^{2lt}+1} \in L_1(\mathbb{R}) \cap M(\mathbb{R}).$$

Осталось заметить, что

$$2 - \beta(t) = \frac{2}{e^{2lt}+1} \in L_1(\mathbb{R}^+).$$

Теперь приведем примеры для $H(t,u)$.

Примеры для $H(t,u)$. Сначала приведем примеры, удовлетворяющие условиям теоремы 3.1:

$$H(t,u) = \sqrt{G(u)(G(u)+\beta(t))}, \quad u \in \mathbb{R}^+, \quad t \in \mathbb{R},$$
$$H(t,u) = \frac{2G(u)(G(u)+\beta(t))}{2G(u)+\beta(t)}, \quad u \in \mathbb{R}^+, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Приведем также примеры для функции $G_0(u)$:

$$G_0(u) = \alpha(1-e^{-u}), \quad u \in \mathbb{R}^+, \qquad G_0(u) = \frac{\alpha u}{u+1}, \quad u \in \mathbb{R}^+,$$

где $\alpha \in \left(0, \dfrac{G'(0)(1-L(\delta))}{c_0 L(\delta)}\right)$ — числовой параметр.

Ниже рассмотрим также два примера функции $H(t,u)$, удовлетворяющих условиям теоремы 4.1:

$$H(t,u) = G(u) + \beta(t)\left(1 - \frac{q(t)}{2}\right) u \left(u + \frac{q(t)\mathcal{L}(t)}{2(1-q(t))}\right)^{-1}, \quad u \in \mathbb{R}^+, \quad t \in \mathbb{R}, \tag{6.2}$$

$$H(t,u) = G(u) + \beta(t)\left(\left(1 - \frac{q(t)}{2}\right) u \left(u + \frac{q(t)\mathcal{L}(t)}{2(1-q(t))}\right)^{-1} + \frac{q(t)}{2}(1-e^{-u})\right), \quad u \in \mathbb{R}^+, \quad t \in \mathbb{R},$$

где функция $\mathcal{L}(t)$ задается по формуле (4.5), а $q(t)$ — произвольная измеримая на $\mathbb{R}$ функция, причем $0 < q(t) < 1$, $t \in \mathbb{R}$ и $q \in L_1(\mathbb{R}^+)$.

Проверим условие (4.4) для примера (6.2). Сперва заметим, что функция

$$H_0(t,u) := (1 - q(t)2)\, u \left(u + \frac{q(t)\mathcal{L}(t)}{2(1-q(t))}\right)^{-1}$$

монотонно возрастает по u на $\mathbb{R}^+$, ибо

$$\frac{\partial H_0}{\partial u} = \left(1 - \frac{q(t)}{2}\right) \frac{q(t)\mathcal{L}(t)}{2(1-q(t))} \left(u + \frac{q(t)\mathcal{L}(t)}{2(1-q(t))}\right)^{-2} = \frac{(2-q(t))(1-q(t))q(t)\mathcal{L}(t)}{(2(1-q(t))u + q(t)\mathcal{L}(t))^2} \geqslant 0.$$

Очевидно, что $H_0(t,u) \leqslant 1$ и $H_0(t,\mathcal{L}(t)) = 1 - q(t)$. Так как $q \in L_1(\mathbb{R}^+)$, то $1 - H_0(t,\mathcal{L}(t)) \in L_1(\mathbb{R}^+)$.

В конце приведем также один прикладной пример ядра K и на этом примере покажем, что выполняются условия $I)$–$III)$ и (2.3).

Пример ядра K. Рассмотрим функцию

$$K(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-(x-1)^2}, \quad x \in \mathbb{R}. \tag{6.3}$$

С помощью стандартных рассуждений можно проверить выполнение условий $I)$–$III)$. Проверим неравенство (2.3). В данном случае функция Дикмана $L(\lambda)$ имеет следующий вид:

$$L(\lambda) = \frac{G'(0)}{\sqrt{\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-(t-1)^2} e^{-\lambda t} dt = G'(0) e^{\frac{\lambda^2}{4} - \lambda}.$$

Предположим, что $G'(0) \in (1, e)$. Совершенно очевидно, что $L(\lambda) \downarrow$ на отрезке $[0, 2]$, выпукла вниз на $\mathbb{R}^+$, и если в качестве λ^* выбрать число $\lambda^* = 2$, то $L(\lambda^*) = G'(0)e^{-1} < 1$.

После простых вычислений находим также число $\sigma = 2 - 2\sqrt{1 - \ln G'(0)} \in (0, 2)$. Например, когда $G'(0) = 2$, получим $\sigma \approx 0{,}894$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Владимиров В. С., Волович Я. И.* О нелинейном уравнении динамики в теории p-адической струны// Теор. мат. физ. — 2004. — *138*, № 3. — С. 355–368.
2. *Енгибарян Н. Б.* Об одной задаче нелинейного переноса излучения// Астрофизика. — 1966. — *2*, № 1. — С. 31–36.
3. *Жуковская Л. В.* Итерационный метод решения нелинейных интегральных уравнений, описывающих роллинговые решения в теории струн// Теор. мат. физ. — 2006. — *146*, № 3. — С. 402–409.
4. *Колмогоров А. Н., Фомин С. В.* Элементы теории функций и функционального анализа. — М.: Наука, 1976.
5. *Хачатрян А. Х., Хачатрян Х. А., Петросян А. С.* Асимптотическое поведение решения для одного класса нелинейных интегро-дифференциальных уравнений в задаче распределения дохода// Тр. Ин-та мат. и мех. УрО РАН. — 2021. — *27*, № 1. — С. 188–206.
6. *Хачатрян Х. А.* О разрешимости некоторых классов нелинейных интегральных уравнений в теории p-адической струны// Изв. РАН. Сер. мат. — 2018. — *82*, № 2. — С. 172–193.
7. *Arabadzhyan L. G.* Solutions of certain integral equations of the Hammerstein type// J. Contemp. Math. Anal. — 1997. — *32*, № 1. — С. 17–24.
8. *Arabadzhyan L. G., Khachatryan A. S.* A class of integral equations of convolution type// Sb. Math. — 2007. — *198*, № 7. — С. 949–966.
9. *Barbour A. D.* The uniqueness of Atkinson and Reuter's epidemic waves// Math. Proc. Cambridge Phil. Soc. — 1977. — *82*, № 1. — С. 127–130.
10. *Cercignani C.* The Boltzmann Equation and Applications. — New York: Springer, 1988.
11. *Diekmann O.* Thresholds and travelling waves for the geographical spread of infection// J. Math. Biol. — 1978. — *6*, № 2. — С. 109–130.
12. *Khachatryan A. Kh., Khachatryan Kh. A.* Solvability of a nonlinear model Boltzmann equation in the problem of a plane shock wave// Theoret. and Math. Phys. — 2016. — *189*, № 2. — С. 1609–1623.
13. *Khachatryan A. Kh., Khachatryan Kh. A.* On the solvability of some nonlinear integral equations in problems of epidemic spread// Proc. Steklov Inst. Math. — 2019. — *306*. — С. 271–287.
14. *Khachatryan Kh. A.* Positive solubility of some classes of non-linear integral equations of Hammerstein type on the semi-axis and on the whole line// Izv. Math. — 2015. — *79*, № 2. — С. 411–430.
15. *Khachatryan Kh. A., Petrosyan H. S.* On the solvability of a class of nonlinear Hammerstein–Stieltjes integral equations on the whole line// Proc. Steklov Inst. Math. — 2020. — *308*. — С. 238–249.
16. *Khachatryan Kh. A., Petrosyan H. S.* Some integral equations on the whole line with monotone nonlinearity and a difference kernel// J. Math. Sci. (N. Y.). — 2021. — *255*, № 6. — С. 790–804.

Хачатрян Хачатур Агавардович
Ереванский государственный университет, Ереван, Армения;
Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, Москва, Россия
E-mail: khachatur.khachatryan@ysu.am, Khach82@rambler.ru

Петросян Айкануш Самвеловна
Национальный аграрный университет Армении, Ереван, Армения;
Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, Москва, Россия
E-mail: Haykuhi25@mail.ru

DOI: 10.22363/2413-3639-2022-68-2-376-391 UDC 517.968.4

Asymptotic Behavior of the Solution for One Class of Nonlinear Integral Equations of Hammerstein Type on the Whole Axis

© 2022 **Kh. A. Khachatryan, H. S. Petrosyan**

Abstract. A class of nonlinear integral equations on the whole axis with a noncompact integral operator of Hammerstein type is investigated. This class of equations has applications in various fields of natural science. In particular, such equations are found in mathematical biology, in the kinetic theory of gases, in the theory of radiation transfer, etc. The existence of a nonnegative nontrivial and bounded solution is proved. The asymptotic behavior of the constructed solution on $\pm\infty$ is studied. In one important special case, the uniqueness of the constructed solution in a certain weighted space is established. At the end of the work, specific applied examples of the equations under study are given.

REFERENCES

1. V. S. Vladimirov and Ya. I. Volovich, "O nelineynom uravnenii dinamiki v teorii p-adicheskoy struny" [On the nonlinear equation of dynamics in the theory of p-adic strings], *Teor. mat. fiz.* [Theor. Math. Phys.], 2004, **138**, No. 3, 355–368 (in Russian).
2. N. B. Engibaryan, "Ob odnoy zadache nelineynogo perenosa izlucheniya" [On one problem of nonlinear radiation transfer], *Astrofizika* [Astrophysics], 1966, **2**, No. 1, 31–36 (in Russian).
3. L. V. Zhukovskaya, "Iteratsionnyy metod resheniya nelineynykh integral'nykh uravneniy, opisyvayushchikh rollingovye resheniya v teorii strun" [An iterative method for solving nonlinear integral equations describing rolling solutions in string theory], *Teor. mat. fiz.* [Theor. Math. Phys.], 2006, **146**, No. 3, 402–409 (in Russian).
4. A. N. Kolmogorov and S. V. Fomin, *Elementy teorii funktsiy i funktsional'nogo analiza* [Elements of the Theory of Functions and Functional Analysis], Nauka, Moscow, 1976 (in Russian).
5. A. Kh. Khachatryan, Kh. A. Khachatryan, and A. S. Petrosyan, "Asimptoticheskoe povedenie resheniya dlya odnogo klassa nelineynykh integro-differentsial'nykh uravneniy v zadache raspredeleniya dokhoda" [Asymptotic behavior of the solution for a class of nonlinear integro-differential equations in the income distribution problem], *Tr. In-ta mat. i mekh. UrO RAN* [Proc. Inst. Math. Mech. Ural Branch Russ. Acad. Sci.], 2021, **27**, No. 1, 188–206 (in Russian).
6. Kh. A. Khachatryan, "O razreshimosti nekotorykh klassov nelineynykh integral'nykh uravneniy v teorii p-adicheskoy struny" [On the solvability of some classes of nonlinear integral equations in the theory of p-adic strings], *Izv. RAN. Ser. mat.* [Bull. Russ. Acad. Sci. Ser. Math.], 2018, **82**, No. 2, 172–193 (in Russian).
7. L. G. Arabadzhyan, "Solutions of certain integral equations of the Hammerstein type," *J. Contemp. Math. Anal.*, 1997, **32**, No. 1, 17–24.
8. L. G. Arabadzhyan and A. S. Khachatryan, "A class of integral equations of convolution type," *Sb. Math.*, 2007, **198**, No. 7, 949–966.
9. A. D. Barbour, "The uniqueness of Atkinson and Reuter's epidemic waves," *Math. Proc. Cambridge Phil. Soc.*, 1977, **82**, No. 1, 127–130.
10. C. Cercignani, *The Boltzmann Equation and Applications*, Springer, New York, 1988.
11. O. Diekmann, "Thresholds and travelling waves for the geographical spread of infection," *J. Math. Biol.*, 1978, **6**, No. 2, 109–130.
12. A. Kh. Khachatryan and Kh. A. Khachatryan, "Solvability of a nonlinear model Boltzmann equation in the problem of a plane shock wave," *Theoret. and Math. Phys.*, 2016, **189**, No. 2, 1609–1623.
13. A. Kh. Khachatryan and Kh. A. Khachatryan, "On the solvability of some nonlinear integral equations in problems of epidemic spread," *Proc. Steklov Inst. Math.*, 2019, **306**, 271–287.

14. Kh. A. Khachatryan, "Positive solubility of some classes of non-linear integral equations of Hammerstein type on the semi-axis and on the whole line," *Izv. Math.*, 2015, **79**, No. 2, 411–430.
15. Kh. A. Khachatryan and H. S. Petrosyan, "On the solvability of a class of nonlinear Hammerstein–Stieltjes integral equations on the whole line," *Proc. Steklov Inst. Math.*, 2020, **308**, 238–249.
16. Kh. A. Khachatryan and H. S. Petrosyan, "Some integral equations on the whole line with monotone nonlinearity and a difference kernel," *J. Math. Sci. (N. Y.)*, 2021, **255**, No. 6, 790–804.

Kh. A. Khachatryan
Yerevan State University, Yerevan, Armenia;
Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia
E-mail: khachatur.khachatryan@ysu.am, Khach82@rambler.ru

H. S. Petrosyan
National Agrarian University of Armenia, Yerevan, Armenia;
Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia
E-mail: Haykuhi25@mail.ru