Современная математика. Фундаментальные направления. Том 68, № 2 (2022). С. 338–375
Contemporary Mathematics. Fundamental Directions. ISSN 2413-3639 (Print)

DOI: 10.22363/2413-3639-2022-68-2-338-375 УДК 517.927.25

О ПОЛНОТЕ СОБСТВЕННЫХ ФУНКЦИЙ ОДНОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ОПЕРАТОРА 5-ГО ПОРЯДКА

© 2022 г. **В. С. РЫХЛОВ**

Аннотация. Полностью решена задача о полноте собственных функций обыкновенного дифференциального оператора 5-го порядка в пространстве суммируемых с квадратом функций на отрезке $[0,1]$, порожденного простейшим дифференциальным выражением $y^{(5)}$ и двухточечными двучленными граничными условиями $\alpha_\nu y^{(\nu-1)}(0)+\beta_\nu y^{(\nu-1)}(1)=0$, $\nu=\overline{1,5}$, при основном предположении $\alpha_\nu\neq 0$, $\nu=\overline{1,5}$ или $\beta_\nu\neq 0$, $\nu=\overline{1,5}$ (в этом случае можно без уменьшения общности считать, что все α_ν или все β_ν, соответственно, равны единице).

Классические методы исследования полноты, восходящие к известным статьям М. В. Келдыша, А. П. Хромова, А. А. Шкаликова и многих других, не применимы к рассматриваемому оператору. В основе этих методов лежат «хорошие» оценки по спектральному параметру используемых порождающих функций («классических») для системы собственных и присоединенных функций. В случае сильной нерегулярности рассматриваемого оператора эти «классические» порождающие функции имеют слишком большой рост по спектральному параметру. Для решения вопроса о кратной полноте автором данной статьи предложен новый подход, который использует специальное параметрическое решение, обобщающее «классические» порождающие функции. Основной идеей этого подхода является подбор параметров этого специального решения для построения уже не «классических» порождающих функций с подходящими оценками по спектральному параметру. Такой подбор для рассматриваемого оператора оказался возможным, хотя и весьма нетривиальным, что позволило провести традиционную схему доказательства полноты системы собственных функций в пространстве суммируемых с квадратом функций на отрезке $[0,1]$.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Введение

В пространстве $L_2[0,1]$ рассмотрим простейший линейный обыкновенный дифференциальный оператор L_0 пятого порядка, порожденный дифференциальным выражением

$$\ell_0(y)=y^{(5)}(x),\quad x\in[0,1], \tag{1}$$

и двухточечными двучленными краевыми условиями

$$U_\nu^0(y):=\alpha_\nu y^{(\nu-1)}(0)+\beta_\nu y^{(\nu-1)}(1)=0,\quad \nu=\overline{1,5}, \tag{2}$$

где $\alpha_\nu, \beta_\nu \in \mathbb{C}$ и $|\alpha_\nu| + |\beta_\nu| > 0$, $\nu = \overline{1,5}$.

В данной работе исследуется вопрос о полноте системы собственных функций оператора L_0 в пространстве $L_2[0,1]$. Не оговаривая этого особо, будем использовать в качестве определения собственных значений (с.з.), собственных и присоединенных функций (с.п.ф.) и, в частности, собственных функций (с.ф.) в случае отсутствия присоединенных функций, соответствующие определения из [12, с. 24, 27]. Если известно, что присоединенных функций нет, например, когда с.з. простые (это как раз имеет место при рассмотрении оператора L_0), то вместо термина «с.п.ф.» будем использовать термин «с.ф.».

Основным результатом работы является следующая теорема.

Теорема 1. *Предположим, что или $\alpha_\nu \neq 0$, $\nu = \overline{1,5}$, или $\beta_\nu \neq 0$, $\nu = \overline{1,5}$. Тогда либо система с.ф. оператора L_0 полна в пространстве $L_2[0,1]$, либо этот оператор вырожденный (а именно, либо не имеет вообще собственных значений (с.з.), либо все $\lambda \in \mathbb{C}$ являются его с.з.).*

Дается подробное доказательство этой теоремы. Этот результат был анонсирован в [16] и частично опубликован в [4]. К настоящему времени получен более общий результат [17, 18] для произвольного $n = 2m+1$, $m \in \mathbb{N}$. Доказательство общего случая весьма громоздко и из-за этого его суть может быть не очень понятно. Для лучшего понимания идеи доказательства, как нам кажется, весьма полезно дать подробное доказательство для самого простейшего случая, когда $n = 5$, что и делается в настоящей статье.

Статья состоит из 6 разделов и списка литературы.

В первом разделе дается постановка задачи и краткая история вопроса.

Во втором разделе приводится схема доказательства полноты системы с.ф. в пространстве $L_2[0,1]$. В частности, вводятся специальные параметрические решения (с.п.р.) $\widetilde{g}(x,\rho;\Gamma(\rho))$ уравнения $y^{(5)} + \rho^5 y = 0$ (или, по-другому, не «классические» порождающие функции для системы с.ф.), где $\lambda = -\rho^5$ есть спектральный параметр, содержащие вектор-функцию (в.ф.) $\Gamma(\rho) = (\gamma_1(\rho), \gamma_2(\rho), \ldots, \gamma_5(\rho))^T$ в качестве параметра. Подходящий подбор в.ф. $\Gamma(\rho)$ позволяет в некоторых случаях доказывать полноту системы с.ф. Под «классическими» порождающими функциями понимаются функции, рассматриваемые, например, в [12, с. 84].

В третьем разделе дается классификация дифференциальных операторов (1)-(2) по степени их нерегулярности, а именно, вводятся множества операторов NR_j^k.

В четвертом разделе доказываются некоторые вспомогательные результаты, которые существенно используются в дальнейшем изложении.

В пятом разделе дается аналитическое описание множеств NR_j^k.

Наконец, в шестом разделе, проводится непосредственное доказательство теоремы 1. Этот раздел состоит из 2-х подразделов. В первом подразделе подробно анализируется с.п.р. $\widetilde{g}(x,\rho;\Gamma(\rho))$, а во втором пункте доказывается полнота системы с.ф. оператора L_0 во всех невырожденных случаях.

1. Постановка задачи и краткая история вопроса

В пространстве $L_2[0,1]$ рассмотрим обыкновенный дифференциальный оператор L, порожденный дифференциальным выражением

$$\ell(y) = y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + \cdots + p_n(x)y, \quad x \in [0,1], \tag{1.3}$$

и двухточечными краевыми условиями

$$U_\nu(y) = \sum_{k=1}^{n} \alpha_{\nu k} y^{(k-1)}(0) + \beta_{\nu k} y^{(k-1)}(1) = 0, \quad \nu = \overline{1,n}, \tag{1.4}$$

где $p_j \in L_1[0,1]$ и $\alpha_{\nu k}, \beta_{\nu k} \in \mathbb{C}$.

Принципиальным вопросом для этого оператора является вопрос о полноте системы его собственных и присоединенных функций (с.п.ф.) в пространстве $L_2[0,1]$.

Для того чтобы описать случаи, для которых вопрос о полноте системы с.п.ф. оператора (1.3)-(1.4) решается положительно, введем некоторые обозначения.

Пусть $\lambda = -\rho^n$. Обозначим через ω_j, $j = \overline{1,n}$, различные корни n-й степени из -1. Считаем, что $\omega_j = \exp\dfrac{(2j-1)\pi i}{n}$. Разобьем комплексную ρ-плоскость на $2n$ областей:

$$S_k = \left\{\rho : \frac{k\pi}{n} \leqslant \arg\rho \leqslant \frac{(k+1)\pi}{n}\right\}, \quad k = \overline{0, 2n-1}.$$

Вопрос о полноте решается положительно в следующих случаях:

1°. Оператор (1.3)-(1.4) регулярен по Биркгофу (см. [12, с. 66-67]), т. е. функция Грина имеет оценку

$$|G(x,t,\lambda)| \leqslant \frac{C_\delta}{|\rho|^{n-1}}, \quad \rho \in S_\delta = (S_0 \cup S_1) \setminus \bigcup_{\nu=1}^{\infty} K_\delta(\rho_\nu),$$

где $\lambda_\nu = -\rho_\nu^n$ есть с.з. рассматриваемого оператора, $K_\delta(\rho) = \{z : |z-\rho| < \delta\}$, $\delta > 0$ и достаточно мало. Результаты, касающиеся данного случая, можно найти, например, в [19, 29, 33].

2°. Оператор (1.3)-(1.4) почти регулярен (см. [27]) или, по-другому, регулярен по Стоуну (см. [28]), т. е. функция Грина имеет оценку

$$|G(x,t,\lambda)| \leqslant C_\delta |\rho|^N, \quad \rho \in S_\delta,$$

где $N > 1-n$. Результаты, касающиеся данного случая, можно найти, например, в [21, 27, 28, 34].

3°. Оператор (1.3)-(1.4) слабо нерегулярен или нормален (по терминологии [27]), т. е.

$$|G(x,t,\lambda)| \leqslant C_\delta |\rho|^N, \quad \rho \in \gamma \subset S_\delta,$$

где γ — луч, исходящий из начала координат. Результаты, касающиеся данного случая, можно найти в работах [3, 27].

4°. Оператор (1.3)-(1.4) порожден полураспадающимися краевыми условиями, т. е. краевыми условиями вида

$$\begin{cases} \sum\limits_{k=1}^{n} \alpha_{\nu k} y^{(k-1)}(0) = 0, \quad \nu = \overline{1,l}, \\ \sum\limits_{k=1}^{n} \alpha_{\nu k} y^{(k-1)}(0) + \beta_{\nu k} y^{(k-1)}(1) = 0, \quad \nu = \overline{l+1,n}, \end{cases} \tag{1.5}$$

где $2l > n$. В этом случае функция Грина имеет экспоненциальный рост по ρ по любому направлению либо при $x \geqslant t$, либо при $x \leqslant t$. Будем называть такие операторы L, у которых наблюдается экспоненциальный рост по ρ по любому направлению, *сильно нерегулярными.*

Результат о полноте системы с.п.ф. оператора (1.3), (1.5) в $L_2[0,1]$ есть частный случай теоремы М. В. Келдыша [9], которая была сформулирована для абстрактных оператор-функций. Так как доказательство теоремы М. В. Келдыша полностью так и не было опубликовано, предпринималось много попыток доказать различные варианты этой теоремы. Существенное продвижение в этом направлении было сделано в 1973 году А. П. Хромовым [22, 23]. Им было получено доказательство теоремы М. В. Келдыша в случае аналитических коэффициентов $p_j(x)$ дифференциального выражения. Аналогичный результат другим методом был доказан позже W. Eberhard'ом [30]. В случае произвольных суммируемых коэффициентов дифференциального выражения эта теорема была доказана А. А. Шкаликовым в 1976 году [26].

Обобщение этой теоремы полноты в сильно нерегулярном случае на случай конечномерного возмущения вольтеррова оператора было сделано А. П. Хромовым в [24].

Случай произвольной главной части дифференциального выражения был рассмотрен G. Freiling'ом [31] и С. А. Тихомировым [20].

Исследование вопроса об n- и m-кратной полноте и неполноте с.п.ф. пучка $L(\lambda)$, дифференциальное выражение которого имеет постоянные коэффициенты, а краевые условия полураспадающиеся, провел А. И. Вагабов [1, 2].

Если оператор (1.3)-(1.4) сильно нерегулярен и краевые условия не полураспадающиеся, то вопрос о полноте в $L_2[0,1]$ системы его с.п.ф. до сих пор остается открытым. Так как никаких результатов для общего случая оператора (1.3)-(1.4) не было, и не ясно было, как их получать, то естественно было рассмотреть максимально простой случай оператора (1.3)-(1.4), сохраняющий основные трудности общего случая, а именно, оператор L_0, введенный выше формулами (1)-(2). Результаты о полноте системы с.п.ф. этого оператора, как уже было отмечено, были сформулированы и частично доказаны в [4, 16]. В последней статье результаты принадлежат автору настоящей статьи. Соавторы помогали в подготовке статьи.

А. П. Хромов в [25], по-видимому, впервые рассмотрел нерегулярную задачу на собственные значения третьего порядка вида

$$y^{(3)} + \lambda y = 0, \quad \alpha_\nu y^{(\nu-1)}(0) + \beta_\nu y^{(\nu-1)}(1) = 0, \quad \nu = 1, 2, 3. \tag{1.6}$$

Он показал, что условие $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 0$ в случае $\beta_1 = \beta_2 = \beta_3 = 1$ является необходимым и достаточным для обращения в нуль коэффициентов при экспонентах, соответствующих точкам $\omega_1 + \omega_2$, $\omega_2 + \omega_3$, $\omega_3 + \omega_1$, в характеристическом определителе. А. П. Хромов исследовал вопрос о разложении функций в биортогональные ряды по собственным функциям задачи (1.6) при выполнении этого условия. Решение этого вопроса имело принципиальное значение, так как функция Грина задачи (1.6) в данном случае имеет экспоненциальный рост по ρ как при $t \leqslant x$, так и при $t \geqslant x$, в отличие от случая распадающихся граничных условий, когда функция Грина имеет экспоненциальный рост или при $t \leqslant x$, или при $t \geqslant x$. Но с точки зрения вопроса о полноте системы с.п.ф. эта задача не представляет трудности, так как она является слабо нерегулярной в указанном выше смысле. Отметим, что все возможные нерегулярные ситуации при $n = 3$ или $n = 4$ либо также слабо нерегулярные, либо вырожденные.

Результаты [25] были распространены О. Ю. Дмитриевым [5–8] на случай краевых задач на отрезке $[0, 1]$, определенных дифференциальным уравнением

$$y^{(n)} - \lambda y = 0$$

n-го порядка, где $n = 4k + 1$, $k \in \mathbb{N}$, и краевыми условиями

$$\alpha_\nu y^{(\nu-1)}(0) + y^{(\nu-1)}(1) = 0, \quad \nu = \overline{1, n},$$

а также и некоторыми другими двухточечными краевыми условиями. Им были выделены некоторые классы нерегулярных по Биркгофу краевых условий, для которых были получены необходимые и достаточные условия разложения по с.ф. указанных краевых задачи на отрезке $[0, 1]$ и внутри него. Вопрос полноты системы с.ф. для этих краевых задач О. Ю. Дмитриевым не рассматривался.

2. Схема доказательства полноты

Пусть $\Lambda := \{\lambda_\nu\} \subset \mathbb{C}$ есть множество с.з. оператора L. Считаем, что Λ — счетное множество.

Пусть система функций $y_j(x, \lambda)$, $j = \overline{1, n}$, есть фундаментальная система решений (ф.с.р.) уравнения $\ell(y) - \lambda y = 0$, определяемая начальными условиями при $x = 0$, образующими единичную матрицу, т. е. $y_j^{(s-1)}(0, \lambda) = \delta_{js}$, $j, s = \overline{1, n}$, где δ_{js} — символ Кронекера. Функции $y_j(x, \lambda)$ суть целые аналитические функции по λ.

Хорошо известно (см. [12, с. 26]), что $\lambda \in \Lambda$, т. е. λ является с.з. оператора L тогда и только тогда, когда λ является нулем характеристического определителя

$$\Delta(\lambda) = \begin{vmatrix} U_1(y_1) & U_1(y_2) & \dots & U_1(y_n) \\ U_2(y_1) & U_2(y_2) & \dots & U_2(y_n) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ U_n(y_1) & U_n(y_2) & \dots & U_n(y_n) \end{vmatrix}.$$

Очевидно, $\Delta(\lambda)$ — целая аналитическая функция.

Далее потребуется определение, аналогичное определению [11, с. 62] производящего полинома для цепочки из собственного и присоединенных к нему векторов оператор-функции.

Определение 2.1. Функцию $g(x, \lambda)$, определенную для всех $x \in [0, 1]$ и $\lambda \in D$, где $D \subset \mathbb{C}$ есть некоторое множество такое, что $\Lambda \cap D \neq \varnothing$, будем называть *порождающей* (или *производящей*) *функцией* для системы с.п.ф. оператора L, соответствующих тем с.з., которые лежат в D, если

функции
$$\frac{1}{q!}\frac{\partial^q g(x,\lambda)}{\partial\lambda^q}\bigg|_{\lambda=\lambda_\nu}, \quad q=\overline{\tau_\nu, s_\nu}, \quad 0\leqslant \tau_\nu\leqslant s_\nu \quad \lambda_\nu\in\Lambda\cap D,$$
являются с.п.ф. оператора L, соответствующими с.з. λ_ν кратности $s_\nu+1$. Здесь τ_ν определяется условием
$$\frac{1}{q!}\frac{\partial^q g(x,\lambda)}{\partial\lambda^q}\bigg|_{\lambda=\lambda_\nu}\equiv 0, \quad q=\overline{0,\tau_\nu-1}, \quad \frac{1}{\tau_\nu!}\frac{\partial^{\tau_\nu} g(x,\lambda)}{\partial\lambda^{\tau_\nu}}\bigg|_{\lambda=\lambda_\nu}\not\equiv 0.$$

Очень просто это определение выглядит в случае простых с.з. Хорошо известно (см. [12]), что в случае простых с.з. все с.ф. оператора L однократны. В этом случае функция $g(x,\lambda)$ будет порождающей или производящей для системы с.ф. оператора L, соответствующих тем с.з., которые лежат в D, если система $\{g(x,\lambda_\nu)\}_{\lambda_\nu\in D}$ является системой с.ф. оператора L.

Рассмотрим следующие порождающие функции для с.п.ф. оператора L (см. [12, с. 84]):
$$g_j(x,\lambda)=\begin{vmatrix} U_1(y_1) & U_1(y_2) & \dots & U_1(y_n)\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ U_{j-1}(y_1) & U_{j-1}(y_2) & \dots & U_{j-1}(y_n)\\ y_1(x,\lambda) & y_2(x,\lambda) & \dots & y_n(x,\lambda)\\ U_{j+1}(y_1) & U_{j+1}(y_2) & \dots & U_{j+1}(y_n)\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ U_n(y_1) & U_n(y_2) & \dots & U_n(y_n)\end{vmatrix}, \quad j=\overline{1,n}. \tag{2.1}$$
Эти функции являются целыми функциями по λ, линейно независимыми при $x\in[0,1]$ и $\lambda\notin\Lambda$. В этом случае, очевидно, можно взять $D=\mathbb{C}$ и тогда $\Lambda\subset D$.

Предположим, что функция $\bar f\in L_2[0,1]$ ($\bar f$ обозначает комплексно-сопряженную функцию к f; исходная функция берется в таком виде, чтобы далее не ставить знак комплексного сопряжения) ортогональна системе с.п.ф. оператора L. Введем функции
$$G_j(\lambda):=\int\limits_0^1 g_j(x,\lambda)f(x)dx, \quad \lambda\in\Lambda, \quad j=\overline{1,n},$$
которые также являются целыми аналитическим функциями по λ. На основании этой ортогональности и определения 2.1 можно заметить, что с.з. λ_ν, имеющее кратность $s_\nu+1$, является нулем кратности не менее $s_\nu+1$ этих функций.

Рассмотрим отношения
$$\mathcal{G}_j(\lambda):=\frac{G_j(\lambda)}{\Delta(\lambda)}, \quad j=\overline{1,n}.$$
Это, вообще говоря, мероморфные функции, полюсами которых могут быть только нули $\Delta(\lambda)$. В силу вывода, сделанного в предыдущем абзаце, полюсы функций $\mathcal{G}_j(\lambda)$ являются устранимыми, т. е. $\mathcal{G}_j(\lambda)$ являются на самом деле целыми аналитическими функции по λ.

Для каждой области S_k, $k=\overline{0,2n-1}$, рассмотрим также другую ф.с.р. уравнения $\ell(y)-\lambda y=0$ или, что то же самое, уравнения $\ell(y)+\rho^n y=0$, а именно, систему решений $\widetilde y_{k1}(x,\rho)$, $\widetilde y_{k2}(x,\rho)$, $\dots$, $\widetilde y_{kn}(x,\rho)$, построенную в [12, с. 58-59] или, в более общем случае, в [13–15].

В каждой области S_k системы $\{y_j(x,\lambda)\}$ и $\{\widetilde y_{kj}(x,\rho)\}$ получаются друг из друга в результате умножения на невырожденные матрицы, т. е. существуют матрицы $\mathcal{A}_k(\rho)$ такие, что $|\mathcal{A}_k(\rho)|(\equiv \det\mathcal{A}_k(\rho))\neq 0$ и
$$(y_1(x,\lambda),y_2(x,\lambda),\dots,y_n(x,\lambda))=(\widetilde y_{k1}(x,\rho),\widetilde y_{k2}(x,\rho),\dots,\widetilde y_{kn}(x,\rho))\mathcal{A}_k(\rho), \ k=\overline{0,2n-1}.$$

Следовательно,
$$g_j(x,\lambda)=\widetilde g_{kj}(x,\rho)|\mathcal{A}_k(\rho)|, \quad G_j(\lambda)=\widetilde G_{kj}(\rho)|\mathcal{A}_k(\rho)|, \quad \Delta(\lambda)=\widetilde\Delta_k(\rho)|\mathcal{A}_k(\rho)|,$$
где $\widetilde g_{kj}(x,\rho)$, $\widetilde G_{kj}(\rho)$, $\widetilde\Delta_k(\rho)$ строятся по тем же формулам, что и $g_j(x,\lambda)$, $G_j(\lambda)$, $\Delta(\rho)$, но только вместо ф.с.р. $\{y_j(x,\lambda)\}$ используются ф.с.р. $\{\widetilde y_{kj}(x,\rho)\}$.

Таким образом,
$$\mathcal{G}_j(\lambda)=\frac{G_j(\lambda)}{\Delta(\lambda)}=\frac{\widetilde G_{kj}(\rho)|\mathcal{A}_k(\rho)|}{\widetilde\Delta_k(\rho)|\mathcal{A}_k(\rho)|}=\frac{\widetilde G_{kj}(\rho)}{\widetilde\Delta_k(\rho)}=\widetilde{\mathcal{G}}_{kj}(\rho), \ \rho\in S_k, \ k=\overline{0,2n-1}, \ j=\overline{1,n}. \tag{2.2}$$

А так как в левой части стоит целая функция по λ, а следовательно, и по ρ, то функции справа продолжимы во всю комплексную плоскость как целые функции по ρ. Таким образом, при фиксированном j функция $\widetilde{\mathcal{G}}_{kj}(\rho)$ представляет из себя целую аналитическую функцию по $\rho \in \mathbb{C}$, причем, как нетрудно заметить, конечной степени (см. определение в [10, с. 113]), не зависящую от индекса k. Обозначим ее как $\widetilde{\mathcal{G}}_j(\rho)$.

Определение 2.2. Будем говорить, что целая аналитическая функция конечной степени $\mathcal{F}(\rho)$ обладает *свойством* (α) (или кратко $\mathcal{F}(\rho) \in (\alpha)$), если в ρ-плоскости существуют по крайней мере три луча, исходящих из начала, каждые два соседних из которых имеют между собой угол, меньший π, и на которых функция $\mathcal{F}(\rho)$ имеет не более чем степенной рост.

Для указанных случаев 1°–4° или $\widetilde{\mathcal{G}}_j(\rho) \in (\alpha)$, $j = \overline{1,n}$ (случаи 1°–3°), или $\widetilde{\mathcal{G}}_j(\rho) \in (\alpha)$, $j = \overline{l+1,n}$ (случай 4°). Отсюда по принципу Фрагмена—Линделефа сразу следует, что $\widetilde{\mathcal{G}}_j(\rho) \equiv P_j(\rho)$ — полином по ρ. А так как справедлива альтернатива (см., например, [2, с. 49]): *либо система с.п.ф. оператора L полна в $L_2[0,1]$, либо имеет бесконечный дефект*, то можно считать, что $P_j(\rho) \equiv 0$, откуда следует, что $\widetilde{\mathcal{G}}_j(\rho) \equiv 0$. Отсюда известными стандартными рассуждениями (см., например, [26] или [1, 2]) выводим, что $f(x) = 0$ п.в. на $[0,1]$, тем самым устанавливая полноту системы с.п.ф. оператора L во всех этих случаях.

Если же оператор L сильно нерегулярен и не порожден полураспадающимися краевыми условиями, будем иметь, вообще говоря, что $(\forall j = \overline{1,n})$ $\widetilde{\mathcal{G}}_j(\rho) \notin (\alpha)$. Следовательно, воспользоваться вышеизложенной схемой доказательства с использованием порождающих функций вида (2.1) в этом случае не удается, т. е. традиционная система порождающих функций в данном случае не подходит для установления полноты системы с.п.ф.

Исследуя конкретные примеры, удалось обнаружить (см. [32]), что даже если $\widetilde{\mathcal{G}}_j(\rho) \notin (\alpha)$ для любого $j = \overline{1,n}$, можно подобрать функции $\gamma_1(\rho)$, $\gamma_2(\rho)$, $\ldots$, $\gamma_n(\rho)$ или, что то же самое, в.ф. $\Gamma(\rho) = (\gamma_1(\rho), \gamma_2(\rho), \ldots, \gamma_n(\rho))^T$ такие, что $\widetilde{\mathcal{G}}(\rho, \Gamma(\rho)) \in (\alpha)$, где

$$\widetilde{\mathcal{G}}(\rho, \Gamma(\rho)) = \gamma_1(\rho)\widetilde{\mathcal{G}}_1(\rho) + \gamma_2(\rho)\widetilde{\mathcal{G}}_2(\rho) + \cdots + \gamma_n(\rho)\widetilde{\mathcal{G}}_n(\rho),$$

или, с учетом формул (2.2),

$$\widetilde{\mathcal{G}}(\rho, \Gamma(\rho) = \frac{1}{\widetilde{\Delta}_k(\rho)} \int_0^1 \widetilde{g}_k(x, \rho; \Gamma(\rho)) f(x)\, dx = \frac{\widetilde{G}_k(\rho, \Gamma(\rho))}{\widetilde{\Delta}_k(\rho)}, \quad \rho \in S_k,\ k = \overline{0, 2n-1},$$

$$\widetilde{g}_k(x, \rho; \Gamma(\rho)) = \gamma_1(\rho)\widetilde{g}_{k1}(x, \rho) + \cdots + \gamma_n(\rho)\widetilde{g}_{kn}(x, \rho),$$

причем для функции $\widetilde{g}_k(x, \rho; \Gamma(\rho))$, очевидно, имеет место представление

$$\widetilde{g}_k(x, \rho; \Gamma(\rho)) = \begin{vmatrix} 0 & \widetilde{y}_{k1}(x,\rho) & \ldots & \widetilde{y}_{kn}(x,\rho) \\ -\gamma_1(\rho) & U_1(\widetilde{y}_{k1}) & \ldots & U_1(\widetilde{y}_{kn}) \\ -\gamma_2(\rho) & U_2(\widetilde{y}_{k1}) & \ldots & U_2(\widetilde{y}_{kn}) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ -\gamma_n(\rho) & U_n(\widetilde{y}_{k1}) & \ldots & U_n(\widetilde{y}_{kn}) \end{vmatrix}, \quad \rho \in S_k,\ k = \overline{0, 2n-1}. \tag{2.3}$$

Очевидно, функции (2.3) являются решениями уравнения $\ell(y) + \rho^n y = 0$ при $\rho \in S_k$, $k = \overline{0, 2n-1}$. Будем называть решение вида (2.3) *специальным параметрическим решением* (с.п.р.) уравнения $\ell(y) + \rho^n y = 0$ в области S_k, $k = \overline{0, 2n-1}$.

Предложенная идея оказалась плодотворной и позволяет доказать полноту и в некоторых сильно нерегулярных случаях.

Таким образом, для решения вопроса о полноте системы с.п.ф. оператора L необходимо научиться строить такие в.ф. $\Gamma(\rho)$, для которых будет иметь место включение $\widetilde{\mathcal{G}}(\rho, \Gamma(\rho)) \in (\alpha)$, или, по-другому, целая функция конечной степени $\widetilde{\mathcal{G}}(\rho, \Gamma(\rho))$ по крайней мере на 3-х лучах раствора меньше π имеет не более чем степенной рост.

Доказательство основного результата данной работы о полноте системы с.ф. простейшего оператора L_0 проводится по рассмотренной в данном разделе схеме, суть которой составляет метод построения требуемых в.ф. $\Gamma(\rho)$ для простейшего оператора L_0. Причем необходимые в.ф. $\Gamma(\rho)$ удалось построить не сразу для всех нераспадающихся сильно нерегулярных краевых условий вида (2), а для каждого конкретного множества сильно нерегулярных нераспадающихся краевых условий. Для этого потребовалось предварительно провести соответствующую классификацию краевых условий (2) по степени их нерегулярности и дать соответствующее аналитическое описание краевых условий для каждого подслучая.

3. Классификация дифференциальных операторов. Множества NR_j^k

Далее будем рассматривать обыкновенный дифференциальный оператор 5-го порядка L_0 в пространстве $L_2[0,1]$, порожденный дифференциальным выражением (1) и двухточечными двучленными граничными условиями (2).

В этом случае в качестве ф.с.р. $\{\widetilde{y}_{kj}(x,\rho)\}_{j=1}^5$ уравнения $\ell_0(y)+\rho^5 y=0$, о которой шла речь в предыдущем разделе, можно взять систему $\widetilde{y}_{jk}(x,\rho)=e^{\rho\omega_j x}$, $j=\overline{1,5}$, одинаковую для всех $k=\overline{1,9}$, где, как и раньше, $\rho^5=-\lambda$, $\omega_j=\exp\dfrac{(2j-1)\pi i}{5}$, $j=\overline{1,5}$. Очевидно, это можно сделать, так как функции $e^{\rho\omega_j x}$ суть целые аналитические функции по ρ.

Обозначим

$$U_\nu^0(e^{\rho\omega_j x})=\alpha_\nu(\rho\omega_j)^{\nu-1}+\beta_\nu(\rho\omega_j)^{\nu-1}e^{\rho\omega_j}=\rho^{\nu-1}\bigl(\alpha_\nu\omega_j^{\nu-1}+\beta_\nu\omega_j^{\nu-1}e^{\rho\omega_j}\bigr)=\rho^{\nu-1}(v_{\nu j}+w_{\nu j}e^{\rho\omega_j})=:u_{\nu j}(\rho),$$

где $v_{\nu j}=\alpha_\nu\omega_j^{\nu-1}$, $w_{\nu j}=\beta_\nu\omega_j^{\nu-1}$, $\nu,j=\overline{1,5}$.

Положим

$$V_j=\begin{pmatrix}v_{1j}\\v_{2j}\\v_{3j}\\v_{4j}\\v_{5j}\end{pmatrix}:=\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\omega_j\\ \alpha_3\omega_j^2\\ \alpha_4\omega_j^3\\ \alpha_5\omega_j^4\end{pmatrix},\quad W_j=\begin{pmatrix}w_{1j}\\w_{2j}\\w_{3j}\\w_{4j}\\w_{5j}\end{pmatrix}:=\begin{pmatrix}\beta_1\\ \beta_2\omega_j\\ \beta_3\omega_j^2\\ \beta_4\omega_j^3\\ \beta_5\omega_j^4\end{pmatrix},$$

$$\Delta_0=|V_1\ V_2\ V_3\ V_4\ V_5|(:=\det(V_1\ V_2\ V_3\ V_4\ V_5)),\ \Delta_1=|W_1\ V_2\ V_3\ V_4\ V_5|,\ \Delta_2=|V_1\ W_2\ V_3\ V_4\ V_5|,\ \ldots,$$
$$\Delta_{12}=|W_1W_2V_3V_4V_5|,\ \Delta_{13}=|W_1V_2W_3V_4V_5|,\ \ldots,\ \Delta_{12345}=|W_1\ W_2\ W_3\ W_4\ W_5|.$$

Отметим на плоскости (см. рис. 1–3) все точки $0,\omega_j,\omega_j+\omega_k$ $(j\neq k)$, $\omega_j+\omega_k+\omega_l$ $(j\neq k\neq l),\ldots$, $\omega_1+\omega_2+\omega_3+\omega_4+\omega_5(=0)$ (для краткости на рисунке цифрой j обозначается точка ω_j, суммой $1+2$ обозначается точка $\omega_1+\omega_2$ и т. д.). Обозначим множество таких точек через Ω.

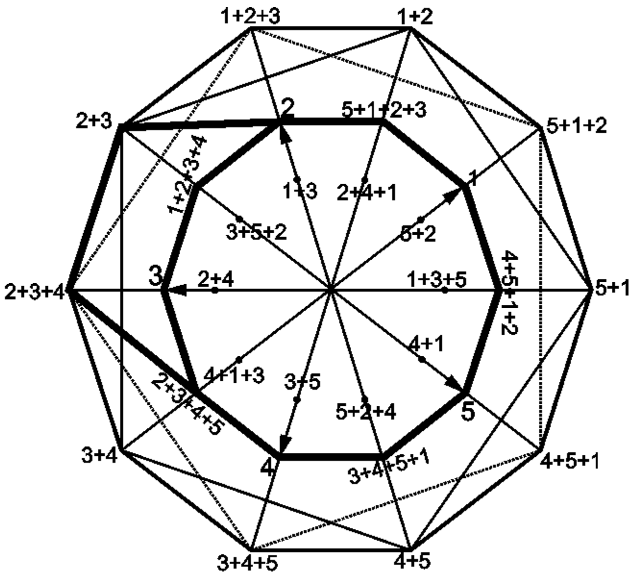

Рис. 1

Пусть M_0 — выпуклая оболочка отмеченных точек, т. е. $M_0=\operatorname{conv}\Omega$. Очевидно, M_0 является правильным 10-угольником с центром в начале координат и с вершинами в точках

$$\begin{array}{llll}\sigma_{01}^0=\omega_1+\omega_2, & \sigma_{02}^0=\omega_2+\omega_3, & \ldots, & \sigma_{05}^0=\omega_5+\omega_1,\\ \sigma_{01}^1=\omega_1+\omega_2+\omega_3, & \sigma_{02}^1=\omega_2+\omega_3+\omega_4, & \ldots, & \sigma_{05}^1=\omega_5+\omega_1+\omega_2.\end{array}$$

Обозначим через M_0^0 и M_0^1 выпуклые оболочки точек σ_{0j}^0, $j=\overline{1,5}$, и σ_{0j}^1, $j=\overline{1,5}$, соответственно. Очевидно, M_0^0 и M_0^1 суть правильные 5-угольники с центром в начале координат и с вершинами в точках σ_{0j}^0, $j=\overline{1,5}$, и σ_{0j}^1, $j=\overline{1,5}$, соответственно, которые перемежаются друг с другом.

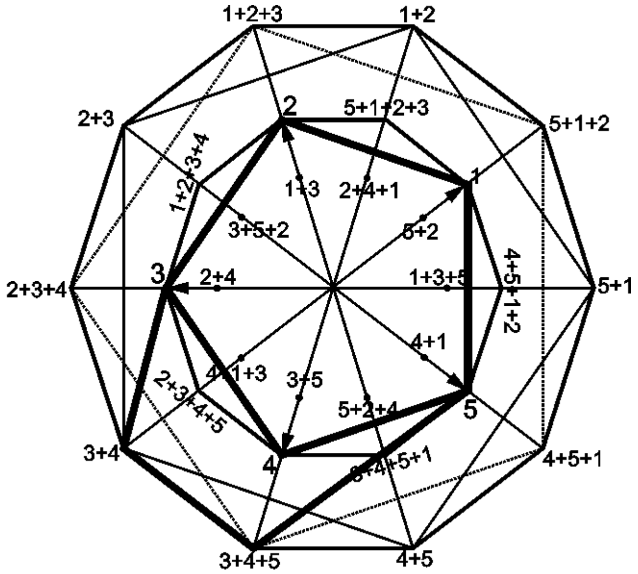

Рис. 2

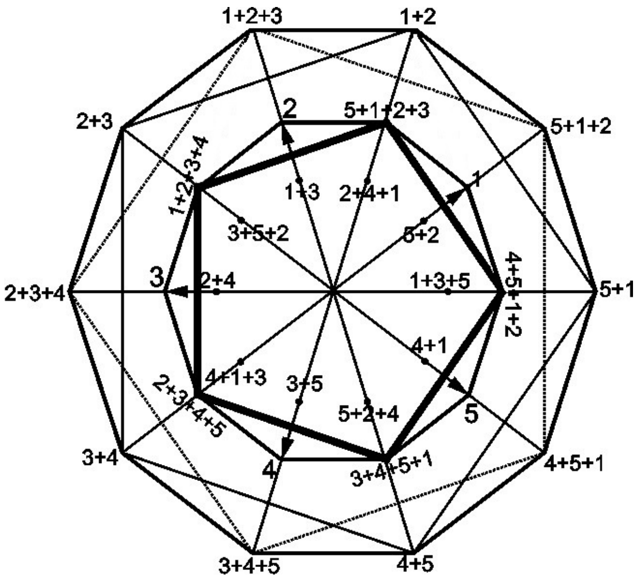

Рис. 3

Если удалить вершины многоугольника M_0 и обозначить через M_1 выпуклую оболочку оставшихся точек, то легко заметить, что многоугольник M_1 будет, как и M_0, правильным 10-угольником с центром в начале координат и с вершинами в точках

$$\begin{array}{llll} \sigma_{11}^0=\omega_1, & \sigma_{12}^0=\omega_2, & \ldots, & \sigma_{15}^0=\omega_5, \\ \sigma_{11}^1=\omega_1+\omega_2+\omega_3+\omega_4, & \sigma_{12}^1=\omega_2+\omega_3+\omega_4+\omega_5, & \ldots, & \sigma_{15}^1=\omega_5+\omega_1+\omega_2+\omega_3, \end{array}$$

которые лежат на тех же самых лучах, исходящих из начала координат, что и вершины многоугольника M_0 (правильный многоугольник M_1 выделен жирной линией на рис. 1).

Обозначим через M_1^0 и M_1^1 выпуклые оболочки точек σ_{1j}^0, $j=\overline{1,5}$, и σ_{1j}^1, $j=\overline{1,5}$, соответственно. Очевидно, M_1^0 и M_1^1 суть правильные 5-угольники с центром в начале координат и с вершинами в точках σ^0_{1j}, $j=\overline{1,5}$, и σ^1_{1j}, $j=\overline{1,5}$, соответственно, которые также перемежаются друг с другом (правильные многоугольники M_1^0 и M_1^1 выделены жирными линиями на рис. 2 и 3 соответственно).

Если удалить вершины многоугольников M_0 и M_1 и обозначить через M_2 выпуклую оболочку оставшихся точек, то легко заметить, что многоугольник M_2 будет, как и M_0 и M_1, правильным 10-угольником с центром в начале координат и с вершинами в точках

$$\begin{array}{llll} \sigma^0_{21}=\omega_1+\omega_3, & \sigma^0_{22}=\omega_2+\omega_4, & \dots, & \sigma^0_{25}=\omega_5+\omega_2,\\ \sigma^1_{21}=\omega_1+\omega_2+\omega_4, & \sigma^1_{22}=\omega_2+\omega_3+\omega_5, & \dots, & \sigma^1_{25}=\omega_5+\omega_1+\omega_3, \end{array}$$

которые лежат на тех же самых лучах, исходящих из начала координат, что и вершины многоугольников M_0 и M_1.

Нетрудно показать, что многоугольник M_1 лежит строго внутри многоугольников M_0, M_0^0 и M_0^1. А многоугольник M_2 — строго внутри многоугольников M_1, M_1^0 и M_1^1.

Подсчитаем характеристический определитель оператора L_0. Так как в случае оператора L_0 имеется единая во всей комплексной плоскости ф.с.р. $e^{\rho\omega_j x}$, $j=\overline{1,5}$, образованная целыми аналитическими функциями по ρ, то определители $\widetilde{\Delta}_k(\rho)$ не будут зависеть от номера k (с точностью до знака). Далее будем рассматривать следующий определитель, который так же, как и определитель $\Delta(\lambda)$, будем называть *характеристическим определителем* оператора L_0:

$$\widetilde{\Delta}(\rho)=\begin{vmatrix} u_{11}(\rho) & u_{12}(\rho) & \dots & u_{15}(\rho)\\ u_{21}(\rho) & u_{22}(\rho) & \dots & u_{25}(\rho)\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ u_{51}(\rho) & u_{52}(\rho) & \dots & u_{55}(\rho)\end{vmatrix}=\rho^{10}|V_1+e^{\rho\omega_1}W_1,\dots,V_5+e^{\rho\omega_1}W_5|=$$
$$=\rho^{10}\Big(\big(\Delta_{12}e^{\rho(\omega_1+\omega_2)}+\Delta_{23}e^{\rho(\omega_2+\omega_3)}+\ldots+\Delta_{15}e^{\rho(\omega_1+\omega_5)}\big)+$$
$$+\big(\Delta_{123}e^{\rho(\omega_1+\omega_2+\omega_3)}+\Delta_{234}e^{\rho(\omega_2+\omega_3+\omega_4)}+\ldots+\Delta_{125}e^{\rho(\omega_1+\omega_2+\omega_5)}\big)+\big(\Delta_1e^{\rho\omega_1}+\Delta_2e^{\rho\omega_2}+\ldots+\Delta_5e^{\rho\omega_5}\big)+$$
$$+\big(\Delta_{1234}e^{\rho(\omega_1+\omega_2+\omega_3+\omega_4)}+\Delta_{2345}e^{\rho(\omega_2+\omega_3+\omega_4+\omega_5)}+\ldots+\Delta_{1235}e^{\rho(\omega_1+\omega_2+\omega_3+\omega_5)}\big)+$$
$$+\big(\Delta_{13}e^{\rho(\omega_1+\omega_3)}+\Delta_{24}e^{\rho(\omega_2+\omega_4)}+\ldots+\Delta_{25}e^{\rho(\omega_2+\omega_5)}\big)+$$
$$+\big(\Delta_{124}e^{\rho(\omega_1+\omega_2+\omega_4)}+\Delta_{235}e^{\rho(\omega_2+\omega_3+\omega_5)}+\ldots+\Delta_{135}e^{\rho(\omega_1+\omega_3+\omega_5)}\big)+\Delta_{12345}+\Delta_0\Big). \quad (3.1)$$

Лемма 3.1. *Справедливы следующие равенства*:

$$\begin{array}{lllllllll} \Delta_{12} &=& \Delta_{23} &=& \Delta_{34} &=& \Delta_{45} &=& \Delta_{15},\\ \Delta_{123} &=& \Delta_{234} &=& \Delta_{345} &=& \Delta_{145} &=& \Delta_{125},\\ \Delta_1 &=& \Delta_2 &=& \Delta_3 &=& \Delta_4 &=& \Delta_5,\\ \Delta_{1234} &=& \Delta_{2345} &=& \Delta_{1345} &=& \Delta_{1245} &=& \Delta_{1235},\\ \Delta_{13} &=& \Delta_{24} &=& \Delta_{35} &=& \Delta_{14} &=& \Delta_{25},\\ \Delta_{124} &=& \Delta_{235} &=& \Delta_{134} &=& \Delta_{245} &=& \Delta_{135}. \end{array}$$

Доказательство. Докажем, например, что $\Delta_{23}=\Delta_{12}$. Остальные случаи доказываются аналогично.

Так как, очевидно, $\omega_j=e^{\frac{2\pi i}{5}}\omega_{j-1}$, то справедливы следующие равенства:

$$\Delta_{23}=|V_1\ W_2\ W_3\ V_4\ V_5|=\begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \beta_1 & \alpha_1 & \alpha_1\\ \alpha_2\omega_1 & \beta_2\omega_2 & \beta_2\omega_3 & \alpha_2\omega_4 & \alpha_2\omega_5\\ \alpha_3\omega_1^2 & \beta_3\omega_2^2 & \beta_3\omega_3^2 & \alpha_3\omega_4^2 & \alpha_3\omega_5^2\\ \alpha_4\omega_1^3 & \beta_4\omega_2^3 & \beta_4\omega_3^3 & \alpha_4\omega_4^3 & \alpha_4\omega_5^3\\ \alpha_5\omega_1^4 & \beta_5\omega_2^4 & \beta_5\omega_3^4 & \alpha_5\omega_4^4 & \alpha_5\omega_5^4\end{vmatrix}=$$

$$=\Big(e^{\frac{2\pi i}{5}}\Big)^{1+2+3+4}\begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \beta_1 & \alpha_1 & \alpha_1\\ \alpha_2\omega_5 & \beta_2\omega_1 & \beta_2\omega_2 & \alpha_2\omega_3 & \alpha_2\omega_4\\ \alpha_3\omega_5^2 & \beta_3\omega_1^2 & \beta_3\omega_2^2 & \alpha_3\omega_3^2 & \alpha_3\omega_4^2\\ \alpha_4\omega_5^3 & \beta_4\omega_1^3 & \beta_4\omega_2^3 & \alpha_4\omega_3^3 & \alpha_4\omega_4^3\\ \alpha_5\omega_5^4 & \beta_5\omega_1^4 & \beta_5\omega_2^4 & \alpha_5\omega_3^4 & \alpha_5\omega_4^4\end{vmatrix}=|V_5\ W_1\ W_2\ V_3\ V_4|=(-1)^4|W_1\ W_2\ V_3\ V_4\ V_5|=\Delta_{12}.$$

Лемма доказана. □

На основании этой леммы и представления (3.1) получим

$$\begin{aligned}\widetilde{\Delta}(\rho) = \rho^{10}|V_1 + e^{\rho\omega_1}W_1, \dots, V_5 + e^{\rho\omega_1}W_5| = \rho^{10}\Big(\Delta_{12}\big(e^{\rho(\omega_1+\omega_2)} + e^{\rho(\omega_2+\omega_3)} + \dots + e^{\rho(\omega_1+\omega_5)}\big) + \\ + \Delta_{123}\big(e^{\rho(\omega_1+\omega_2+\omega_3)} + e^{\rho(\omega_2+\omega_3+\omega_4)} + \dots + e^{\rho(\omega_1+\omega_2+\omega_5)}\big) + \Delta_1\big(e^{\rho\omega_1} + e^{\rho\omega_2} + \dots + e^{\rho\omega_5}\big) + \\ + \Delta_{1234}\big(e^{\rho(\omega_1+\omega_2+\omega_3+\omega_4)} + e^{\rho(\omega_2+\omega_3+\omega_4+\omega_5)} + \dots + e^{\rho(\omega_1+\omega_2+\omega_3+\omega_5)}\big) + \\ + \Delta_{13}\big(e^{\rho(\omega_1+\omega_3)} + e^{\rho(\omega_2+\omega_4)} + \dots + e^{\rho(\omega_2+\omega_5)}\big) + \\ + \Delta_{124}\big(e^{\rho(\omega_1+\omega_2+\omega_4)} + e^{\rho(\omega_2+\omega_3+\omega_5)} + \dots + e^{\rho(\omega_1+\omega_3+\omega_5)}\big) + \Delta_{12345} + \Delta_0\Big). \quad (3.2)\end{aligned}$$

Отметим на рисунке точки $\omega_1 + \omega_2$, $\omega_2 + \omega_3$, $\dots$, $\omega_5 + \omega_1$, если $\Delta_{12} \neq 0$, точки $\omega_1 + \omega_2 + \omega_3$, $\omega_2 + \omega_3 + \omega_4$, $\dots$, $\omega_5 + \omega_1 + \omega_2$, если $\Delta_{123} \neq 0$, и т. д. Пусть $M_{\widetilde{\Delta}}$ — выпуклая оболочка отмеченных точек. Очевидно, $M_{\widetilde{\Delta}}$ является многоугольником, симметричным относительно начала координат и инвариантным относительно поворота на угол $2\pi/5$. Вид этого многоугольника характеризует степень вырожденности характеристического определителя. Будем далее также называть этот многоугольник *характеристическим многоугольником* оператора L_0.

Возможны следующие случаи:

(0) $\Delta_{12} \neq 0 \wedge \Delta_{123} \neq 0$. Здесь $M_{\widetilde{\Delta}} = M_0$. Это регулярный по Биркгофу случай. Множество операторов L_0, обладающих данным свойством, будем обозначать NR_0 и кратко писать $L_0 \in \mathrm{NR}_0$.

($\mathbf{0^0}$) $\Delta_{12} \neq 0 \wedge \Delta_{123} = 0$. Здесь $M_{\widetilde{\Delta}} = M_0^0$. Это первый из двух слабо нерегулярных случаев. Множество операторов L_0, обладающих данным свойством, будем обозначать NR_0^0 и кратко писать $L_0 \in \mathrm{NR}_0^0$.

($\mathbf{0^1}$) $\Delta_{12} = 0 \wedge \Delta_{123} \neq 0$. Здесь $M_{\widetilde{\Delta}} = M_0^1$. Это второй из двух слабо нерегулярных случаев. Множество операторов L_0, обладающих данным свойством, будем обозначать NR_0^1 и кратко писать $L_0 \in \mathrm{NR}_0^1$.

(1) $\Delta_1 \neq 0 \wedge \Delta_{12} = \Delta_{123} = 0 \wedge \Delta_{1234} \neq 0$. Здесь $M_{\widetilde{\Delta}} = M_1$ (см. рис. 1). Это первый из четырех возможных сильно нерегулярных случаев. Множество операторов L_0, обладающих данным свойством, будем обозначать NR_1 и кратко писать $L_0 \in \mathrm{NR}_1$.

($\mathbf{1^0}$) $\Delta_1 \neq 0 \wedge \Delta_{12} = \Delta_{123} = \Delta_{1234} = 0$. Здесь $M_{\widetilde{\Delta}} = M_1^0$ (см. рис. 2). Это второй из четырех возможных сильно нерегулярных случаев. Множество операторов L_0, обладающих данным свойством, будем обозначать NR_1^0 и кратко писать $L_0 \in \mathrm{NR}_1^0$.

($\mathbf{1^1}$) $\Delta_1 = \Delta_{12} = \Delta_{123} = 0 \wedge \Delta_{1234} \neq 0$. Здесь $M_{\widetilde{\Delta}} = M_1^1$ (см. рис. 3). Это третий из четырех возможных сильно нерегулярных случаев. Множество операторов L_0, обладающих данным свойством, будем обозначать NR_1^1 и кратко писать $L_0 \in \mathrm{NR}_1^1$.

(2) $\Delta_1 = \Delta_{12} = \Delta_{123} = \Delta_{1234} = 0$. Здесь $M_{\widetilde{\Delta}} \subset M_2$. Множество операторов L_0, обладающих данным свойством, будем обозначать NR_2 и кратко писать $L_0 \in \mathrm{NR}_2$. Это четвертый из четырех возможных сильно нерегулярных случаев, который содержит все оставшиеся сильно нерегулярные случаи, если они есть (далее будет показано, что все операторы из этого множества — вырожденные).

4. Вспомогательные результаты

Рассмотрим следующую матрицу:

$$\Omega = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ \omega_1 & \omega_2 & \dots & \omega_5 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \omega_1^4 & \omega_2^4 & \dots & \omega_5^4 \end{pmatrix} = (Y_1\ Y_2\ \dots\ Y_5),$$

а также транспонированную к ней матрицу

$$\Omega^T = \begin{pmatrix} 1 & \omega_1 & \dots & \omega_1^4 \\ 1 & \omega_2 & \dots & \omega_2^4 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & \omega_5 & \dots & \omega_5^4 \end{pmatrix} = (Z_1\ Z_2\ \dots\ Z_5).$$

Очевидно, справедливо $\theta := \det\Omega = \det\Omega^T \neq 0$ и, следовательно, векторы $Y_1, Y_2, \dots, Y_5$ и векторы $Z_1, Z_2, \dots, Z_5$ образуют базисы в $\mathbb{C}^5$.

Введем векторы $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_5)^T$, $\beta = (\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_5)^T$ и разложим эти векторы по системе $Z_1, Z_2, \ldots, Z_5$:

$$\begin{aligned} \alpha &= \hat{\alpha}_1 Z_1 + \hat{\alpha}_2 Z_2 + \ldots + \hat{\alpha}_5 Z_5 = \Omega^T \hat{\alpha}, \\ \beta &= \hat{\beta}_1 Z_1 + \hat{\beta}_2 Z_2 + \ldots + \hat{\beta}_5 Z_5 = \Omega^T \hat{\beta}, \end{aligned} \tag{4.1}$$

где $\hat{\alpha} = (\hat{\alpha}_1, \hat{\alpha}_2, \ldots, \hat{\alpha}_5)^T$ и $\hat{\beta} = (\hat{\beta}_1, \hat{\beta}_2, \ldots, \hat{\beta}_5)^T$. Так как $\theta \neq 0$, то соответствия между α и $\hat{\alpha}$ и между β и $\hat{\beta}$ взаимно однозначны.

Обозначим для краткости $\omega := \omega_1$. Введем функцию $\mathrm{Mod}_5(j) := \mathrm{mod}_5(j)$, если $j \neq 5s$, и $\mathrm{Mod}_5(j) := 5$, если $j = 5s$, где $j, s \in \mathbb{Z}$, а $\mathrm{mod}_n(j)$ — стандартная функция из алгебры.

Лемма 4.1. *Имеют место следующие равенства для* $j = \overline{1,5}$:

$$\begin{aligned} V_j &= a_1 Y_j + a_2 Y_{\mathrm{Mod}_5(j+1)} + \cdots + a_5 Y_{\mathrm{Mod}_5(j+4)} = \Omega \hat{V}_j, \\ W_j &= b_1 Y_j + b_2 Y_{\mathrm{Mod}_5(j+1)} + \cdots + b_5 Y_{\mathrm{Mod}_5(j+4)} = \Omega \hat{W}_j, \end{aligned}$$

где $a_k = \hat{\alpha}_k \omega^{k-1}$, $b_k = \hat{\beta}_k \omega^{k-1}$, $k = \overline{1,5}$ *и*

$$\begin{aligned} \hat{V}_j &= (a_{\mathrm{Mod}_5(2-j)}, a_{\mathrm{Mod}_5(3-j)}, \ldots, a_{\mathrm{Mod}_5(6-j)})^T, \\ \hat{W}_j &= (b_{\mathrm{Mod}_5(2-j)}, b_{\mathrm{Mod}_5(3-j)}, \ldots, b_{\mathrm{Mod}_5(6-j)})^T, \end{aligned}$$

т. е.

$$\hat{V}_1 = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ a_5 \end{pmatrix}, \ \hat{V}_2 = \begin{pmatrix} a_5 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{pmatrix}, \ \hat{V}_3 = \begin{pmatrix} a_4 \\ a_5 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}, \ \hat{V}_4 = \begin{pmatrix} a_3 \\ a_4 \\ a_5 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}, \ \hat{V}_5 = \begin{pmatrix} a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ a_5 \\ a_1 \end{pmatrix};$$

$$\hat{W}_1 = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \\ b_5 \end{pmatrix}, \ \hat{W}_2 = \begin{pmatrix} b_5 \\ b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \end{pmatrix}, \ \hat{W}_3 = \begin{pmatrix} b_4 \\ b_5 \\ b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}, \ \hat{W}_4 = \begin{pmatrix} b_3 \\ b_4 \\ b_5 \\ b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}, \ \hat{W}_5 = \begin{pmatrix} b_2 \\ b_3 \\ b_4 \\ b_5 \\ b_1 \end{pmatrix}.$$

Доказательство. Справедливо представление

$$V_j = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \omega_j \\ \alpha_3 \omega_j^2 \\ \alpha_4 \omega_j^3 \\ \alpha_5 \omega_j^4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \omega_j & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \omega_j^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \omega_j^3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \omega_j^4 \end{pmatrix} \cdot \alpha = \Omega_j \alpha = \Omega_j \Omega^T \hat{\alpha},$$

где

$$\Omega_j \Omega^T = \begin{pmatrix} 1 & \omega_1 & \omega_1^2 & \omega_1^3 & \omega_1^4 \\ \omega_j & \omega_2 \omega_j & \omega_2^2 \omega_j & \omega_2^3 \omega_j & \omega_2^4 \omega_j \\ \omega_j^2 & \omega_3 \omega_j^2 & \omega_3^2 \omega_j^2 & \omega_3^3 \omega_j^2 & \omega_3^4 \omega_j^2 \\ \omega_j^3 & \omega_4 \omega_j^3 & \omega_4^2 \omega_j^3 & \omega_4^3 \omega_j^3 & \omega_4^4 \omega_j^3 \\ \omega_j^4 & \omega_5 \omega_j^4 & \omega_5^2 \omega_j^4 & \omega_5^3 \omega_j^4 & \omega_5^4 \omega_j^4 \end{pmatrix} = (X_{1j}, X_{2j}, X_{3j}, X_{4j}, X_{5j}).$$

С учетом введенных обозначений имеем: $\omega_1 = \omega$, $\omega_2 = \omega^3$, $\omega_3 = \omega^5$, $\omega_4 = \omega^7$, $\omega_5 = \omega^9$, т. е.

$$\omega_j = e^{\frac{(2j-1)\pi i}{5}} = (e^{\frac{\pi i}{5}})^{2j-1} = \omega^{2j-1}.$$

Тогда $Y_j = (1, \omega_j, \omega_j^2, \omega_j^3, \omega_j^4)^T = (1, \omega^{2j-1}, \omega^{4j-2}, \omega^{6j-3}, \omega^{8j-4})^T$ и, следовательно, вектор X_{kj} можно записать в виде:

$$X_{kj} = \begin{pmatrix} \omega_1^{k-1} \\ \omega_2^{k-1} \omega_j \\ \omega_3^{k-1} \omega_j^2 \\ \omega_4^{k-1} \omega_j^3 \\ \omega_5^{k-1} \omega_j^4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \omega^{k-1} \\ \omega^{3k+2j-4} \\ \omega^{5k+4j-7} \\ \omega^{7k+6j-10} \\ \omega^{9k+8j-13} \end{pmatrix} = \omega^{k-1} \begin{pmatrix} 1 \\ \omega^{2(k+j-1)-1} \\ \omega^{4(k+j-1)-2} \\ \omega^{6(k+j-1)-3} \\ \omega^{8(k+j-1)-4} \end{pmatrix} = \omega^{k-1} Y_{\mathrm{Mod}_5(k+j-1)}.$$

Отсюда

$$\begin{array}{lllll}
X_{11} = Y_1; & X_{21} = \omega Y_2; & X_{31} = \omega^2 Y_3; & X_{41} = \omega^3 Y_4; & X_{51} = \omega^4 Y_5; \\
X_{12} = Y_2; & X_{22} = \omega Y_3; & X_{32} = \omega^2 Y_4; & X_{42} = \omega^3 Y_5; & X_{52} = \omega^4 Y_1; \\
X_{13} = Y_3; & X_{23} = \omega Y_4; & X_{33} = \omega^2 Y_5; & X_{43} = \omega^3 Y_1; & X_{53} = \omega^4 Y_2; \\
X_{14} = Y_4; & X_{24} = \omega Y_5; & X_{34} = \omega^2 Y_1; & X_{44} = \omega^3 Y_2; & X_{54} = \omega^4 Y_3; \\
X_{15} = Y_5; & X_{25} = \omega Y_1; & X_{35} = \omega^2 Y_2; & X_{45} = \omega^3 Y_3; & X_{55} = \omega^4 Y_4.
\end{array}$$

Таким образом,

$$V_j = \hat{\alpha}_1 X_{1j} + \hat{\alpha}_2 X_{2j} + \hat{\alpha}_3 X_{3j} + \hat{\alpha}_4 X_{4j} + \hat{\alpha}_5 X_{5j},$$

что дает

$$V_1 = \hat{\alpha}_1 Y_1 + (\hat{\alpha}_2\omega) Y_2 + (\hat{\alpha}_3\omega^2) Y_3 + (\hat{\alpha}_4\omega^3) Y_4 + (\hat{\alpha}_5\omega^4) Y_5 =$$

$$= a_1 Y_1 + a_2 Y_2 + a_3 Y_3 + a_4 Y_4 + a_5 Y_5 = \Omega \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ a_5 \end{pmatrix} = \Omega \hat{V}_1,$$

$$V_2 = a_1 Y_2 + a_2 Y_3 + a_3 Y_4 + a_4 Y_5 + a_5 Y_1 = \Omega \begin{pmatrix} a_5 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{pmatrix} = \Omega \hat{V}_2,$$

$$\ldots$$

$$V_5 = a_1 Y_5 + a_2 Y_1 + a_3 Y_2 + a_4 Y_3 + a_5 Y_4 = \Omega \begin{pmatrix} a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ a_5 \\ a_1 \end{pmatrix} = \Omega \hat{V}_5.$$

Аналогично,

$$W_j = \hat{\beta}_1 X_{1j} + \hat{\beta}_2 X_{2j} + \hat{\beta}_3 X_{3j} + \hat{\beta}_4 X_{4j} + \hat{\beta}_5 X_{5j},$$

что дает

$$W_1 = \hat{\beta}_1 Y_1 + (\hat{\beta}_2\omega) Y_2 + (\hat{\beta}_3\omega^2) Y_3 + (\hat{\beta}_4\omega^3) Y_4 + (\hat{\beta}_5\omega^4) Y_5 =$$

$$= b_1 Y_1 + b_2 Y_2 + b_3 Y_3 + b_4 Y_4 + b_5 Y_5 = \Omega \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \\ b_5 \end{pmatrix} = \Omega \hat{W}_1,$$

$$W_2 = b_1 Y_2 + b_2 Y_3 + b_3 Y_4 + b_4 Y_5 + b_5 Y_1 = \Omega \begin{pmatrix} b_5 \\ b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \end{pmatrix} = \Omega \hat{W}_2,$$

$$\ldots$$

$$W_5 = b_1 Y_5 + b_2 Y_1 + b_3 Y_2 + b_4 Y_3 + b_5 Y_4 = \Omega \begin{pmatrix} b_2 \\ b_3 \\ b_4 \\ b_5 \\ b_1 \end{pmatrix} = \Omega \hat{W}_5.$$

Таким образом, лемма доказана. □

Очевидны равенства

$$\Delta_{12} = |W_1\ W_2\ V_3\ V_4\ V_5| = |\Omega\hat{W}_1\ \Omega\hat{W}_2\ \Omega\hat{V}_3\ \Omega\hat{V}_4\ \Omega\hat{V}_5| = \\ = \det\Omega|\hat{W}_1\ \hat{W}_2\ \hat{V}_3\ \hat{V}_4\ \hat{V}_5| = \theta|\hat{W}_1\ \hat{W}_2\ \hat{V}_3\ \hat{V}_4\ \hat{V}_5| = \theta\hat{\Delta}_{12}, \tag{4.2}$$

$$\Delta_{123} = |W_1\ W_2\ W_3\ V_4\ V_5| = \theta|\hat{W}_1\ \hat{W}_2\ \hat{W}_3\ \hat{V}_4\ \hat{V}_5| = \theta\hat{\Delta}_{123}, \tag{4.3}$$

$$\Delta_1 = |W_1\ V_2\ V_3\ V_4\ V_5| = \theta|\hat{W}_1\ \hat{V}_2\ \hat{V}_3\ \hat{V}_4\ \hat{V}_5| = \theta\hat{\Delta}_1, \tag{4.4}$$

$$\Delta_{1234} = |W_1\ W_2\ W_3\ W_4\ V_5| = \theta|\hat{W}_1\ \hat{W}_2\ \hat{W}_3\ \hat{W}_4\ \hat{V}_5| = \theta\hat{\Delta}_{1234}, \tag{4.5}$$

где

$$\hat{\Delta}_{12} = \begin{vmatrix} b_1 & b_5 & a_4 & a_3 & a_2 \\ b_2 & b_1 & a_5 & a_4 & a_3 \\ b_3 & b_2 & a_1 & a_5 & a_4 \\ b_4 & b_3 & a_2 & a_1 & a_5 \\ b_5 & b_4 & a_3 & a_2 & a_1 \end{vmatrix}, \quad \hat{\Delta}_{123} = \begin{vmatrix} b_1 & b_5 & b_4 & a_3 & a_2 \\ b_2 & b_1 & b_5 & a_4 & a_3 \\ b_3 & b_2 & b_1 & a_5 & a_4 \\ b_4 & b_3 & b_2 & a_1 & a_5 \\ b_5 & b_4 & b_3 & a_2 & a_1 \end{vmatrix},$$

$$\hat{\Delta}_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_5 & a_4 & a_3 & a_2 \\ b_2 & a_1 & a_5 & a_4 & a_3 \\ b_3 & a_2 & a_1 & a_5 & a_4 \\ b_4 & a_3 & a_2 & a_1 & a_5 \\ b_5 & a_4 & a_3 & a_2 & a_1 \end{vmatrix}, \quad \hat{\Delta}_{1234} = \begin{vmatrix} b_1 & b_5 & b_4 & b_3 & a_2 \\ b_2 & b_1 & b_5 & b_4 & a_3 \\ b_3 & b_2 & b_1 & b_5 & a_4 \\ b_4 & b_3 & b_2 & b_1 & a_5 \\ b_5 & b_4 & b_3 & b_2 & a_1 \end{vmatrix}.$$

Замечание 4.1. Из этих равенств следует, что при классификации операторов L_0 по степени их нерегулярности, которая была проведена в конце раздела 3, вместо определителей $\Delta_{12}, \Delta_{123}, \Delta_1, \Delta_{1234}$ можно использовать определители $\hat{\Delta}_{12}, \hat{\Delta}_{123}, \hat{\Delta}_1, \hat{\Delta}_{1234}$.

Далее для определенности будем рассматривать только случай $\beta_\nu \neq 0$, $\nu = \overline{1,5}$. Случай, когда $\alpha_\nu \neq 0$, $\nu = \overline{1,5}$, можно свести к предыдущему случаю заменой $x \mapsto 1 - x$. Очевидно, что при такой замене свойство полноты системы с.ф. в пространстве $L_2[0,1]$ сохраняется. Тогда, не нарушая общности, можно считать, что $\beta_1 = \beta_2 = \ldots = \beta_5 = 1$. На основании формулы (4.1) в силу единственности разложения вектора по базису отсюда следует, что $\hat{\beta}_1 = 1$, $\hat{\beta}_2 = \ldots = \hat{\beta}_5 = 0$, т. е. $b_1 = 1$, $b_2 = b_3 = b_4 = b_5 = 0$. Таким образом, в этом случае будем иметь:

$$\hat{W}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \hat{W}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \ldots, \qquad \hat{W}_5 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

С учетом этого получим

$$\hat{\Delta}_{12} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & a_4 & a_3 & a_2 \\ 0 & 1 & a_5 & a_4 & a_3 \\ 0 & 0 & a_1 & a_5 & a_4 \\ 0 & 0 & a_2 & a_1 & a_5 \\ 0 & 0 & a_3 & a_2 & a_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_5 & a_4 \\ a_2 & a_1 & a_5 \\ a_3 & a_2 & a_1 \end{vmatrix}, \quad \hat{\Delta}_{123} = \begin{vmatrix} a_1 & a_5 \\ a_2 & a_1 \end{vmatrix}, \quad \hat{\Delta}_1 = \begin{vmatrix} a_1 & a_5 & a_4 & a_3 \\ a_2 & a_1 & a_5 & a_4 \\ a_3 & a_2 & a_1 & a_5 \\ a_4 & a_3 & a_2 & a_1 \end{vmatrix}, \quad \hat{\Delta}_{1234} = a_1. \tag{4.6}$$

5. Аналитическое описание множеств NR_j^k

Множества NR_j^k можно описать и аналитически. Это описание будет существенно использоваться в дальнейшем.

Следующая лемма очевидна.

Лемма 5.1. $L_0 \in \mathrm{NR}_0$ *тогда и только тогда, когда* $\hat{\Delta}_{12} \neq 0$ *и* $\hat{\Delta}_{123} \neq 0$, *где*

$$\hat{\Delta}_{12} = \begin{vmatrix} a_1 & a_5 & a_4 \\ a_2 & a_1 & a_5 \\ a_3 & a_2 & a_1 \end{vmatrix}, \qquad \hat{\Delta}_{123} = \begin{vmatrix} a_1 & a_5 \\ a_2 & a_1 \end{vmatrix}.$$

Доказательство. Следует с очевидностью из определения множества NR_0 и замечания 4.1. □

Следующие две леммы описывают аналитически два имеющихся слабо нерегулярных случая для оператора L_0.

Лемма 5.2. $L_0 \in \mathrm{NR}_0^0$ *тогда и только тогда, когда выполняется одно из следующих трех альтернативных условий*:

1) *при некотором значении* $s \in \mathbb{C}$, $s \neq 0$
$$\theta_{11}(s) = \theta_{21}(s) = 0, \quad \theta_{31}(s) \neq 0, \quad \theta_{51}(s) \neq 0, \quad a_5 \neq 0,$$
где $\theta_{11}(s) = a_1 - sa_5$, $\theta_{21}(s) = a_2 - sa_1$, $\theta_{31}(s) = a_3 - sa_2$, $\theta_{41}(s) = a_4 - sa_3$, $\theta_{51}(s) = a_5 - sa_4$;
2) $a_5 = a_1 = 0$, $a_2 \neq 0$, $a_4 \neq 0$;
3) $a_1 = a_2 = 0$, $a_3 \neq 0$, $a_5 \neq 0$.

Доказательство. Из определения множества NR_0^0 и замечания 4.1 имеем $L_0 \in \mathrm{NR}_0^0$ в том и только том случае, если $\hat{\Delta}_{12} \neq 0$, $\hat{\Delta}_{123} = 0$. Для указанных здесь определителей будем далее использовать формулы (4.6).

Из алгебры известно, что если $\hat{\Delta}_{123} = 0$, то столбцы этого определителя линейно зависимы. Следовательно, существует такой вектор $\Gamma = (\gamma_1, \gamma_2)^T \neq (0,0)^T$, что
$$\gamma_1 \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} + \gamma_2 \begin{pmatrix} a_5 \\ a_1 \end{pmatrix} = 0. \tag{5.1}$$

Если $\gamma_1 = 0$, тогда $\gamma_2 \neq 0$ и, следовательно,
$$a_5 = a_1 = 0. \tag{5.2}$$

Отсюда получим
$$0 \neq \hat{\Delta}_{12} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & a_4 \\ a_2 & 0 & 0 \\ a_3 & a_2 & 0 \end{vmatrix} = a_4 a_2^2. \tag{5.3}$$

Отсюда и из (5.2) получаем утверждение 2) леммы.

Если же $\gamma_1 \neq 0$, то, деля (5.1) на γ_1, получим
$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = s \begin{pmatrix} a_5 \\ a_1 \end{pmatrix}, \tag{5.4}$$

где $s = -\gamma_2/\gamma_1$.

Здесь возможны два случая: $s \neq 0$ и $s = 0$.

Если в (5.4) $s \neq 0$, то получим
$$\theta_{11}(s) = \theta_{21}(s) = 0. \tag{5.5}$$

Так как в рассматриваемом случае $\hat{\Delta}_{12} \neq 0$, то вычитая из 1-го столбца этого определителя 2-й столбец, умноженный на s, а из 2-го столбца — 3-й, также умноженный на s, получим с учетом (5.5)
$$0 \neq \hat{\Delta}_{12} = \begin{vmatrix} \theta_{11}(s) & \theta_{51}(s) & a_4 \\ \theta_{21}(s) & \theta_{11}(s) & a_5 \\ \theta_{31}(s) & \theta_{21}(s) & a_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & \theta_{51}(s) & a_4 \\ 0 & 0 & a_5 \\ \theta_{31}(s) & 0 & a_1 \end{vmatrix} = \theta_{31}(s)\theta_{51}(s) a_5. \tag{5.6}$$

Отсюда и из (5.5) следует утверждение 1) леммы.

Если же в (5.4) $s = 0$, то получим
$$a_1 = a_2 = 0, \tag{5.7}$$

а из условия $\hat{\Delta}_{12} \neq 0$ аналогично (5.3) получим
$$0 \neq \hat{\Delta}_{12} = \begin{vmatrix} 0 & a_5 & a_4 \\ 0 & 0 & a_5 \\ a_3 & 0 & 0 \end{vmatrix} = a_3 a_5^2.$$

Отсюда и из (5.7) получаем утверждение 3) леммы.

Непосредственным подсчетом соответствующих определителей легко установить, что каждое из трех условий 1)–3) влечет утверждение $L_0 \in \mathrm{NR}_0^0$.

Таким образом, лемма полностью доказана. $\square$

Лемма 5.3. $L_0 \in \mathrm{NR}_0^1$ *тогда и только тогда, когда* $\hat{\Delta}_{123} \neq 0$ *и при некоторых значениях* $s, t \in \mathbb{C}$, *где* $s \neq 0$, *выполняется условие*

$$\theta_{12}(t,s) = \theta_{22}(t,s) = \theta_{32}(t,s) = 0, \tag{5.8}$$

где $\theta_{12}(t,s) = a_1 - ta_5 - sa_4$, $\theta_{22}(t,s) = a_2 - ta_1 - sa_5$, $\theta_{32}(t,s) = a_3 - ta_2 - sa_1$.

Доказательство. Из определения множества NR_0^1 и замечания 4.1 имеем $L_0 \in \mathrm{NR}_0^1$ в том и только том случае, когда $\hat{\Delta}_{12} = 0$, $\hat{\Delta}_{123} \neq 0$. Для указанных здесь определителей, как и в предыдущей лемме, используем формулы (4.6).

Так как по условию $\hat{\Delta}_{12} = 0$, то столбцы этого определителя линейно зависимы. Следовательно, существует такой вектор $\Gamma = (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)^T \neq (0,0,0)^T$, что

$$\gamma_1 \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} + \gamma_2 \begin{pmatrix} a_5 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} + \gamma_3 \begin{pmatrix} a_4 \\ a_5 \\ a_1 \end{pmatrix} = 0.$$

Так как $\hat{\Delta}_{123} \neq 0$, то $\gamma_1 \neq 0$ и $\gamma_3 \neq 0$. Следовательно, деля на γ_1, получим

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} a_5 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} a_4 \\ a_5 \\ a_1 \end{pmatrix},$$

где $t = -\gamma_2/\gamma_1$, $s = -\gamma_3/\gamma_1 \neq 0$. Отсюда следует утверждение (5.8) леммы.

Непосредственным подсчетом соответствующих определителей легко установить, что условия (5.8) и $\hat{\Delta}_{123} \neq 0$ влекут утверждение $L_0 \in \mathrm{NR}_0^1$.

Таким образом, лемма полностью доказана. □

Следующие три леммы описывают имеющиеся для оператора L_0 три сильно нерегулярных случая.

Лемма 5.4. $L_0 \in \mathrm{NR}_1$ *тогда и только тогда, когда выполняется одно из следующих двух условий*:

1) *при некотором значении* $s \in \mathbb{C}$, $s \neq 0$

$$\theta_{11}(s) = \theta_{21}(s) = \theta_{31}(s) = 0, \quad \theta_{41}(s) \neq 0, \quad \theta_{51}(s) \neq 0, \quad a_5 \neq 0;$$

2) *при некотором значении* $s \in \mathbb{C}$, $s \neq 0$

$$\theta_{51}(s) = \theta_{11}(s) = \theta_{21}(s) = 0, \quad \theta_{31}(s) \neq 0, \quad \theta_{41}(s) \neq 0, \quad a_4 \neq 0.$$

Доказательство. Из определения множества NR_1 и замечания 4.1 имеем $L_0 \in \mathrm{NR}_1$ в том и только том случае, если $\hat{\Delta}_1 \neq 0$, $\hat{\Delta}_{12} = \hat{\Delta}_{123} = 0$, $\hat{\Delta}_{1234} \neq 0$. Для указанных здесь определителей, как и в предыдущих леммах, используем формулы (4.6).

Из условия $\hat{\Delta}_{123} = 0$ следует, что найдется такой вектор $\Gamma = (\gamma_1, \gamma_2)^T \neq (0,0)^T$, для которого выполняется соотношение (5.1).

Так как $\hat{\Delta}_{1234} = a_1 \neq 0$, то $\gamma_1 \neq 0$ и $\gamma_2 \neq 0$. Поэтому

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = s \begin{pmatrix} a_5 \\ a_1 \end{pmatrix}, \tag{5.9}$$

где $s = -\gamma_2/\gamma_1 \neq 0$. То есть

$$\theta_{11}(s) = \theta_{21}(s) = 0, \quad s \neq 0. \tag{5.10}$$

Преобразуем определитель $\hat{\Delta}_{12}$ точно также, как это было сделано выше в доказательстве леммы 5.2 (см. формулу (5.6)), а именно: из 1-го столбца вычтем 2-й столбец, умноженный на s, из 2-го столбца вычтем 3-й, умноженный на s, затем на основании (5.10) получим

$$0 = \hat{\Delta}_{12} = \begin{vmatrix} \theta_{11}(s) & \theta_{51}(s) & a_4 \\ \theta_{21}(s) & \theta_{11}(s) & a_5 \\ \theta_{31}(s) & \theta_{21}(s) & a_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & \theta_{51}(s) & a_4 \\ 0 & 0 & a_5 \\ \theta_{31}(s) & 0 & a_1 \end{vmatrix} = \theta_{31}(s)\theta_{51}(s)a_5.$$

Следовательно, либо $\theta_{31}(s) = 0$, либо $\theta_{51}(s) = 0$, либо $a_5 = 0$. Но в данном случае a_5 не может быть равным нулю, иначе $a_1 = 0$ (см. формулу (5.9)), поэтому с учетом (5.10) возможны только следующие случаи:

а) $\theta_{11}(s) = \theta_{21}(s) = \theta_{31}(s) = 0$, $\theta_{51}(s) \neq 0$, $a_5 \neq 0$, $s \neq 0$;
б) $\theta_{51}(s) = \theta_{11}(s) = \theta_{21}(s) = 0$, $\theta_{31}(s) \neq 0$, $a_5 \neq 0$, $s \neq 0$;
в) $\theta_{51}(s) = \theta_{11}(s) = \theta_{21}(s) = \theta_{31}(s) = 0$, $a_5 \neq 0$, $s \neq 0$.

Рассмотрим случай а). Преобразуем

$$\hat{\Delta}_1 = \begin{vmatrix} a_1 & a_5 & a_4 & a_3 \\ a_2 & a_1 & a_5 & a_4 \\ a_3 & a_2 & a_1 & a_5 \\ a_4 & a_3 & a_2 & a_1 \end{vmatrix}$$

следующим образом: из 1-го столбца вычтем 2-й столбец, умноженный на s, из 2-го столбца вычтем 3-й столбец, умноженный на s, из 3-го столбца вычтем 4-й столбец, умноженный на s. Затем в соответствии с рассматриваемым случаем а) занулим соответствующие элементы полученного определителя. Получим

$$0 \neq \hat{\Delta}_1 = \begin{vmatrix} \theta_{11}(s) & \theta_{51}(s) & \theta_{41}(s) & a_3 \\ \theta_{21}(s) & \theta_{11}(s) & \theta_{51}(s) & a_4 \\ \theta_{31}(s) & \theta_{21}(s) & \theta_{11}(s) & a_5 \\ \theta_{41}(s) & \theta_{31}(s) & \theta_{21}(s) & a_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & \theta_{51}(s) & \theta_{41}(s) & a_3 \\ 0 & 0 & \theta_{51}(s) & a_4 \\ 0 & 0 & 0 & a_5 \\ \theta_{41}(s) & 0 & 0 & a_1 \end{vmatrix} = -\theta_{41}(s)\theta_{51}^2(s)a_5.$$

Отсюда следует, в частности, что $\theta_{41}(s) \neq 0$. То есть мы получили выполнение условия 1).

Рассмотрим случай б). Преобразуем $\hat{\Delta}_1$ аналогично случаю а), получим

$$0 \neq \hat{\Delta}_1 = \begin{vmatrix} a_1 & a_5 & a_4 & a_3 \\ a_2 & a_1 & a_5 & a_4 \\ a_3 & a_2 & a_1 & a_5 \\ a_4 & a_3 & a_2 & a_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & \theta_{41}(s) & a_3 \\ 0 & 0 & 0 & a_4 \\ \theta_{31}(s) & 0 & 0 & a_5 \\ \theta_{41}(s) & \theta_{31}(s) & 0 & a_1 \end{vmatrix} = \theta_{31}^2(s)\theta_{41}(s)a_4.$$

Отсюда следует, в частности, что $\theta_{41}(s) \neq 0$ и $a_4 \neq 0$. То есть мы получили условие 2).

Рассмотрим случай в). Преобразуем $\hat{\Delta}_1$ аналогично случаям а) и б), получим

$$0 \neq \hat{\Delta}_1 = \begin{vmatrix} a_1 & a_5 & a_4 & a_3 \\ a_2 & a_1 & a_5 & a_4 \\ a_3 & a_2 & a_1 & a_5 \\ a_4 & a_3 & a_2 & a_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & \theta_{41}(s) & a_3 \\ 0 & 0 & 0 & a_4 \\ 0 & 0 & 0 & a_5 \\ \theta_{41}(s) & 0 & 0 & a_1 \end{vmatrix} = 0.$$

Получили противоречие, которое показывает, что случай в) не может иметь места.

Таким образом, мы доказали, что если $L_0 \in \mathrm{NR}_1$, то выполняется условие 1) или условие 2).

Непосредственным подсчетом соответствующих определителей легко установить, что из условия 1) или из условия 2) вытекает утверждение $L_0 \in \mathrm{NR}_1$. Тем самым лемма доказана. ☐

Лемма 5.5. $L_0 \in \mathrm{NR}_1^0$ *тогда и только тогда, когда выполняется одно из следующих условий*:
1) $a_1 = a_2 = a_3 = 0$, $a_4 \neq 0$, $a_5 \neq 0$;
2) $a_5 = a_1 = a_2 = 0$, $a_3 \neq 0$, $a_4 \neq 0$;
3) $a_4 = a_5 = a_1 = 0$, $a_2 \neq 0$, $a_3 \neq 0$.

Доказательство. Из определения множества NR_1^0 и замечания 4.1 имеем $L_0 \in \mathrm{NR}_1^0$ в том и только том случае, когда $\hat{\Delta}_1 \neq 0$ и $\hat{\Delta}_{12} = \hat{\Delta}_{123} = \hat{\Delta}_{1234} = 0$. Для указанных здесь определителей опять используем формулы (4.6).

Докажем необходимость условий леммы.

Из $\hat{\Delta}_{1234} = 0$ следует, что $a_1 = 0$. Так как $a_1 = 0$, то $0 = \hat{\Delta}_{123} = -a_2a_5$, т. е. либо $a_2 = 0$, либо $a_5 = 0$. Следовательно, возможны следующие случаи:

а) $a_1 = a_2 = 0$, $a_5 \neq 0$;
б) $a_5 = a_1 = 0$, $a_2 \neq 0$;
в) $a_5 = a_1 = a_2 = 0$.

Рассмотрим последовательно все эти случаи.

В случае а): $0 = \hat{\Delta}_{12} = a_3a_5^2 \Longrightarrow a_3 = 0 \Longrightarrow \hat{\Delta}_1 = a_4a_5^3$, а так как $\hat{\Delta}_1 \neq 0$ и $a_5 \neq 0$, то будет $a_4 \neq 0$, и, тем самым, получаем утверждение 1) леммы.

В случае б): $0 = \hat{\Delta}_{12} = a_4a_2^2 \Longrightarrow a_4 = 0 \Longrightarrow \hat{\Delta}_1 = a_3a_2^3$, а так как $\hat{\Delta}_1 \neq 0$ и $a_2 \neq 0$, то будет $a_3 \neq 0$, и, тем самым, получаем утверждение 3) леммы.

В случае в) из условия $0 = \hat{\Delta}_{12}$ никаких новых условий не получаем, так как оно выполняется автоматически. Далее, условие $0 \neq \hat{\Delta}_1 = a_3^2 a_4^2$ дает $a_3 \neq 0$ и $a_4 \neq 0$, а это и есть условие 2) леммы.

Достаточность каждого из условий 1)–3) проверяется непосредственным подсчетом соответствующих определителей. Таким образом, лемма доказана. $\square$

Лемма 5.6. $L_0 \in \mathrm{NR}_1^1$ *тогда и только тогда, когда выполняется одно из следующих четырех условий*:

1) *при некотором* $s \in \mathbb{C}$, $s \neq 0$: $\theta_{11}(s) = \theta_{21}(s) = \theta_{31}(s) = \theta_{41}(s) = 0$, $\theta_{51}(s) \neq 0$, $a_5 \neq 0$;
2) *при некотором* $s \in \mathbb{C}$, $s \neq 0$: $\theta_{51}(s) = \theta_{11}(s) = \theta_{21}(s) = \theta_{31}(s) = 0$, $\theta_{41}(s) \neq 0$, $a_4 \neq 0$;
3) *при некотором* $s \in \mathbb{C}$, $s \neq 0$: $\theta_{41}(s) = \theta_{51}(s) = \theta_{11}(s) = \theta_{21}(s) = 0$, $\theta_{31}(s) \neq 0$, $a_3 \neq 0$;
4) *при* $s \in \mathbb{C}$ *таком, что* $s^5 = 1$: $a_1 = p$, $a_2 = ps$, $a_3 = ps^2$, $a_4 = ps^3$, $a_5 = ps^4$, *где* $p \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ *— любое число.*

Доказательство. Пусть $L_0 \in \mathrm{NR}_1^1$. Воспользуемся далее определением множества NR_1^1, замечанием 4.1 и формулами (4.6). Тогда

$$0 = \hat{\Delta}_{123} = \begin{vmatrix} a_1 & a_5 \\ a_2 & a_1 \end{vmatrix}.$$

Следовательно, существует вектор $(\gamma_1, \gamma_2) \neq (0,0)$ такой, что

$$\gamma_1 \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} + \gamma_2 \begin{pmatrix} a_5 \\ a_1 \end{pmatrix} = 0. \tag{5.11}$$

Так как $\hat{\Delta}_{1234} = a_1 \neq 0$, то из (5.11) сразу следует, что $\gamma_1 \neq 0$ и $\gamma_2 \neq 0$. А это влечет существование $s = -\gamma_2/\gamma_1 \neq 0$ такого, что

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = s \begin{pmatrix} a_5 \\ a_1 \end{pmatrix} \Longrightarrow \theta_{11}(s) = \theta_{21}(s) = 0, \ a_5 \neq 0. \tag{5.12}$$

Воспользуемся теперь тем, что $\hat{\Delta}_{12} = 0$. Получим

$$0 = \hat{\Delta}_{12} = \begin{vmatrix} a_1 & a_5 & a_4 \\ a_2 & a_1 & a_5 \\ a_3 & a_2 & a_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & \theta_{51}(s) & a_4 \\ 0 & 0 & a_5 \\ \theta_{31}(s) & 0 & a_1 \end{vmatrix} = \theta_{31}(s)\theta_{51}(s)a_5 \Longrightarrow \left[\begin{array}{l} \theta_{31}(s) = 0 \\ \theta_{51}(s) = 0 \end{array} \right. . \tag{5.13}$$

Учитывая, что в случае $\theta_{51}(s) = 0$, $s \neq 0$ и $a_5 \neq 0$ будет иметь место свойство $a_4 \neq 0$, из (5.12) и (5.13) получим, что возможны только следующие альтернативы:

а) $\theta_{11} = \theta_{21} = \theta_{31} = 0$, $\theta_{51} \neq 0$, $a_5 \neq 0$, $s \neq 0$;
б) $\theta_{51} = \theta_{11} = \theta_{21} = 0$, $\theta_{31} \neq 0$, $a_4 \neq 0$, $s \neq 0$;
в) $\theta_{51} = \theta_{11} = \theta_{21} = \theta_{31} = 0$, $a_4 \neq 0$, $s \neq 0$.

Рассмотрим отдельно каждый случай.

Пусть выполняется условие а). Воспользуемся равенством нулю определителя $\hat{\Delta}_1$:

$$0 = \hat{\Delta}_1 = \begin{vmatrix} a_1 & a_5 & a_4 & a_3 \\ a_2 & a_1 & a_5 & a_4 \\ a_3 & a_2 & a_1 & a_5 \\ a_4 & a_3 & a_2 & a_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & \theta_{51}(s) & \theta_{41}(s) & a_3 \\ 0 & 0 & \theta_{51}(s) & a_4 \\ 0 & 0 & 0 & a_5 \\ \theta_{41}(s) & 0 & 0 & a_1 \end{vmatrix} = -\theta_{41}^2(s)\theta_{51}(s)a_5,$$

а так как $\theta_{51(s)} \neq 0$ и $a_5 \neq 0$, то отсюда следует, что $\theta_{41}(s) = 0$, и, тем самым, получаем условие 1) леммы.

Пусть выполняется условие б). В этом случае опять воспользуемся равенством нулю определителя $\hat{\Delta}_1$:

$$0 = \hat{\Delta}_1 = \begin{vmatrix} a_1 & a_5 & a_4 & a_3 \\ a_2 & a_1 & a_5 & a_4 \\ a_3 & a_2 & a_1 & a_5 \\ a_4 & a_3 & a_2 & a_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & \theta_{41}(s) & a_3 \\ 0 & 0 & 0 & a_4 \\ \theta_{31}(s) & 0 & 0 & a_5 \\ \theta_{41}(s) & \theta_{31}(s) & 0 & a_1 \end{vmatrix} = \theta_{31}^2\theta_{41}a_4,$$

а так как $\theta_{31}(s) \neq 0$ и $a_4 \neq 0$, то отсюда получим $\theta_{41}(s) = 0$, что дает условие 3) леммы.

Пусть выполняется условие в). Равенство нулю определителя $\hat{\Delta}_1$ в данном случае выполняется автоматически:

$$0=\hat{\Delta}_1=\begin{vmatrix} a_1 & a_5 & a_4 & a_3 \\ a_2 & a_1 & a_5 & a_4 \\ a_3 & a_2 & a_1 & a_5 \\ a_4 & a_3 & a_2 & a_1 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 0 & 0 & \theta_{41}(s) & a_3 \\ 0 & 0 & 0 & a_4 \\ 0 & 0 & 0 & a_5 \\ \theta_{41}(s) & 0 & 0 & a_1 \end{vmatrix},$$

и ничего нового не дает.

Здесь возможны два подслучая:

в.1) $\theta_{41}\neq 0$;

в.2) $\theta_{41}=0$.

В подслучае в.1) сразу получаем утверждение 2) леммы.

Пусть имеет место подслучай в.2). В этом подслучае получим однородную линейную алгебраическую систему

$$\begin{cases} a_1 = sa_5, \\ a_2 = sa_1, \\ a_3 = sa_2, \\ a_4 = sa_3, \\ a_5 = sa_4, \end{cases}$$

относительно неизвестных $a_1, a_2, \ldots, a_5$. Она имеет решение только тогда, когда определитель системы равен нулю. Преобразуем определитель следующим образом:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -s \\ -s & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -s & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -s & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -s & 1 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -s \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -s^2 \\ 0 & -s & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -s & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -s & 1 \end{vmatrix}=$$

$$=\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & -s^2 \\ -s & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -s & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -s & 1 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & -s^2 \\ 0 & 1 & 0 & -s^3 \\ 0 & -s & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -s & 1 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & 0 & -s^3 \\ -s & 1 & 0 \\ 0 & -s & 1 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & 0 & -s^3 \\ 0 & 1 & -s^4 \\ 0 & -s & 1 \end{vmatrix}=$$

$$=\begin{vmatrix} 1 & -s^4 \\ -s & 1 \end{vmatrix}=1-s^5=0 \Longrightarrow s^5=1.$$

Полагаем $a_1=p$, $a_2=sp$, $a_3=s^2p$, $a_4=s^3p$, $a_5=s^4p$, где $p\in\mathbb{C}\setminus\{0\}$ — любое число, а s — корень уравнения $s^5=1$. Тем самым получаем условие 4) леммы.

Таким образом, получены все условия леммы 1)–4). Тем самым необходимость условий леммы доказана.

Достаточность условий 1)–4) проверяется непосредственно путем подсчета соответствующих определителей. Лемма доказана. □

Наконец, в последней лемме описывается оставшийся случай множества NR_2.

Лемма 5.7. $L_0\in\mathrm{NR}_2$ *тогда и только тогда, когда оператор* L_0 *— вырожденный, т. е. такой оператор, у которого либо нет с.з., либо все* $\lambda\in\mathbb{C}$ *являются его с.з.*

Доказательство. Пусть $L_0\in\mathrm{NR}_2$. Тогда в соответствии с определением множества NR_2 и замечанием 4.1 будем иметь

$$\hat{\Delta}_1=\hat{\Delta}_{12}=\hat{\Delta}_{123}=\hat{\Delta}_{1234}=0. \tag{5.14}$$

Используем далее формулы (4.6).

Из этих формул и соотношений (5.14) легко получаем $0=\hat{\Delta}_{1234}=a_1$.

Далее, так как $a_1=0$, то

$$0=\hat{\Delta}_{123}=\begin{vmatrix} 0 & a_5 \\ a_2 & 0 \end{vmatrix}=-a_2a_5,$$

и либо $a_2=0$, либо $a_5=0$. Поэтому, имеем следующие возможные случаи:

1) $a_1=a_2=0$;
2) $a_5=a_1=0$;
3) $a_5=a_1=a_2=0$.

Рассмотрим каждый из этих случаев отдельно.

Пусть имеет место случай 1). Тогда

$$0 = \hat{\Delta}_{12} = \begin{vmatrix} 0 & a_5 & a_4 \\ 0 & 0 & a_5 \\ a_3 & 0 & 0 \end{vmatrix} = a_3 a_5^2,$$

откуда следует, что либо $a_3 = 0$, либо $a_5 = 0$. Таким образом, возможны следующие подслучаи:

а) $a_1 = a_2 = a_3 = 0$;
б) $a_5 = a_1 = a_2 = 0$;
в) $a_5 = a_1 = a_2 = a_3 = 0$.

Рассмотрим каждый из этих подслучаев отдельно.

Пусть имеет место подслучай а). Тогда

$$0 = \hat{\Delta}_1 = \begin{vmatrix} 0 & a_5 & a_4 & a_3 \\ 0 & 0 & a_5 & a_4 \\ 0 & 0 & 0 & a_5 \\ a_4 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -a_4 a_5^3,$$

откуда следует, что либо $a_4 = 0$, либо $a_5 = 0$. Таким образом, получаем три условия

(i) $a_1 = a_2 = a_3 = a_4 = 0$;
(ii) $a_5 = a_1 = a_2 = a_3 = 0$;
(iii) $a_1 = a_2 = a_3 = a_4 = a_5 = 0$.

Пусть теперь имеет место подслучай б). Тогда

$$0 = \hat{\Delta}_1 = \begin{vmatrix} 0 & 0 & a_4 & a_3 \\ 0 & 0 & 0 & a_4 \\ a_3 & 0 & 0 & 0 \\ a_4 & a_3 & 0 & 0 \end{vmatrix} = a_3^2 a_4^2,$$

откуда следует, что либо $a_3 = 0$, либо $a_4 = 0$. Таким образом, получаем еще одно условие, которого не было выше:

(iv) $a_4 = a_5 = a_1 = a_2 = 0$.

Наконец, если имеет место подслучай в), то равенство $\hat{\Delta}_1 = 0$ выполняется автоматически и ничего дополнительного не получаем.

Пусть теперь имеет место случай 2). Тогда

$$0 = \hat{\Delta}_{12} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & a_4 \\ a_2 & 0 & 0 \\ a_3 & a_2 & 0 \end{vmatrix} = a_2^2 a_4,$$

откуда следует, что либо $a_2 = 0$, либо $a_4 = 0$. Таким образом, возможны следующие подслучаи:

а) $a_5 = a_1 = a_2 = 0$;
б) $a_4 = a_5 = a_1 = 0$;
в) $a_4 = a_5 = a_1 = a_2 = 0$.

Рассмотрим каждый из этих подслучаев отдельно.

Пусть имеет место подслучай а). Тогда

$$0 = \hat{\Delta}_1 = \begin{vmatrix} 0 & 0 & a_4 & a_3 \\ 0 & 0 & 0 & a_4 \\ a_3 & 0 & 0 & 0 \\ a_4 & a_3 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -a_3^2 a_4^2,$$

откуда следует, что либо $a_3 = 0$, либо $a_4 = 0$. Здесь опять получаем либо случай (ii), либо (iv), либо (iii).

Пусть имеет место подслучай б). Тогда

$$0 = \hat{\Delta}_1 = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & a_3 \\ a_2 & 0 & 0 & 0 \\ a_3 & a_2 & 0 & 0 \\ 0 & a_3 & a_2 & 0 \end{vmatrix} = -a_2^3 a_3,$$

откуда следует, что либо $a_2 = 0$, либо $a_3 = 0$. Здесь получаем еще одно условие, которого не было ранее:

(v) $a_3 = a_4 = a_5 = a_1 = 0$.

Таким образом, установлено, что соотношение (5.14) приводит к выполнению одного из условий (i)–(v).

Непосредственной проверкой убеждаемся, что при каждом условии (i)–(v) выполняются соотношения (5.14), а также равны нулю еще не найденные определители в (3.2), вычисленные с учетом замечания 4.1 и аналогично формулам (4.6), а именно, определители

$$\hat{\Delta}_{13} = \begin{vmatrix} a_1 & a_4 & a_3 \\ a_3 & a_1 & a_5 \\ a_4 & a_2 & a_1 \end{vmatrix}, \quad \hat{\Delta}_{124} = \begin{vmatrix} a_1 & a_4 \\ a_3 & a_1 \end{vmatrix}.$$

В результате в формуле (3.2) для определителя $\widetilde{\Delta}(\rho)$ в скобках останутся только следующие слагаемые:

$$\hat{\Delta}_{12345} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1, \quad \hat{\Delta}_0 = \begin{vmatrix} a_1 & a_5 & a_4 & a_3 & a_2 \\ a_2 & a_1 & a_5 & a_4 & a_3 \\ a_3 & a_2 & a_1 & a_5 & a_4 \\ a_4 & a_3 & a_2 & a_1 & a_5 \\ a_5 & a_4 & a_3 & a_2 & a_1 \end{vmatrix},$$

причем последний определитель или равен нулю, или равен некоторой ненулевой константе. Отсюда следует утверждение доказываемой леммы. Лемма доказана. $\square$

6. Доказательство теоремы полноты

Итак, рассмотрим оператор 5-го порядка L_0, определяемый дифференциальным выражением (1) и краевыми условиями (2). В соответствии с разделом 1 (см. пункты 1°, 3°, пункт 2° для оператора L_0 не реализуется), разделом 3 (см. пункты $(\mathbf{0})$, $(\mathbf{0^0})$, $(\mathbf{0^1})$, $(\mathbf{1})$, $(\mathbf{1^0})$, $(\mathbf{1^1})$, $(\mathbf{2})$), а также в силу леммы 5.7 для полного доказательства теоремы 1 осталось рассмотреть случаи только сильно нерегулярных операторов L_0 из множеств NR_1, NR_1^0 и NR_1^1. Если для операторов L_0 из этих множеств будет доказана полнота системы их с.ф. в пространстве $L_2[0,1]$, то тем самым теорема 1 будет полностью доказана. Для полноты картины и лучшего понимания сути используемого метода доказательства полноты системы с.ф. заодно докажем полноту системы с.ф. и для множеств NR_0, NR_0^0, NR_0^1, несмотря на то, что эта полнота уже хорошо известна и доказана различными другими методами.

6.1. Анализ специального параметрического решения. Исследование полноты системы с.ф. в данной статье проводится для дифференциального оператора L_0, порожденного простейшим дифференциальным выражением (1). Поэтому, как было отмечено в начале раздела 3, в ρ-плоскости существует единая ф.с.р. $\{e^{\rho\omega_j x}\}_{j=1}^5$ уравнения $\ell_0(y) + \rho^5 y = 0$. Следовательно, с.п.р. $\widetilde{g}_k(x,\rho;\Gamma(\rho))$, вычисляемое по формуле (2.3), не будет зависеть от номера k сектора S_k, которому принадлежит ρ (с точностью до знака). Будем далее рассматривать в качестве с.п.р. функцию $\widetilde{g}(x,\rho;\Gamma(\rho))$, для которой имеет место следующее представление:

$$\widetilde{g}(x,\rho;\Gamma(\rho)) = \begin{vmatrix} 0 & \widetilde{y}_1(x,\rho) & \dots & \widetilde{y}_5(x,\rho) \\ -\gamma_1(\rho) & u_{11}(\rho) & \dots & u_{15}(\rho) \\ -\gamma_2(\rho) & u_{21}(\rho) & \dots & u_{25}(\rho) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ -\gamma_5(\rho) & u_{51}(\rho) & \dots & u_{55}(\rho) \end{vmatrix}. \tag{6.1}$$

Таким образом, при фиксированном $x \in [0,1]$ функция $\widetilde{g}(x,\rho;\Gamma(\rho))$ является целой аналитической функцией от ρ конечной степени.

Как было отмечено в разделе 3, по тем же самым соображениям и функция $\widetilde{\Delta}_k(\rho)$ также не зависит от номера k (с точностью до знака). Эта функция была обозначена как $\widetilde{\Delta}(\rho)$ и определена формулой (3.1). Таким образом, функция $\widetilde{\Delta}(\rho)$ также есть целая аналитическая функция по ρ

конечной степени. В соответствии со схемой доказательства полноты (см. раздел 2), необходимо найти такую в.ф. $\Gamma(\rho) = (\gamma_1(\rho), \gamma_2(\rho), \ldots, \gamma_5(\rho))^T$, что

$$\widetilde{\mathcal{G}}(\rho, \Gamma(\rho)) = \frac{1}{\widetilde{\Delta}(\rho)} \int\limits_0^1 \widetilde{g}(x, \rho; \Gamma(\rho)) f(x)\, dx = \frac{\widetilde{G}(\rho, \Gamma(\rho))}{\widetilde{\Delta}(\rho)} \in (\alpha).$$

Будем искать в.ф. $\Gamma(\rho)$ в виде

$$\Gamma(\rho) = (\gamma_1, \rho\gamma_2, \rho^2\gamma_3, \ldots, \rho^4\gamma_5)^T, \tag{6.2}$$

где $\gamma_j \in \mathbb{C}$, $j = \overline{1,5}$. Обозначим далее

$$\Gamma = (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \ldots, \gamma_5)^T. \tag{6.3}$$

Тогда на основании формул (6.1)–(6.3) и определения векторов V_j и W_j, введенных в разделе 3, получим представление

$$\widetilde{g}(x, \rho; \Gamma(\rho)) = \rho^{10} \begin{vmatrix} 0 & e^{\rho\omega_1 x} & e^{\rho\omega_2 x} & \ldots & e^{\rho\omega_5 x} \\ -\Gamma & V_1 + e^{\rho\omega_1} W_1 & V_2 + e^{\rho\omega_2} W_2 & \ldots & V_5 + e^{\rho\omega_5} W_5 \end{vmatrix}, \tag{6.4}$$

где для определителя справа используется удобное в дальнейшем блочное представление.

Запишем функцию $\widetilde{g}(x, \rho; \Gamma(\rho))$ подробно. Для краткости будем использовать следующие обозначения:

$$X^1 = |\Gamma\ V_2\ V_3\ V_4\ V_5|, \quad X_2^1 = |\Gamma\ W_2\ V_3\ V_4\ V_5|, \quad \ldots, \quad X_{124}^3 = |W_1\ W_2 \Gamma\ W_4\ V_5|, \quad \ldots,$$

где верхний индекс обозначает позицию, на которой находится вектор Γ, а нижние индексы обозначают позиции, на которых находятся векторы W_j.

Имеет место следующее представление:

$$\widetilde{g}(x, \rho, \Gamma(\rho)) = \rho^{10} \begin{vmatrix} 0 & e^{\lambda\omega_1 x} & e^{\lambda\omega_2 x} & \ldots & e^{\lambda\omega_5 x} \\ -\Gamma & V_1 + e^{\lambda\omega_1} W_1 & V_2 + e^{\lambda\omega_2} W_2 & \ldots & V_5 + e^{\lambda\omega_5} W_5 \end{vmatrix} =$$

$$= \rho^{10}\Big(e^{\rho\omega_1 x}\, |\Gamma,\ V_2 + e^{\rho\omega_2} W_2,\ V_3 + e^{\rho\omega_3} W_3,\ V_4 + e^{\rho\omega_4} W_4,\ V_5 + e^{\rho\omega_5} W_5| +$$
$$+ e^{\rho\omega_2 x}\, |V_1 + e^{\rho\omega_1} W_1,\ \Gamma,\ V_3 + e^{\rho\omega_3} W_3,\ V_4 + e^{\rho\omega_4} W_4,\ V_5 + e^{\rho\omega_5} W_5| +$$
$$+ e^{\rho\omega_3 x}\, |V_1 + e^{\rho\omega_1} W_1,\ V_2 + e^{\rho\omega_2} W_2,\ \Gamma,\ V_4 + e^{\rho\omega_4} W_4,\ V_5 + e^{\rho\omega_5} W_5| +$$
$$+ e^{\rho\omega_4 x}\, |V_1 + e^{\rho\omega_1} W_1,\ V_2 + e^{\rho\omega_2} W_2,\ V_3 + e^{\rho\omega_3} W_3,\ \Gamma,\ V_5 + e^{\rho\omega_5} W_5| +$$
$$+ e^{\rho\omega_5 x}\, |V_1 + e^{\rho\omega_1} W_1,\ V_2 + e^{\rho\omega_2} W_2,\ V_3 + e^{\rho\omega_3} W_3,\ V_4 + e^{\rho\omega_4} W_4,\ \Gamma|\Big) =$$

$$= \rho^{10}\Big(e^{\rho\omega_1 x}\big(X^1 + e^{\rho\omega_2} X_2^1 + e^{\rho\omega_3} X_3^1 + e^{\rho\omega_4} X_4^1 + e^{\rho\omega_5} X_5^1 + e^{\rho(\omega_2+\omega_3)} X_{23}^1 + e^{\rho(\omega_2+\omega_4)} X_{24}^1 +$$
$$+ e^{\rho(\omega_2+\omega_5)} X_{25}^1 + e^{\rho(\omega_3+\omega_4)} X_{34}^1 + e^{\rho(\omega_3+\omega_5)} X_{35}^1 + e^{\rho(\omega_4+\omega_5)} X_{45}^1 + e^{\rho(\omega_2+\omega_3+\omega_4)} X_{234}^1 +$$
$$+ e^{\rho(\omega_2+\omega_3+\omega_5)} X_{235}^1 + e^{\rho(\omega_2+\omega_4+\omega_5)} X_{245}^1 + e^{\rho(\omega_3+\omega_4+\omega_5)} X_{345}^1 + e^{\rho(\omega_2+\omega_3+\omega_4+\omega_5)} X_{2345}^1\big) +$$
$$+ e^{\rho\omega_2 x}\big(X^2 + e^{\rho\omega_1} X_1^2 + e^{\rho\omega_3} X_3^2 + e^{\rho\omega_4} X_4^2 + e^{\rho\omega_5} X_5^2 + e^{\rho(\omega_1+\omega_3)} X_{13}^2 + e^{\rho(\omega_1+\omega_4)} X_{14}^2 +$$
$$+ e^{\rho(\omega_1+\omega_5)} X_{15}^2 + e^{\rho(\omega_3+\omega_4)} X_{34}^2 + e^{\rho(\omega_3+\omega_5)} X_{35}^2 + e^{\rho(\omega_4+\omega_5)} X_{45}^2 + e^{\rho(\omega_1+\omega_3+\omega_4)} X_{134}^2 +$$
$$+ e^{\rho(\omega_1+\omega_3+\omega_5)} X_{135}^2 + e^{\rho(\omega_1+\omega_4+\omega_5)} X_{145}^2 + e^{\rho(\omega_3+\omega_4+\omega_5)} X_{345}^2 + e^{\rho(\omega_1+\omega_3+\omega_4+\omega_5)} X_{1345}^2\big) +$$
$$+ e^{\rho\omega_3 x}\big(X^3 + e^{\rho\omega_1} X_1^3 + e^{\rho\omega_2} X_2^3 + e^{\rho\omega_4} X_4^3 + e^{\rho\omega_5} X_5^3 + e^{\rho(\omega_1+\omega_2)} X_{12}^3 + e^{\rho(\omega_1+\omega_4)} X_{14}^3 +$$
$$+ e^{\rho(\omega_1+\omega_5)} X_{15}^3 + e^{\rho(\omega_2+\omega_4)} X_{24}^3 + e^{\rho(\omega_2+\omega_5)} X_{25}^3 + e^{\rho(\omega_4+\omega_5)} X_{45}^3 + e^{\rho(\omega_1+\omega_2+\omega_4)} X_{124}^3 +$$
$$+ e^{\rho(\omega_1+\omega_2+\omega_5)} X_{125}^3 + e^{\rho(\omega_1+\omega_4+\omega_5)} X_{145}^3 + e^{\rho(\omega_2+\omega_4+\omega_5)} X_{245}^3 + e^{\rho(\omega_1+\omega_2+\omega_4+\omega_5)} X_{1245}^3\big) +$$
$$+ e^{\rho\omega_4 x}\big(X^4 + e^{\rho\omega_1} X_1^4 + e^{\rho\omega_2} X_2^4 + e^{\rho\omega_3} X_3^4 + e^{\rho\omega_5} X_5^4 + e^{\rho(\omega_1+\omega_2)} X_{12}^4 + e^{\rho(\omega_1+\omega_3)} X_{13}^4 +$$
$$+ e^{\rho(\omega_1+\omega_5)} X_{15}^4 + e^{\rho(\omega_2+\omega_3)} X_{23}^4 + e^{\rho(\omega_2+\omega_5)} X_{25}^4 + e^{\rho(\omega_3+\omega_5)} X_{35}^4 + e^{\rho(\omega_1+\omega_2+\omega_3)} X_{123}^4 +$$

$$+e^{\rho(\omega_1+\omega_2+\omega_5)}X^4_{125}+e^{\rho(\omega_1+\omega_3+\omega_5)}X^4_{135}+e^{\rho(\omega_2+\omega_3+\omega_5)}X^4_{235}+e^{\rho(\omega_1+\omega_2+\omega_3+\omega_5)}X^4_{1235}\big)+$$
$$+e^{\rho\omega_5 x}\big(X^5+e^{\rho\omega_1}X^5_1+e^{\rho\omega_2}X^5_2+e^{\rho\omega_3}X^5_3+e^{\rho\omega_4}X^5_4+e^{\rho(\omega_1+\omega_2)}X^5_{12}+e^{\rho(\omega_1+\omega_3)}X^5_{13}+$$
$$+e^{\rho(\omega_1+\omega_4)}X^5_{14}+e^{\rho(\omega_2+\omega_3)}X^5_{23}+e^{\rho(\omega_2+\omega_4)}X^5_{24}+e^{\rho(\omega_3+\omega_4)}X^5_{34}+e^{\rho(\omega_1+\omega_2+\omega_3)}X^5_{123}+$$
$$+e^{\rho(\omega_1+\omega_2+\omega_4)}X^5_{124}+e^{\rho(\omega_1+\omega_3+\omega_4)}X^5_{134}+e^{\rho(\omega_2+\omega_3+\omega_4)}X^5_{234}+e^{\rho(\omega_1+\omega_2+\omega_3+\omega_4)}X^5_{1234}\big)\Big).$$

По аналогии с характеристическим многоугольником $M_{\widetilde{\Delta}}$ оператора L_0 введем *характеристический многоугольник* $M_{\widetilde{G}}$ *функции* $\widetilde{G}(\rho,\Gamma(\rho))$, или, короче, *характеристический многоугольник* $M(\Gamma)$ *вектора* Γ (или, что то же самое, *характеристический многоугольник* $M(\hat{\Gamma})$ *вектора* $\hat{\Gamma}$) следующим образом. Каждому отличному от нуля коэффициенту $X^s_{ij\dots k}(\Gamma)$ в выражении выше для $\widetilde{g}(x,\rho,\Gamma(\rho))$ соотнесем две точки множества Ω, а именно, $\omega_i+\omega_j+\dots+\omega_k$ и $\omega_i+\omega_j+\dots+\omega_k+\omega_s$. Множество всех таких точек обозначим как $\Omega(\Gamma)$. Так как $X^s_{ij\dots k}(\Gamma)\neq 0$ тогда и только тогда, когда $\hat{X}^s_{ij\dots k}(\hat{\Gamma})\neq 0$, то, очевидно, $\Omega(\Gamma)=\Omega(\hat{\Gamma})$. Положим по определению $M(\Gamma)(=M(\hat{\Gamma})):=\operatorname{conv}\Omega(\Gamma)$.

Анализируя выражение для $\widetilde{g}(x,\rho;\Gamma(\rho))$, можно заметить, что «плохими» слагаемыми (с точки зрения выполнения условия $\widetilde{\mathcal{G}}(\rho;\Gamma(\rho))\in(\alpha)$) являются слагаемые с коэффициентами

$$\begin{array}{cccccccccc}
 & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow \\
(i) & X^1_2 & X^1_5 & X^1_{23} & X^1_{25} & X^1_{34} & X^1_{45} & X^1_{234} & X^1_{345} \\
 & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow \\
(ii) & X^2_3 & X^2_1 & X^2_{34} & X^2_{13} & X^2_{45} & X^2_{15} & X^2_{345} & X^2_{145} \\
 & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow \\
(iii) & X^3_4 & X^3_2 & X^3_{45} & X^3_{24} & X^3_{15} & X^3_{12} & X^3_{145} & X^3_{125} \\
 & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow \\
(iv) & X^4_5 & X^4_3 & X^4_{15} & X^4_{35} & X^4_{12} & X^4_{23} & X^4_{125} & X^4_{123} \\
 & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow \\
(v) & X^5_1 & X^5_4 & X^5_{12} & X^5_{14} & X^5_{23} & X^5_{34} & X^5_{123} & X^5_{234} \\
 & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow
\end{array}\qquad(6.5)$$

Причина разбиения этих коэффициентов на пять групп (i)–(v) и смысл стрелок будут понятны из дальнейшего изложения.

Введем вектор $\hat{\Gamma}=\Omega^{-1}\Gamma=(\hat{\gamma}_1,\hat{\gamma}_2,\dots,\hat{\gamma}_5)^T$. Далее будем писать $X^1_2(\Gamma)$, $X^1_5(\Gamma)$, $\dots$, чтобы подчеркнуть, какой вектор Γ используется. Аналогично будем обозначать $\hat{X}^1_2(\hat{\Gamma})$, $\hat{X}^1_5(\hat{\Gamma})$, $\dots$, где коэффициенты $\hat{X}^*_*(\hat{\Gamma})$ строятся по тем же формулам, что и коэффициенты $X^*_*(\Gamma)$, но только вместо векторов V_j, W_j, Γ используются векторы $\hat{V}_j$, $\hat{W}_j$, $\hat{\Gamma}$. Кроме того, введем оператор S циклического сдвига вверх

$$\hat{\Gamma}=(\hat{\gamma}_1,\hat{\gamma}_2,\ \dots,\ \hat{\gamma}_5)^T\ \longmapsto S\hat{\Gamma}=(\hat{\gamma}_2,\hat{\gamma}_3,\ \dots,\ \hat{\gamma}_5,\hat{\gamma}_1)^T.$$

Лемма 6.1. *Для любого вектора* $\hat{\Gamma}$ *справедливы равенства* (*см. стрелки в таблице* (6.5)):

$$\begin{array}{llll}
\hat{X}^2_3(\hat{\Gamma})=\hat{X}^1_2(S\hat{\Gamma}), & \hat{X}^2_1(\hat{\Gamma})=\hat{X}^1_5(S\hat{\Gamma}), & \dots, & \hat{X}^2_{145}(\hat{\Gamma})=\hat{X}^1_{345}(S\hat{\Gamma});\\
\hat{X}^3_4(\hat{\Gamma})=\hat{X}^2_3(S\hat{\Gamma}), & \hat{X}^3_2(\hat{\Gamma})=\hat{X}^2_1(S\hat{\Gamma}), & \dots, & \hat{X}^3_{125}(\hat{\Gamma})=\hat{X}^2_{145}(S\hat{\Gamma});\\
\hat{X}^4_5(\hat{\Gamma})=\hat{X}^3_4(S\hat{\Gamma}), & \hat{X}^4_3(\hat{\Gamma})=\hat{X}^3_2(S\hat{\Gamma}), & \dots, & \hat{X}^4_{123}(\hat{\Gamma})=\hat{X}^3_{125}(S\hat{\Gamma});\\
\hat{X}^5_1(\hat{\Gamma})=\hat{X}^4_5(S\hat{\Gamma}), & \hat{X}^5_4(\hat{\Gamma})=\hat{X}^4_3(S\hat{\Gamma}), & \dots, & \hat{X}^5_{234}(\hat{\Gamma})=\hat{X}^4_{123}(S\hat{\Gamma});\\
\hat{X}^1_2(\hat{\Gamma})=\hat{X}^5_1(S\hat{\Gamma}), & \hat{X}^1_5(\hat{\Gamma})=\hat{X}^5_4(S\hat{\Gamma}), & \dots, & \hat{X}^1_{345}(\hat{\Gamma})=\hat{X}^5_{234}(S\hat{\Gamma}).
\end{array}$$

Доказательство. Докажем, например, равенство $\hat{X}^2_3(\hat{\Gamma})=\hat{X}^1_2(S\hat{\Gamma})$. Остальные равенства доказываются аналогично. Имеем

$$\hat{X}^2_3(\hat{\Gamma})=|\hat{V}_1\ \hat{\Gamma}\ \hat{W}_3\ \hat{V}_4\ \hat{V}_5|=\begin{vmatrix} a_1 & \hat{\gamma}_1 & 0 & a_3 & a_2\\ a_2 & \hat{\gamma}_2 & 0 & a_4 & a_3\\ a_3 & \hat{\gamma}_3 & 1 & a_5 & a_4\\ a_4 & \hat{\gamma}_4 & 0 & a_1 & a_5\\ a_5 & \hat{\gamma}_5 & 0 & a_2 & a_1\end{vmatrix}.$$

Преобразуем данный определитель, переставляя 1-й столбец последовательно со 2-м, 3-м, ..., 5-м столбцом. Получим

$$\hat{X}_3^2(\hat{\Gamma}) = (-1)^4 \begin{vmatrix} \hat{\gamma}_1 & 0 & a_3 & a_2 & a_1 \\ \hat{\gamma}_2 & 0 & a_4 & a_3 & a_2 \\ \hat{\gamma}_3 & 1 & a_5 & a_4 & a_3 \\ \hat{\gamma}_4 & 0 & a_1 & a_5 & a_4 \\ \hat{\gamma}_5 & 0 & a_2 & a_1 & a_5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \hat{\gamma}_1 & 0 & a_3 & a_2 & a_1 \\ \hat{\gamma}_2 & 0 & a_4 & a_3 & a_2 \\ \hat{\gamma}_3 & 1 & a_5 & a_4 & a_3 \\ \hat{\gamma}_4 & 0 & a_1 & a_5 & a_4 \\ \hat{\gamma}_5 & 0 & a_2 & a_1 & a_5 \end{vmatrix}.$$

Преобразуем полученный определитель, последовательно переставляя 1-ю строку со 2-й, 3-й, ..., 5-й строкой. Получим

$$\hat{X}_3^2(\hat{\Gamma}) = (-1)^4 \begin{vmatrix} \hat{\gamma}_2 & 0 & a_4 & a_3 & a_2 \\ \hat{\gamma}_3 & 1 & a_5 & a_4 & a_3 \\ \hat{\gamma}_4 & 0 & a_1 & a_5 & a_4 \\ \hat{\gamma}_5 & 0 & a_2 & a_1 & a_5 \\ \hat{\gamma}_1 & 0 & a_3 & a_2 & a_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \hat{\gamma}_2 & 0 & a_4 & a_3 & a_2 \\ \hat{\gamma}_3 & 1 & a_5 & a_4 & a_3 \\ \hat{\gamma}_4 & 0 & a_1 & a_5 & a_4 \\ \hat{\gamma}_5 & 0 & a_2 & a_1 & a_5 \\ \hat{\gamma}_1 & 0 & a_3 & a_2 & a_1 \end{vmatrix} = |(S\hat{\Gamma})\ \hat{W}_2\ \hat{V}_3\ \hat{V}_4\hat{V}_5| = \hat{X}_2^1(S\hat{\Gamma}).$$

Лемма доказана. ☐

Справедлива следующая лемма.

Лемма 6.2. *При всех* $\rho \in \mathbb{C}\backslash(\sigma \cup \{0\})$, *где* $\sigma = \{\rho \in \mathbb{C} | -\rho^5 \in \Lambda_0\}$ (Λ_0 *есть множество с.з. оператора* L_0), *функции* $\widetilde{g}(\cdot, \rho, \Gamma_j(\rho))$, $j = \overline{1,5}$, *линейно независимы по* x *при* $x \in [0,1]$ *тогда и только тогда, когда линейно независимы векторы* $\Gamma_j(\rho)$, $j = \overline{1,5}$ (*или, что эквивалентно, векторы* Γ_j, $j = \overline{1,5}$).

Доказательство. Докажем необходимость. Пусть функции $\widetilde{g}(x, \rho, \Gamma_j(\rho))$, $j = \overline{1,5}$, линейно независимы по x при фиксированном $\rho \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ на отрезке $[0,1]$. Предположим противное, а именно, что векторы $\Gamma_j(\rho)$, $j = \overline{1,5}$, линейно зависимы, т. е. существует ненулевой вектор $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_5)$ такой, что $\sum\limits_{j=1}^{5} \alpha_j \Gamma_j(\rho) = 0$, или, что эквивалентно, $\sum\limits_{j=1}^{5} \alpha_j \Gamma_j = 0$. Тогда на основании (6.4) для всех $x \in [0,1]$

$$0 \equiv \rho^{10} \begin{vmatrix} 0 & e^{\rho\omega_1 x} & e^{\rho\omega_2 x} & \ldots & e^{\rho\omega_5 x} \\ 0 & V_1 + e^{\rho\omega_1} W_1 & V_2 + e^{\rho\omega_2} W_2 & \ldots & V_5 + e^{\rho\omega_5} W_5 \end{vmatrix} =$$

$$= \rho^{10} \begin{vmatrix} 0 & e^{\rho\omega_1 x} & e^{\rho\omega_2 x} & \ldots & e^{\rho\omega_5 x} \\ \sum\limits_{j=1}^{5} \alpha_j \Gamma_j & V_1 + e^{\rho\omega_1} W_1 & V_2 + e^{\rho\omega_2} W_2 & \ldots & V_5 + e^{\rho\omega_5} W_5 \end{vmatrix} = \sum_{j=1}^{5} \alpha_j \widetilde{g}(x, \rho, \Gamma_j(\rho)).$$

А так как по предположению функции $\widetilde{g}(x, \rho, \Gamma_j(\rho)$, $j = \overline{1,5}$, линейно независимы по x при $x \in [0,1]$, то из последнего соотношения получим, что $\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_5 = 0$. А это противоречит предположению. Следовательно, векторы $\Gamma_j(\rho)$, $j = \overline{1,5}$, линейно независимы. Необходимость доказана.

Докажем теперь достаточность. Пусть векторы $\Gamma_j(\rho)$, $j = \overline{1,5}$, линейно независимы при фиксированном $\rho \in \mathbb{C}\backslash(\sigma \cup \{0\})$. Предположим противное, а именно, что функции $\widetilde{g}(x, \rho, \Gamma_j(\rho)$, $j = \overline{1,5}$, линейно зависимы по x при $x \in [0,1]$. Таким образом, существует ненулевой вектор $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_5)$ такой, что

$$0 \equiv \sum_{j=1}^{5} \alpha_j \widetilde{g}(x, \rho, \Gamma_j(\rho)) = \widetilde{g}\Big(x, \rho, \sum_{j=1}^{5} \alpha_j \Gamma_j(\rho)\Big),\ x \in [0,1].$$

Отсюда получим для любого $\nu = \overline{1,5}$

$$0 = U_{0\nu}\left(g\left(\cdot, \rho, \sum_{j=1}^{5} \alpha_j \Gamma_j(\rho)\right)\right) = \begin{vmatrix} 0 & U_{0\nu}(\widetilde{y}_1) & U_{0\nu}(\widetilde{y}_2) & \ldots & U_{0\nu}(\widetilde{y}_5) \\ -\sum\limits_{j=1}^{5} \alpha_j \gamma_{1j} & U_{01}(\widetilde{y}_1) & U_{01}(\widetilde{y}_2) & \ldots & U_{01}(\widetilde{y}_5) \\ \hdotsfor{5} \\ -\sum\limits_{j=1}^{5} \alpha_j \rho^{\nu-2} \gamma_{\nu-1,j} & U_{0,\nu-1}(\widetilde{y}_1) & U_{0,\nu-1}(\widetilde{y}_2) & \ldots & U_{0,\nu-1}(\widetilde{y}_5) \\ -\sum\limits_{j=1}^{5} \alpha_j \rho^{\nu-1} \gamma_{\nu,j} & U_{0\nu}(\widetilde{y}_1) & U_{0\nu}(\widetilde{y}_2) & \ldots & U_{0\nu}(\widetilde{y}_5) \\ -\sum\limits_{j=1}^{5} \alpha_j \rho^{\nu} \gamma_{\nu+1,j} & U_{0,\nu+1}(\widetilde{y}_1) & U_{0,\nu+1}(\widetilde{y}_2) & \ldots & U_{0,\nu+1}(\widetilde{y}_5) \\ \hdotsfor{5} \\ -\sum\limits_{j=1}^{5} \alpha_j \rho^{4} \gamma_{5j} & U_{05}(\widetilde{y}_1) & U_{0,5}(\widetilde{y}_2) & \ldots & U_{05}(\widetilde{y}_5) \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 0 & U_{0\nu}(\widetilde{y}_1) & U_{0\nu}(\widetilde{y}_2) & \ldots & U_{0\nu}(\widetilde{y}_5) \\ -\sum\limits_{j=1}^{5} \alpha_j \gamma_{1j} & U_{01}(\widetilde{y}_1) & U_{01}(\widetilde{y}_2) & \ldots & U_{01}(\widetilde{y}_5) \\ \hdotsfor{5} \\ -\sum\limits_{j=1}^{5} \alpha_j \rho^{\nu-2} \gamma_{\nu-1,j} & U_{0,\nu-1}(\widetilde{y}_1) & U_{0,\nu-1}(\widetilde{y}_2) & \ldots & U_{0,\nu-1}(\widetilde{y}_5) \\ -\sum\limits_{j=1}^{5} \alpha_j \rho^{\nu-1} \gamma_{\nu j} & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ -\sum\limits_{j=1}^{5} \alpha_j \rho^{\nu} \gamma_{\nu+1,j} & U_{0,\nu+1}(\widetilde{y}_1) & U_{0,\nu+1}(\widetilde{y}_2) & \ldots & U_{0,\nu+1}(\widetilde{y}_5) \\ \hdotsfor{5} \\ -\sum\limits_{j=1}^{5} \alpha_j \rho^{4} \gamma_{5j} & U_{05}(\widetilde{y}_1) & U_{0,5}(\widetilde{y}_2) & \ldots & U_{05}(\widetilde{y}_5) \end{vmatrix} = \sum_{j=1}^{5} \alpha_j \rho^{\nu-1} \gamma_{\nu j} \widetilde{\Delta}(\rho).$$

Так как $\rho \in \mathbb{C} \backslash (\sigma \cup \{0\})$, то $\widetilde{\Delta}(\rho) \neq 0$. Следовательно,

$$\sum_{j=1}^{5} \alpha_j \rho^{\nu-1} \gamma_{\nu j} = 0, \ \nu = \overline{1,5}, \ \text{или} \ \sum_{j=1}^{5} \alpha_j \Gamma_j(\rho) = 0. \tag{6.6}$$

А с учетом того, что система векторов $\Gamma_j(\rho)$, $j = \overline{1,5}$, по предположению линейно независима, то из (6.6) будем иметь $\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_5 = 0$. Но это противоречит сделанному предположению. Следовательно, функции $\widetilde{g}(x, \rho, \Gamma_j(\rho))$, $j = \overline{1,5}$, линейно независимы по x при $x \in [0,1]$. Тем самым достаточность доказана. Лемма доказана. $\square$

Далее потребуется следующая лемма.

Лемма 6.3. *Если существуют линейно независимые векторы Γ_j, $j = \overline{1,5}$, такие, что для некоторой функции $f \in L_2[0,1]$ выполняются тождества*

$$\int_0^1 \widetilde{g}(x, \rho; \Gamma_j(\rho)) f(x) \, dx \equiv 0, \quad j = \overline{1,5}, \tag{6.7}$$

то $f(x) = 0$ для п.в. $x \in [0,1]$.

Доказательство. Так как векторы Γ_j, $j = \overline{1,5}$, линейно независимы, то по лемме 6.2 функции $\widetilde{g}(x, \rho, \Gamma_j(\rho))$, $j = \overline{1,5}$, суть линейно независимые решения уравнения $y^{(5)} + \rho^5 y = 0$ для всех $\rho \in \mathbb{C} \backslash (\sigma \cup \{0\})$. Но ввиду того, что функция $e^{\rho\omega_1 x}$ есть решение этого же уравнения, из (6.7) получим

$$\int_0^1 e^{\rho\omega_1 x} f(x)\, dx = 0, \quad \forall \rho \in \mathbb{C} \backslash (\sigma \cup \{0\}).$$

А так как слева от знака равенства стоит целая аналитическая функция по ρ, то из предыдущего равенства сразу следует

$$\int_0^1 e^{\rho\omega_1 x} f(x)\, dx = 0, \quad \forall \rho \in \mathbb{C}.$$

Полагая теперь в последнем равенстве $\rho\omega_1 = 2k\pi i$, $k \in \mathbb{Z}$, и пользуясь хорошо известным фактом, что система $\left\{e^{2k\pi i x}\right\}_{k\in\mathbb{Z}}$ полна в $L_2[0,1]$, в результате получаем, что $f(x) = 0$ для п.в. $x \in [0,1]$. Лемма доказана. □

6.2. Доказательство полноты системы собственных функций. Как было отмечено в начале раздела 6, доказательство полноты системы с.ф. оператора L_0 будем проводить для всех возможных случаев, т. е. когда оператор L_0 принадлежит множествам NR_0, NR_0^0, NR_0^1, NR_1, NR_1^0, NR_1^1. В каждом из этих случаев идея доказательства одинаковая, но рассуждения различны. Рассмотрим последовательно все эти случая.

6.2.1. Полнота для множеств операторов NR_0, NR_0^0, NR_0^1. Пусть оператор L_0 принадлежит любому из множеств NR_0, NR_0^0 или NR_0^1. Эти множества описаны, соответственно, в леммах 5.1–5.3. Во всех этих случаях, как следует из определения этих множеств в конце раздела 3, характеристический многоугольник $M(\Gamma)$ функции $\widetilde{G}(\rho;\Gamma(\rho))$ при любом векторе Γ будет лежать внутри многоугольника $M_{\widetilde{\Delta}} = M_1$ (см. рис. 1), а следовательно, $\widetilde{\mathcal{G}}(\rho;\Gamma(\rho)) \in (\alpha)$. Если взять любые линейно независимые векторы Γ_j, $j = \overline{1,5}$, то будем иметь $\widetilde{\mathcal{G}}(\rho;\Gamma_j(\rho)) \in (\alpha)$, $j = \overline{1,5}$.

В соответствии со схемой доказательства полноты (см. раздел 2), получаем

$$\widetilde{\mathcal{G}}(\rho;\Gamma_j(\rho)) \equiv 0 \Longrightarrow \int_0^1 \widetilde{g}(x,\rho;\Gamma_j(\rho)) f(x)\, dx \equiv 0, \quad j = \overline{1,5}.$$

Воспользовавшись теперь леммой 6.3, отсюда получим, что $f(x) = 0$ для п.в. $x \in [0,1]$. Тем самым полнота в пространстве $L_2[0,1]$ системы с.ф. оператора L_0, принадлежащего любому из множеств NR_0, NR_0^0 или NR_0^1, полностью доказана.

6.2.2. Полнота для множества операторов NR_1. Предположим, что $L_0 \in \mathrm{NR}_1$. Тогда по лемме 5.4 выполняется одно из условий 1)-2). Так как рассуждения для каждого из условий аналогичны, далее будем считать для определенности, что выполняется условие 1), т. е.

$$\theta_{11}(s) = \theta_{21}(s) = \theta_{31}(s) = 0, \quad \theta_{41}(s) \neq 0, \quad \theta_{51}(s) \neq 0, \quad a_5 \neq 0,\ s \neq 0,\ s \in \mathbb{C}, \tag{6.8}$$

где, как и в лемме 5.2, используются обозначения

$$\theta_{11}(s) = a_1 - sa_5,\ \theta_{21}(s) = a_2 - sa_1,\ \theta_{31}(s) = a_3 - sa_2,\ \theta_{41}(s) = a_4 - sa_3,\ \theta_{51}(s) = a_5 - sa_4. \tag{6.9}$$

Из (6.8)-(6.9) следует, что при произвольных $a_5 \neq 0$ и $s \neq 0$ элементы a_1, a_2, a_3 можно выразить через a_5, а именно:

$$a_1 = sa_5, \quad a_2 = sa_1 = s^2 a_5, \quad a_3 = sa_2 = s^2 a_1 = s^3 a_5. \tag{6.10}$$

Докажем следующую лемму.

Лемма 6.4. *В случае, когда* $L_0 \in \mathrm{NR}_1$, *справедливы следующие утверждения*:

$$\begin{array}{lll}
(\alpha) & \hat{X}^1_{34}(\hat{\Gamma}) = \hat{X}^1_{345}(\hat{\Gamma}) = 0 & \Longleftrightarrow \quad \delta_{21}(s) = \hat{\gamma}_2 - s\hat{\gamma}_1 = 0; \\
(\beta) & \hat{X}^1_{45}(\hat{\Gamma}) = 0 & \Longleftrightarrow \quad \delta_{31}(s) = \hat{\gamma}_3 - s\hat{\gamma}_2 = 0; \\
(\gamma) & \hat{X}^1_{5}(\hat{\Gamma}) = \hat{X}^1_{25}(\hat{\Gamma}) = 0 & \Longleftrightarrow \quad \delta_{41}(s) = \hat{\gamma}_4 - s\hat{\gamma}_3 = 0; \\
(\delta) & \hat{X}^1_{2}(\hat{\Gamma}) = 0 & \Longleftrightarrow \quad \delta_{51}(s) = \hat{\gamma}_5 - s\hat{\gamma}_4 = 0; \\
(\varepsilon) & \hat{X}^1_{234}(\hat{\Gamma}) = 0 & \Longleftrightarrow \quad \delta_{11}(s) = \hat{\gamma}_1 - s\hat{\gamma}_5 = 0.
\end{array}$$

И всегда $\hat{X}^1_{23}(\hat{\Gamma}) = 0$ *без каких-либо условий на вектор* $\hat{\Gamma}$.

Доказательство. . Рассмотрим последовательно все «плохие» определители из первой строчки таблицы (6.5).

Начнем по порядку с определителя $\hat{X}_2^1(\hat{\Gamma})$. Выполняя стандартные действия над строками и столбцами определителя и пользуясь соотношениями (6.8), последовательно получим

$$\hat{X}_2^1(\hat{\Gamma}) = \begin{vmatrix} \hat{\gamma}_1 & 0 & a_4 & a_3 & a_2 \\ \hat{\gamma}_2 & 1 & a_5 & a_4 & a_3 \\ \hat{\gamma}_3 & 0 & a_1 & a_5 & a_4 \\ \hat{\gamma}_4 & 0 & a_2 & a_1 & a_5 \\ \hat{\gamma}_5 & 0 & a_3 & a_2 & a_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \hat{\gamma}_1 & a_4 & a_3 & a_2 \\ \hat{\gamma}_3 & a_1 & a_5 & a_4 \\ \hat{\gamma}_4 & a_2 & a_1 & a_5 \\ \hat{\gamma}_5 & a_3 & a_2 & a_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \delta_{11} & \theta_{41} & \theta_{31} & \theta_{21} \\ \hat{\gamma}_3 & a_1 & a_5 & a_4 \\ \delta_{41} & \theta_{21} & \theta_{11} & \theta_{51} \\ \delta_{51} & \theta_{31} & \theta_{21} & \theta_{11} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \delta_{11} & \theta_{41} & 0 & 0 \\ \hat{\gamma}_3 & a_1 & a_5 & a_4 \\ \delta_{41} & 0 & 0 & \theta_{51} \\ \delta_{51} & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \doteq \delta_{51}\theta_{41}\theta_{51}a_5,$$

где равенство с точкой означает равенство с точностью до знака. Так как по условию $\theta_{41} \neq 0$, $\theta_{51} \neq 0$, $a_5 \neq 0$, то $\hat{X}_2^1(\hat{\Gamma}) = 0 \iff \delta_{51}(s) = \hat{\gamma}_5 - s\hat{\gamma}_4 = 0$.

Аналогично,

$$\hat{X}_5^1(\hat{\Gamma}) = \begin{vmatrix} \hat{\gamma}_1 & a_5 & a_4 & a_3 \\ \hat{\gamma}_2 & a_1 & a_5 & a_4 \\ \hat{\gamma}_3 & a_2 & a_1 & a_5 \\ \hat{\gamma}_4 & a_3 & a_2 & a_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \hat{\gamma}_1 & a_5 & a_4 & a_3 \\ \delta_{21} & \theta_{11} & \theta_{51} & \theta_{41} \\ \delta_{31} & \theta_{21} & \theta_{11} & \theta_{51} \\ \delta_{41} & \theta_{31} & \theta_{21} & \theta_{11} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \hat{\gamma}_1 & a_5 & a_4 & a_3 \\ \delta_{21} & 0 & \theta_{51} & \theta_{41} \\ \delta_{31} & 0 & 0 & \theta_{51} \\ \delta_{41} & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \doteq \delta_{41}\theta_{51}^2 a_5.$$

Так как по условию $\theta_{51} \neq 0$, $a_5 \neq 0$, то получим $\hat{X}_5^1(\hat{\Gamma}) = 0 \iff \delta_{41}(s) = \hat{\gamma}_4 - s\hat{\gamma}_3 = 0$.

Убедимся теперь, что определитель $\hat{X}_{23}^1(\hat{\Gamma})$ тождественно равен нулю при выполнении условия (6.8). Преобразовывая определитель аналогично предыдущему, получим

$$\hat{X}_{23}^1(\hat{\Gamma}) = \begin{vmatrix} \hat{\gamma}_1 & 0 & 0 & a_3 & a_2 \\ \hat{\gamma}_2 & 1 & 0 & a_4 & a_3 \\ \hat{\gamma}_3 & 0 & 1 & a_5 & a_4 \\ \hat{\gamma}_4 & 0 & 0 & a_1 & a_5 \\ \hat{\gamma}_5 & 0 & 0 & a_2 & a_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \hat{\gamma}_1 & a_3 & a_2 \\ \hat{\gamma}_4 & a_1 & a_5 \\ \hat{\gamma}_5 & a_2 & a_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \delta_{11} & \theta_{31} & \theta_{21} \\ \hat{\gamma}_4 & a_1 & a_5 \\ \delta_{51} & \theta_{21} & \theta_{11} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \delta_{11} & 0 & 0 \\ \hat{\gamma}_4 & a_1 & a_5 \\ \delta_{51} & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Для определителя $\hat{X}_{25}^1(\hat{\Gamma})$ аналогично получим

$$\hat{X}_{25}^1(\hat{\Gamma}) = \begin{vmatrix} \hat{\gamma}_1 & 0 & a_4 & a_3 & 0 \\ \hat{\gamma}_2 & 1 & a_5 & a_4 & 0 \\ \hat{\gamma}_3 & 0 & a_1 & a_5 & 0 \\ \hat{\gamma}_4 & 0 & a_2 & a_1 & 0 \\ \hat{\gamma}_5 & 0 & a_3 & a_2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \hat{\gamma}_1 & a_4 & a_3 \\ \hat{\gamma}_3 & a_1 & a_5 \\ \hat{\gamma}_4 & a_2 & a_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \hat{\gamma}_1 & \theta_{41} & a_3 \\ \hat{\gamma}_3 & \theta_{11} & a_5 \\ \hat{\gamma}_4 & \theta_{21} & a_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \hat{\gamma}_1 & \theta_{41} & a_3 \\ \hat{\gamma}_3 & 0 & a_5 \\ \hat{\gamma}_4 & 0 & a_1 \end{vmatrix} \doteq$$

$$\doteq \theta_{41} \begin{vmatrix} \hat{\gamma}_3 & a_5 \\ \hat{\gamma}_4 & a_1 \end{vmatrix} = \theta_{41} \begin{vmatrix} \hat{\gamma}_3 & a_5 \\ \delta_{41} & \theta_{11} \end{vmatrix} = \theta_{41} \begin{vmatrix} \hat{\gamma}_3 & a_5 \\ \delta_{41} & 0 \end{vmatrix} \doteq \delta_{41}\theta_{41}a_5.$$

По условию $\theta_{41} \neq 0$, $a_5 \neq 0$. Следовательно, $\hat{X}_{25}^1(\hat{\Gamma}) = 0 \iff \delta_{41}(s) = \hat{\gamma}_4 - s\hat{\gamma}_3 = 0$.

Рассмотрим далее определитель $\hat{X}_{34}^1(\hat{\Gamma})$. Аналогично предыдущему и с учетом (6.10) имеем

$$\hat{X}_{34}^1(\hat{\Gamma}) = \begin{vmatrix} \hat{\gamma}_1 & a_5 & 0 & 0 & a_2 \\ \hat{\gamma}_2 & a_1 & 0 & 0 & a_3 \\ \hat{\gamma}_3 & a_2 & 1 & 0 & a_4 \\ \hat{\gamma}_4 & a_3 & 0 & 1 & a_5 \\ \hat{\gamma}_5 & a_4 & 0 & 0 & a_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \hat{\gamma}_1 & a_5 & a_2 \\ \hat{\gamma}_2 & a_1 & a_3 \\ \hat{\gamma}_5 & a_4 & a_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \delta_{11} & \theta_{51} & \theta_{21} \\ \delta_{21} & \theta_{11} & \theta_{31} \\ \hat{\gamma}_5 & a_4 & a_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \delta_{11} & \theta_{51} & 0 \\ \delta_{21} & 0 & 0 \\ \hat{\gamma}_5 & a_4 & a_1 \end{vmatrix} \doteq a_1\theta_{51}\delta_{21} = a_5 s\theta_{51}\delta_{21}.$$

По условию $s \neq 0$, $a_5 \neq 0$, $\theta_{51} \neq 0$. Следовательно, $\hat{X}_{34}^1(\hat{\Gamma}) = 0 \iff \delta_{21}(s) = \hat{\gamma}_2 - s\hat{\gamma}_1 = 0$.

Рассмотрим теперь определитель $\hat{X}_{45}^1(\hat{\Gamma})$. Имеем

$$\hat{X}_{45}^1(\hat{\Gamma} = \begin{vmatrix} \hat{\gamma}_1 & a_5 & a_4 & 0 & 0 \\ \hat{\gamma}_2 & a_1 & a_5 & 0 & 0 \\ \hat{\gamma}_3 & a_2 & a_1 & 0 & 0 \\ \hat{\gamma}_4 & a_3 & a_2 & 1 & 0 \\ \hat{\gamma}_5 & a_4 & a_3 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \hat{\gamma}_1 & a_5 & a_4 \\ \hat{\gamma}_2 & a_1 & a_5 \\ \hat{\gamma}_3 & a_2 & a_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \hat{\gamma}_1 & a_5 & a_4 \\ \delta_{21} & \theta_{11} & \theta_{51} \\ \delta_{31} & \theta_{21} & \theta_{11} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \hat{\gamma}_1 & \theta_{51} & a_4 \\ \delta_{21} & 0 & \theta_{51} \\ \delta_{31} & 0 & 0 \end{vmatrix} \doteq \delta_{31}\theta_{51}^2.$$

По условию $\theta_{51} \neq 0$. Следовательно, $\hat{X}_{45}^1(\hat{\Gamma}) = 0 \iff \delta_{31}(s) = \hat{\gamma}_3 - s\hat{\gamma}_2 = 0$.

Для определителя $\hat{X}^1_{234}(\hat\Gamma)$ аналогично получим

$$\hat{X}^1_{234}(\hat\Gamma) = \begin{vmatrix} \hat\gamma_1 & 0 & 0 & 0 & a_2 \\ \hat\gamma_2 & 1 & 0 & 0 & a_3 \\ \hat\gamma_3 & 0 & 1 & 0 & a_4 \\ \hat\gamma_4 & 0 & 0 & 1 & a_5 \\ \hat\gamma_5 & 0 & 0 & 0 & a_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \hat\gamma_1 & a_2 \\ \hat\gamma_5 & a_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \delta_{11} & \theta_{21} \\ \hat\gamma_5 & a_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \delta_{11} & 0 \\ \hat\gamma_5 & a_1 \end{vmatrix} \doteq \delta_{11}a_1 = \delta_{11}sa_5.$$

По условию $a_5 \neq 0$, $s \neq 0$. Следовательно, $\hat{X}^1_{234}(\hat\Gamma) = 0 \iff \delta_{11}(s) = \hat\gamma_1 - s\hat\gamma_5 = 0$.

Наконец, рассмотрим последний определитель из первой строки таблицы (6.5), т. е. определитель $\hat{X}^1_{345}(\hat\Gamma)$. Имеем

$$\hat{X}^1_{345}(\hat\Gamma) = \begin{vmatrix} \hat\gamma_1 & a_5 & 0 & 0 & 0 \\ \hat\gamma_2 & a_1 & 0 & 0 & 0 \\ \hat\gamma_3 & a_2 & 1 & 0 & 0 \\ \hat\gamma_4 & a_3 & 0 & 1 & 0 \\ \hat\gamma_5 & a_4 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \hat\gamma_1 & a_5 \\ \hat\gamma_2 & a_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \hat\gamma_1 & a_5 \\ \delta_{21} & \theta_{11} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \hat\gamma_1 & a_5 \\ \delta_{21} & 0 \end{vmatrix} \doteq \delta_{21}a_5.$$

Следовательно, так как $a_5 \neq 0$, то $\hat{X}^1_{345}(\hat\Gamma) = 0 \iff \delta_{21}(s) = \hat\gamma_2 - s\hat\gamma_1 = 0$.

Из полученных утверждений вытекает справедливость доказываемой леммы. Лемма доказана. □

В соответствии с леммой 6.4 «плохие» коэффициенты группы (i) в таблице (6.5) будут равны нулю, если потребовать

$$\delta_{11}(s) = \delta_{21}(s) = \delta_{31}(s) = \delta_{41}(s) = \delta_{51}(s) = 0. \tag{6.11}$$

Это приводит к однородной системе линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных параметров $\hat\gamma_1$, $\hat\gamma_2$, $\ldots \hat\gamma_5$

$$\begin{cases} \hat\gamma_1 - s\hat\gamma_5 = 0 \\ \hat\gamma_2 - s\hat\gamma_1 = 0 \\ \hat\gamma_3 - s\hat\gamma_2 = 0 \\ \hat\gamma_4 - s\hat\gamma_3 = 0 \\ \hat\gamma_5 - s\hat\gamma_4 = 0 \end{cases} \quad \text{с определителем} \quad \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -s \\ -s & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -s & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -s & 1 & -s \\ 1 & 0 & 0 & -s & 1 \end{vmatrix} = 1 - s^5.$$

Эта система имеет решение только тогда, когда ее определитель равен нулю, т. е. $s^5 = 1$ или $s = \varepsilon_j$, $j = \overline{1,5}$, где ε_j — различные корни 5-й степени из 1. В каждом из этих случаев решением этой системы с точностью до умножения на константу будут векторы $\hat\Gamma^0_j = (1, \varepsilon_j, \varepsilon_j^2, \varepsilon_j^3, \varepsilon_j^4)^T$, $j = \overline{1,5}$.

Следовательно, в случае $s^5 = 1$ имеется пять линейно независимых решений системы (6.11), нормированных условием $\hat\gamma_1 = 1$.

Обозначим $\Gamma^0_j = \Omega\hat\Gamma^0_j$, $j = \overline{1,5}$.

Лемма 6.5. *Для каждого* $j = \overline{1,5}$ *справедливо свойство* $\widetilde{\mathcal{G}}(\rho; \Gamma^0_j(\rho)) \in (\alpha)$.

Доказательство. Зафиксируем любое $j = \overline{1,5}$. По построению, в силу леммы 6.4 и условий (6.11), при $\hat\Gamma = \hat\Gamma^0_j$ все коэффициенты группы (i) в таблице (6.5) обратятся в нуль.

Имеет место равенство

$$S\hat\Gamma^0_j = \begin{pmatrix} \varepsilon_j \\ \varepsilon_j^2 \\ \varepsilon_j^3 \\ \varepsilon_j^4 \\ 1 \end{pmatrix} = \varepsilon_j \begin{pmatrix} 1 \\ \varepsilon_j \\ \varepsilon_j^2 \\ \varepsilon_j^3 \\ \varepsilon_j^4 \end{pmatrix} = \varepsilon_j \hat\Gamma^0_j.$$

В силу этого равенства, лемм 6.1 и 6.4 коэффициенты группы (ii) таблицы (6.5) также равны нулю. В самом деле, имеем, например, для $\hat{X}^2_3(\hat\Gamma^0_j)$: $\hat{X}^2_3(\hat\Gamma^0_j) = \hat{X}^1_2(S\hat\Gamma^0_j) = \varepsilon_j \hat{X}^1_2(\hat\Gamma^0_j) = 0$.

Аналогично можно показать, что коэффициенты группы (iii) таблицы (6.5) также равны нулю. В самом деле, имеем, например, для $\hat{X}^3_4(\hat\Gamma^0_j)$: $\hat{X}^3_4(\hat\Gamma^0_j) = \hat{X}^2_3(S\hat\Gamma^0_j) = \varepsilon_j \hat{X}^2_3(\hat\Gamma^0_j) = \varepsilon_j \hat{X}^1_2(S\hat\Gamma^0_j) = \varepsilon_j^2 \hat{X}^1_2(\hat\Gamma^0_j) = 0$.

И так далее, аналогично для остальных групп коэффициентов (iv)-(v).

Следовательно, все «плохие» коэффициенты функции $\widetilde{g}(x,\rho;\Gamma(\rho))$ на векторах Γ_j^0 обратятся в нуль. Таким образом, характеристический многоугольник функции $\widetilde{G}(\rho;\Gamma_j^0(\rho))$ будет лежать внутри многоугольника $M_{\widetilde{\Delta}} = M_1$ (см. рис. 1), а следовательно, $\widetilde{\mathcal{G}}(\rho;\Gamma_j^0(\rho)) \in (\alpha)$. Лемма доказана. $\square$

Рассмотрим теперь случай, когда $s^5 \neq 1$. В этом случае ищем вектор $\hat{\Gamma}$ из условия выполнения всех равенств нулю справа в утверждениях (α)–(ε) леммы 6.4, кроме одного. Также получим пять линейно независимых векторов $\hat{\Gamma}_j^1$ (с точностью до умножения на отличную от нуля константу):

$$\hat{\Gamma}_1^1 = \begin{pmatrix} 1 \\ s \\ s^2 \\ s^3 \\ s^4 \end{pmatrix}, \ \hat{\Gamma}_2^1 = \begin{pmatrix} s^4 \\ 1 \\ s \\ s^2 \\ s^3 \end{pmatrix}, \ \hat{\Gamma}_3^1 = \begin{pmatrix} s^3 \\ s^4 \\ 1 \\ s \\ s^2 \end{pmatrix}, \ \hat{\Gamma}_4^1 = \begin{pmatrix} s^2 \\ s^3 \\ s^4 \\ 1 \\ s \end{pmatrix}, \ \hat{\Gamma}_5^1 = \begin{pmatrix} s \\ s^2 \\ s^3 \\ s^4 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

При этом имеют место следующие утверждения:

1°) для $\hat{\Gamma}_1^1$ не выполняется равенство (ε), т. е. $\hat{X}_{234}^1(\hat{\Gamma}_1^1) \neq 0$, а все остальные коэффициенты группы (i) таблицы (6.5) равны нулю ($\delta_{11}(s) \neq 0$, $\delta_{21}(s) = \delta_{31}(s) = \delta_{41}(s) = \delta_{51}(s) = 0$);

2°) для $\hat{\Gamma}_2^1$ не выполняется равенство (α), т. е. $\hat{X}_{34}^1(\hat{\Gamma}_2^1) \neq 0$ и $\hat{X}_{345}^1(\hat{\Gamma}_2^1) \neq 0$, а все остальные коэффициенты группы (i) таблицы (6.5) равны нулю ($\delta_{21}(s) \neq 0$, $\delta_{31}(s) = \delta_{41}(s) = \delta_{51}(s) = \delta_{11}(s) = 0$);

3°) для $\hat{\Gamma}_3^1$ не выполняется равенство (β), т. е. $\hat{X}_{45}^1(\hat{\Gamma}_3^1) \neq 0$, а все остальные коэффициенты группы (i) таблицы (6.5) равны нулю ($\delta_{31}(s) \neq 0$, $\delta_{41}(s) = \delta_{51}(s) = \delta_{11}(s) = \delta_{21}(s) = 0$);

4°) для $\hat{\Gamma}_4^1$ не выполняется равенство (γ), т. е. $\hat{X}_5^1(\hat{\Gamma}_4^1) \neq 0$ и $\hat{X}_{25}^1(\hat{\Gamma}_4^1) \neq 0$, а все остальные коэффициенты группы (i) таблицы (6.5) равны нулю ($\delta_{41}(s) \neq 0$, $\delta_{51}(s) = \delta_{11}(s) = \delta_{21}(s) = \delta_{31}(s) = 0$);

5°) для $\hat{\Gamma}_5^1$ не выполняется равенство (δ), т. е. $\hat{X}_2^1(\hat{\Gamma}_5^1) \neq 0$, а все остальные коэффициенты группы (i) таблицы (6.5) равны нулю ($\delta_{51}(s) \neq 0$, $\delta_{11}(s) = \delta_{21}(s) = \delta_{31}(s) = \delta_{41}(s) = 0$).

Очевидно, справедливы соотношения

$$|\hat{\Gamma}_1^1\ \hat{\Gamma}_2^1\ \hat{\Gamma}_3^1\ \hat{\Gamma}_4^1\ \hat{\Gamma}_5^1| = \begin{vmatrix} 1 & s^4 & s^3 & s^2 & s \\ s & 1 & s^4 & s^3 & s^2 \\ s^2 & s & 1 & s^4 & s^3 \\ s^3 & s^2 & s & 1 & s^4 \\ s^4 & s^3 & s^2 & s & 1 \end{vmatrix} = (1-s^5)^4 \neq 0,$$

откуда следует линейная независимость векторов $\hat{\Gamma}_j^1$, $j = \overline{1,5}$.

Лемма 6.6. *Для каждого* $j = \overline{1,5}$ *справедливо свойство* $\widetilde{\mathcal{G}}(\rho;\Gamma_j^1(\rho)) \in (\alpha)$.

Доказательство. Рассуждения проведем только для случая $j = 1$. Остальные случаи рассматриваются аналогично.

Очевидно, $S\hat{\Gamma}_1^1 = \hat{\Gamma}_5^1$, $S\hat{\Gamma}_2^1 = \hat{\Gamma}_1^1$, $S\hat{\Gamma}_3^1 = \hat{\Gamma}_2^1$, $S\hat{\Gamma}_4^1 = \hat{\Gamma}_3^1$, $S\hat{\Gamma}_5^1 = \hat{\Gamma}_4^1$.

Выясним, какие коэффициенты из таблицы (6.5) на векторе Γ_1^1 не равны нулю.

По построению в силу леммы 6.4 и утверждения 1°) выше имеем $\hat{X}_{234}^1(\hat{\Gamma}_1^1) \neq 0$. Далее, используя соотношения (6.5), леммы 6.1 и 6.4, будем иметь

$$\begin{array}{ll} 0 \neq \hat{X}_{34}^1(\hat{\Gamma}_2^1) = \hat{X}_{23}^5(S\hat{\Gamma}_2^1) = \hat{X}_{23}^5(\hat{\Gamma}_1^1) & \Longrightarrow\ \ \hat{X}_{23}^5(\hat{\Gamma}_1^1) \neq 0; \\ 0 \neq \hat{X}_{345}^1(\hat{\Gamma}_2^1) = \hat{X}_{234}^5(S\hat{\Gamma}_2^1) = \hat{X}_{234}^5(\hat{\Gamma}_1^1) & \Longrightarrow\ \ \hat{X}_{234}^5(\hat{\Gamma}_1^1) \neq 0; \\ 0 \neq \hat{X}_{45}^1(\hat{\Gamma}_3^1) = \hat{X}_{34}^5(S\hat{\Gamma}_2^1) = \hat{X}_{23}^4(\hat{\Gamma}_1^1) & \Longrightarrow\ \ \hat{X}_{23}^4(\hat{\Gamma}_1^1) \neq 0; \\ 0 \neq \hat{X}_5^1(\hat{\Gamma}_4^1) = \hat{X}_4^5(S\hat{\Gamma}_3^1) = \hat{X}_3^4(\hat{\Gamma}_2^1) = \hat{X}_2^3(\hat{\Gamma}_1^1) & \Longrightarrow\ \ \hat{X}_2^3(\hat{\Gamma}_1^1) \neq 0; \\ 0 \neq \hat{X}_{25}^1(\hat{\Gamma}_4^1) = \hat{X}_{14}^5(S\hat{\Gamma}_3^1) = \hat{X}_{35}^4(\hat{\Gamma}_2^1) = \hat{X}_{24}^3(\hat{\Gamma}_1^1) & \Longrightarrow\ \ \hat{X}_{24}^3(\hat{\Gamma}_1^1) \neq 0; \\ 0 \neq \hat{X}_2^1(\hat{\Gamma}_5^1) = \hat{X}_1^5(S\hat{\Gamma}_4^1) = \cdots = \hat{X}_3^2(\hat{\Gamma}_1^1) & \Longrightarrow\ \ \hat{X}_3^2(\hat{\Gamma}_1^1) \neq 0. \end{array}$$

Следовательно, все коэффициенты из таблицы (6.5) на векторе Γ_1^1 обращаются в нуль, кроме коэффициентов $X_{234}^1(\Gamma_1^1)$, $X_{23}^5(\Gamma_1^1)$, $X_{234}^5(\Gamma_1^1)$, $X_{23}^4(\Gamma_1^1)$, $X_2^3(\Gamma_1^1)$, $X_{24}^3(\Gamma_1^1)$, $X_3^2(\Gamma_1^1)$.

В этом случае нетрудно получить, что характеристический многоугольник функции $\widetilde{G}(\rho;\Gamma_1^1(\rho))$ есть многоугольник $M(\Gamma_1^1)$, вершинами которого являются точки: ω_2; $\omega_1+\omega_2+\omega_3+\omega_5$; ω_1; $\omega_1+\omega_2+\omega_4+\omega_5$; ω_5; $\omega_1+\omega_3+\omega_4+\omega_5$; ω_4; $\omega_2+\omega_3+\omega_4+\omega_5$; $\omega_2+\omega_3+\omega_4$; $\omega_2+\omega_3$ (см. на рис. 1 неправильный многоугольник, выделенный жирной линией).

Сравнивая многоугольники $M(\Gamma_1^1)$ и $M_{\widetilde{\Delta}} = M_1$, получим утверждение леммы, т. е. что $\widetilde{\mathcal{G}}(\rho;\Gamma_1^1(\rho)) \in (\alpha)$. Аналогично рассматриваются случаи $j=2,3,4,5$. Лемма доказана. $\square$

Замечание 6.1. В качестве трех лучей, исходящих из начала координат, на которых функция $\widetilde{\mathcal{G}}(\rho;\Gamma_1^1(\rho))$ (т. е. при $j=1$) имеет не более чем степенной рост, можно взять лучи (см. рис. 1): $(0,\omega_1+\omega_2+\omega_3)$, $(0,\omega_1+\omega_5)$, $(0,\omega_3/2+\omega_4+\omega_5)$. При остальных $j=2,3,4,5$ аналогично можно подобрать три луча, исходящих из начала, угол между которыми меньше π и на которых функции $\widetilde{\mathcal{G}}(\rho;\Gamma_j^1(\rho))$ имеют не более чем степенной рост. Геометрически это будут картинки, аналогичные рис. 1, но повернутые на углы, кратные $2\pi/5$.

Таким образом, в случаях $s^5=1$ и $s^5\neq 1$ получили по пять линейно независимых векторов Γ_j^0, $j=\overline{1,5}$, и Γ_j^1, $j=\overline{1,5}$, для которых $\widetilde{\mathcal{G}}(\rho;\Gamma_j^i(\rho)) \in (\alpha)$, $i=0,1$, $j=\overline{1,5}$.

В соответствии со схемой доказательства полноты (см. раздел 2), получаем

$$\widetilde{\mathcal{G}}(\rho;\Gamma_j^i(\rho)) \equiv 0 \Longrightarrow \int_0^1 \widetilde{g}(x,\rho;\Gamma_j^i(\rho)) f(x)\,dx \equiv 0, \quad i=0,1, \quad j=\overline{1,5}. \tag{6.12}$$

Воспользовавшись теперь леммой 6.3, из (6.12) получим, что $f(x)=0$ для п.в. $x\in[0,1]$ и в случае $s^5=1$, и в случае $s^5\neq 1$. Тем самым полнота системы с.ф. оператора $L_0 \in \mathrm{NR}_1$ в пространстве $L_2[0,1]$ полностью доказана.

6.2.3. Полнота для множества операторов NR_1^0. Предположим, что $L_0\in\mathrm{NR}_1^0$. Тогда по лемме 5.5 выполняется одно из условий 1)–3). Так как рассуждения для каждого из случаев аналогичны, далее рассмотрим для определенности только случай 1), т. е.

$$a_1=a_2=a_3=0, \quad a_4\neq 0, \ a_5\neq 0. \tag{6.13}$$

Докажем следующую лемму.

Лемма 6.7. *В случае, когда* $L_0\in\mathrm{NR}_1^0$, *справедливы следующие утверждения*:

$$\begin{array}{lll}
(\alpha) & \hat{X}^1_{345}(\hat{\Gamma})=0 & \Longleftrightarrow \ \hat{\gamma}_2=0;\\
(\beta) & \hat{X}^1_{45}(\hat{\Gamma})=0 & \Longleftrightarrow \ \hat{\gamma}_3=0;\\
(\gamma) & \hat{X}^1_{5}(\hat{\Gamma})=\hat{X}^1_{25}(\hat{\Gamma})=0 & \Longleftrightarrow \ \hat{\gamma}_4=0;\\
(\delta) & \hat{X}^1_{2}(\hat{\Gamma})=0 & \Longleftrightarrow \ \hat{\gamma}_5=0.
\end{array}$$

И всегда $X^1_{23}(\hat{\Gamma})=0$, $X^1_{34}(\hat{\Gamma})=0$, $X^1_{234}(\hat{\Gamma})=0$ *без каких-либо условий на вектор* $\hat{\Gamma}$.

Доказательство. Рассмотрим последовательно все «плохие» определители из первой строчки таблицы (6.5).

Начнем по порядку с определителя $\hat{X}_2^1(\hat{\Gamma})$. Выполняя стандартные действия над строками и столбцами определителя и пользуясь соотношениями (6.13), последовательно получим

$$\hat{X}_2^1(\hat{\Gamma}) = \begin{vmatrix} \hat{\gamma}_1 & 0 & a_4 & a_3 & a_2\\ \hat{\gamma}_2 & 1 & a_5 & a_4 & a_3\\ \hat{\gamma}_3 & 0 & a_1 & a_5 & a_4\\ \hat{\gamma}_4 & 0 & a_2 & a_1 & a_5\\ \hat{\gamma}_5 & 0 & a_3 & a_2 & a_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \hat{\gamma}_1 & a_4 & a_3 & a_2\\ \hat{\gamma}_3 & a_1 & a_5 & a_4\\ \hat{\gamma}_4 & a_2 & a_1 & a_5\\ \hat{\gamma}_5 & a_3 & a_2 & a_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \hat{\gamma}_1 & a_4 & 0 & 0\\ \hat{\gamma}_3 & 0 & a_5 & a_4\\ \hat{\gamma}_4 & 0 & 0 & a_5\\ \hat{\gamma}_5 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \doteq \hat{\gamma}_5 a_4 a_5^2,$$

где, как и до этого, равенство с точкой означает равенство с точностью до знака. Так как по условию $a_4\neq 0$, $a_5\neq 0$, то $\hat{X}_2^1(\hat{\Gamma})=0 \Longleftrightarrow \hat{\gamma}_5=0$.

Аналогично

$$\hat{X}_5^1(\hat{\Gamma}) = \begin{vmatrix} \hat{\gamma}_1 & a_5 & a_4 & a_3\\ \hat{\gamma}_2 & a_1 & a_5 & a_4\\ \hat{\gamma}_3 & a_2 & a_1 & a_5\\ \hat{\gamma}_4 & a_3 & a_2 & a_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \hat{\gamma}_1 & a_5 & a_4 & 0\\ \hat{\gamma}_2 & 0 & a_5 & a_4\\ \hat{\gamma}_3 & 0 & 0 & a_5\\ \hat{\gamma}_4 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \hat{\gamma}_4 a_5^3.$$

Так как по условию $a_5 \neq 0$, то $\hat{X}_5^1(\hat{\Gamma}) = 0 \iff \hat{\gamma}_4 = 0$.

Убедимся теперь, что при выполнении условия (6.13) определитель $\hat{X}_{23}^1(\hat{\Gamma})$ равен нулю. Имеем

$$\hat{X}_{23}^1(\hat{\Gamma}) = \begin{vmatrix} \hat{\gamma}_1 & 0 & 0 & a_3 & a_2 \\ \hat{\gamma}_2 & 1 & 0 & a_4 & a_3 \\ \hat{\gamma}_3 & 0 & 1 & a_5 & a_4 \\ \hat{\gamma}_4 & 0 & 0 & a_1 & a_5 \\ \hat{\gamma}_5 & 0 & 0 & a_2 & a_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \hat{\gamma}_1 & a_3 & a_2 \\ \hat{\gamma}_4 & a_1 & a_5 \\ \hat{\gamma}_5 & a_2 & a_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \hat{\gamma}_1 & 0 & 0 \\ \hat{\gamma}_4 & 0 & a_5 \\ \hat{\gamma}_5 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Рассмотрим определитель $\hat{X}_{25}^1(\hat{\Gamma})$:

$$\hat{X}_{25}^1(\hat{\Gamma}) = \begin{vmatrix} \hat{\gamma}_1 & 0 & a_4 & a_3 & 0 \\ \hat{\gamma}_2 & 1 & a_5 & a_4 & 0 \\ \hat{\gamma}_3 & 0 & a_1 & a_5 & 0 \\ \hat{\gamma}_4 & 0 & a_2 & a_1 & 0 \\ \hat{\gamma}_5 & 0 & a_3 & a_2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \hat{\gamma}_1 & a_4 & a_3 \\ \hat{\gamma}_3 & a_1 & a_5 \\ \hat{\gamma}_4 & a_2 & a_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \hat{\gamma}_1 & a_4 & 0 \\ \hat{\gamma}_3 & 0 & a_5 \\ \hat{\gamma}_4 & 0 & 0 \end{vmatrix} \doteq \hat{\gamma}_4 a_4 a_5.$$

Так как по условию $a_4 \neq 0$, $a_5 \neq 0$, то $\hat{X}_{25}^1(\hat{\Gamma}) = 0 \iff \hat{\gamma}_4 = 0$.

Рассмотрим определитель $\hat{X}_{34}^1(\hat{\Gamma})$. Аналогично предыдущему имеем

$$\hat{X}_{34}^1(\hat{\Gamma}) = \begin{vmatrix} \hat{\gamma}_1 & a_5 & 0 & 0 & a_2 \\ \hat{\gamma}_2 & a_1 & 0 & 0 & a_3 \\ \hat{\gamma}_3 & a_2 & 1 & 0 & a_4 \\ \hat{\gamma}_4 & a_3 & 0 & 1 & a_5 \\ \hat{\gamma}_5 & a_4 & 0 & 0 & a_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \hat{\gamma}_1 & a_5 & a_2 \\ \hat{\gamma}_2 & a_1 & a_3 \\ \hat{\gamma}_5 & a_4 & a_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \hat{\gamma}_1 & a_5 & 0 \\ \hat{\gamma}_2 & 0 & 0 \\ \hat{\gamma}_5 & a_4 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Рассмотрим определитель $\hat{X}_{45}^1(\hat{\Gamma})$. Имеем

$$\hat{X}_{45}^1(\hat{\Gamma}) = \begin{vmatrix} \hat{\gamma}_1 & a_5 & a_4 & 0 & 0 \\ \hat{\gamma}_2 & a_1 & a_5 & 0 & 0 \\ \hat{\gamma}_3 & a_2 & a_1 & 0 & 0 \\ \hat{\gamma}_4 & a_3 & a_2 & 1 & 0 \\ \hat{\gamma}_5 & a_4 & a_3 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \hat{\gamma}_1 & a_5 & a_4 \\ \hat{\gamma}_2 & a_1 & a_5 \\ \hat{\gamma}_3 & a_2 & a_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \hat{\gamma}_1 & a_5 & a_4 \\ \hat{\gamma}_2 & 0 & a_5 \\ \hat{\gamma}_3 & 0 & 0 \end{vmatrix} \doteq \hat{\gamma}_3 a_5^2.$$

Так как по условию $a_5 \neq 0$, то $\hat{X}_{45}^1(\hat{\Gamma}) = 0 \iff \hat{\gamma}_3 = 0$.

Рассмотрим определитель $\hat{X}_{234}^1(\hat{\Gamma})$. Имеем

$$\hat{X}_{234}^1(\hat{\Gamma}) = \begin{vmatrix} \hat{\gamma}_1 & 0 & 0 & 0 & a_2 \\ \hat{\gamma}_2 & 1 & 0 & 0 & a_3 \\ \hat{\gamma}_3 & 0 & 1 & 0 & a_4 \\ \hat{\gamma}_4 & 0 & 0 & 1 & a_5 \\ \hat{\gamma}_5 & 0 & 0 & 0 & a_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \hat{\gamma}_1 & a_2 \\ \hat{\gamma}_5 & a_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \hat{\gamma}_1 & 0 \\ \hat{\gamma}_5 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Наконец, рассмотрим последний определитель из первой строки таблицы (6.5), т. е. определитель $\hat{X}_{345}^1(\hat{\Gamma})$. Имеем

$$\hat{X}_{345}^1(\hat{\Gamma}) = \begin{vmatrix} \hat{\gamma}_1 & a_5 & 0 & 0 & 0 \\ \hat{\gamma}_2 & a_1 & 0 & 0 & 0 \\ \hat{\gamma}_3 & a_2 & 1 & 0 & 0 \\ \hat{\gamma}_4 & a_3 & 0 & 1 & 0 \\ \hat{\gamma}_5 & a_4 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \hat{\gamma}_1 & a_5 \\ \hat{\gamma}_2 & a_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \hat{\gamma}_1 & a_5 \\ \hat{\gamma}_2 & 0 \end{vmatrix} \doteq \hat{\gamma}_2 a_5.$$

Так как по условию $a_5 \neq 0$, то $\hat{X}_{345}^1(\hat{\Gamma}) = 0 \iff \hat{\gamma}_2 = 0$.

Из полученных утверждений вытекает справедливость доказываемой леммы. □

В соответствии с леммой 6.7 «плохие» коэффициенты группы (i) в таблице (6.5) будут равны нулю, если потребовать $\hat{\gamma}_2 = \hat{\gamma}_3 = \hat{\gamma}_4 = \hat{\gamma}_5 = 0$, а компонента $\hat{\gamma}_1$ может быть любым комплексным числом. Но так как $\hat{\Gamma} \neq 0$, то должно быть $\hat{\gamma}_1 \neq 0$. Для удобства полагаем $\hat{\gamma}_1 = 1$. То есть получим

$$\hat{\Gamma}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Другие подходящие векторы $\hat{\Gamma}$, линейно независимые между собой и с вектором $\hat{\Gamma}_1$, можно найти из условия выполнения всех равенств нулю справа в утверждениях (α)–(δ) леммы 6.7, кроме одного. Нетрудно установить, что такими векторами будут векторы (в которых полагаем $\hat{\gamma}_1 = 0$, ввиду произвольности $\hat{\gamma}_1$ и наличия другой отличной от нуля компоненты вектора $\hat{\Gamma}$, который должен быть отличен от нулевого вектора)

$$\hat{\Gamma}_2 = \begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\\0\end{pmatrix}, \quad \hat{\Gamma}_3 = \begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\\0\end{pmatrix}, \quad \hat{\Gamma}_4 = \begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\\0\end{pmatrix}, \quad \hat{\Gamma}_5 = \begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\\1\end{pmatrix}.$$

При этом справедливы утверждения:

1°) для $\hat{\Gamma}_2$ не выполняется равенство (α), т. е. $\hat{X}^1_{345}(\hat{\Gamma}_2) \neq 0$, а все остальные коэффициенты группы (i) таблицы (6.5) равны нулю (здесь $\hat{\gamma}_2 = 1 \neq 0$, $\hat{\gamma}_3 = \hat{\gamma}_4 = \hat{\gamma}_5 = 0$);

2°) для $\hat{\Gamma}_3$ не выполняется равенство (β), т. е. $\hat{X}^1_{45}(\hat{\Gamma}_3) \neq 0$, а все остальные коэффициенты группы (i) таблицы (6.5) равны нулю (здесь $\hat{\gamma}_3 = 1 \neq 0$, $\hat{\gamma}_2 = \hat{\gamma}_4 = \hat{\gamma}_5 = 0$);

3°) для $\hat{\Gamma}_4$ не выполняется равенство (γ), т. е. $\hat{X}^1_5(\hat{\Gamma}_4) \neq 0$ и $\hat{X}^1_{25}(\hat{\Gamma}_4) \neq 0$, а все остальные коэффициенты группы (i) таблицы (6.5) равны нулю (здесь $\hat{\gamma}_4 = 1 \neq 0$, $\hat{\gamma}_2 = \hat{\gamma}_3 = \hat{\gamma}_5 = 0$);

4°) для $\hat{\Gamma}_5$ не выполняется равенство (δ), т. е. $\hat{X}^1_2(\hat{\Gamma}_5) \neq 0$, а все остальные коэффициенты группы (i) таблицы (6.5) равны нулю (здесь $\hat{\gamma}_5 = 1 \neq 0$, $\hat{\gamma}_2 = \hat{\gamma}_3 = \hat{\gamma}_4 = 0$).

Лемма 6.8. *Для каждого $j = \overline{1,5}$ справедливо свойство $\widetilde{G}(\rho; \Gamma_j(\rho)) \in (\alpha)$.*

Доказательство. Рассуждения для определенности проведем только для случая $j = 2$. Остальные случаи рассматриваются аналогично, но выкладки немного длиннее.

Очевидно,

$$S\hat{\Gamma}_1 = \hat{\Gamma}_5,\ S\hat{\Gamma}_2 = \hat{\Gamma}_1,\ S\hat{\Gamma}_3 = \hat{\Gamma}_2,\ S\hat{\Gamma}_4 = \hat{\Gamma}_3,\ S\hat{\Gamma}_5 = \hat{\Gamma}_4. \tag{6.14}$$

Выясним, какие коэффициенты из таблицы (6.5) на векторе $\hat{\Gamma_2}$ не равны нулю.

По построению в силу леммы 6.7 и утверждения 2°) выше имеем $\hat{X}^1_{345}(\hat{\Gamma}_2) \neq 0$. Далее, используя соотношения (6.13), леммы 6.7 и 6.1, будем иметь

$$0 \neq \hat{X}^1_{45}(\hat{\Gamma_3}) = \hat{X}^5_{34}(S\hat{\Gamma_3}) = \hat{X}^5_{34}(\hat{\Gamma_2}) \qquad \Longrightarrow \quad \hat{X}^5_{34}(\hat{\Gamma_1}) \neq 0.$$

Далее, используя утверждения 3°)–4°) и лемму 6.1, аналогично получим

$$\begin{array}{ll} 0 \neq \hat{X}^1_5(\hat{\Gamma_4}) = \hat{X}^5_4(\hat{\Gamma_3}) = \hat{X}^4_3(\hat{\Gamma_2}) & \Longrightarrow \quad \hat{X}^4_3(\hat{\Gamma_2}) \neq 0; \\ 0 \neq \hat{X}^1_{25}(\hat{\Gamma_4}) = \hat{X}^5_{14}(\hat{\Gamma_3}) = \hat{X}^4_{35}(\hat{\Gamma_2}) & \Longrightarrow \quad \hat{X}^4_{35}(\hat{\Gamma_2}) \neq 0; \\ 0 \neq \hat{X}^1_2(\hat{\Gamma_5}) = \hat{X}^5_1(\hat{\Gamma_4}) = \hat{X}^4_5(\hat{\Gamma_3}) = \hat{X}^3_4(\hat{\Gamma_2}) & \Longrightarrow \quad \hat{X}^2_3(\hat{\Gamma_1}) \neq 0. \end{array}$$

Следовательно, все коэффициенты из таблицы (6.5) на векторе Γ_2 обращаются в нуль, кроме коэффициентов $X^1_{345}(\Gamma_2)$, $X^5_{34}(\Gamma_2)$, $X^4_3(\Gamma_2)$, $X^4_{35}(\Gamma_2)$, $X^3_4(\Gamma_2)$.

В этом случае нетрудно заметить, что характеристический многоугольник функции $G(\rho; \Gamma_2(\rho))$ или, что то же самое, многоугольник $M(\Gamma_2)$ содержится в выпуклой оболочке точек: ω_1; ω_2; ω_3; $\omega_3+\omega_4$; $\omega_3+\omega_4+\omega_5$; $\omega_3+\omega_4+\omega_5+\omega_1$; ω^5 (см. на рис. 2 неправильный многоугольник, выделенный жирной линией).

Сравнивая многоугольник $M(\Gamma_2)$ и $M_{\widetilde{\Delta}} = M^0_1$, получим утверждение леммы, т. е. что $\widetilde{\mathcal{G}}(\rho; \Gamma_2(\rho)) \in (\alpha)$. Аналогично рассматриваются случаи $j = 1, 3, 4, 5$. Лемма доказана. □

Замечание 6.2. В качестве трех лучей, исходящих из начала координат, на которых функция $\widetilde{\mathcal{G}}(\rho; \Gamma_2(\rho))$ (т. е. при $j = 2$) имеет не более чем степенной рост, можно взять лучи (см. рис. 2): $(0, \omega_1 + \omega_2 + \omega_5/2)$, $(0, \omega_4 + \omega_5)$, $(0, \omega_3 + \omega_4 + \omega_2/2)$. При остальных $j = 1, 3, 4, 5$ аналогично можно подобрать три луча, исходящих из начала, угол между которыми меньше π и на которых функции $\widetilde{\mathcal{G}}(\rho; \Gamma_j(\rho))$ имеют не более чем степенной рост. Геометрически это будут картинки, аналогичные рис. 2, но повернутые на углы, кратные $2\pi/5$.

Таким образом, в рассматриваемом случае $L_0 \in \mathrm{NR}^0_1$ получили пять линейно независимых векторов Γ_j, $j = \overline{1,5}$, для которых $\widetilde{\mathcal{G}}(\rho; \Gamma_j(\rho)) \in (\alpha)$, $j = \overline{1,5}$.

В соответствии со схемой доказательства полноты (см. раздел 2), получаем

$$\widetilde{\mathcal{G}}(\rho;\Gamma_j(\rho))\equiv 0 \Longrightarrow \int\limits_0^1 \widetilde{g}(x,\rho;\Gamma_j(\rho))f(x)\,dx\equiv 0,\quad i=0,1,\quad j=\overline{1,5}.$$

Воспользовавшись теперь леммой 6.3, отсюда получим, что $f(x)=0$ для п.в. $x\in[0,1]$. Тем самым полнота системы с.ф. оператора $L_0\in \mathrm{NR}_1^0$ в пространстве $L_2[0,1]$ полностью доказана.

6.2.4. Полнота для множества операторов NR_1^1. Предположим, что $L_0\in\mathrm{NR}_1^1$. Тогда по лемме 5.6 выполняется одно из условий 1)–4). Так как рассуждения для каждого из условий аналогичны, далее будем считать, что выполняется условие 1), т. е.

$$\theta_{11}(s)=\theta_{21}(s)=\theta_{31}(s)=\theta_{41}(s)=0,\quad \theta_{51}(s)\neq 0,\quad a_5\neq 0,\quad s\neq 0, \tag{6.15}$$

где, как и раньше, обозначено $\theta_{11}(s)=a_1-sa_5$, $\theta_{21}(s)=a_2-sa_1$, $\theta_{31}(s)=a_3-sa_2$, $\theta_{41}(s)=a_4-sa_3$, $\theta_{51}(s)=a_5-sa_4$.

Из (6.15) следует, что при произвольных $a_5\neq 0$ и $s\neq 0$ элементы a_1, a_2, a_3, a_4 можно выразить через a_5, а именно:

$$a_1=sa_5,\quad a_2=sa_1=s^2a_5,\quad a_3=sa_2=s^2a_1=s^3a_5,\quad a_4=sa_3=s^2a_2=s^3a_1=s^4a_5. \tag{6.16}$$

Докажем следующую лемму.

Лемма 6.9. *В случае, когда* $L_0\in\mathrm{NR}_1^1$, *справедливы следующие утверждения*:

$$\begin{array}{lll}
(\alpha) & \hat{X}^1_{234}(\hat\Gamma)=0 & \Longleftrightarrow\quad \hat\delta_{11}=0;\\
(\beta) & \hat{X}^1_{34}(\hat\Gamma)=\hat{X}^1_{345}(\hat\Gamma)=0 & \Longleftrightarrow\quad \hat\delta_{21}=0;\\
(\gamma) & \hat{X}^1_{45}(\hat\Gamma)=0 & \Longleftrightarrow\quad \hat\delta_{31}=0;\\
(\delta) & \hat{X}^1_{5}(\hat\Gamma)=0 & \Longleftrightarrow\quad \hat\delta_{41}=0.
\end{array}$$

И всегда $X^1_2(\hat\Gamma)=0$, $X^1_{23}(\hat\Gamma)=0$, $X^1_{25}(\hat\Gamma)=0$ *без каких-либо условий на вектор* $\hat\Gamma$.

Доказательство. Рассмотрим последовательно все «плохие» определители из первой строчки таблицы (6.5).

Начнем по порядку с определителя $\hat{X}^1_2(\hat\Gamma)$. Выполняя стандартные действия над строками и столбцами определителя и пользуясь соотношениями (6.15), последовательно получим

$$\hat{X}^1_2=\begin{vmatrix}\hat\gamma_1 & 0 & a_4 & a_3 & a_2\\ \hat\gamma_2 & 1 & a_5 & a_4 & a_3\\ \hat\gamma_3 & 0 & a_1 & a_5 & a_4\\ \hat\gamma_4 & 0 & a_2 & a_1 & a_5\\ \hat\gamma_5 & 0 & a_3 & a_2 & a_1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\hat\gamma_1 & a_4 & a_3 & a_2\\ \hat\gamma_3 & a_1 & a_5 & a_4\\ \hat\gamma_4 & a_2 & a_1 & a_5\\ \hat\gamma_5 & a_3 & a_2 & a_1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\hat\delta_{11} & \theta_{41} & \theta_{31} & \theta_{21}\\ \hat\gamma_3 & a_1 & a_5 & a_4\\ \hat\delta_{41} & \theta_{21} & \theta_{11} & \theta_{51}\\ \hat\delta_{51} & \theta_{31} & \theta_{21} & \theta_{11}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\hat\delta_{11} & 0 & 0 & 0\\ \hat\gamma_3 & a_1 & a_5 & a_4\\ \hat\delta_{41} & 0 & 0 & \theta_{51}\\ \hat\delta_{51} & 0 & 0 & 0\end{vmatrix}=0.$$

Аналогично получим

$$\hat{X}^1_5=\begin{vmatrix}\hat\gamma_1 & a_5 & a_4 & a_3 & 0\\ \hat\gamma_2 & a_1 & a_5 & a_4 & 0\\ \hat\gamma_3 & a_2 & a_1 & a_5 & 0\\ \hat\gamma_4 & a_3 & a_2 & a_1 & 0\\ \hat\gamma_4 & a_4 & a_3 & a_2 & 1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\hat\gamma_1 & a_5 & a_4 & 0\\ \hat\delta_{21} & \theta_{11} & \theta_{51} & \theta_{41}\\ \hat\delta_{31} & \theta_{21} & \theta_{11} & \theta_{51}\\ \hat\gamma_4 & \theta_{31} & \theta_{21} & \theta_{11}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\hat\gamma_1 & a_5 & a_4 & 0\\ \hat\delta_{21} & 0 & 0 & 0\\ \hat\delta_{31} & 0 & 0 & \theta_{51}\\ \hat\gamma_4 & 0 & 0 & 0\end{vmatrix}\doteq\hat\delta_{41}\theta_{51}^2a_5,$$

где, как и раньше, равенство с точкой означает равенство с точностью до знака. Так как по условию $a_5\neq 0$, $\theta_{51}\neq 0$, то $\hat{X}^1_5=0\Longleftrightarrow\hat\delta_{41}=0$.

Убедимся, что при условиях (6.15) определитель $\hat{X}^1_{23}$ равен 0. Имеем

$$\hat{X}^1_{23}=\begin{vmatrix}\hat\gamma_1 & 0 & 0 & a_3 & a_2\\ \hat\gamma_2 & 1 & 0 & a_4 & a_3\\ \hat\gamma_3 & 0 & 1 & a_5 & a_4\\ \hat\gamma_4 & 0 & 0 & a_1 & a_5\\ \hat\gamma_5 & 0 & 0 & a_2 & a_1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\hat\gamma_1 & a_3 & a_2\\ \hat\gamma_4 & a_1 & a_5\\ \hat\gamma_5 & a_2 & a_1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\hat\delta_{11} & \theta_{31} & \theta_{21}\\ \hat\gamma_4 & a_4 & a_5\\ \hat\delta_{51} & \theta_{21} & \theta_{11}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\hat\delta_{11} & 0 & 0\\ \hat\gamma_4 & a_4 & a_5\\ \hat\delta_{51} & 0 & 0\end{vmatrix}=0.$$

Рассмотрим далее определитель $\hat{X}^1_{25}$. Учитывая здесь еще и соотношения (6.16), получим

$$\hat{X}^1_{25} = \begin{vmatrix} \hat{\gamma}_1 & 0 & a_4 & a_3 & 0 \\ \hat{\gamma}_2 & 1 & a_5 & a_4 & 0 \\ \hat{\gamma}_3 & 0 & a_1 & a_5 & 0 \\ \hat{\gamma}_4 & 0 & a_2 & a_1 & 0 \\ \hat{\gamma}_5 & 0 & a_3 & a_2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \hat{\gamma}_1 & a_4 & a_3 \\ \hat{\gamma}_3 & a_1 & a_5 \\ \hat{\gamma}_4 & a_2 & a_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \hat{\gamma}_1 & a_4 & a_3 \\ \hat{\gamma}_3 & a_1 & a_5 \\ \hat{\delta}_{41} & 0 & 0 \end{vmatrix} \doteq \hat{\delta}_{41}(a_4a_5 - a_1a_3) = \hat{\delta}_{41}(s^4a_5 - s^4a_5) = 0.$$

Аналогично предыдущему имеем для определителя $\hat{X}^1_{34}$:

$$\hat{X}^1_{34} = \begin{vmatrix} \hat{\gamma}_1 & a_5 & 0 & 0 & a_2 \\ \hat{\gamma}_2 & a_1 & 0 & 0 & a_3 \\ \hat{\gamma}_3 & a_2 & 1 & 0 & a_4 \\ \hat{\gamma}_4 & a_3 & 0 & 1 & a_5 \\ \hat{\gamma}_5 & a_4 & 0 & 0 & a_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \hat{\gamma}_1 & a_5 & a_2 \\ \hat{\gamma}_2 & a_1 & a_3 \\ \hat{\gamma}_5 & a_4 & a_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \hat{\delta}_{11} & \theta_{51} & 0 \\ \hat{\delta}_{21} & 0 & 0 \\ \hat{\gamma}_5 & a_4 & a_1 \end{vmatrix} \doteq \delta_{21}\theta_{51}a_1 = \delta_{21}\theta_{51}sa_5.$$

Так как по условию $a_5 \neq 0$, $\theta_{51} \neq 0$, $s \neq 0$, то $\hat{X}^1_{34} = 0 \iff \hat{\delta}_{21} = 0$.

Рассмотрим теперь определитель $\hat{X}^1_{45}$. Имеем

$$\hat{X}^1_{45} = \begin{vmatrix} \hat{\gamma}_1 & a_5 & a_4 & 0 & 0 \\ \hat{\gamma}_2 & a_1 & a_5 & 0 & 0 \\ \hat{\gamma}_3 & a_2 & a_1 & 0 & 0 \\ \hat{\gamma}_4 & a_3 & a_2 & 1 & 0 \\ \hat{\gamma}_5 & a_4 & a_3 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \hat{\gamma}_1 & a_5 & a_4 \\ \hat{\gamma}_2 & a_1 & a_5 \\ \hat{\gamma}_3 & a_2 & a_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \hat{\gamma}_1 & a_5 & a_4 \\ \hat{\delta}_{21} & 0 & \theta_{51} \\ \hat{\delta}_{31} & 0 & 0 \end{vmatrix} \doteq \hat{\delta}_{31}a_5\theta_{51}.$$

Так как по условию $a_5 \neq 0$, $\theta_{51} \neq 0$, то $\hat{X}^1_{45} = 0 \iff \hat{\delta}_{31} = 0$.

Аналогично получим для определителя $\hat{X}^1_{234}$:

$$\hat{X}^1_{234} = \begin{vmatrix} \hat{\gamma}_1 & 0 & 0 & 0 & a_2 \\ \hat{\gamma}_2 & 1 & 0 & 0 & a_3 \\ \hat{\gamma}_3 & 0 & 1 & 0 & a_4 \\ \hat{\gamma}_4 & 0 & 0 & 1 & a_5 \\ \hat{\gamma}_5 & 0 & 0 & 0 & a_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \hat{\gamma}_1 & a_2 \\ \hat{\gamma}_5 & a_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \hat{\delta}_{11} & 0 \\ \hat{\gamma}_5 & a_1 \end{vmatrix} \doteq \delta_{11}sa_5.$$

Так как по условию $a_5 \neq 0$, $\theta_{51} \neq 0$, $s \neq 0$, то $\hat{X}^1_{234} = 0 \iff \hat{\delta}_{11} = 0$.

Наконец, рассмотрим последний определитель из первой строки таблицы (6.5), т. е. определитель $\hat{X}^1_{345}$. Имеем

$$\hat{X}^1_{345} = \begin{vmatrix} \hat{\gamma}_1 & a_5 & 0 & 0 & 0 \\ \hat{\gamma}_2 & a_1 & 0 & 0 & 0 \\ \hat{\gamma}_3 & a_2 & 1 & 0 & 0 \\ \hat{\gamma}_4 & a_3 & 0 & 1 & 0 \\ \hat{\gamma}_5 & a_4 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \hat{\gamma}_1 & a_5 \\ \hat{\gamma}_2 & a_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \hat{\gamma}_1 & a_5 \\ \hat{\delta}_{21} & 0 \end{vmatrix} \doteq \hat{\delta}_{21}a_5.$$

Так как по условию $a_5 \neq 0$, $\theta_{51} \neq 0$, следовательно $\hat{X}^1_{234} = 0 \iff \hat{\delta}_{11} = 0$.

Из полученных условий вытекает справедливость доказываемой леммы. Лемма доказана. $\square$

В соответствии с доказанной леммой 6.9 «плохие» коэффициенты группы (i) в таблице (6.5) будут равны нулю, если потребовать

$$\hat{\delta}_{11} = \hat{\delta}_{21} = \hat{\delta}_{31} = \hat{\delta}_{41} = 0. \tag{6.17}$$

Получим однородную систему линейных алгебраических уравнений относительно $\hat{\gamma}_1, \hat{\gamma}_2, \ldots, \hat{\gamma}_5$:

$$\begin{cases} \hat{\gamma}_1 - s\hat{\gamma}_5 = 0, \\ \hat{\gamma}_2 - s\hat{\gamma}_1 = 0, \\ \hat{\gamma}_3 - s\hat{\gamma}_2 = 0, \\ \hat{\gamma}_4 - s\hat{\gamma}_3 = 0. \end{cases} \tag{6.18}$$

Эта система совместна и имеет очевидное решение

$$\hat{\Gamma} = \begin{pmatrix} s \\ s^2 \\ s^3 \\ s^4 \\ 1 \end{pmatrix} \hat{\gamma}_5,$$

где s и $\hat{\gamma}_5$ — произвольные числа. Полагая последовательно $s = \varepsilon_j$ и $\hat{\gamma}_5 = \varepsilon_j$, $j = \overline{1,5}$, где, как и раньше, ε_j суть различные корни 5-й степени из 1, получим следующие линейно независимые решения системы (6.18): $\hat{\Gamma}_j^0 = (1, \varepsilon_j, \varepsilon_j^2, \varepsilon_j^3, \varepsilon_j^4)^T$, $j = \overline{1,5}$.

Обозначим $\Gamma_j^0 = \Omega\hat{\Gamma}_j^0$, $j = \overline{1,5}$.

Лемма 6.10. *Для каждого $j = \overline{1,5}$ справедливо свойство $\widetilde{\mathcal{G}}(\rho; \Gamma_j^0(\rho)) \in (\alpha)$.*

Доказательство. Зафиксируем любое $j = \overline{1,5}$. По построению, в силу леммы 6.9 и условий (6.17), при $\hat{\Gamma} = \hat{\Gamma}_j^0$ все коэффициенты группы (i) в таблице (6.5) обратятся в нуль.

Имеет место равенство

$$S\hat{\Gamma}_j^0 = \begin{pmatrix} \varepsilon_j \\ \varepsilon_j^2 \\ \varepsilon_j^3 \\ \varepsilon_j^4 \\ 1 \end{pmatrix} = \varepsilon_j \begin{pmatrix} 1 \\ \varepsilon_j \\ \varepsilon_j^2 \\ \varepsilon_j^3 \\ \varepsilon_j^4 \end{pmatrix} = \varepsilon_j \hat{\Gamma}_j^0.$$

В силу этого равенства, лемм 6.1 и 6.9 коэффициенты группы (ii) таблицы (6.5) также равны нулю. В самом деле, имеем, например, для $\hat{X}_3^2(\hat{\Gamma}_j^0)$: $\hat{X}_3^2(\hat{\Gamma}_j^0) = \hat{X}_2^1(S\hat{\Gamma}_j^0) = \varepsilon_j \hat{X}_2^1(\hat{\Gamma}_j^0) = 0$.

Аналогично можно показать, что коэффициенты группы (iii) таблицы (6.5) также равны нулю. В самом деле, имеем, например, для $\hat{X}_4^3(\hat{\Gamma}_j^0)$: $\hat{X}_4^3(\hat{\Gamma}_j^0) = \hat{X}_3^2(S\hat{\Gamma}_j^0) = \varepsilon_j \hat{X}_3^2(\hat{\Gamma}_j^0) = \varepsilon_j \hat{X}_2^1(S\hat{\Gamma}_j^0) = \varepsilon_j^2 \hat{X}_2^1(\hat{\Gamma}_j^0) = 0$.

И так далее, аналогично можно показать, что коэффициенты групп (iv)-(v) таблицы (6.5) также равны нулю.

Следовательно, все «плохие» коэффициенты функции $\widetilde{g}(x, \rho; \Gamma(\rho))$ на векторах Γ_j^0 обратятся в нуль. Таким образом, характеристический многоугольник функции $\widetilde{G}(\rho; \Gamma_j^0(\rho))$ будет лежать внутри многоугольника $M_{\widetilde{\Delta}} = M_1^1$ (см. рис. 3), а следовательно, $\widetilde{\mathcal{G}}(\rho; \Gamma_j^0(\rho)) \in (\alpha)$.

Ввиду произвольности $j = \overline{1,5}$, лемма полностью доказана. □

В соответствии со схемой доказательства полноты (см. раздел 2), получаем

$$\widetilde{\mathcal{G}}(\rho; \Gamma_j^0(\rho)) \equiv 0 \Longrightarrow \int\limits_0^1 \widetilde{g}(x, \rho; \Gamma_j^0(\rho)) f(x)\, dx \equiv 0, \quad j = \overline{1,5}. \tag{6.19}$$

Воспользовавшись теперь леммой 6.3, из (6.19) получим, что $f(x) = 0$ для п.в. $x \in [0,1]$. Тем самым полнота системы с.ф. оператора $L_0 \in \mathrm{NR}_1^1$ в пространстве $L_2[0,1]$ полностью доказана.

Таким образом, ввиду замечания в начале раздела 6, основная теорема статьи, а именно, теорема 1, полностью доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Вагабов А. И.* Разложения в ряды Фурье по главным функциям дифференциальных операторов и их применения// Дисс. д.ф.-м.н. — Москва, 1988.
2. *Вагабов А. И.* Введение в спектральную теорию дифференциальных операторов. — Ростов-на-Дону: Изд-во Рост. ун-та, 1994.
3. *Гасымов М. Г., Магеррамов А. М.* О кратной полноте системы собственных и присоединенных функций одного класса дифференциальных операторов// Докл. АН АзССР. — 1974. — *30*, № 12. — С. 9–12.
4. *Голубь А. В., Кутепов В. А., Рыхлов В. С.* О полноте собственных функций простейшего дифференциального оператора 5-го порядка// Деп. в ВИНИТИ. — 05.08.2004. — № 1354-В2004.

5. *Дмитриев О. Ю.* Разложение по собственным функциям дифференциального оператора n-го порядка с нерегулярными краевыми условиями// В сб.: «Математика и ее приложения. Теория, методы, алгоритмы. Межвуз. сб. науч. трудов. Вып. 2». — Саратов: Изд-во СГУ, 1991. — С. 70–72.
6. *Дмитриев О. Ю.* Разложение по собственным функциям одной краевой задачи третьего порядка// В сб.: «Математика. Механика. Межвуз сб. науч. трудов. Вып. 3». — Саратов: Изд-во СГУ, 2001. — С. 40–42.
7. *Дмитриев О. Ю.* Разложение по собственным функциям дифференциального оператора n-го порядка с нерегулярными краевыми условиями// Изв. СГУ. Нов. сер. Сер. Мат. Мех. Инф. — 2007. — *2.* — С. 10–14.
8. *Дмитриев О. Ю.* Разложение по собственным функциям одной краевой задачи пятого порядка// В сб.: «Исследования по алгебре, теории чисел, функциональному анализу и смежным вопросам. Межвуз. сб. науч. тр. Вып. 5». — Саратов: Изд-во СГУ, 2009. — С. 14–17.
9. *Келдыш М. В.* О собственных значениях и собственных функциях некоторых классов несамосопряженных уравнений// Докл. АН СССР. — 1951. — *77*, № 1. — С. 11–14.
10. *Левин Б. Я.* Распределение корней целых функций. — М.: ГИТТЛ, 1956.
11. *Маркус А. С.* Введение в спектральную теорию полиномиальных операторных пучков. — Кишинев: Штиинца, 1986.
12. *Наймарк М. А.* Линейные дифференциальные операторы. — М.: Наука, 1969.
13. *Рыхлов В. С.* Разложения по собственным и присоединенным функциям квазидифференциальных и интегральных операторов// Дисс. к.ф.-м.н. — Саратов, 1981.
14. *Рыхлов В. С.* Асимптотика системы решений квазидифференциальных уравнений// В сб.: «Дифференциальные уравнения и теория функций. Разложение и сходимость. Межвуз. науч. сб. Вып. 5». — Саратов: Изд-во СГУ, 1983. — С. 51–59.
15. *Рыхлов В. С.* Асимптотика системы решений дифференциального уравнения общего вида с параметром// Укр. мат. журн. — 1996. — *48*, № 1. — С. 96–108.
16. *Рыхлов В. С.* Кратная полнота собственных функций простейшего пучка 5-го порядка// Spectral and Evolution Problems. — 2002. — *12.* — С. 42–51.
17. *Рыхлов В. С.* Полнота собственных функций некоторых классов нерегулярных дифференциальных операторов// Spectral and evolution problems. — 2003. — *13.* — С. 165–169.
18. *Рыхлов В. С.* О полноте корневых функций простейших сильно нерегулярных дифференциальных операторов с двучленными двухточечными краевыми условиями// Докл. РАН. — 2009. — *428*, № 6. — С. 740–743.
19. *Тамаркин Я. Д.* О некоторых общих задачах теории обыкновенных дифференциальных уравнений и о разложении произвольных функций в ряды. — Петроград: Тип. М. П. Фроловой, 1917.
20. *Тихомиров С. А.* Конечномерные возмущения интегральных вольтерровых операторов в пространстве вектор-функций// Дисс. к.ф.-м.н., Саратов, 1987. — 126 с.
21. *Хромов А. П.* Разложение по собственным функциям обыкновенных дифференциальных операторов в конечном интервале// Докл. АН СССР. — 1962. — *146*, № 6. — С. 1294—1297.
22. *Хромов А. П.* Конечномерные возмущения вольтерровых операторов// Дисс. д.ф.-м.н. — Новосибирск, 1973.
23. *Хромов А. П.* Конечномерные возмущения вольтерровых операторов// Мат. заметки. — 1974. — *16*, № 4. — С. 669–680.
24. *Хромов А. П.* О порождающих функциях вольтерровых операторов// Мат. сб. — 1977. — *102*, № 3. — С. 457–472.
25. *Хромов А. П.* Разложение по собственным функциям одной краевой задачи третьего порядка// В сб.: «Исследования по теории операторов». — Уфа: БФ АН СССР, 1988. — С. 182–193.
26. *Шкаликов А. А.* О полноте собственных и присоединенных функций обыкновенного дифференциального оператора с нерегулярными краевыми условиями// Функц. анализ и его прилож. — 1976. — *10*, № 4. — С. 69–80.
27. *Шкаликов А. А.* Краевые задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений с параметром в граничных условиях// Тр. сем. им. И. Г. Петровского. — 1983. — № 9. — С. 190–229.
28. *Benzinger H. E.* Green's function for ordinary differential operators// J. Differ. Equ. — 1970. — *7*, № 3. — С. 478–496.
29. *Birkhoff G. D.* Boundary value and expansion problems of ordinary linear differential equations// Trans. Am. Math. Soc. — 1908. — *9.* — С. 373–395.
30. *Eberhard W.* Zur Vollständigkeit des Biorthogonalsystems von Eigenfunktionen irregulärer Eigenwertprobleme// Math. Z. — 1976. — *146*, № 3. — С. 213–221.

31. *Freiling G.* Zur Vollständigkeit des Systems der Eigenfunktionen und Hauptfunktionen irregulärer Operator-büschel// Math. Z. — 1984. — *188*, № 1. — C. 55–68.
32. *Rykhlov V. S.* On completeness of eigenfunctions for pencils of differential operators// Spectral and Evolution Problems. — 1997. — *7*. — C. 70–73.
33. *Stone M. H.* A comparison of the series of Fourier and Birkhoff// Trans. Am. Math. Soc. — 1926. — *28*. — C. 695–761.
34. *Stone M. H.* Irregular differential systems of order two and related expansion problems// Trans. Am. Math. Soc. — 1927. — *29*. — C. 23–53.

В. С. Рыхлов
Саратовский национальный исследовательский государственный университет им. Н. Г. Чернышевского, Саратов, Россия
E-mail: RykhlovVS@yandex.ru

DOI: 10.22363/2413-3639-2022-68-2-338-375 UDC 517.927.25

On the Completeness of Eigenfunctions of One 5th-Order Differential Operator

© 2022 **V. S. Rykhlov**

Abstract. In this paper, we fully solve the problem of the completeness of the eigenfunctions of an ordinary 5th-order differential operator in the space of square-summable functions on the segment $[0, 1]$ generated by the simplest differential expression $y^{(5)}$ and two-point two-term boundary conditions $\alpha_\nu y^{(\nu-1)}(0) + \beta_\nu y^{(\nu-1)}(1) = 0$ and $\nu = \overline{1, 5}$, under the main assumption $\alpha_\nu \neq 0$, $\nu = \overline{1, 5}$ or $\beta_\nu \neq 0$, $\nu = \overline{1, 5}$ (in this case, without loss of generality, we can assume that all α_ν or all β_ν,, respectively, are equal to one).

The classical methods of studying completeness, which go back to well-known articles by M. V. Keldysh, A. P. Khromov, A. A. Shkalikov, and many others, are not applicable to the operator under consideration. These methods are based on “good” estimates for the spectral parameter of the used generating functions (“classical”) for the system of eigenfunctions and associated functions. In the case of a strong irregularity of the operator under consideration, these «classical» generating functions have too large rate of grows in the spectral parameter. To solve the problem of multiple completeness, we propose a new approach that uses a special parametric solution that generalizes «classical» generating functions. The main idea of this approach is to select the parameters of this special solution to construct generating functions that are no longer «classical» with suitable estimates in terms of the spectral parameter. Such a selection for the operator under consideration turned out to be possible, although rather nontrivial, which allowed us to follow the traditional scheme of proving the completeness of the system of eigenfunctions in the space of square-summable functions on the segment $[0, 1]$.

REFERENCES

1. A. I. Vagabov, “Razlozheniya v ryady Fur’e po glavnym funktsiyam differentsial’nykh operatorov i ikh primeneniya” [Fourier series expansions in principal functions of differential operators and their applications], *Doctoral Thesis*, Moscow, 1988.
2. A. I. Vagabov, *Vvedenie v spektral’nuyu teoriyu differentsial’nykh operatorov* [Introduction to the Spectral Theory of Differential Operators], Rostov Univ., Rostov-on-Don, 1994 (in Russian).

3. M. G. Gasymov and A. M. Magerramov, “O kratnoy polnote sistemy sobstvennykh i prisoedinennykh funktsiy odnogo klassa differentsial’nykh operatorov” [On multiple completeness of a system of eigenfunctions and associated functions of one class of differential operators], *Dokl. AN AzSSR* [Rep. Acad. Sci. AzSSR], 1974, **30**, No. 12, 9–12 (in Russian).
4. A. V. Golub’, V. A. Kutepov, and V. S. Rykhlov, “O polnote sobstvennykh funktsiy prosteyshego differentsial’nogo operatora 5-go poryadka” [On the completeness of eigenfunctions of a simplest 5th-order differential operator], *VINITI*, 05.08.2004, No. 1354-V2004.
5. O. Yu. Dmitriev, “Razlozhenie po sobstvennym funktsiyam differentsial’nogo operatora n-go poryadka s neregulyarnymi kraevymi usloviyami” [Expansion in eigenfunctions of an nth-order differential operator with irregular boundary conditions], In: *Matematika i ee prilozheniya. Teoriya, metody, algoritmy. Mezhvuz. sb. nauch. trudov. Vyp. 2* [Mathematics and Its Applications. Theory, Methods, Algorithms. Interuniv. Coll. Sci. Works. Vol. 2], Saratov St. Univ., Saratov, 1991, pp. 70–72 (in Russian).
6. O. Yu. Dmitriev, “Razlozhenie po sobstvennym funktsiyam odnoy kraevoy zadachi tret’ego poryadka” [Expansion in eigenfunctions of one third-order boundary-value problem], In: *Matematika. Mekhanika. Mezhvuz cb. nauch. trudov. Vyp. 3* [Mathematics. Mechanics. Interuniv. Coll. Sci. Works. Vol. 3], Saratov St. Univ., Saratov, 2001, pp. 40–42 (in Russian).
7. O. Yu. Dmitriev, “Razlozhenie po sobstvennym funktsiyam differentsial’nogo operatora n-go poryadka s neregulyarnymi kraevymi usloviyami” [Expansion in eigenfunctions of an nth-order differential operator with irregular boundary conditions], *Izv. SGU. Nov. ser. Ser. Mat. Mekh. Inf.* [Bull. Saratov St. Univ. New Ser. Ser. Math. Mech. Inf.], 2007, **2**, 10–14 (in Russian).
8. O. Yu. Dmitriev, “Razlozhenie po sobstvennym funktsiyam odnoy kraevoy zadachi pyatogo poryadka” [Expansion in eigenfunctions of one fifth-order boundary-value problem], In: *Issledovaniya po algebre, teorii chisel, funktsional’nomu analizu i smezhnym voprosam. Mezhvuz. sb. nauch. tr. Vyp. 5* [Studies in Algebra, Number Theory, Functional Analysis and Related Topics. Interuniv. Coll. Sci. Works. Vol. 5], Saratov St. Univ., Saratov, 2009, pp. 14–17 (in Russian).
9. M. V. Keldysh, “O sobstvennykh znacheniyakh i sobstvennykh funktsiyakh nekotorykh klassov nesamosopryazhennykh uravneniy” [On eigenvalues and eigenfunctions of some classes of non-self-adjoint equations], *Dokl. AN SSSR* [Rep. Acad. Sci. USSR], 1951, **77**, No. 1, 11–14 (in Russian).
10. B. Ya. Levin, *Raspredelenie korney tselykh funktsiy* [Distribution of Roots of Entire Functions], GITTL, Moscow, 1956 (in Russian).
11. A. S. Markus, *Vvedenie v spektral’nuyu teoriyu polinomial’nykh operatornykh puchkov* [Introduction to the Spectral Theory of Polynomial Operator Pencils], Shtiintsa, Kishinev, 1986 (in Russian).
12. M. A. Naimark, *Lineynye differentsial’nye operatory* [Linear Differential Operators], Nauka, Moscow, 1969 (Russian translation).
13. V. S. Rykhlov, “Razlozheniya po sobstvennym i prisoedinennym funktsiyam kvazidifferentsial’nykh i integral’nykh operatorov” [Expansions in eigenfunctions and associated functions of quasi-differential and integral operators], *Doctoral Thesis*, Saratov, 1981.
14. V. S. Rykhlov, “Asimptotika sistemy resheniy kvazidifferentsial’nykh uravneniy” [Asymptotics of the system of solutions of quasi-differential equations], In: *Mezhvuz. nauch. sb. Vyp. 5* [Differential Equations and Theory of Functions. Decomposition and Convergence. Interuniv. Coll. Sci. Works. Vol. 5], Saratov St. Univ., Saratov, 1983, pp. 51–59 (in Russian).
15. V. S. Rykhlov, “Asimptotika sistemy resheniy differentsial’nogo uravneniya obshchego vida s parametrom” [Asymptotics of the system of solutions of a general differential equation with a parameter], *Ukr. mat. zhurn.* [Ukr. Math. J.], 1996, **48**, No. 1, 96–108 (in Russian).
16. V. S. Rykhlov, “Kratnaya polnota sobstvennykh funktsiy prosteyshego puchka 5-go poryadka” [Multiple completeness of eigenfunctions of a simplest 5th-order pencil], *Spectral and Evolution Problems*, 2002, **12**, 42–51 (in Russian).
17. V. S. Rykhlov, “Polnota sobstvennykh funktsiy nekotorykh klassov neregulyarnykh differentsial’nykh operatorov” [Completeness of eigenfunctions of some classes of irregular differential operators], *Spectral and evolution problems*, 2003, **13**, 165–169 (in Russian).
18. V. S. Rykhlov, “O polnote kornevykh funktsiy prosteyshikh sil’no neregulyarnykh differentsial’nykh operatorov s dvuchlennymi dvukhtochechnymi kraevymi usloviyami” [On the completeness of root functions of simplest strongly irregular differential operators with two-term two-point boundary conditions], *Dokl. RAN* [Rep. Russ. Acad. Sci.], 2009, **428**, No. 6, 740–743 (in Russian).
19. Ya. D. Tamarkin, *O nekotorykh obshchikh zadachakh teorii obyknovennykh differentsial’nykh uravneniy i o razlozhenii proizvol’nykh funktsiy v ryady* [On Some General Problems in the Theory of Ordinary Differential Equations and on the Expansion of Arbitrary Functions into Series], M. P. Frolova’s Typography, Petrograd, 1917 (in Russian).

20. S. A. Tikhomirov, “Konechnomernye vozmushcheniya integral’nykh vol’terrovykh operatorov v prostranstve vektor-funktsiy” [Finite-dimensional perturbations of integral Volterra operators in the space of vector functions], *Doctoral Thesis*, Saratov, 1987.
21. A. P. Khromov, “Razlozhenie po sobstvennym funktsiyam obyknovennykh differentsial’nykh operatorov v konechnom intervale” [Expansion in eigenfunctions of ordinary differential operators in a finite interval], *Dokl. AN SSSR* [Rep. Acad. Sci. USSR], 1962, **146**, No. 6, 1294—1297 (in Russian).
22. A. P. Khromov, “Konechnomernye vozmushcheniya vol’terrovykh operatorov” [Finite-dimensional perturbations of Volterra operators], *Doctoral Thesis*, Novosibirsk, 1973.
23. A. P. Khromov, “Konechnomernye vozmushcheniya vol’terrovykh operatorov” [Finite-dimensional perturbations of Volterra operators], *Mat. zametki* [Math. Notes], 1974, **16**, No. 4, 669–680 (in Russian).
24. A. P. Khromov, “O porozhdayushchikh funktsiyakh vol’terrovykh operatorov” [On generating functions of Volterra operators], *Mat. sb.* [Math. Digest], 1977, **102**, No. 3, 457–472 (in Russian).
25. A. P. Khromov, “Razlozhenie po sobstvennym funktsiyam odnoy kraevoy zadachi tret’ego poryadka” [Expansion in eigenfunctions of one third-order boundary-value problem], In: *Issledovaniya po teorii operatorov* [Research on Operator Theory], BF AN SSSR, Ufa, 1988, pp. 182–193 (in Russian).
26. A. A. Shkalikov, “O polnote sobstvennykh i prisoedinennykh funktsiy obyknovennogo differentsial’nogo operatora s neregulyarnymi kraevymi usloviyami” [On the completeness of eigenfunctions and associated functions of an ordinary differential operator with irregular boundary conditions], *Funkts. analiz i ego prilozh.* [Funct. Anal. Appl.], 1976, **10**, No. 4, 69–80 (in Russian).
27. A. A. Shkalikov, “Kraevye zadachi dlya obyknovennykh differentsial’nykh uravneniy s parametrom v granichnykh usloviyakh” [Boundary-value problems for ordinary differential equations with a parameter in boundary conditions], *Tr. sem. im. I. G. Petrovskogo* [Proc. Petrovskii Semin.], 1983, No. 9, 190–229 (in Russian).
28. H. E. Benzinger, “Green’s function for ordinary differential operators,” *J. Differ. Equ.*, 1970, **7**, No. 3, 478–496.
29. G. D. Birkhoff, “Boundary value and expansion problems of ordinary linear differential equations,” *Trans. Am. Math. Soc.*, 1908, **9**, 373–395.
30. W. Eberhard, “Zur Vollständigkeit des Biorthogonalsystems von Eigenfunktionen irregulärer Eigenwertprobleme,” *Math. Z.*, 1976, **146**, No. 3, 213–221.
31. G. Freiling, “Zur Vollständigkeit des Systems der Eigenfunktionen und Hauptfunktionen irregulärer Operator-büschel,” *Math. Z.*, 1984, **188**, No. 1, 55–68.
32. V. S. Rykhlov, “On completeness of eigenfunctions for pencils of differential operators,” *Spectral and Evolution Problems*, 1997, **7**, 70–73.
33. M. H. Stone, “A comparison of the series of Fourier and Birkhoff,” *Trans. Am. Math. Soc.*, 1926, **28**, 695–761.
34. M. H. Stone, “Irregular differential systems of order two and related expansion problems,” *Trans. Am. Math. Soc.*, 1927, **29**, 23–53.

V. S. Rykhlov
Saratov State University, Saratov, Russia
E-mail: `RykhlovVS@yandex.ru`