Современная математика. Фундаментальные направления. Том 68, № 2 (2022). С. 191–337
Contemporary Mathematics. Fundamental Directions. ISSN 2413-3639 (Print)

DOI: 10.22363/2413-3639-2022-68-2-191-337 УДК 519.216

СТОХАСТИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ И ВКЛЮЧЕНИЯ С ПРОИЗВОДНЫМИ В СРЕДНЕМ И ИХ ПРИЛОЖЕНИЯ

© 2022 г. **Ю. Е. ГЛИКЛИХ**

Аннотация. Работа представляет собой подробное изложение результатов, в основном полученных в последние годы автором и его школой по изучению производных в среднем случайных процессов, стохастических уравнений и включений с производными в среднем, а также их приложений в различных математических дисциплинах, в основном в математической физике. Кроме того, работа содержит вводный материал по производным в среднем, принадлежащий Э. Нельсону, который ввел это понятие в 60-х годах XX в., результаты других исследователей по этой тематике и предварительные понятия из различных разделов математики, используемых в работе.

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Эта работа является еще одним промежуточным финишем в исследованиях нашей группы по производным в среднем случайных процессов, стохастическим уравнениям и включениям с производными в среднем, а также их приложениям. Предыдущие «промежуточные финиши» — это монографии [13, 14, 50] и др. Однако с течением времени появляются новые результаты и, что может быть более важно, новое понимание предыдущих результатов и их места в создаваемой теории. Поэтому каждый своевременный промежуточный финиш является очень важным и полезным событием.

Понятие производных в среднем было введено Э. Нельсоном в 60-х годах XX века для нужд созданной им так называемой стохастической механики (вариант квантовой механики, см. [80–82]). Изучаемое в этой науке уравнение Ньютона—Нельсона было первым примером уравнения с производными в среднем. В дальнейшем было показано, что уравнения с производными в среднем естественно возникают и во многих других разделах математической физики, экономики и др.

В тексте задействованы различные математические предметы, далекие от стохастического анализа, основного содержания работы. Например, важным объектом изучения являются стохастические дифференциальные включения с производными в среднем, в частности, в связи с оптимальным управлением. Эта теория основана на теории многозначных отображений. Многие результаты получены в задачах математической физики, сформулированных с использованием гладких многообразий, в частности, с теорией связностей на многообразиях. Здесь следует упомянуть теорию касательных векторов второго порядка, к которой принадлежат генераторы марковских процессов. Чтобы сделать работу «читабельной», в нее в качестве дополнений (глава 10) включены основы всех этих разделов математики. В эту главу вошли предварительные сведения, используемые во многих разделах работы. Кроме этого некоторые разделы начинаются с предварительных сведений, используемых только в этом разделе.

Первая глава посвящена введению в теорию производных в среднем. В ее первом разделе излагаются, в основном по работам Нельсона, все первоначальные понятия.

Отметим, что в [35] (см. также [50]) на основе небольшой модификации идей Нельсона дополнительно к введенным Нельсоном производным справа, слева, симметрической и т. д. нами была введена производная в среднем, названная нами квадратичной, которая, в принципе, сделала возможным нахождение процесса по его производным в среднем — совместно по одной из классических производных Нельсона и квадратичной (у Нельсона по умолчанию квадратичная производная всегда равнялась единичному оператору, может быть, умноженному на постоянное число, и поэтому не была введена). В частности, на этой основе далее была показана разрешимость многих уравнений с производными в среднем, возникающих с математической физике.

В дальнейших разделах первой главы содержатся уже наши результаты, являющиеся основой для вычисления производных в среднем и т. д.

Вторая глава посвящена общей теории уравнений и включений с производными в среднем. Отметим, что уравнения и включения с различными производными в среднем (справа, слева, симметрическими — текущими скоростями, антисимметрическими — осмотическими скоростями) требуют существенно разных методов для исследования. И конечно, для включений методы исследования резко отличаются от методов исследования уравнений. Поэтому глава занимает значительный объем.

Подчеркнем, что наиболее интересными и важными для приложений являются уравнения и включения с симметрическими производными в среднем (текущими скоростями) и с антисимметрическими производными в среднем (осмотическими скоростями), так как, например, именно текущие скорости являются аналогами обычной физической скорости детерминированных процессов, а осмотические скорости в определенном смысле показывают «как быстро нарастает случайность». Но именно эти уравнения и включения наиболее сложны для исследования. Отметим, что в разделе 10 описаны простейшие теоремы существования решений для включений в текущими скоростями. Более сложные теоремы существования содержатся в главе 3.

Третья глава посвящена оптимальному управлению системами, описываемыми включениями с производными в среднем и аналогичными уравнениями с управлением при наличии обратной связи. Особо отметим уравнения и включения типа геометрического броуновского движения, широко используемого в математических моделях экономики, и с правыми частями, принимающими так называемые экстремальные значения. Рассматриваются включения с производными в среднем справа и с текущими скоростями. Завершается глава описанием для случая уравнений и включений с производными в среднем аналога известной леммы Филиппова, которая на основе сведения управляемых уравнений с обратной связью к включениям показывает существование управления, которое реализует оптимальное решение включения как оптимальное решение уравнения.

В четвертой главе мы рассматриваем так называемые уравнения леонтьевского типа. Обыкновенные дифференциальные уравнения этого типа широко используются в электронике и радиотехнике и других приложениях. Появление случайных возмущений означает учет помех, что является весьма важной задачей. Эти уравнения со случайными возмущениями исследуются с помощью аппарата производных в среднем.

С пятой главы начинаются разделы работы по изучению различных аспектов теории производных в среднем и их приложений на гладких многообразиях. Собственно в пятой главе мы описываем теорию производных в среднем на гладких многообразиях. Как уже сказано выше, в ней существенно задействована теория связностей и касательных векторов второго порядка. Начинается глава с описания стохастических уравнений в форме Ито на многообразиях, для решений которых и даются определения производных в среднем.

В шестой главе рассматриваются уравнения и включения с производными в среднем на многообразиях. В частности, на языке производных в среднем доказана разрешимость уравнений и включений на многообразиях, заданных в терминах генераторов случайных процессов.

В седьмой главе мы рассматриваем две близкие математические задачи по изучению уравнения Ньютона—Нельсона (см. выше) на расслоениях со связностями. Сначала на вещественных расслоениях над римановым многообразием, затем на комплексных расслоениях над лоренцевым многообразием (пространством-временем общей теории относительности). Вторая из этих задач приводит к описанию движения квантовой частицы в классическом калибровочном поле на языке стохастической механики. В этих исследованиях задействованы очень глубокие факты из геометрии и топологии многообразий, которые дополнительно к материалу раздела 44 из главы 10 изложены в первом разделе (раздел 33) этой главы.

Отметим, что введенные выше производные в среднем в линейных пространствах и на многообразиях не ковариантны относительно преобразования Лоренца, и поэтому в релятивистском случае используется существенная модификация общего определения. Мы излагаем эту конструкцию в виде небольшой модификации результатов [43, 69, 88, 89]. Отметим, что на основе этого аппарата нами была доказана разрешимость релятивистского уравнения Ньютона—Нельсона, см. [47, 48, 50].

Восьмая глава посвящена лагранжеву подходу к гидродинамике, инициированному известными работами В. И. Арнольда [33] и затем Д. Эбина и Дж. Марсдена [44]. В [44] на языке бесконечномерной слабо римановой геометрии групп соболевских диффеоморфизмов компактных многообразий была очень красиво описана гидродинамика идеальных несжимаемых жидкостей. В частности, было показано, что поток идеальной несжимаемой жидкости с нулевой внешней силой описывается уравнением геодезической слабо римановой метрики на группе сохраняющих объем диффеоморфизмов.

Мы показываем, что потоки вязкой несжимаемой жидкости описываются стохастическими аналогами уравнений Эбина и Марсдена, в которых обычная ковариантная производная на группе диффеоморфизмов заменяется вторыми производными в среднем слева. Хотя конструкция основана на применении стохастического анализа, результаты удается получить для детерминированных (не случайных) вязких жидкостей. В отличие от Эбина и Марсдена мы рассматриваем гидродинамику только на плоском n-мерном торе. Напомним, что плоский тор получается факторизацией n-мерного евклидова пространства по целочисленной решетке, при которой риманова метрика на торе наследуется из евклидовой метрики пространства. Изучение движения жидкости на торе — это достаточно известная постановка задачи в гидродинамике.

В этой главе используются дополнительные факты о группах соболевских диффеоморфизмов компактных многообразиях, которые мы кратко излагаем в первом разделе главы (раздел 36) по [44] и дополняем этот материал нашими результатами специально для случая плоского тора.

Наконец, в девятой главе мы изучаем уравнения с производными в среднем с запаздыванием на многообразиях, где запаздывание реализовано в терминах риманова параллельного переноса.

В работу вошли в основном результаты из публикаций [1, 13–17, 24, 35–39, 49–68, 77]. Основное внимание уделяется работам [1, 14–17, 38, 51, 52, 54, 56, 62–68], опубликованным после 2013 года, которые, естественно, не вошли в монографию [14] 2016 года. Публикации [13, 24, 35–37, 39, 49, 50, 53, 55, 57–61, 77] чаще всего используются для ссылок на полученные там результаты или в связи новым пониманием их результатов в общей теории.

Важным обстоятельством является тот факт, что в работе мы используем соглашение Эйнштейна о суммировании по одинаковым верхнему и нижнему индексу: если в некотором мономе имеется нижний и верхний индексы, обозначенные одной и той же буквой, это означает сумму по этому индексу от 1 до n, равного размерности пространства, хотя знак суммы не пишется. Поясним это на примерах. Так, $B^j_k = A^{ij}_{ki}$ означает $B^j_k = \sum\limits_{i=1}^{n} A^{ij}_{ki}$, а $R^j_{kl} = a_i b^{ijs}_k c_s$ означает

$R^j_k = \sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{s=1}^{n} a_i b^{ijs}_k c_s$. Использование этого соглашения упрощает запись формул и даже облегчает усвоение материала. Для полноты отметим, что индекс вверху, но в знаменателе, считается индексом внизу, а внизу и в знаменателе — индексом вверху.

Несколько слов об обозначениях. Мы используем координатное описание векторов (как столбцов) и линейных операторов (как матриц). Если X — вектор-столбец, то транспонированный вектор (строка) обозначается X^*. Аналогичный символ $*$ используется для транспонирования матриц. Подобные обозначения используются и для некоторых объектов на гладких многообразиях.

Пространство матриц размера $n\times n$ обозначается $L(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^n)$. Символом $\mathrm{S}(n)$ мы обозначаем пространство симметрических матриц размера $n\times n$ — подпространство в $L(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^n)$. Символ $\mathrm{S}_+(n)$ используется для обозначения множества положительно определенных симметрических матриц размера $n\times n$, которые образуют открытое выпуклое подмножество в $\mathrm{S}(n)$. Его замыкание — множество неотрицательно определенных матриц — обозначается $\bar{\mathrm{S}}_+(n)$.

Норма $\|B\|$ множества B, как обычно, определяется формулой $\|B\| = \sup\limits_{b\in B}\|b\|$. Использование этого обозначения, конечно же, не означает, что множество подмножеств является нормированным пространством.

Глава 1

ПРОИЗВОДНЫЕ В СРЕДНЕМ

1. Общие определения и результаты

Рассмотрим стохастический процесс $\xi(t)$ в $\mathbb{R}^n$, определенный на некотором вероятностном пространстве $(\Omega,\mathcal{F},\mathsf{P})$ и такой, что $\xi(t)$ является L_1-случайной величиной для всех t. Из соображений удобства изложения мы предполагаем, что $\xi(t)$ задан для $t\in[0,T]\subset\mathbb{R}$. Этот процесс порождает три семейства σ-подалгебр σ-алгебры $\mathcal{F}$:

(i) «прошлое» $\mathcal{P}^\xi_t$, порожденное прообразами борелевских множеств из $\mathbb{R}^n$ при всех отображениях $\xi(s):\Omega\to\mathbb{R}^n$ для $0\leqslant s\leqslant t$;

(ii) «будущее» $\mathcal{F}^\xi_t$, порожденное прообразами борелевских множеств из $\mathbb{R}^n$ при всех отображениях $\xi(s):\Omega\to\mathbb{R}^n$ для $t\leqslant s\leqslant T$;

(iii) «настоящее» $\mathcal{N}^\xi_t$, порожденное прообразами борелевских множеств из $\mathbb{R}^n$ при отображении $\xi(t):\Omega\to\mathbb{R}^n$.

Все перечисленные семейства предполагаются полными, т. е. содержащими все множества вероятности нуль.

Ради удобства мы обозначаем условное математическое ожидание $E(\cdot|\mathcal{N}^\xi_t)$ относительно «настоящего» $\mathcal{N}^\xi_t$ для $\xi(t)$ через E^ξ_t.

Вообще говоря, почти все выборочные траектории процесса $\xi(t)$ п.в. не дифференцируемы, так что мы не можем определить его производную обычным способом. Согласно Нельсону (см., например, [80–82]) мы даем следующее определение.

Определение 1.1.

(i) *Производная в среднем справа* $D\xi(t)$ процесса $\xi(t)$ в момент времени t есть L_1-случайная величина вида
$$D\xi(t) = \lim_{\Delta t\to+0} E^\xi_t\left(\frac{\xi(t+\Delta t)-\xi(t)}{\Delta t}\right), \tag{1.1}$$
где предел предполагается существующим в $L_1(\Omega,\mathcal{F},\mathsf{P})$ и $\Delta t\to+0$ означает, что Δt стремится к 0 и $\Delta t>0$.

(ii) *Производная в среднем слева* $D_*\xi(t)$ процесса $\xi(t)$ в момент времени t есть L_1-случайная величина
$$D_*\xi(t) = \lim_{\Delta t\to+0} E^\xi_t\left(\frac{\xi(t)-\xi(t-\Delta t)}{\Delta t}\right), \tag{1.2}$$

где (как и в (i)) предел предполагается существующим в $L_1(\Omega, \mathcal{F}, \mathsf{P})$ и $\Delta t \to +0$ означает, что $\Delta t \to 0$ и $\Delta t > 0$.

Если $\xi(t)$ — марковский процесс, то очевидным образом E_t^{ξ} может быть заменено на $E(\cdot|\mathcal{P}_t^{\xi})$ в (1.1) и на $E(\cdot|\mathcal{F}_t^{\xi})$ в (1.2).

Замечание 1.1. Нельсон рассматривал в основном случай марковских процессов, в котором определения с $E_t^{\xi}(\cdot)$ и $E(\cdot|\mathcal{P}_t^{\xi})$) или $E(\cdot|\mathcal{F}_t^{\xi})$, соответственно, эквивалентны. Мы в основном рассматриваем процессы Ито диффузионного типа, которые, вообще говоря, не марковские, так что указанные определения становятся неэквивалентными. Мы выбираем определение 1.1, так как это полностью совместимо с принципом локальности в физике: производная зависит от настоящего момента времени, а не от всего прошлого или всего будущего. Производные в среднем с использованием условного математического ожидания относительно «прошлого» ($\mathcal{P}$-производные в среднем) будут использованы ниже в разделе 13 и далее. Ниже в этом разделе мы приведем несколько результатов о $\mathcal{P}$-производных в среднем.

Следует отметить, что, вообще говоря, $D\xi(t) \neq D_*\xi(t)$ (но если $\xi(t)$ почти наверное имеет гладкие выборочные траектории, эти производные очевидно совпадают).

Из свойств условного математического ожидания следует, что $D\xi(t)$ и $D_*\xi(t)$ могут быть представлены как суперпозиции $\xi(t)$ и борелевских векторных полей (регрессий, см. [26])

$$Y^0(t,x) = \lim_{\Delta t \to +0} E\left(\frac{\xi(t+\Delta t) - \xi(t)}{\Delta t} | \xi(t) = x\right),$$

$$Y_*^0(t,x) = \lim_{\Delta t \to +0} E\left(\frac{\xi(t) - \xi(t-\Delta t)}{\Delta t} | \xi(t) = x\right) \tag{1.3}$$

на $\mathbb{R}^n$, т. е. $D\xi(t) = Y^0(t, \xi(t))$ и $D_*\xi(t) = Y_*^0(t, \xi(t))$.

Производные в смысле определения 1.1 являются частными случаями объектов, определенных следующим образом. Пусть $x(t)$ и $y(t)$ — L_1-стохастические процессы в $\mathbb{R}^n$, заданные на $(\Omega, \mathcal{F}, \mathsf{P})$. Введем y-производную от $x(t)$ справа формулой

$$D^y x(t) = \lim_{\Delta t \to +0} E_t^y \left(\frac{x(t+\Delta t) - x(t)}{\Delta t}\right) \tag{1.4}$$

и y-производную от $x(t)$ слева формулой

$$D_*^y x(t) = \lim_{\Delta t \to +0} E_t^y \left(\frac{x(t) - x(t-\Delta t)}{\Delta t}\right), \tag{1.5}$$

где, конечно, пределы должны существовать в $L_1(\Omega, \mathcal{F}, \mathsf{P})$.

При вычислении производных в среднем часто бывает полезен следующий технический результат.

Лемма 1.1. *Пусть $g(t)$ и $h(t)$ — L_1-случайные процессы с непрерывными выборочными траекториями в $\mathbb{R}^n$, определенные для $t \in [0, T]$ на одном и том же вероятностном пространстве. Рассмотрим процесс $E_t^h g(t)$. Пусть $Dh(t)$ и $D_*h(t)$ существуют. Тогда*:

(i) *$D^h g(t)$ существует тогда и только тогда, когда $D^h E_t^h g(t)$ существует, и при этом $D^h E_t^h g(t) = D^h g(t)$;*

(ii) *$D_*^h g(t)$ существует тогда и только тогда, когда $D_*^h E_t^h g(t)$ существует, и при этом $D_*^h E_t^h g(t) = D_*^h g(t)$.*

Доказательство. Выберем произвольную гладкую вещественную функцию $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ с компактным носителем. Используя равенство

$$(E_{t+\Delta t}^h g(t+\Delta t)) f(h(t+\Delta t)) - (E_t^h g(t)) f(h(t)) =$$
$$= \{(E_{t+\Delta t}^h g(t+\Delta t) - E_t^h g(t)\} f(h(t)) + E_{t+\Delta t}^h g(t+\Delta t))\{f(h(t+\Delta t)) - f(h(t))\},$$

мы получаем

$$ED^h\{(E^h_t g(t))f(h(t))\} = \lim_{\Delta t\to+0} E\left(E^h_t\left(\frac{E^h_{t+\Delta t}g(t+\Delta t)f(h(t+\Delta t)) - (E^h_t g(t))f(h(t))}{\Delta t}\right)\right) =$$
$$= E((D^h E^h_t g(t))f(h(t))) + E((E^h_t g(t))D^h_* f(h(t))),$$

если предел существует (ср. [81, 82]). Напомним, что существование второго слагаемого в правой части последнего равенства следует из условий леммы. Таким образом, предел существует тогда и только тогда, когда $D^h E^h_t g(t)$ существует. С другой стороны очевидно, что

$$E(E^h_t\{(E^h_{t+\Delta t}g(t+\Delta t))f(h(t+\Delta t)) - (E^h_t g(t))f(h(t))\}) = E(g(t+\Delta t)f(h(t+\Delta t)) - g(t)f(h(t))),$$

и аналогичными рассуждениями мы получаем

$$ED^h\{(E^h_t g(t))f(h(t))\} = E((D^h g(t))f(h(t))) + E(g(t)D^h_* f(h(t)))$$

тогда и только тогда, когда $D^h g(t)$ существует. Очевидно, что

$$E((E^h_t g(t))D^h_* f(h(t))) = E(g(t)D^h_* f(h(t))),$$

и следовательно,

$$E((D^h E^h_t g(t))f(h(t))) = E((D^h g(t))f(h(t))).$$

Это доказывает (i). Доказательство (ii) аналогично и основано на равенстве

$$(E^h_{t+\Delta t}g(t+\Delta t))f(h(t+\Delta t)) - (E^h_t g(t))f(h(t)) =$$
$$= \{(E^h_{t+\Delta t}g(t+\Delta t)) - E^h_t g(t)\}f(h(t+\Delta t)) + E^h_t g(t))\{f(h(t+\Delta t)) - f(h(t))\}.$$

□

Лемма 1.2.

(i) *Если $x(t)$ является мартингалом относительно $\mathcal{P}^y_t$, то $D^y x(t) = 0$.*
(ii) *Если $x(t)$ является обратным мартингалом относительно $\mathcal{F}^y_t$, то $D^y_* x(t) = 0$.*

Доказательство. (i) Так как $x(t)$ — мартингал относительно $\mathcal{P}^y_t$, то $E(x(t+\Delta t)|\mathcal{P}^y_t) = x(t)$. Отметим, что $\mathcal{N}^y_t$ — σ-подалгебра в $\mathcal{P}^y_t$, т. е. $E^y_t(E(\cdot|\mathcal{P}^y_t)) = E^y_t(\cdot)$. Таким образом, $E^y_t(x(t+\Delta t) - x(t)) = E^y_t(E(x(t+\Delta t) - x(t))|\mathcal{P}^y_t) = 0$. Утверждение (i) доказано. Доказательство (ii) совершенно аналогично. Здесь нужно использовать определение обратного мартингала и вложение $\mathcal{N}^y_t$ в $\mathcal{F}^y_t$. □

Напомним, что процесс Ито — это процесс вида

$$\xi(t) = \xi_0 + \int_0^t a(s)ds + \int_0^t A(s)dw(s), \tag{1.6}$$

где первый интеграл в правой части — интеграл Лебега, а второй — интеграл Ито. Процесс Ито называется *процессом диффузионного типа*, если $a(t)$, $A(t)$ и $w(t)$ не упреждают относительно $\mathcal{P}^\xi_t$. Напомним также, что процессы диффузионного типа существуют, например, как решения так называемых уравнений Ито диффузионного типа (см., например, [10, Theorem III.2.4]).

Процесс диффузионного типа мы будем называть *диффузионным процессом*, если $a(t)$, $A(t)$ измеримы относительно $\mathcal{N}^\xi_t$. Используя понятие регрессии, нетрудно видеть, что это эквивалентно тому факту, что $\xi(t)$ является решением обыкновенного стохастического уравнения в форме Ито со сносом $a(t,x)$ и диффузионным подынтегральным членом $A(t,x)$, где a и A — регрессии.

Следует отметить, что процесс диффузионного типа $\xi(t)$ может не быть ни диффузионным, ни марковским процессом.

Рассмотрим процесс Ито диффузионного типа вида (1.6).

Теорема 1.1. *Для процесса Ито диффузионного типа $\xi(t)$ вида* (1.6) *$D\xi(t)$ существует и равно $E^\xi_t(a(t))$. В частности, если $\xi(t)$ — диффузионный процесс, то $D\xi(t) = a(t,\xi(t))$, где $a(t,x)$ — снос.*

Утверждение леммы следует из того, что $\int\limits_0^t A(s)dw(s)$ является мартингалом относительно $\mathcal{P}_t^\xi$, и из леммы 1.2.

Следуя [35] (см. также [50]), мы вводим дифференциальную характеристику D_2 случайного процесса $\xi(t)$, которая определяется формулой

$$D_2\xi(t) = \lim_{\triangle t\to +0} E_t^\xi \left(\frac{(\xi(t+\triangle t)-\xi(t))(\xi(t+\triangle t)-\xi(t))^*}{\triangle t} \right), \tag{1.7}$$

где $(\xi(t+\triangle t)-\xi(t))$ рассматривается как столбец (вектор в $\mathbb{R}^n$), $(\xi(t+\triangle t)-\xi(t))^*$ — как строка (транспонированный или сопряженный вектор) и предел предполагается существующим в $L_1(\Omega,\mathcal{F},\mathsf{P})$.

Определение 1.2. D_2 называется *квадратичной производной в среднем.*

Теорема 1.2. *Пусть $\xi(t)$ — процесс диффузионного типа вида* (1.6). *Тогда $D_2\xi(t)$ существует и $D_2\xi(t) = E_t^\xi[\alpha(t)]$, где $\alpha(t) = A(t)A^*(t)$, $A^*(t)$ — транспонированная матрица $A(t)$ и $A(t)A^*(t)$ — произведение матриц. Если $\xi(t)$ — диффузионный процесс, $D_2\xi(t) = \alpha(t,\xi(t))$, где α — коэффициент диффузии. В частности, если известно, что $\xi(t)$ — диффузионный процесс, то $D_2\xi(t) = 0$ тогда и только тогда, когда $A = 0$, и, следовательно, процесс $\xi(t)$ не случайный и имеет C^1-гладкие траектории.*

Доказательство. Матричное произведение вектора-столбца $(\xi(t+\triangle t)-\xi(t))$ справа и вектора-строки $(\xi(t+\triangle t)-\xi(t))^*$ слева является матрицей ранга 1. Поскольку $\xi(t+\triangle t)-\xi(t) = \int\limits_t^{t+\triangle t} a(s)ds + \int\limits_t^{t+\triangle t} A(s)dw(s)$, то, принимая во внимание свойства интегралов Лебега и Ито, легко видеть, что $(\xi(t+\triangle t)-\xi(t))(\xi(t+\triangle t)-\xi(t))^*$ аппроксимируется выражением $a(t)a(t)^*(\Delta t)^2 + (a(t)\Delta t)(A(t)\Delta w(t))^* + (A(t)\Delta w(t))(a(t)\Delta t)^* + A(t)A(t)^*\Delta t$. Таким образом, только $A(t)A(t)^*\Delta t$ является бесконечно малой того же порядка, что Δt, тогда как остальные слагаемые являются бесконечно малыми более высокого порядка, чем Δt. Применив формулу (1.7), мы получаем утверждение теоремы, поскольку $AA^* = \alpha$ (см. выше). Если диффузионный процесс $\xi(t)$ п.н. имеет C^1-гладкие выборочные траектории, то $A = 0$ п.н. и, таким образом, $D_2\xi(t) = 0$. С другой стороны, если $D_2\xi(t) = 0$, это означает, что в выражении $(\xi(t+\triangle t)-\xi(t))(\xi(t+\triangle t)-\xi(t))^*$ нет слагаемых того же порядка малости, что и $\triangle t$. Следовательно, $A = 0$. ☐

В частности, из теоремы 1.2 следует, что D_2 принимает значения в симметрических неотрицательно определенных матрицах.

Замечание 1.2. Из теорем 1.1 и 1.2 понятно, что даже если производные в среднем берутся от процесса диффузионного типа, то из-за того, что мы задействуем условное математическое ожидание относительно «настоящего», регрессии производных в среднем оказываются векторными и тензорными полями, зависящими от t, x. Поэтому, несмотря на то, что в правых частях уравнений и включений могут стоять векторные и тензорные поля, решение может быть процессом диффузионного типа (или даже из более широкого класса процессов) и не обязательно диффузионным процессом (как ожидалось).

Имеется эквивалентное (1.7) определение D_2, которое иногда удобнее:

$$D_2\xi(t) = \lim_{\triangle t\to +0} E_t^\xi \left(\frac{(\xi(t+\triangle t)-\xi(t))\otimes(\xi(t+\triangle t)-\xi(t))}{\triangle t} \right), \tag{1.8}$$

где $\otimes$ — тензорное произведение.

В дальнейшем мы будем часто иметь дело с частным случаем процессов (1.6) с $A = \sigma I$, где $\sigma > 0$ — вещественная константа и I — единичный оператор, т. е. с процессами диффузионного типа в $\mathbb{R}^n$ вида

$$\xi(t) = \xi_0 + \int\limits_0^t \beta(s)ds + \sigma w(t). \tag{1.9}$$

Подчеркнем, что теоремы 1.1 и 1.2 выполняются для процессов (1.9).

Определение 1.3. Производная $D_S = \frac{1}{2}(D+D_*)$ называется *симметрической производной в среднем.* Производная $D_A = \frac{1}{2}(D-D_*)$ называется *антисимметрической производной в среднем.*

Рассмотрим векторные поля $v^\xi(t,x) = \frac{1}{2}(Y^0(t,x)+Y^0_*(t,x))$ и $u^\xi(t,x) = \frac{1}{2}(Y^0(t,x)-Y^0_*(t,x))$, где $Y^0(t,x)$ и $Y^0_*(t,x))$ — регрессии из формулы (1.3).

Определение 1.4. $v^\xi(t) = v^\xi(t,\xi(t)) = D_S\xi(t)$ называется *текущей скоростью* процесса $\xi(t)$; $u^\xi(t) = u^\xi(t,\xi(t)) = D_A\xi(t)$ называется *осмотической скоростью* процесса $\xi(t)$.

Текущая скорость является естественным аналогом обычной (физической) скорости детерминированных процессов. Осмотическая скорость в каком-то смысле измеряет «как быстро нарастает стохастичность». Эти свойства вытекают из формул для текущей и осмотической скоростей, нахождению которых посвящен раздел 2.

Пусть $Z(t,x)$ — C^2-гладкое векторное поле на $\mathbb{R}^n$ и $\xi(t)$ — стохастический процесс в $\mathbb{R}^n$.

Определение 1.5. L_1-пределы вида

$$DZ(t,\xi(t)) = \lim_{\Delta t\to+0} E^\xi_t\left(\frac{Z(t+\Delta t,\xi(t+\Delta t)) - Z(t,\xi(t))}{\Delta t}\right), \tag{1.10}$$

$$D_*Z(t,\xi(t)) = \lim_{\Delta t\to+0} E^\xi_t\left(\frac{Z(t,\xi(t)) - Z(t-\Delta t,\xi(t-\Delta t))}{\Delta t}\right) \tag{1.11}$$

называются, соответственно, *производными в среднем справа* и *слева* от Z вдоль $\xi(\cdot)$ в момент времени t.

Как и в определении 1.1, если $\xi(t)$ — марковский процесс, то $E^\xi_t(\cdot)$ можно заменить на $E(\cdot|\mathcal{P}^\xi_t)$ в (1.10) и на $E(\cdot|\mathcal{F}^\xi_t)$ в (1.11), см. замечание 1.1.

Конечно, $DZ(t,\xi(t))$ и $D_*Z(t,\xi(t))$ могут быть представлены как суперпозиции $\xi(t)$ с некоторыми борелевскими векторными полями (регрессиями, ср. (1.3)). Эти векторные поля (если это не приведет к путанице) мы будем также обозначать DZ и D_*Z, соответственно.

Лемма 1.3. *Для процесса* (1.9) *в* $\mathbb{R}^n$ *имеют место следующие формулы*:

$$DZ = \frac{\partial}{\partial t}Z + (Y^0\cdot\nabla)Z + \frac{\sigma^2}{2}\Delta Z, \tag{1.12}$$

$$D_*Z = \frac{\partial}{\partial t}Z + (Y^0_*\cdot\nabla)Z - \frac{\sigma^2}{2}\Delta Z, \tag{1.13}$$

где $\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x^1},\dots,\frac{\partial}{\partial x^n}\right)$, Δ — *лапласиан, точка обозначает скалярное произведение в* $\mathbb{R}^n$, *и векторные поля* $Y^0(t,x)$ *и* $Y^0_*(t,x)$ *введены в* (1.3).

Доказательство. Векторное поле $Z(t,x)$ можно рассматривать как отображение $Z:[0,T]\times\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ и применить прямую и обратную формулы Ито. Формула (1.12) следует немедленно из прямой формулы Ито. Действительно, при применении этой формулы к (1.10) мы видим, что последнее слагаемое справа дает нуль, так как интеграл Ито является мартингалом относительно $\mathcal{P}^\xi_t$ (см. леммы 1.2 и 1.1). Очевидно, что $E^\xi_t(Z'(\beta)) = ((Y^0\cdot\nabla)Z)(\xi(t))$ и, поскольку $A=\sigma I$, $\frac{1}{2}\operatorname{tr} Z''(A,A) = \frac{\sigma^2}{2}\nabla^2 Z$.

Нетрудно видеть, что обратную формулу Ито можно также применить к $Z(t,\xi(t))$, а также что

$$Y^0_*(t,\xi(t)) = D_*\xi(t) = E^\xi_t(\beta(t)) - 2u^\xi(t,\xi(t)),$$
$$-2u^\xi(t,\xi(t)) = \lim_{\Delta t\to+0} E^\xi_t\left(\frac{w(t)-w(t-\Delta t)}{\Delta t}\right).$$

Далее,

$$E^{\xi}_t(Z'(\beta(t))) + \lim_{\Delta t\to+0} E^{\xi}_t\left(\frac{\int\limits_{t-\Delta t}^{t} Z' d_* w}{\Delta t}\right) = ((Y^0_* \cdot \nabla)Z)(\xi(t)). \tag{1.14}$$

Таким образом, (1.13) следует из обратной формулы Ито и (1.14), так как выражение для $\frac{1}{2}\operatorname{tr} Z''$ такое же, как в доказательстве формулы (1.12). □

Замечание 1.3. Легко видеть, что для процесса (1.6) в аналогах формул (1.12) и (1.13) вместо $\frac{\sigma^2}{2}\Delta Z$ будет стоять $\frac{1}{2}\operatorname{tr} Z''(A,A)$, а все остальные слагаемые будут такими же, как в (1.12) и (1.13).

Производные в среднем второго порядка $DD\xi(t)$ и $D_*D_*\xi(t)$ мы описываем как первые производные D от регрессии (т. е. векторного поля) $D\xi$ и, соответственно, D_* от регрессии (векторного поля) $D_*\xi$.

Замечание 1.4. В случае, когда ξ имеет коэффициент диффузии $\sigma^2 I$, обозначим регрессию $D_*\xi$ символом Y. Тогда по формуле 1.13 мы получаем

$$D_*D_*\xi = \left(\frac{-\sigma^2}{2}\Delta + Y\cdot\nabla + \frac{\partial}{\partial t}\right)Y, \tag{1.15}$$

где правая часть формулы (1.15) совпадает с левой частью уравнения Бюргерса.

Определение 1.6. *Производная в среднем справа* относительно «прошлого» ($\mathcal{P}$-*производная в среднем*) $D^{\mathcal{P}}\xi(t)$ процесса $\xi(t)$ в момент времени t — это L^1-случайный элемент вида

$$D^{\mathcal{P}}\xi(t) = \lim_{\triangle t\to+0} E\left(\frac{\xi(t+\triangle t)-\xi(t)}{\triangle t}\,\Big|\,\mathcal{P}^{\xi}_t\right), \tag{1.16}$$

где предел предполагается существующим в L^1 и $\triangle t \to +0$ означает, что $\triangle t$ стремится к 0 и $\triangle t > 0$.

Производная в среднем слева относительно «будущего» ($\mathcal{F}$-*производная в среднем*) $D^{\mathcal{F}}_*\xi(t)$ процесса $\xi(t)$ в момент времени t — это L^1-случайный элемент вида

$$D^{\mathcal{F}}_*\xi(t) = \lim_{\triangle t\to+0} E\left(\frac{\xi(t)-\xi(t-\triangle t)}{\triangle t}\,\Big|\,\mathcal{F}^{\xi}_t\right), \tag{1.17}$$

где предел предполагается существующим в L^1 и $\triangle t \to +0$ означает, что $\triangle t$ стремится к 0 и $\triangle t > 0$.

По аналогии с определением 1.6 и формулами (1.4) и (1.5) вводятся понятия

$$D^{\mathcal{P}^y}x(t) = \lim_{\triangle t\to+0} E\left(\frac{x(t+\triangle t)-x(t)}{\triangle t}\,\Big|\,\mathcal{P}^{y}_t\right), \tag{1.18}$$

$$D^{\mathcal{F}y}_*x(t) = \lim_{\triangle t\to+0} E\left(\frac{x(t)-x(t-\triangle t)}{\triangle t}\,\Big|\,\mathcal{F}^{y}_t\right). \tag{1.19}$$

Лемма 1.4. *При* $s < t$

$$E(x(t)-x(s)\mid\mathcal{P}^y_s) = E\left(\int\limits_s^t (D^{\mathcal{P}^y}x(\tau))d\tau \mid \mathcal{P}^y_s\right), \tag{1.20}$$

$$E(x(t)-x(s)\mid\mathcal{F}^y_t) = E\left(\int\limits_s^t (D^{\mathcal{F}^y}_*x(\tau))d\tau \mid \mathcal{F}^y_t\right). \tag{1.21}$$

Доказательство. Возьмем разбиение $q = (s = t_0 < t_1 < \cdots < t_N = t)$ интервала $[s,t]$ и рассмотрим следующую интегральную сумму:

$$\sum_{i=0}^{N-1} E\Big(\frac{x(t_{i+1}) - x(t_i)}{t_{i+1} - t_i} \mid \mathcal{P}^y_{t_i}\Big)(t_{i+1} - t_i) = \sum_{i=0}^{N-1} E((x(t_{i+1}) - x(t_i)) \mid \mathcal{P}^y_{t_i}),$$

предел которой при $\operatorname{diam} q \to 0$ очевидным образом есть $\int\limits_s^t (D^{\mathcal{P}^y} x(\tau))d\tau$. Так как $t_i \geqslant s$, по свойствам условного математического ожидания $E(E(\cdot \mid \mathcal{P}^y_{t_i}) \mid \mathcal{P}^y_s) = E(\cdot \mid \mathcal{P}^y_s)$. Таким образом,

$$E\left(\sum_{i=0}^{N-1} E(x(t_{i+1}) - x(t_i) \mid \mathcal{P}^y_{t_i}) \mid \mathcal{P}^y_s\right) = E\left(\sum_{i=0}^{N-1}(x(t_{i+1}) - x(t_i)) \mid \mathcal{P}^y_s\right) = E(x(t) - x(s) \mid \mathcal{P}^y_s).$$

Это доказывает (1.20). Доказательство (1.21) полностью аналогично с заменой «прошлого» на «будущее». □

Лемма 1.5.

(i) *$x(t)$ является мартингалом относительно $\mathcal{P}^y_t$ тогда и только тогда, когда $D^{\mathcal{P}^y} x(t) = 0$.*

(ii) *$x(t)$ является обратным мартингалом относительно $\mathcal{F}^y_t$ тогда и только тогда, когда $D^{\mathcal{F}^y}_* \xi(t) = 0$.*

Доказательство. Пусть $x(t)$ — мартингал относительно $\mathcal{P}^y_t$. По мартингальному свойству имеем $E(x(t+\Delta t)|\mathcal{P}^y_t) = x(t)$ и, таким образом, $E(x(t+\Delta t) - x(t) \mid \mathcal{P}^y_t) = 0$. Следовательно, $D^{\mathcal{P}^y} x(t) = 0$.

Пусть $D^{\mathcal{P}^y} x(t) = 0$. Тогда по лемме 1.4 при $t > s$ получаем $E(x(t) - x(s) \mid \mathcal{P}^y_s) = 0$, так что $E(x(t) \mid \mathcal{P}^y_s) = E(x(s) \mid \mathcal{P}^y_s)$. Но $E(x(s) \mid \mathcal{P}^y_t) = x(s)$ и, таким образом, $x(t)$ — мартингал относительно $\mathcal{P}^y_t$.

Это доказывает пункт (i). Доказательство (ii) полностью аналогично. □

Следствие 1.1. *Если $\xi(t)$ — марковский диффузионный процесс и $D\xi(t) = 0$, то $\xi(t)$ — мартингал.*

Действительно, для марковского диффузионного процесса $D\xi(t)$ и $D^{\mathcal{P}}\xi(t)$ совпадают (см. замечание 1.1). Так что результат вытекает из леммы 1.5.

Таким образом, из следствия 1.1 и леммы 1.2 вытекает, что марковский диффузионный процесс $\xi(t)$ является мартингалом тогда и только тогда, кода $D\xi(t) = 0$.

Теорема 1.3. *Для процесса диффузионного типа* (1.6) *производная $D^{\mathcal{P}}\xi(t)$ существует и имеет вид*

$$D^{\mathcal{P}}\xi(t) = a(t). \tag{1.22}$$

Доказательство. Отметим, что $\xi(t+\triangle t) - \xi(t) = \int\limits_t^{t+\triangle t} a(s)ds + \int\limits_t^{t+\triangle t} A(s)dw(s)$. Поскольку интеграл Ито является мартингалом относительно $\mathcal{P}^\xi_t$, то $E\Big(\int\limits_t^{t+\triangle t} A(s)dw(s) \mid \mathcal{P}^\xi_t\Big) = 0$ и, таким образом, мы получаем, что

$$E(\xi(t+\triangle t) - \xi(t) \mid \mathcal{P}^\xi_t) = E\left(\int\limits_t^{t+\triangle t} a(t)dt \,\Big|\, \mathcal{P}^\xi_t\right) = \int\limits_t^{t+\triangle t} E(a(t) \mid \mathcal{P}^\xi_t)dt.$$

Применив формулу (1.16), мы получаем, что $D^{\mathcal{P}}\xi(t) = E(a(t) \mid \mathcal{P}^\xi_t)$. Так как по определению процесса диффузионного типа $a(t)$ измеримо относительно $\mathcal{P}^\xi_t$, то $E(a(t) \mid \mathcal{P}^\xi_t) = a(t)$. □

Теорема 1.4. *Для обратного процесса Ито* (*т. е. с упреждающим интегралом*)

$$\xi(t) = \xi_0 + \int\limits_0^t a(s)ds + \int\limits_0^t A(s)d_* w(s),$$

заданного на отрезке $[0,T]$ и такого, что $A(t)$ измеримо относительно $\mathcal{N}_t^\xi$ при всех t, производная в среднем слева $D_*\xi(t)$ в момент времени $t\in(0,T]$ существует и равна $E_t^\xi(a(t))+A(t)D_*^\xi w(t)$.

Доказательство. Действительно, так же, как в теореме 1.3, $D_*^\xi\Big(\int\limits_0^t a(s)ds\Big)=E_t^\xi(a(t))$. Аппроксимируем обратное приращение интеграла $\int\limits_0^t A(s)d_*w(s)$ соответствующим слагаемым его интегральной суммы $A(t)(w(t)-w(t-\triangle t))$. Так как $A(t)$ измеримо относительно $\mathcal{N}_t^\xi$, $A(t)$ можно вынести за знак условного математического ожидания относительно $\mathcal{N}_t^\xi$. Тогда

$$\lim_{\triangle t\to+0}E_t^\xi(A(t)\frac{(w(t)-w(t-\triangle t))}{\triangle t})=A(t)\lim_{\triangle t\to+0}E_t^\xi(\frac{(w(t)-w(t-\triangle t))}{\triangle t})=A(t)D_*^\xi w(t).$$

Это завершает доказательство. □

2. Формулы для текущей и осмотической скоростей

Рассмотрим гладкое поле симметрических положительно определенных матриц $(\alpha^{ij}(x))$ ($(2,0)$-тензоров). Например, эти матрицы могут описывать коэффициент диффузии марковского процесса. Так как эти матрицы не вырождены и образуют гладкое поле, существует гладкое поле обратных положительно определенных матриц (α_{ij}) ($(0,2)$-тензоров). Следовательно, это поле можно использовать для построения новой римановой метрики $\alpha(\cdot,\cdot)=\alpha_{ij}dx^i\otimes dx^j$ на $\mathbb{R}^n$.

Мы будем также использовать риманову метрику $\overline{\alpha}(\,\cdot,\cdot\,)$ на $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n$ с метрическим тензором, который в каждой точке $(t,x)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n$ описывается в виде

$$(\overline{\alpha}_{kl}(t,x))=\begin{pmatrix}1&0\\0&(\alpha_{ij}(x))\end{pmatrix},$$

а также на поверхностях уровня $t=\mathrm{const}$ метрики $\alpha_t(\cdot,\cdot)$ — это сужения метрики $\overline{\alpha}(\cdot,\cdot)$ на касательные пространства к этим поверхностям уровня.

Отметим, что определители матриц $(\overline{\alpha}_{kl}(t,x))$ и $(\alpha_{ij}(x))$ совпадают. Форма объема метрики $\alpha(\,\cdot,\cdot\,)$ имеет вид

$$\Lambda_\alpha=\sqrt{\det(\alpha_{ij}(x))}\,dx^1\wedge\cdots\wedge dx^n,$$

и, таким образом, форма объема метрики $\overline{\alpha}(\,\cdot,\cdot\,)$ имеет вид

$$\Lambda_{\overline{\alpha}}=\sqrt{\det(\alpha_{ij}(x))}\,dt\wedge dx^1\wedge\cdots\wedge dx^n=dt\wedge\Lambda_\alpha.$$

Напомним, что римановы метрики и их формы объема, введенные выше, определяют операторы дивергенции относительно этих римановых метрик (см., например, [50, §§ 1.6 и 1.7]). Ниже мы обозначаем обычную дивергенцию относительно евклидовой метрики символом div, а дивергенцию относительно римановых метрик — символом Div.

Обозначим через $\hat\rho(t,x)$ плотность вероятностного распределения случайного элемента $\xi(t)$ относительно меры Лебега на $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n$, т. е. относительно евклидовой формы объема $\Lambda_E=dt\wedge dx^1\wedge\cdots\wedge dx^n$. Это означает, что для каждого $[0,T]\subset\mathbb{R}$ и любой ограниченной непрерывной функции $f\colon[0,T]\times\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ выполняется соотношение

$$\int\limits_0^T E(f(t,\xi(t)))\,dt=\int\limits_0^T\bigg(\int\limits_\Omega f(t,\xi(t))d\mathsf{P}\bigg)\,dt=\int\limits_{[0,T]\times\mathbb{R}^n}f(t,x)\hat\rho(t,x)dt\wedge\Lambda_E.$$

Теорема 2.1 (см. [41, теорема 1.1] или [70, формула (2.8)])**.** *Пусть $\xi(t)$ — диффузионный процесс с гладким коэффициентом диффузии (a^{ij}) и плотностью $\hat\rho$. Тогда при условии, что $\hat\rho$ гладко и нигде равно нулю, имеем*

$$u(t,x)=\frac12\frac{\frac{\partial}{\partial x^j}(\alpha^{ij}(x)\hat\rho(t,x))}{\hat\rho(t,x)}\,\frac{\partial}{\partial x^i}. \tag{2.1}$$

Доказательство. Выберем произвольную гладкую функцию $f(t,x)$ с компактным носителем на $\mathbb{R}^n$. Отметим, что $f(t,\xi(t))$ является $\mathcal{N}^\xi_t$-измеримой. Следовательно,

$$E\Big(f(\xi(t))E^\xi_t(\int\limits_{t-\Delta t}^{t} A(t,\xi(t))dw(t))\Big) = E\Big(f(\xi(t))\int\limits_{t-\Delta t}^{t} A(t,\xi(t))dw(t)\Big).$$

Поскольку $f(\xi(t-\Delta t))$ и $\int\limits_{t-\Delta t}^{t} A(t,\xi(t))dw(t)$ независимы, а $E\int\limits_{t-\Delta t}^{t} A(t,\xi(t))dw(t) = 0$, мы получим

$$E(f(\xi(t))\left(\int\limits_{t-\Delta t}^{t} A(t,\xi(t))dw(t)\right) = E\left((f(\xi(t)) - f(\xi(t-\Delta t)))\left(\int\limits_{t-\Delta t}^{t} A(t,\xi(t))dw(t)\right)\right).$$

По формуле Ито

$$f(\xi(t)) - f(\xi(t-\Delta t)) = \int\limits_{t-\Delta t}^{t} (df\cdot a(s,\xi(s)))ds + \frac{1}{2}\int\limits_{t-\Delta t}^{t} \operatorname{tr} f''(\xi(s))ds + \int\limits_{t-\Delta t}^{t} (df\cdot A(s,\xi(s)))dw(s)$$

(через $\cdot$ мы обозначаем спаривание 1-форм и векторов). Таким образом,

$$E\left(f(\xi(t))\int\limits_{t-\Delta t}^{t} A(t,\xi(t))dw(t)\right) \tilde{=} E\Big(\int\limits_{t-\Delta t}^{t} (df\cdot a(s,\xi(s)))A(s,\xi(s))dsdw(s) +$$

$$+\frac{1}{2}\int\limits_{t-\Delta t}^{t} \operatorname{tr} f''(\xi(s))(A(s,\xi(s)),A(s,\xi(s)))dsdw(s) + \int\limits_{t-\Delta t}^{t} (df\cdot A(s,\xi(s)))A(s,\xi(s))ds.$$

Первые два интеграла в правой части равны нулю. Вычисления в координатах дают равенство $(df\cdot A)A = df\cdot(AA^*)$.

С другой стороны,

$$\int\limits_0^T E\Big(f(t,\xi(t))u^\xi(t,\xi(t))\Big)dt = -\frac{1}{2}\int\limits_0^T E\left(f(t,\xi(t))\lim_{\Delta t\to+0} E^\xi_t\Big(\frac{\int\limits_{t-\Delta t}^{t} A(s,\xi(s))dw(s)}{\Delta t}\Big)\right)dt =$$

$$= -\frac{1}{2}\int\limits_0^T E(df\cdot AA^*)dt = -\frac{1}{2}\int\limits_0^T\left(\int\limits_{\mathbb{R}^n} df\cdot AA^*\cdot\hat\rho^\xi\Lambda_{\alpha_t}\right)dt = \frac{1}{2}\int\limits_0^T\left(\int\limits_{\mathbb{R}^n} f\cdot d(AA^*\cdot\hat\rho^\xi)\Lambda_{\alpha_t}\right)dt =$$

$$= \frac{1}{2}\int\limits_0^T\left(\int\limits_{\mathbb{R}^n} f\frac{d(AA^*\cdot\hat\rho^\xi)}{\hat\rho^\xi}\hat\rho^\xi\Lambda_{\alpha_t}\right)dt = \frac{1}{2}\int\limits_0^T E\Big(f\frac{d(AA^*\cdot\hat\rho^\xi)}{\hat\rho^\xi}\Big)dt = \frac{1}{2}\int\limits_0^T E\Big(f(t,\xi(t))\frac{\frac{\partial}{\partial x^j}(\alpha^{ij}\hat\rho^\xi)}{\hat\rho^\xi}\frac{\partial}{\partial x^i}\Big)dt.$$

Поскольку это выполняется для произвольной функции f, как выше, это означает, что

$$u^\xi = \frac{1}{2}\frac{d(AA^*\cdot\hat\rho^\xi)}{\hat\rho^\xi} = \frac{1}{2}\frac{\frac{\partial}{\partial x^j}(\alpha^{ij}\hat\rho^\xi)}{\hat\rho^\xi}\frac{\partial}{\partial x^i}.$$

$\square$

Замечание 2.1. Обозначим через $\Xi(x)$ векторное поле с координатным представлением $\dfrac{\partial\alpha^{ij}}{\partial x^j}\dfrac{\partial}{\partial x^i}$. Легко видеть, что из (2.1) следует, что $u(t,x) = \dfrac{1}{2}\operatorname{Grad}\ln\hat\rho(t,x) + \dfrac{1}{2}\Xi(x)$, где Grad — градиент относительно римановой метрики $\alpha(\cdot,\cdot)$. Действительно,

$$\frac{\frac{\partial}{\partial x^j}(\alpha^{ij}\hat\rho(t,x))}{\hat\rho(t,x)}\frac{\partial}{\partial x^i} = \frac{1}{2}\alpha^{ij}\frac{\frac{\partial\hat\rho}{\partial x^j}}{\hat\rho}\frac{\partial}{\partial x^i} + \frac{1}{2}\frac{\partial\alpha^{ij}}{\partial x^j}\frac{\partial}{\partial x^i},$$

где

$$\alpha^{ij}\frac{\frac{\partial\hat\rho}{\partial x^j}}{\hat\rho}\frac{\partial}{\partial x^i}=\mathrm{Grad}\ln\hat\rho,\quad \frac{\partial\alpha^{ij}}{\partial x^j}\frac{\partial}{\partial x^i}=\Xi.$$

Отметим, что здесь градиент взят только относительно пространственных переменных, т. е. здесь t — параметр.

Следствие 2.1. *Для процесса* (1.9) $u^\xi(t,x)=\dfrac{\sigma^2}{2}\,\mathrm{grad}\ln\hat\rho(t,x)$.

Обозначим символом $\rho(t,x)$ плотность вероятностного распределения случайного элемента $\xi(t)$ относительно формы объема $dt\wedge\Lambda_\alpha$ на $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n$, т. е. для любой ограниченной непрерывной функции $f\colon[0,T]\times\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ выполняется соотношение

$$\int\limits_0^T E(f(t,\xi(t)))\,dt=\int\limits_0^T\left(\int\limits_\Omega f(t,\xi(t))d\mathsf{P}\right)dt=\int\limits_{[0,T]\times\mathbb{R}^n}f(t,x)\rho(t,x)dt\wedge\Lambda_\alpha.$$

Отметим, что по построению $\hat\rho(t,x)=\rho(t,x)\sqrt{\det(a_{ij}(x))}$.

Лемма 2.1. *Пусть $\xi(t)$ — диффузионный процесс с коэффициентом диффузии (a^{ij}) и плотностью $\hat\rho$. Для $v^\xi(t,x)$ и $\rho^\xi(t,x)$ этого процесса выполняется соотношение типа уравнения неразрывности вида*

$$\frac{\partial\rho^\xi(t,x)}{\partial t}=-\,\mathrm{Div}_t(v^\xi(t,x)\rho^\xi(t,x)),\tag{2.2}$$

где Div_t обозначает дивергенцию относительно римановой метрики $\alpha_t(\cdot,\cdot)$ на поверхности уровня $t=\mathrm{const}$.

Доказательство. Обозначим символом Λ_E евклидову форму объема $dx^1\wedge\dots\wedge dx^n$ на $\mathbb{R}^n$. Таким образом, $\Lambda_{\alpha_t}=\sqrt{\det(\alpha_{ij})}\Lambda_E$.

Напомним, что $\mathrm{Div}_t(\rho^\xi v^\xi)=d((\rho^\xi v^\xi)\rfloor\Lambda_{\alpha_t})$, где $\rfloor$ — внутреннее произведение вектора $(\rho^\xi v^\xi)$ и n-формы Λ_{α_t}, а внешний дифференциал d рассматривается на поверхности уровня $t=\mathrm{const}$, т. е. содержит дифференцирования только по пространственным координатам x^i. Тогда $(\rho^\xi v^\xi)\rfloor\Lambda=\sqrt{\det(\alpha_{ij})}\sum\limits_{i=1}^n(\rho^\xi v^\xi)^i dx^1\wedge\dots\wedge dx^{i-1}\wedge dx^{i+1}\wedge\dots\wedge dx^n$ и, таким образом,

$$\mathrm{Div}_t(\rho^\xi v^\xi)=\frac{(\rho^\xi v^\xi)^i}{\sqrt{\det(\alpha_{ij})}}\frac{\partial\sqrt{\det(\alpha_{ij})}}{\partial x^i}+\frac{\partial(\rho^\xi v^\xi)^i}{\partial x^i}.\tag{2.3}$$

Зафиксируем гладкую функцию $f(t,x)$ с компактным носителем и два числа $0\leqslant s<t\leqslant T$. Символом df мы обозначаем дифференциал относительно пространственных координат x^i: $df=\dfrac{\partial f}{\partial x^i}dx^i$. Вычисления в координатах дают:

$$\int\limits_{[s,t]\times\mathbb{R}^n}\Big(df\cdot(\rho^\xi v^\xi(\tau,\xi(\tau)))\Big)d\tau\wedge\Lambda_{\alpha_t}=\int\limits_{[s,t]\times\mathbb{R}^n}\Big(df\cdot(\rho^\xi v^\xi(\tau,\xi(\tau)))\sqrt{\det(\alpha_{ij})}\Big)d\tau\wedge\Lambda_E=$$

$$=-\int\limits_{[s,t]\times\mathbb{R}^n}\left(f(\tau,x)\left[\sqrt{\det(\alpha_{ij})}\frac{\partial(\rho^\xi v^\xi)^i}{\partial x^i}+(\rho^\xi v^\xi)^i\frac{\partial\sqrt{\det(\alpha_{ij})}}{\partial x^i}\right]\right)d\tau\wedge\Lambda_E=$$

$$=-\int\limits_{[s,t]\times\mathbb{R}^n}\left(f(\tau,x)\left[\frac{\partial(\rho^\xi v^\xi)^i}{\partial x^i}+\frac{(\rho^\xi v^\xi)^i}{\sqrt{\det(\alpha_{ij})}}\frac{\partial\sqrt{\det(\alpha_{ij})}}{\partial x^i}\right]\sqrt{\det(\alpha_{ij})}\right)d\tau\wedge\Lambda_E=$$

$$=-\int\limits_{[s,t]\times\mathbb{R}^n}\left(f(t,x)\left[\frac{\partial(\rho^\xi v^\xi)^i}{\partial x^i}+\frac{(\rho^\xi v^\xi)^i}{\sqrt{\det(\alpha_{ij})}}\frac{\partial\sqrt{\det(\alpha_{ij})}}{\partial x^i}\right]\right)d\tau\wedge\Lambda_{\alpha_t}=-\int\limits_{[s,t]\times\mathbb{R}^n}\Big(f(\tau,x)\,\mathrm{Div}(\rho^\xi v^\xi)\Big)d\tau\wedge\Lambda_{\alpha_t}.$$

По формуле Ито

$$E\Big(f(t,\xi(t))-f(s,\xi(s))\Big)=E\Big(\int\limits_s^t \frac{\partial f}{\partial\tau}d\tau+\int\limits_s^t df\cdot Y^0(\tau,\xi(\tau))d\tau+\frac{1}{2}\int\limits_s^t \operatorname{tr} f''(A,A)d\tau\Big),$$

и по обратной формуле Ито

$$E\Big(f(t,\xi(t))-f(s,\xi(s))\Big)=E\Big(\int\limits_s^t \frac{\partial f}{\partial\tau}d\tau+\int\limits_s^t df\cdot Y^0_*(\tau,\xi(\tau))d\tau-\frac{1}{2}\int\limits_s^t \operatorname{tr} f''(A,A)d\tau\Big).$$

Следовательно,

$$E\Big(f(t,\xi(t))-f(s,\xi(s))\Big)=E\Big(\int\limits_s^t \frac{\partial f}{\partial\tau}d\tau+\int\limits_s^t df\cdot v^\xi(\tau,\xi(\tau))d\tau\Big).$$

Но

$$E\Big(\int\limits_s^t \frac{\partial f}{\partial\tau}d\tau+\int\limits_s^t df\cdot v^\xi(\tau,\xi(\tau))d\tau\Big)=\int\limits_{[s,t]\times\mathbb{R}^n}\Big(\frac{\partial f}{\partial\tau}\rho^\xi+[df\cdot(\rho^\xi v^\xi(\tau,\xi(\tau)))]\Big)d\tau\wedge\Lambda_{\alpha_t}=$$

$$=\int\limits_{[s,t]\times\mathbb{R}^n}\frac{\partial}{\partial\tau}\Big((f(\tau,x)\rho^\xi\Big)d\tau\wedge\Lambda_{\alpha_t}-\int\limits_{[s,t]\times\mathbb{R}^n}\Big(f(\tau,x)\frac{\partial\rho^\xi}{\partial\tau}\Big)d\tau\wedge\Lambda_{\alpha_t}-\int\limits_{[s,t]\times\mathbb{R}^n}\Big(f(\tau,x)\operatorname{Div}(\rho^\xi v^\xi)\Big)d\tau\wedge\Lambda_{\alpha_t}=$$

$$=E\Big(f(t,\xi(t))-f(s,\xi(s))\Big)-\int\limits_{[s,t]\times\mathbb{R}^n}\Big(f(\tau,x)\frac{\partial\rho^\xi}{\partial\tau}\Big)d\tau\wedge\Lambda_{\alpha_t}-\int\limits_{[s,t]\times\mathbb{R}^n}\Big(f(\tau,x)\operatorname{Div}(\rho^\xi v^\xi)\Big)d\tau\wedge\Lambda_{\alpha_t}.$$

Таким образом,

$$\int\limits_{[s,t]\times\mathbb{R}^n}\Big(f(\tau,x)\frac{\partial\rho^\xi}{\partial\tau}\Big)d\tau\wedge\Lambda_{\alpha_t}+\int\limits_{[s,t]\times\mathbb{R}^n}\Big(f(\tau,x)\operatorname{Div}(\rho^\xi v^\xi)\Big)d\tau\wedge\Lambda_{\alpha_t}=0.$$

Поскольку это выполняется для любой функции $f(t,x)$, как выше, отсюда следует, что $\dfrac{\partial\rho^\xi}{\partial\tau}=-\operatorname{Div}_t(\rho^\xi v^\xi)$. □

Лемма 2.2. *Имеет место формула*

$$\operatorname{Div}_t(\rho^\xi v^\xi)=\alpha_t(v^\xi,\operatorname{Grad}_t\,\rho^\xi)+\rho\operatorname{Div}_t\,v^\xi.$$

где Grad_t *обозначает градиент относительно римановой метрики* $\alpha_t(\cdot,\cdot)$ *на поверхности уровня* $t=\mathrm{const}$.

Доказательство. В точности аналогично выводу формулы (2.3) получаем

$$\operatorname{Div}_t(v^\xi)=\frac{(v^\xi)^i}{\sqrt{\det(\alpha_{ij})}}\frac{\partial\sqrt{\det(\alpha_{ij})}}{\partial x^i}+\frac{\partial(v^\xi)^i}{\partial x^i}.\tag{2.4}$$

Напомним, что $\dfrac{\partial(\rho^\xi v^\xi)^i}{\partial x^i}=\rho^\xi\dfrac{\partial(v^\xi)^i}{\partial x^i}+(v^\xi)^i\dfrac{\partial\rho^\xi}{\partial x^i}$. Тогда из формулы (2.3) с использованием формулы (2.4) мы выводим, что $\operatorname{Div}_t(\rho^\xi v^\xi)=\rho^\xi\operatorname{Div}_t\,v^\xi+(v^\xi)^i\dfrac{\partial\rho^\xi}{\partial x^i}$, где $(v^\xi)^i\dfrac{\partial\rho^\xi}{\partial x^i}$ — производная плотности ρ^ξ по направлению векторного поля v^ξ на указанной поверхности уровня. Но по определению градиента Grad_t последняя производная равна $\alpha_t(v^\xi,\operatorname{Grad}_t\,\rho^\xi)$. □

3. Вычисление производных в среднем для винеровского процесса

Для винеровского процесса $w(t)$ в $\mathbb{R}^n$ из леммы 1.2 (i) следует, что $Dw(t) = 0$, $t \in [0, l)$, поскольку $w(t)$ — мартингал.

Лемма 3.1. *Для $t \in (0, T]$ имеет место равенство $D_* w(t) = \dfrac{w(t)}{t}$.*

Доказательство. В этом случае из определения осмотической скорости $u^w(t, w(t))$ следует, что $D_* w(t) = -2u^w(t, w(t))$. Напомним, что плотность $\rho^w(t, x)$ задается формулой $\rho^w(t, x) = \dfrac{1}{(2\pi t)^{\frac{n}{2}}} e^{-\frac{x^2}{2t}}$. Таким образом, согласно формуле (2.1) мы имеем $u^w(t, x) = -\dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{x}{t}$, откуда $D_* w(t) = \dfrac{w(t)}{t}$. □

Очевидным образом процесс $\dfrac{w(t)}{t}$ не существует при $t = 0$. Однако имеет место следующее утверждение.

Лемма 3.2. *Интеграл $\int\limits_0^t \dfrac{w(s)}{s} ds$ существует почти наверное для всех $t \in [0, T]$.*

Доказательство. Стандартными вычислениями с использованием плотности $\rho^w(t, x)$ легко получить оценку $E \int\limits_0^t \left\| \dfrac{w(s)}{s} \right\| ds < C \cdot \sqrt{t}$, где константа $C > 0$ зависит только от размерности n. Теперь результат следует из классического неравенства Чебышева. □

Следствие 3.1. $D_S w(t) = \dfrac{w(t)}{2t}$.

Замечание 3.1. Г. А. Свиридюк обратил мое внимание на следующее обстоятельство. Так как для винеровского процесса $E(w(t)^2) = t$, то на феноменологическом уровне рассуждений можно сказать, что средний пробег частицы винеровского процесса за время t равен $\sqrt{t}$ и, следовательно, у белого шума $\dot{w}(t)$ он равен $\dfrac{1}{2\sqrt{t}}$. Но для текущей скорости $D_S w(t) = \dfrac{w(t)}{2t}$ аналогичные феноменологические рассуждения дают тот же результат для среднего пробега частицы: $\dfrac{1}{2\sqrt{t}}$. Это в каком-то смысле естественное соотношение между производной $\dot{w}(t)$ винеровского процесса (напомним, существующей только в смысле обобщенных функций) и его текущей скоростью, которая, как было сказано выше, является естественным аналогом обычной физической скорости.

Обратимся к вычислению производных в среднем высших порядков от $w(t)$. Принимая во внимание систему обозначений из [13, 50], мы ищем k-е производные как D^w, D^w_* или D^w_S (см. (1.4) и (1.5)) от $(k-1)$-х производных. Эти обозначения подчеркивают, что мы всегда используем σ-алгебру «настоящее» процесса $w(t)$.

Лемма 3.3 (см. [13, 50])**.**

(i) $D^w \dfrac{w(t)}{t} = -\dfrac{w(t)}{t^2}$ *при $t \in (0, l)$;*

(ii) $D^w_* \dfrac{w(t)}{t} = 0$ *при $t \in (0, T]$;*

(iii) $D^w_S \dfrac{w(t)}{t} = -\dfrac{w(t)}{2t^2}$ *при $t \in (0, T]$.*

Доказательство. Действительно,

$$D^w \frac{w(t)}{t} = \left(\frac{d}{dt} \frac{1}{t} \right) w(t) + \frac{1}{t} D w(t) = -\frac{w(t)}{t^2},$$

$$D^w_* \frac{w(t)}{t} = \left(\frac{d}{dt} \frac{1}{t} \right) w(t) + \frac{1}{t} D_* w(t) = -\frac{w(t)}{t^2} + \frac{w(t)}{t^2} = 0.$$

Утверждение (iii) следует из последних двух формул. □

Лемма 3.4.

(i) $D^w\left(\dfrac{w(t)}{t^k}\right) = -k\dfrac{w(t)}{t^{k+1}}$;

(ii) $D^w_*\left(\dfrac{w(t)}{t^k}\right) = -(k-1)\dfrac{w(t)}{t^{k+1}}$;

(iii) $D^w_S\left(\dfrac{w(t)}{t^k}\right) = -\dfrac{2k-1}{2}\dfrac{w(t)}{t^{k+1}}$.

Доказательство.

(i) $D^w\left(\dfrac{w(t)}{t^k}\right) = \dfrac{d}{dt}\dfrac{1}{t^k}w(t) + \dfrac{1}{t^k}Dw(t) = -k\dfrac{w(t)}{t^{k+1}} + 0 = -k\dfrac{w(t)}{t^{k+1}}$;

(ii) $D^w_*\left(\dfrac{w(t)}{t^k}\right) = \dfrac{d}{dt}\dfrac{1}{t^k}w(t) + \dfrac{1}{t^k}D_*w(t) = -k\dfrac{w(t)}{t^{k+1}} + \dfrac{1}{t^k}\dfrac{w(t)}{t} = -(k-1)\dfrac{w(t)}{t^{k+1}}$.

(iii) Из последних двух формул мы получаем, что

$$D^w_S\left(\frac{w(t)}{t^k}\right) = -\frac{2k-1}{2}\frac{w(t)}{t^{k+1}}.$$

□

Лемма 3.5. *Для целого числа $k \geqslant 2$*

$$D^k_S w(t) = (-1)^{k-1}\cdot\frac{\prod\limits_{i=1}^{k-1}(2i-1)}{2^k}\cdot\frac{w(t)}{t^k}.$$

Эта формула доказывается по индукции, начиная с утверждений следствия 3.1, леммы 3.3 (iii) и леммы 3.4 (iii).

Пусть $P(t)$ — непрерывная по t неслучайная матричная функция размера $n\times n$, а $w(t)$ — n-мерный винеровский процесс. Рассмотрим интеграл Ито $\int\limits_0^t P(s)dw(s)$. Ниже нам понадобится формула симметрической производной в среднем от этого интеграла.

Теорема 3.1. *Для $t>0$ имеет место формула $D^w_S\int\limits_0^t P(s)dw(s) = P(t)\dfrac{w(t)}{2t}$.*

Доказательство. Действительно, поскольку $\int\limits_0^t P(s)dw(s)$ — мартингал относительно «прошлого» винеровского процесса, то $D^w\int\limits_0^t P(s)dw(s) = 0$ (см. лемму 1.2). Чтобы вычислить производную в среднем слева, достаточно рассмотреть слагаемое из интегральной суммы, задающей интеграл, вида $P(t-\Delta t)(w(t)-w(t-\Delta t))$. По определению производной в среднем слева получаем

$$D_*\int\limits_0^t P(s)dw(s) = \lim_{\Delta t\to+0} E^w_t\frac{P(t-\Delta t)(w(t)-w(t-\Delta t))}{\Delta t}.$$

Поскольку функция $P(t)$ неслучайна, ее можно вынести за знак условного математического ожидания, а поскольку она непрерывна, $\lim\limits_{\Delta t\to 0}P(t-\Delta t) = P(t)$. Таким образом,

$$D_*\int\limits_0^t P(s)dw(s) = P(t)D_*w(t).$$

Но по лемме 3.1 $D_*w(t) = \dfrac{w(t)}{t}$. Следовательно, $D_S\int\limits_0^t P(s)dw(s) = P(t)\dfrac{w(t)}{2t}$. □

Пусть $\xi(t)$ — процесс диффузионного типа.

Определение 3.1. Процесс $w_*^\xi(t) = -\int\limits_0^t D_*^\xi w(s) + w(t)$ называется *обратным винеровским процессом* относительно $\xi(t)$.

Очевидно, что $w_*^\xi(t)$ — обратный мартингал относительно $\mathcal{F}_t^\xi$. Подчеркнем, что $w_*^\xi(t)$ зависит от заданного процесса $\xi(t)$. Из лемм 3.1 и 3.2 следует, что $w_*^w(t) = -\int\limits_0^t \frac{w(s)}{s} ds + w(t)$ и этот процесс корректно определен. Чтобы вычислить $w_*^\xi(t)$ для произвольного процесса $\xi(t)$, надо знать $D_*^\xi w(t)$. Вычисление $D_*^\xi w(t)$ для процессов с единичным коэффициентом диффузии приведено в следующем разделе (формула (4.8)). Отметим, что удобно использовать $w_*^\xi(t)$ для представления $\xi(t)$ через этот обратный мартингал и, таким образом, для вычисления обратных производных.

Из лемм 3.1 и 3.3 очевидным образом следует, что $D_*^w w_*^w(t) = 0$ и $D^w w_*^w(t) = -D_* w(t)$. Отметим, что эти равенства не выполняются, если D_*^w и D^w заменить на D_* и D, соответственно. Например, в [71] показано, что $w_*^w(t)$ — винеровский процесс относительно его собственного «прошлого».

Замечание 3.2. Мы отсылаем читателя к книгам Э. Нельсона [81, 82], где описан другой подход к вычислению производных в среднем.

4. Вычисление производных в среднем для процессов диффузионного типа

Этот раздел посвящен вычислению производных в среднем для процессов Ито диффузионного типа вида (1.9). Чтобы сделать это, мы сначала опишем метод для вычисления условных математических ожиданий при изменении вероятностной меры (вариант формулы Байеса).

На некотором вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, \mathsf{P})$ рассмотрим новую вероятностную меру μ. Пусть μ абсолютно непрерывна относительно P с плотностью θ, и пусть $\mathcal{B}$ — σ-подалгебра $\mathcal{F}$, а ψ — измеримое отображение из $(\Omega, \mathcal{F})$ в $\mathbb{R}^n$ с борелевской σ-алгеброй. Обозначим через $E^0(\psi|\mathcal{B})$ условное математическое ожидание для ψ относительно $\mathcal{B}$ на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, \mathsf{P})$, а через $E'(\psi|\mathcal{B})$ — то же самое ожидание на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$. Зная $E^0(\psi|\mathcal{B})$, мы можем вычислить $E'(\psi|\mathcal{B})$ следующим образом. Для любой функции λ, измеримой относительно $\mathcal{B}$, мы имеем

$$E'(\lambda\psi) = E'(\lambda E'(\psi|\mathcal{B})) = E^0(\lambda E'(\psi|\mathcal{B})\theta) = E^0(\lambda E'(\psi|B)E^0(\theta|\mathcal{B})),$$

а с другой стороны, $E'(\lambda\psi) = E^0(\lambda\psi\theta) = E^0(\lambda E^0(\psi\theta|\mathcal{B}))$. Таким образом,

$$E'(\psi|\mathcal{B}) = E^0(\theta|\mathcal{B})^{-1} E^0(\psi\theta|\mathcal{B}). \tag{4.1}$$

Рассмотрим процесс диффузионного типа (1.9) и для простоты положим $\sigma = 1$. Для пары $(\tilde\Omega, \mathcal{F})$, где $\tilde\Omega = C^0([0,T], \mathbb{R}^n)$ — пространство непрерывных кривых, а $\tilde{\mathcal{F}}$ — σ-алгебра цилиндрических множеств на $\tilde\Omega$, рассмотрим два вероятностных пространства $(\tilde\Omega, \tilde{\mathcal{F}}, \nu)$ и $(\tilde\Omega, \tilde{\mathcal{F}}, \mu)$, где ν является мерой Винера, а мера μ соответствует процессу $\xi(t)$. Обозначим *координатный процесс* на $(\tilde\Omega, \tilde{\mathcal{F}})$ через $\zeta(t)$, т. е. для каждого элементарного события $x(\cdot) \in \tilde\Omega$ по определению координатного процесса $\zeta(t, x(\cdot)) = x(t)$. Напомним, что $\zeta(t)$, рассматриваемый как процесс на $(\tilde\Omega, \tilde{\mathcal{F}}, \nu)$, является винеровским процессом, и обозначим его $W(t)$. Процесс $\zeta(t)$, рассматриваемый на $(\tilde\Omega, \tilde{\mathcal{F}}, \mu)$, является процессом $\xi(t)$.

Хорошо известно, что если $\xi(t)$ удовлетворяет условию

$$P\left(\int\limits_0^T \beta(s)^2 ds < \infty\right) = 1, \tag{4.2}$$

то μ абсолютно непрерывна относительно ν. При некоторых дополнительных условиях можно показать, что плотность μ относительно ν имеет вид (см., например, [23])

$$\theta(T) = \exp\left(-\frac{1}{2}\int\limits_0^T \beta(s)^2 ds + \int\limits_0^T (\beta(s) \cdot dW(s))\right) \tag{4.3}$$

(упомянутые выше условия означают, что $\theta(T)$ — плотность вероятности), и таким образом μ и ν эквивалентны. Ниже в этом разделе мы предполагаем, что (4.2) и упомянутые условия выполнены.

Определим $\theta(t)$ аналогично (4.3) с заменой T на t. Тогда, используя формулу Ито, легко показать, что

$$\theta(T) = 1 + \int\limits_0^T \theta(s)(\beta(s) \cdot dW(s)) \tag{4.4}$$

(см. детали, например, в [23]).

Напомним, что по теореме 1.1 $D\xi(t) = E_t^{\xi}(\beta(t))$. Для вычисления $D_*\xi(t)$ нам понадобится несколько технических утверждений.

Обозначим (условное) математическое ожидание на $(\tilde{\Omega}, \tilde{\mathcal{F}}, \nu)$ через E^0, а на $(\tilde{\Omega}, \tilde{\mathcal{F}}, \mu)$ — через E'.

Лемма 4.1.

$$E_t^{0\zeta}(\theta(l))^{-1} E_t^{0\zeta}(\theta(t)\beta(t)) = E_t^{\xi}(\beta(t)). \tag{4.5}$$

Доказательство. Используя формулы (4.1) и (4.4), нетрудно вычислить

$$\begin{aligned} D\xi(t) = \lim_{\Delta t \to +0} E_t^{\prime\zeta}\left(\frac{\zeta(t+\Delta t) - \zeta(t)}{\Delta t}\right) = \lim_{\Delta t \to +0} E_t^{0\zeta}(\theta(l))^{-1} E_t^{0\zeta}\left(\frac{\zeta(t+\Delta t) - \zeta(t)}{\Delta t}\theta(l)\right) = \\ = E_t^{0\zeta}(\theta(l))^{-1} \lim_{\Delta t \to +0} E_t^{0\zeta}(\frac{\zeta(t+\Delta t) - \zeta(t)}{\Delta t}) + \\ + E_t^{0\zeta}(\theta(l))^{-1} \lim_{\Delta t \to +0} E_t^{0\zeta}\left(\frac{\zeta(t+\Delta t) - \zeta(t)}{\Delta t}\right)\left(\int\limits_0^l \theta(t)(\beta(t) \cdot dW(t))\right). \end{aligned}$$

Поскольку $\zeta(t)$ на $(\tilde{\Omega}, \tilde{F}, \nu)$ есть $W(t)$ (см. выше), $E_t^{0\zeta}\Big(\dfrac{\zeta(t+\Delta t) - \zeta(t)}{\Delta t}\Big) = 0$.

Выберем произвольную гладкую функцию $f : M \to \mathbb{R}$ с компактным носителем. Тогда, поскольку здесь $\xi(t) = W(t)$ и поэтому

$$f(\zeta(t))(\zeta(t+\Delta t) - \zeta(t))) = \int\limits_0^{t+\Delta t} f(W(t)) dW(s),$$

мы можем применить обычные свойства умножения интегралов Ито, чтобы получить

$$\begin{aligned} E^0(f(\zeta(t)) \lim_{\Delta t \to +0} E_t^{0\zeta}\left(\frac{\zeta(t+\Delta t) - \zeta(t)}{\Delta t}\right) = \lim_{\Delta t \to +0} E^0(f(\zeta(t))\left(\frac{\zeta(t+\Delta t) - \zeta(t)}{\Delta t}\right) = \\ = \lim_{\Delta t \to +0} E^0\left(\frac{\int\limits_t^{t+\Delta t} f(W(t))\theta(s)\beta(s) ds}{\Delta t}\right) = E^0(f(\zeta(t))\theta(t)\beta(t)). \end{aligned} \tag{4.6}$$

Таким образом, поскольку f — произвольная функция вышеупомянутого типа,

$$\lim_{\Delta t \to +0} E_t^{0\zeta}\left(\frac{\zeta(t+\Delta t) - \zeta(t)}{\Delta t}\int\limits_0^t \theta(s)(\beta(s) \cdot dW(s))\right) = E_t^{0\zeta}(\theta(t)\beta(t)).$$

С другой стороны, по лемме 1.1 $D\xi(t) = E_t^{\xi}(\beta(t))$, что и доказывает лемму. □

Рассмотрим регрессию для $E_t^W(\theta(T))$, т. е. борелевскую функцию $E_t^W(\theta(T))(x)$ на $\mathbb{R}^n$ такую, что $E_t^W(\theta(T))(\zeta(t)) = E_t^W(\theta(T))$. Как обычно, $E_t^W(\theta(T))$, и ее регрессию мы обозначаем одним и тем же символом. Введем обозначение $\kappa(t) = \theta(T)^{-1} \operatorname{grad} E_t^W(\theta(T))$, где $\operatorname{grad} E_t^W(\theta(T))$ означает градиент от регрессии, в который подставлено $\zeta(t)$.

Лемма 4.2. *Имеют место следующие формулы:*

$$D_*\xi(t) = E^\xi_t(\beta(t)) + \frac{\xi(t)}{t} - E^\xi_t(\kappa(t)), \tag{4.7}$$

$$D^\xi_* w(t) = \frac{\xi(t)}{t} - E^\xi_t(\kappa(t)). \tag{4.8}$$

Доказательство.

$$D_*\xi(t) = \lim_{\Delta t\to+0} E'^{\zeta}_t\left(\frac{\zeta(t)-\zeta(t-\Delta t)}{\Delta t}\right) = E^{0\zeta}_t(\theta(T))^{-1}\lim_{\Delta t\to+0} E^{0\zeta}_t(\frac{\zeta(t)-\zeta(t-\Delta t)}{\Delta t}\theta(T)).$$

Используя те же самые рассуждения, что и в доказательстве леммы 4.1, мы легко получаем

$$E^0(f(\zeta(t))\lim_{\Delta t\to+0} E^{0\zeta}_t(\frac{\zeta(t)-\zeta(t-\Delta t)}{\Delta t}\theta(T)) =$$
$$= \lim_{\Delta t\to+0} E^0((f(W(t))-f(W(t-\Delta t)))\frac{W(t)-W(t-\Delta t)}{\Delta t}\theta(T)) +$$
$$+ \lim_{\Delta t\to+0} E^0(f(W(t-\Delta t))\frac{W(t)-W(t-\Delta t)}{\Delta t}\theta(T)).$$

Второе слагаемое в правой части преобразуется аналогично формуле (4.6), т. е. оно равно $E^0(f(\zeta(t))\theta(t)\beta(t))$. Вычислим первое слагаемое. Здесь мы применяем правила умножения интегралов Ито, формулу Ито и интегрирование по частям. Мы обозначаем тем же самым символом условное математическое ожидание и соответствующую регрессию. Итак,

$$\lim_{\Delta t\to+0} E^0((f(W(t)-f(W(t-\Delta t)))\frac{W(t)-W(t-\Delta t)}{\Delta t}\theta(T)) =$$
$$= \lim_{\Delta t\to+0} E^0([f''(W(t-\Delta t))\Delta t + (\operatorname{grad} f(W(t-\Delta t)))(W(t)-W(t-\Delta t))]\frac{W(t)-W(t-\Delta t)}{\Delta t}\theta(T)) =$$
$$= E^0(\operatorname{grad} f(W(t))\theta(T)) = \int\limits_{[0,T]\times\mathbb{R}^n} [(\operatorname{grad} f(W(t)))\theta(T)]\rho^W d\lambda =$$
$$= \int\limits_{[0,T]\times\mathbb{R}^n} [f(W(t))\Big(-\frac{\operatorname{grad}\rho^W}{\rho^W}\Big)\theta(T)]\rho^W d\lambda + \int\limits_{[0,T]\times\mathbb{R}^n} [f(W(t))\Big[-\frac{\operatorname{grad} E^W_t(\theta(T))}{\theta(T)}\Big]\theta(T)]\rho^W d\lambda =$$
$$= E^0(f(W(t))\Big(-\frac{\operatorname{grad}\rho^W}{\rho^W}\Big)\theta(T)) - E^0(f(W(t))[\theta(T)^{-1}\operatorname{grad} E^W_t(\theta(T))]\theta(T)) =$$
$$= E^0(f(\zeta(t))\Big(\frac{W(t)}{t}\Big)\theta(T)) - E^0(f(\zeta(t))[\theta(T)^{-1}\operatorname{grad} E^W_t(\theta(T))]\theta(T)),$$

где $-\dfrac{\operatorname{grad}\rho^W}{\rho^W} = \dfrac{W(t)}{t}$ по лемме 3.1.

Из только что полученных формул следует, что

$$D_*\xi(t) = E^W_t(\theta(T))^{-1}\{E^W_t(\theta(t)\beta(t)) + E^W_t\Big[\Big(\frac{W(t)}{t}\Big)\theta(T)\Big] + E^W_t([\theta(T)^{-1}\operatorname{grad} E^W_t(\theta(T))]\theta(T))\},$$

и, применяя (4.1), (4.4) и (4.5), мы получаем (4.7), а (4.8) — следствие (4.5) и (4.7). ☐

Следствие 4.1. $D_*\xi(t) = E^\xi_t(\beta(t)) - 2u^W(t,\xi(t)) - E^\xi_t(\kappa(t)$.

Действительно, по следствию 2.1 и лемме 3.1 $-2u^W(t,x) = -\dfrac{\operatorname{grad}\rho^W}{\rho^W} = \dfrac{x}{t}$. Подставив $\xi(t)$ в эти равенства, получим утверждение следствия.

Лемма 4.3. $D^\xi E^\xi_t(\kappa(t)) = 0$, $D^\xi_* E^\xi_t(\kappa(t)) = 0$.

Доказательство. Применим лемму 1.1 и формулу (4.1) следующим образом:

$$D^\xi E^\xi_t(\kappa(t)) = D^\xi E^\xi_t[\theta(T)^{-1}\operatorname{grad} E^W_t(\theta(T))] = D^\xi[\theta(T)^{-1}\operatorname{grad} E^W_t(\theta(T))] =$$

$$= \lim_{\Delta t\to+0} E_t^\xi \left\{ \frac{\theta(T)^{-1}\operatorname{grad}(E^W_{t+\Delta t}(\theta(T)) - E^W_t(\theta(T)))}{\Delta t} \right\} =$$

$$= E_t^W(\theta(T))^{-1} \lim_{\Delta t\to+0} E_t^W \left(\left\{ \frac{\theta(T)^{-1}\operatorname{grad}(E^W_{t+\Delta t}(\theta(T)) - E^W_t(\theta(T)))}{\Delta t} \right\} \theta(T) \right) =$$

$$= E_t^W(\theta(T))^{-1} \lim_{\Delta t\to+0} E_t^W \left(\frac{\operatorname{grad}(E^W_{t+\Delta t}(\theta(T)) - E^W_t(\theta(T)))}{\Delta t} \right) =$$

$$= E_t^W(\theta(T))^{-1}\operatorname{grad} D^W(E_t^W\theta(T)) = E_t^W(\theta(T))^{-1}\operatorname{grad} D^W\theta(T) = 0.$$

Доказательство второго равенства аналогично. □

Лемма 4.4.

(i) $D^\xi\Big(\dfrac{\xi(t)}{t}\Big) = E_t^\xi\Big(\dfrac{\beta(t)}{t}\Big) - \dfrac{\xi(t)}{t^2}$;

(ii) $D_*^\xi\Big(\dfrac{\xi(t)}{t}\Big) = E_t^\xi\Big(\dfrac{\beta(t)}{t} - \dfrac{\kappa(t)}{t}\Big)$.

Лемма 4.4 является следствием леммы 1.1 и леммы 4.2. В частности, (ii) следует непосредственно из леммы 1.1 и конструкции производной.

Лемма 4.5. $D^\xi u^W(t,\xi(t)) = D^W u^W(t,\xi(t)) + E_t^\xi(\beta(t)\cdot\nabla)u^W(t,\xi(t))$.

Доказательство.

$$D^\xi E_t^\xi u^W(t,\xi(t)) = \lim_{\Delta t\to+0}\frac{1}{\Delta t}E_t^\xi[u^W(t+\Delta t,\xi(t+\Delta t)) - u^W(t,\xi(t))] =$$

$$= (E_t^W\theta(T))^{-1}\lim_{\Delta t\to+0}\frac{1}{\Delta t}E_t^W[(u^W(t+\Delta t,\xi(t+\Delta t)) - u^W(t,\xi(t)))\theta(T)] =$$

$$= (E_t^W\theta(T))^{-1}\lim_{\Delta t\to+0}\frac{1}{\Delta t}\Big\{E_t^W[u^W(t+\Delta t,\xi(t+\Delta t)) - u^W(t,\xi(t))] +$$

$$+ E_t^W[(u^W(t+\Delta t,\xi(t+\Delta t)) - u^W(t,\xi(t)))\int_0^l \theta(s)\beta(s)\cdot dW(s)]\Big\} =$$

$$= (E_t^W\theta(T))^{-1}\lim_{\Delta t\to+0}\frac{1}{\Delta t}\Big\{E_t^W[u^W(t+\Delta t,\xi(t+\Delta t)) - u^W(t,\xi(t))] +$$

$$+ E_t^W[\int_t^{t+\Delta t} D^W u^W(s,\xi(s))\,ds\int_0^l(\theta(s)\beta(s)\cdot dW(s))] + E_t^W[\int_t^{t+\Delta t}\theta(s)(\beta(s)\cdot\nabla)u^W(s,\xi(s))\,ds]\Big\} =$$

$$= (E_t^W\theta(T))^{-1}\Big\{D^W u^W(t,\xi(t)) + D^W u^W(t,\xi(t))E_t^W\int_0^l\theta(s)\beta(s)\cdot dW(s) + E_t^W(\theta(t)\beta(t)\cdot\nabla)u^W(t,\xi(t))\Big\} =$$

$$= (E_t^W\theta(T))^{-1}\Big\{D^W u^W(t,\xi(t))E_t^W\theta(T) + E_t^W(\theta(T)\beta(t)\cdot\nabla)u^W(t,\xi(t))\Big\} =$$

$$= D^W u^W(t,\xi(t)) + E_t^\xi(\beta(t)\cdot\nabla)u^W(t,\xi(t)).$$

Здесь

$$u^W(t+\Delta t,\xi(t+\Delta t)) - u^W(t,\xi(t)) = \int_t^{t+\Delta t} D^W u^W(s,\xi(s))\,ds + \int_t^{t+\Delta t}(dW(s)\cdot\nabla)u^W(s,\xi(s))$$

по формуле Ито. □

Лемма 4.6. *Выполняются следующие равенства:*

$$DD\xi(t) = D^\xi\beta(t), \tag{4.9}$$

$$D_*D_*\xi(t) = D_*^\xi\beta(t) + E_t^\xi\left(\frac{\beta(t)}{t} - \frac{\kappa(t)}{t}\right), \tag{4.10}$$

$$D_*D\xi(t) = D_*^\xi\beta(t), \tag{4.11}$$

$$DD_*\xi(t) = D^\xi\beta(t) + E_t^\xi\left(\frac{\beta(t)}{t}\right) - \frac{\xi(t)}{t^2}, \tag{4.12}$$

$$DD_*\xi(t) = D^\xi\beta(t) - D^W u^W(t,\xi(t)) - E_t^\xi(\beta(t)\cdot\nabla)u^W(t,\xi(t)). \tag{4.13}$$

Доказательство. Формулы (4.9)–(4.13) следуют из лемм 4.2–4.5, следствия 4.1 и леммы 1.1. □

Естественно, формулы (4.12) и (4.13) эквивалентны.

Глава 2

УРАВНЕНИЯ И ВКЛЮЧЕНИЯ С ПРОИЗВОДНЫМИ В СРЕДНЕМ

5. Дифференциальные уравнения с производными в среднем справа

Всюду в дальнейшем мы для простоты будем рассматривать уравнения, их решения и другие объекты на конечном отрезке времени $t \in [0,T]$.

Пусть заданы измеримые по Борелю отображения $a(t,x)$ и $\alpha(t,x)$ из $[0,T]\times\mathbb{R}^n$ в $\mathbb{R}^n$ и в $\overline{S}_+(n)$ (см. введение), соответственно.

Рассмотрим систему вида

$$\begin{cases} D\xi(t) = a(t,\xi(t)), \\ D_2\xi(t) = \alpha(t,\xi(t)) \end{cases} \tag{5.1}$$

и назовем её *дифференциальным уравнением первого порядка с производными в среднем справа.*

Учитывая теорему 1.1 и теорему 1.2, легко видеть, что задача нахождения процесса диффузионного типа, P-п.н. удовлетворяющего (5.1), в принципе, корректна. Понятно, что первое уравнение системы (5.1) определяет снос, а второе — коэффициент диффузии процесса.

Определение 5.1. Будем говорить, что (5.1) имеет *решение на* $[0,T]$ с начальным условием $x_0 \in \mathbb{R}^n$, если существует вероятностное пространство $(\Omega,\mathcal{F},\mathsf{P})$ и заданный на нем при $t\in[0,T]$ процесс $\xi(t)$ со значениями в $\mathbb{R}^n$ такой, что $\xi(0)=x_0$ и при $t\in[0,T]$ для $\xi(t)$ P-п.н. выполняется (5.1).

Замечание 5.1. В классическом стохастическом анализе с уравнениями типа Ито и Стратоновича решения типа определения 5.1 называются *слабыми.* Отметим, что для уравнений и включений с производными в среднем понятие сильного решения некорректно, так как в этих уравнениях и включениях заранее не задан никакой винеровский процесс. Поэтому в определении 5.1 мы опускаем слово «слабое».

Для дальнейшего нам потребуется следующее техническое утверждение.

Лемма 5.1. *Пусть* $\alpha(t,x)$ *— отображение из* $[0,T]\times\mathbb{R}^n$ *в* $S_+(n)$*, непрерывное по совокупности переменных. Тогда существует непрерывное по совокупности переменных отображение* $A(t,x)$ *из* $[0,T]\times\mathbb{R}^n$ *в пространство* $L(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^n)$ *такое, что при любых* $t\in\mathbb{R}$, $x\in\mathbb{R}^n$ *выполняется* $A(t,x)A^*(t,x)=\alpha(t,x)$.

Доказательство. Поскольку симметрические матрицы $\alpha(t,x)$ положительно определены, то все их диагональные миноры положительны и, в частности, отличны от нуля. Тогда имеет место разложение Гаусса (см. [19, теорема II.9.3]): $\alpha = \zeta\delta z$, где ζ — нижнетреугольная матрица с единицами на диагонали, z — верхнетреугольная матрица с единицами на диагонали, δ — диагональная матрица. При этом элементы матриц ζ, δ и z выражаются рационально через элементы α, т. е. указанные матрицы непрерывны по совокупности переменных t,x. Из того, что α — симметрические матрицы, легко увидеть, что $z=\zeta^*$ (z равно транспонированному ζ). Также нетрудно видеть, что в рассматриваемых условиях элементы диагональной матрицы δ положительны. Следовательно, корректно определена диагональная матрица $\sqrt{\delta}$, на диагонали которой стоят квадратные корни из соответствующих элементов матрицы δ. Рассмотрим матрицы

$A(t,x) = \zeta\sqrt{\delta}$. По построению $A(t,x)$ непрерывно по совокупности переменных t, x и при этом $A(t,x)A^*(t,x) = \zeta(t,x)\delta(t,x)z(t,x) = \alpha(t,x)$. □

Следствие 5.1. *Если в условии леммы* 5.1 *заменить требование непрерывности* $\alpha(t,x)$ *требованием измеримости по Борелю* (*или гладкости*), *то существует измеримое по Борелю* (*соответственно, гладкое*) *отображение* $A(t,x)$ *из* $[0,T]\times\mathbb{R}^n$ *в пространство* $L(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^n)$ *матриц такое, что при любых* $t\in\mathbb{R}$, $x\in\mathbb{R}^n$ *выполняется* $A(t,x)A^*(t,x) = \alpha(t,x)$.

Для случая, когда $\alpha(t,x)$ действует в $\overline{S}_+(n)$, можно построить непрерывное $A(t,x)$ при более обременительных предположениях.

Лемма 5.2. *Если* $\alpha(t,x)$ — *отображение гладкости* C^2 *из* $[0,T]\times\mathbb{R}^n$ *в* $\overline{S}_+(n)$, *то существует непрерывное по совокупности переменных отображение* $A(t,x)$ *из* $[0,T]\times\mathbb{R}^n$ *в пространство* $L(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^n)$ *матриц такое, что при любых* $t\in\mathbb{R}$, $x\in\mathbb{R}^n$ *выполняется* $A(t,x)A^*(t,x) = \alpha(t,x)$.

Лемма 5.2 выводится из [28, теорема 1].

Теорема 5.1. *Пусть в системе* (5.1) $\alpha(t,x)$ *непрерывно по совокупности переменных, положительно определено* (*т. е. при всех* $t\in[0,T]$, $x\in\mathbb{R}^n$ *принадлежит* $S_+(n)$), *и для него выполняется оценка*

$$\|\operatorname{tr}\alpha(t,x)\| < K_1(1+\|x\|)^2 \tag{5.2}$$

для некоторого $K_1>0$. *Пусть* $a(t,x)$ *измеримо по Борелю и для него выполняется оценка*

$$\|a(t,x)\| < K_2(1+\|x\|) \tag{5.3}$$

для некоторого $K_2>0$. *Тогда для любого начального условия* $\xi(0)=x_0\in\mathbb{R}^n$ *уравнение* (5.1) *имеет решение, определенное на всем отрезке* $[0,T]$.

Доказательство. Так как $\alpha(t,x)$ непрерывно и положительно определено, то по лемме 5.1 существует непрерывное $A(t,x)$ такое, что $A(t,x)A^*(t,x)=\alpha(t,x)$. Непосредственно из определения следа в данном случае мы получаем, что $\operatorname{tr}\alpha(t,x)$ равен сумме квадратов всех элементов матрицы $A(t,x)$, т. е. является квадратом евклидовой нормы в пространстве $n\times n$ матриц. Поскольку в конечномерном пространстве $S(n)$ симметрических $n\times n$ матриц все нормы эквивалентны, из условия (5.2) сразу следует, что $\|A(t,x)\| < K_3(1+\|x\|)$ для некоторого $K_3>0$. Так как $\alpha(t,x)$ положительно определено, то матрица $A(t,x)$ при всех t,x не вырождена. Поскольку $a(t,x)$ измеримо и удовлетворяет (5.3), то при описанных выше свойствах $A(t,x)$ по [10, теорема III.3.3] существует решение стохастического дифференциального уравнения

$$\xi(t) = \xi_0 + \int_0^t a(s,\xi(s))ds + \int_0^t A(s,\xi(s))dw(s), \tag{5.4}$$

определенное на всем отрезке $[0,T]$. Из теорем 1.1 и 1.2 очевидным образом следует, что решение $\xi(t)$ последнего уравнения P-п.н. удовлетворяет (5.1). □

Теорема 5.2. *Пусть* $\alpha(t,x)$ C^2-*гладко, неотрицательно определено* (*т. е. при всех* $t\in[0,T]$, $x\in\mathbb{R}^n$ *принадлежит* $\overline{S}_+(n)$) *и удовлетворяет* (5.2). *Пусть* $a(t,x)$ *непрерывно и удовлетворяет* (5.3). *Тогда для любого начального условия* $\xi(0)=x_0\in\mathbb{R}^n$ *уравнение* (5.1) *имеет решение, определенное на всем отрезке* $[0,T]$.

Доказательство. По лемме 5.2 существует непрерывное $A(t,x)$ такое, что $\alpha(t,x)=A(t,x)A^*(t,x)$. Так же, как в доказательстве теоремы 5.1, выводится оценка $\|A(t,x)\| < K_3(1+\|x\|)$ для некоторого $K_3>0$. Тогда, так как $a(t,x)$ и $A(t,x)$ непрерывны и выполнено (5.3), уравнение (5.4) удовлетворяет условиям [10, теорема III.2.4], т. е. для него существует решение, определенное на всем отрезке $[0,T]$. Как и ранее, очевидно, что P-п.н. оно удовлетворяет (5.1). □

Отметим, что поскольку однозначные отображения являются частным случаем многозначных, то для уравнений с измеримой правой частью, удовлетворяющих условиям теоремы 6.2 (см. ниже), как следствие мы тоже получаем теорему существования решений. Также имеет место теорема существования решений в случае непрерывных правых частей, у которых $\alpha(t,x)$ принимает значения в $\overline{S}_+(n)$), если уравнение удовлетворяет условиям теоремы 14.1 (см. ниже).

6. Дифференциальные включения с производными в среднем справа

Замечание 6.1. Ниже мы имеем дело с последовательностью процессов $\xi_i(t)$ (решениями последовательности стохастических дифференциальных уравнений в $\mathbb{R}^n$) таких, что для одной и той же константы $C_2 > 0$ при всех i выполняется оценка $E\Big(\sup\limits_{0\leqslant t\leqslant T}\|\xi_i(t)\|^2\Big) \leqslant C_2$ (см. [10, § III.2, Lemma 1]). В представлении через координатный процесс на $\tilde{\Omega} = C^0([0,T],\mathbb{R}^n)$ с σ-алгеброй $\tilde{\mathcal{F}}$ цилиндрических множеств на $\tilde{\Omega}$ последнее неравенство означает, что

$$\int\limits_{\Omega}(\sup_{0\leqslant t\leqslant T}\|x(t)\|^2)d\mu_i \leqslant C_2 \tag{6.1}$$

для всех мер μ_i, порожденных процессами $\xi_i(t)$, как выше.

Лемма 6.1. *Рассмотрим последовательность вероятностных мер μ_k на $(\Omega,\mathcal{F})$ такую, что* (6.1) *выполняется для всех i. Пусть меры μ_i слабо сходятся к некоторой мере μ при $i \to \infty$. Введем меры ν_i соотношениями $d\nu_i = (1 + \|x(\cdot)\|_{C^0})d\mu_i$ и меры ν_i^1 соотношениями $d\nu_i^1 = (1 + \|x(\cdot)\|^2_{C^0})d\mu_i$. Тогда меры ν_i слабо сходятся к мере ν, заданной соотношением $d\nu = (1 + \|x(\cdot)\|_{C^0})d\mu$, а меры ν_i^1 слабо сходятся к мере ν^1, заданной соотношением $d\nu^1 = (1 + \|x(\cdot)\|^2_{C^0})d\mu$.*

Доказательство. Действительно, выберем произвольную ограниченную непрерывную функцию $f : \Omega \to \mathbb{R}$. Утверждение леммы 6.1 вытекают из того, что по формуле (6.1) случайные величины $f(\xi_k)(1 + \|\xi_k\|)$ равномерно интегрируемы, так же как $f(\xi_k)(1 + \|\xi_k\|^2)$. ☐

Пусть $\mathbf{a}(t,x)$ и $\boldsymbol{\alpha}(t,x)$ — многозначные отображения из $[0,T]\times\mathbb{R}^n$ в $\mathbb{R}^n$ и в $\overline{S}_+(n)$, соответственно. *Дифференциальным включением первого порядка с производными в среднем справа* мы будем называть систему вида

$$\begin{cases} D\xi(t) \in \mathbf{a}(t,\xi(t)), \\ D_2\xi(t) \in \boldsymbol{\alpha}(t,\xi(t)). \end{cases} \tag{6.2}$$

Определение 6.1. Будем говорить, что (6.2) имеет *решение на* $[0,T]$ с начальным условием $x_0 \in \mathbb{R}^n$, если существует вероятностное пространство $(\Omega,\mathcal{F},\mathsf{P})$ и заданный на нем при $t \in [0,T]$ процесс $\xi(t)$ со значениями в $\mathbb{R}^n$ и начальным значением $\xi(0) = x_0$ такой, что P-п.н. для него выполняется (6.2) (см. замечание 5.1).

В простейших случаях вопрос о существовании решения для (6.2) сводится к теоремам существования решения для (5.1). Приведем пример подобного утверждения. Напомним, что значение обозначения «норма множества» приведено в конце введения.

Теорема 6.1. *Пусть $\boldsymbol{\alpha}(t,x)$ принимает значения в положительно определенных матрицах $S_+(n)$, имеет замкнутые выпуклые образы, полунепрерывно снизу и для каждого $\alpha \in \boldsymbol{\alpha}(t,x)$ выполняется оценка*

$$\|\operatorname{tr}\alpha(t,x)\| < K_1(1 + \|x\|)^2$$

для некоторого $K_1 > 0$. Пусть $\mathbf{a}(t,x)$ является измеримым по Борелю многозначным отображением и удовлетворяет оценке

$$\|\mathbf{a}(t,x)\| < K_2(1 + \|x\|)) \tag{6.3}$$

для некоторого $K_2 > 0$. Тогда для любого начального условия $\xi(0) = \xi_0$ существует решение (6.2), *определенное на всем отрезке* $[0,T]$.

Доказательство. При сделанных предположениях по теореме Майкла (теорема 43.1) многозначное отображение $\boldsymbol{\alpha}(t,x)$ имеет непрерывный однозначный селектор $\alpha(t,x)$. Измеримое по Борелю многозначное отображение $\mathbf{a}(t,x)$ имеет измеримый однозначный селектор $a(t,x)$. Тогда уравнение

$$\begin{cases} D\xi(t) = a(t,\xi(t)), \\ D_2\xi(t) = \alpha(t,\xi(t)) \end{cases}$$

удовлетворяет условиям теоремы 5.1 и, следовательно, имеет решение, которое очевидным образом является и решением (6.2). ☐

В случае, когда и $\boldsymbol{\alpha}(t,x)$, и $\mathbf{a}(t,x)$ полунепрерывны снизу, имеют замкнутые выпуклые образы, $\boldsymbol{\alpha}(t,x)$ принимает значения в $\overline{S}_+$, удовлетворяют оценкам из условия теоремы 6.1 и известно, что непрерывный селектор $\alpha(t,x)$ отображения $\boldsymbol{\alpha}(t,x)$, который существует по теореме Майкла (теорема 43.1), представим в виде $\alpha(t,x) = A(t,x)A^*(t,x)$ с непрерывным $A(t,x)$, нетрудно доказать существование решения для (6.2) путем сведения к теореме 5.2.

Для случая, когда $\boldsymbol{\alpha}(t,x)$ и $\mathbf{a}(t,x)$ не имеют непрерывных селекторов, докажем следующее утверждение о существовании решения.

Теорема 6.2. *Пусть $\mathbf{a}(t,x)$ — ограниченное измеримое по Борелю многозначное отображение из $[0,T]\times\mathbb{R}^n$ в $\mathbb{R}^n$ с замкнутыми образами.*

Пусть $\boldsymbol{\alpha}(t,x)$ — ограниченное измеримое по Борелю многозначное отображение с замкнутыми образами из $[0,T]\times\mathbb{R}^n$ в $S_+(n)$ и существует $\varepsilon_0>0$ такое, что для всех t,x ε_0-окрестность множества $\boldsymbol{\alpha}(t,x)$ в $S(n)$ не пересекает множество $S_0(n)$ симметрических вырожденных матриц размера $n\times n$.

Тогда для любого начального условия $\xi(0)=\xi_0\in\mathbb{R}^n$ включение (6.2) *имеет решение.*

Доказательство. Так как $\mathbf{a}(t,x)$ и $\boldsymbol{\alpha}(t,x)$ являются измеримыми по Борелю многозначными отображениями, то они имеют измеримые по Борелю селекторы $a(t,x)$ и $\alpha(t,x)$, которые по построению ограничены. По следствию 5.1 существует измеримое $A(t,x)$ такое, что $\alpha(t,x) = A(t,x)A^*(t,x)$. При этом по построению $A(t,x)$ ограничено и равномерно отделено от множества вырожденных матриц в $L(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^n)$. Тогда стохастическое дифференциальное уравнение

$$\xi(t) = \xi_0 + \int\limits_0^t a(s,\xi(s))ds + \int\limits_0^t A(s,\xi(s))dw(s)$$

удовлетворяет условиям теоремы II.6.1 из [22] и имеет решение, которое очевидным образом является решением (6.2). □

Теорема 6.3. *Пусть $\mathbf{a}(t,x)$ — полунепрерывное сверху многозначное отображение с замкнутыми выпуклыми значениями из $[0,T]\times\mathbb{R}^n$ в $\mathbb{R}^n$, и пусть оно удовлетворяет неравенству*

$$\|\mathbf{a}(t,x)\| < K(1+\|x\|) \tag{6.4}$$

для некоторого $K>0$.

Пусть $\boldsymbol{\alpha}(t,x)$ — полунепрерывное сверху многозначное отображение с замкнутыми выпуклыми значениями из $[0,T]\times\mathbb{R}^n$ в $\bar{\mathrm{S}}_+(n)$ такое, что для каждого $\alpha(t,x)\in\boldsymbol{\alpha}(t,x)$ выполнено неравенство

$$\|\operatorname{tr}\alpha(t,x)\| < K(1+\|x\|)^2 \tag{6.5}$$

для некоторого $K>0$.

Тогда для любого начального условия $\xi(0)=\xi_0\in\mathbb{R}^n$ включение (6.2) *имеет решение $\xi(t)$, существующее на всем отрезке $t\in[0,T]$, которое является семимартингалом.*

Доказательство. Как норму в $\bar{\mathrm{S}}_+(n)$ мы рассматриваем сужение на $\bar{\mathrm{S}}_+(n)$ евклидовой нормы (т. е. квадратный корень из суммы квадратов всех элементов матрицы) в пространстве $L(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^n)$, изометричном $\mathbb{R}^{n^2}$. Так как все нормы в конечномерном пространстве $\bar{\mathrm{S}}_+(n)$ эквивалентны, в этой норме (6.5) так же выполняется, возможно, с другой константой, для которой мы сохраним обозначение K.

Поскольку $\mathbf{a}(t,x)$ полунепрерывно сверху и имеет замкнутые выпуклые значения, для любого $\varepsilon>0$ существует ε-аппроксимация (см. раздел 43, в частности, определение 43.6). Мы будем использовать ε-аппроксимации из теоремы 43.7, т. е. при $\varepsilon_i\to 0$ эти ε_i-аппроксимации поточечно сходятся к измеримому по Борелю селектору многозначного отображения.

Выберем последовательность $\varepsilon_i\to 0$ такую, что $\varepsilon_i>0$ при всех натуральных i. Обозначим через $a_i(t,x)$ непрерывные ε_i-аппроксимации $\boldsymbol{a}(t,x)$ в $\mathbb{R}^n$ из теоремы 43.7, а через $a(t,x)$ — измеримый по Борелю селектор $\boldsymbol{a}(t,x)$, к которому $a_i(t,x)$ сходятся поточечно. Ясно, что все $a_i(t,x)$ и $a(t,x)$ удовлетворяют (6.4) с некоторой константой, которая больше, чем K из условия теоремы. Тем не менее мы для удобства сохраним обозначение K для этой константы.

Так же, как $\mathbf{a}(t,x)$, $\boldsymbol{\alpha}(t,x)$ имеет в $\mathrm{S}(n)$ ε-аппроксимацию из теоремы 43.7 для любого $\varepsilon>0$, так как $\boldsymbol{\alpha}(t,x)$ полунепрерывно сверху и имеет замкнутые выпуклые значения. Отметим, что

$\bar{\mathrm{S}}_+(n)$ является выпуклым множеством в $\mathrm{S}(n)$, и по теореме 43.7 эти аппроксимации принимают значения также в $\bar{\mathrm{S}}_+(n)$. Для этой последовательности ε_i обозначим через $\bar{\alpha}_i(t,x)$ такие $\dfrac{\varepsilon_i}{2}$-аппроксимации отображения $\boldsymbol{\alpha}(t,x)$. Введем $\alpha_i(t,x)=\bar{\alpha}_i(t,x)+\dfrac{\varepsilon_i}{4}I$, где I — единичная матрица. Непосредственно из построения следует, что $\alpha_i(t,x)$ при любом i является непрерывной ε_i-аппроксимацией отображения $\boldsymbol{\alpha}(t,x)$ и что в любой точке (t,x) эта аппроксимация $\alpha_i(t,x)$ принадлежит $\mathrm{S}_+(n)$, т. е. она строго положительно определена. Кроме того, $\alpha_i(t,x)$ удовлетворяет (6.5), где константа $K>0$ больше, чем константа в условии теоремы, но для удобства мы сохраним для нее обозначение K. Также по построению последовательность $\alpha_i(t,x)$ поточечно сходится к измеримому по Борелю селектору $\alpha(t,x)$ отображения $\boldsymbol{\alpha}(t,x)$.

По лемме 5.1 для любого i существует непрерывное $A_i(t,x)$ такое, что $A_i(t,x)A_i^*(t,x)=\alpha_i(t,x)$. Непосредственно из определения следа мы получаем, что $\operatorname{tr}\alpha_i(t,x)$ равен сумме квадратов всех элементов матрицы $A_i(t,x)$, т. е. квадрату евклидовой нормы в $L(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^n)$. Поэтому из (6.5) следует, что $\|A_i(t,x)\|<K(1+\|x\|)$ для некоторого $K>0$. Значит, стохастическое дифференциальное уравнение

$$\xi(t)=\xi_0+\int\limits_0^t a_i(s,\xi(s))ds+\int\limits_0^t A_i(s,\xi(s))dw(s) \tag{6.6}$$

удовлетворяет условию теоремы 6.26 из [50], т. е. существует решение, которое корректно определено на всем отрезке $[0,T]$. Обозначим это решение символом $\xi_i(t)$.

Ниже в этом разделе мы используем измеримое пространство $(\tilde{\Omega},\tilde{\mathcal{F}})$, где $\tilde{\Omega}=C^0([0,T],\mathbb{R}^n)$, а $\tilde{\mathcal{F}}$ — σ-алгебра цилиндрических множеств на $\tilde{\Omega}$, и семейство $\tilde{\mathcal{P}}_t$ σ-подалгебр в $\tilde{\mathcal{F}}$ с базами над $[0,t]$. На измеримом пространстве $([0,T],\mathcal{B})$, где $\mathcal{B}$ — борелевская σ-алгебра, через λ_1 мы обозначим нормализованную меру Лебега.

Процесс $\xi_i(t)$ определяет меру μ_i на $(\tilde{\Omega},\tilde{\mathcal{F}})$. На вероятностном пространстве $(\tilde{\Omega},\tilde{\mathcal{F}},\mu_i)$ процесс $\xi_i(t)$ описывается как координатный процесс, т. е. $\xi_i(t,x(\cdot))=x(t)$, $x(\cdot)\in\tilde{\Omega}$. Ясно, что меры μ_i удовлетворяют условиям [10, лемма III.2.2]. Следовательно, множество мер $\{\mu_i\}$ слабо компактно, т. е. можно выделить подпоследовательность, слабо сходящуюся к некоторой мере μ. Обозначим через $\xi(t)$ координатный процесс на вероятностном пространстве $(\tilde{\Omega},\tilde{\mathcal{F}},\mu)$.

Введем меры ν_i на $(\tilde{\Omega},\tilde{\mathcal{F}})$ соотношением $d\nu_i=(1+\|x(\cdot)\|)d\mu_i$. По лемме 6.1 меры ν_i слабо сходятся к мере ν, заданной соотношением $d\nu=(1+\|x(\cdot)\|)d\mu$.

Поскольку последовательность $a_i(t,x(\cdot))$ сходится к $a(t,x(\cdot))$ поточечно, она сходится п.н. относительно всех мер $\lambda\times\mu_k$ и, таким образом, функции $\dfrac{a_i(t,x(\cdot))}{1+\|x(\cdot)\|}$ сходятся к $\dfrac{a(t,x(\cdot))}{1+\|x(\cdot)\|}$ п.н. относительно всех $\lambda\times\nu_k$.

Зафиксируем произвольное $\delta>0$. По теореме Егорова (см., например, [20]) для любого k существует подмножество $\tilde{K}_\delta^k\subset[0;T]\times\tilde{\Omega}$ такое, что $(\lambda\times\nu_k)(\tilde{K}_\delta^k)>1-\delta$ и последовательность $\dfrac{a_i(t,x(\cdot))}{1+\|x(\cdot)\|}$ сходится на $\tilde{K}_\delta^k$ к $\dfrac{a(t,x(\cdot))}{1+\|x(\cdot)\|}$ равномерно. Введем $\tilde{K}_\delta=\bigcup\limits_{k=0}^{\infty}\tilde{K}_\delta^k$. Тогда последовательность $\dfrac{a_i(t,x(\cdot))}{1+\|x(\cdot)\|}$ сходится на $\tilde{K}_\delta$ к $\dfrac{a(t,x(\cdot))}{1+\|x(\cdot)\|}$ равномерно и $(\lambda\times\nu_k)(\tilde{K}_\delta)>(\lambda\times\nu_k)([0;T]\times\tilde{\Omega})-\delta$ при всех $k=0,\dots,\infty$, где $\nu_\infty=\nu$.

Отметим, что $a(t,x(\cdot))$ непрерывно на множестве полной меры $\lambda\times\nu$ на $[0;T]\times\tilde{\Omega}$. Действительно, рассмотрим последовательность $\delta_k\to0$ и соответствующую последовательность $\tilde{K}_{\delta_k}$ из теоремы Егорова. Проведенные выше рассуждения показывают, что $a(t,x(\cdot))$ является равномерным пределом последовательности непрерывных функций на каждом $\tilde{K}_{\delta_k}$. Так что это отображение непрерывно на каждом $\tilde{K}_{\delta_k}$ и, таким образом, на каждом конечном объединении $\bigcup\limits_{k=1}^{n}\tilde{K}_{\delta_i}$. Очевидным образом $\lim\limits_{n\to\infty}(\lambda\times\nu)(\bigcup\limits_{k=1}^{n}\tilde{K}_{\delta_k})=(\lambda\times\nu)([0;T]\times\tilde{\Omega})$. Так что $\dfrac{a(t,x(\cdot))}{1+\|x(\cdot)\|}$ непрерывно на множестве полной меры $\lambda\times\nu$ на $[0;T]\times\tilde{\Omega}$.

Выберем произвольную ограниченную непрерывную функцию $g_t(x(\cdot))$ на $\tilde{\Omega}$, которая $\tilde{\mathcal{P}}_t$-измерима. В частности, пусть $|g_t(x(\cdot))|<\Xi$ при всех $x(\cdot)$ из $\tilde{\Omega}$.

Из полученной выше равномерной сходимости $\dfrac{a_i(t,x(\cdot))}{1+\|x(\cdot)\|}$ к $\dfrac{a(t,x(\cdot))}{1+\|x(\cdot)\|}$ на $\tilde K_\delta$ при всех k и ограниченности g_t мы получаем, что для достаточно больших i

$$\left\|\int\limits_{\tilde K_\delta}\Big(\int\limits_t^{t+\Delta t}(a_i(\tau,x(\cdot))-a(\tau,x(\cdot)))d\tau\Big)g_t(x(\cdot))d\mu_k\right\| = \left\|\int\limits_{\tilde K_\delta}\Big(\int\limits_t^{t+\Delta t}\frac{a_i(\tau,x(\cdot))-a(\tau,x(\cdot))}{1+\|x(\cdot)\|}d\tau\Big)g_t(x(\cdot))d\nu_k\right\| < \delta$$

равномерно для всех k. Так как $(\lambda\times\mu_k)(\tilde K_\delta) > 1-\delta$ при всех k, то $\left\|\dfrac{a_i(t,x(\cdot))}{1+\|x(\cdot)\|}\right\| < K$ по (6.4) для всех $i = 0,1,\dots,\infty$ (где $i=\infty$ соответствует a) и $|g_t(x(\cdot))| < \Xi$, и мы получаем

$$\left\|\int\limits_{\tilde\Omega\setminus\tilde K_\delta}\Big(\int\limits_t^{t+\Delta t}(a_i(\tau,x(\cdot))-a(\tau,x(\cdot)))d\tau\Big)g_t(x(\cdot))d\mu_k\right\| =$$
$$= \left\|\int\limits_{\tilde\Omega\setminus\tilde K_\delta}\Big(\int\limits_t^{t+\Delta t}\frac{a_i(\tau,x(\cdot))-a(\tau,x(\cdot))}{1+\|x(\cdot)\|}d\tau\Big)g_t(x(\cdot))d\nu_k\right\| < 2Q\Xi\delta.$$

Из последних двух неравенств следует, что при достаточно большом k

$$\left\|\int\limits_{\tilde\Omega}\left(\int\limits_t^{t+\Delta t}(a_k(\tau,x(\cdot))-a(\tau,x(\cdot)))d\tau\right)g_t(x(\cdot))d\mu_k\right\| < \delta(2Q\Xi+1).$$

Из того, что δ — произвольное число, следует, что

$$\lim_{k\to\infty}\int\limits_{\tilde\Omega}\left(\int\limits_t^{t+\Delta t}a_k(\tau,x(\cdot))d\tau - \int\limits_t^{t+\Delta t}a(\tau,x(\cdot))d\tau\right)g_t(x(\cdot))d\mu_k = 0. \tag{6.7}$$

Функция $\dfrac{a(t,x(\cdot))}{1+\|x(\cdot)\|}$ непрерывна $\lambda\times\nu$-п.н. (см. выше) и ограничена на $[0;T]\times\tilde\Omega$. Следовательно, по [9, Sec. VI.4] мы выводим из слабой сходимости мер ν_k к ν, что

$$\lim_{k\to\infty}\int\limits_{\tilde\Omega}\left(\int\limits_t^{t+\Delta t}a(\tau,x(\cdot))d\tau\right)g_t(x(\cdot))d\mu_k = \lim_{k\to\infty}\int\limits_{\tilde\Omega}\left(\int\limits_t^{t+\Delta t}\frac{a(\tau,x(\cdot))}{1+\|x(\cdot)\|}d\tau\right)g_t(x(\cdot))d\nu_k =$$
$$= \int\limits_{\tilde\Omega}\left(\int\limits_t^{t+\Delta t}\frac{a(\tau,x(\cdot))}{1+\|x(\cdot)\|}d\tau\right)g_t(x(\cdot))d\nu = \int\limits_{\tilde\Omega}\left(\int\limits_t^{t+\Delta t}a(\tau,x(\cdot))d\tau\right)g_t(x(\cdot))d\mu. \tag{6.8}$$

Используя те же рассуждения, мы получаем, что

$$\lim_{i\to\infty}\int\limits_{\tilde\Omega}(x(t+\Delta t)-x(t))\,g_t(x(\cdot))d\mu_i = \lim_{i\to\infty}\int\limits_{\tilde\Omega}\frac{x(t+\Delta t)-x(t)}{1+\|x(\cdot)\|}g_t(x(\cdot))d\nu_i =$$
$$= \int\limits_{\tilde\Omega}\frac{x(t+\Delta t)-x(t)}{1+\|x(\cdot)\|}g_t(x(\cdot))d\nu = \int\limits_{\tilde\Omega}(x(t+\Delta t)-x(t))g_t(x(\cdot))d\mu. \tag{6.9}$$

Напомним, что

$$\int\limits_{\tilde\Omega}\Big(x(t+\Delta t)-x(t)-\int\limits_t^{t+\Delta t}a_i(\tau,x(\cdot))d\tau\Big)g_t(x(\cdot))d\mu_i =$$

$$= E\Big[\Big(\xi_i(t+\Delta t) - \xi_i(t) - \int\limits_t^{t+\Delta t} a_k(\tau, \xi_i(\tau))d\tau\Big) g_t(\xi_i(\cdot))\Big] = 0, \quad (6.10)$$

поскольку $\xi_i(t)$ является решением (6.6) и $g_t(\xi_i(\cdot))$ не зависит от $\xi_i(t+\Delta t) - \xi_i(t) - \int\limits_t^{t+\Delta t} a_k(\tau, \xi_i(\tau))d\tau$.

Из (6.7)–(6.10) мы получаем

$$0 = \lim_{k\to\infty} \int\limits_{\tilde{\Omega}} \Big(x(t+\Delta t) - x(t) - \int\limits_t^{t+\Delta t} a_k(\tau, x(\cdot))d\tau\Big) g_t(x(\cdot))d\mu_k =$$

$$= \lim_{k\to\infty} \int\limits_{\tilde{\Omega}} \Big(x(t+\Delta t) - x(t) - \int\limits_t^{t+\Delta t} a(\tau, x(\cdot))d\tau\Big) g_t(x(\cdot))d\mu_k =$$

$$= \int\limits_{\tilde{\Omega}} [(x(t+\Delta t) - x(t)) - \int\limits_t^{t+\Delta t} a(\tau, x(\cdot))d\tau] g_t(x(\cdot))d\mu.$$

Таким образом,

$$\int\limits_{\tilde{\Omega}} [(x(t+\Delta t) - x(t)) - \int\limits_t^{t+\Delta t} a(s, x(\cdot))ds] g_t(x(\cdot))d\mu = 0. \quad (6.11)$$

Так как (6.11) верно при любом g_t, мы доказали следующее утверждение.

Лемма 6.2. *Процесс* $\xi(t) - \int\limits_0^t a(s, \xi(s))ds$ *является мартингалом относительно* $\tilde{\mathcal{P}}_t$.

Введем меры ρ_i на $(\tilde{\Omega}, \tilde{\mathcal{F}})$ соотношениями $d\rho_i = (1 + \|x(\cdot)\|^2)d\mu_i$. По лемме 6.1 эти меры слабо сходятся к мере ρ, заданной соотношением $d\rho = (1 + \|x(\cdot)\|^2)d\mu$.

Используя элементарную модификацию приведенных выше рассуждений (в частности, заменяя меры ν_k на ρ_k, a_i на α_i, $1+\|x\|$ на $1+\|x\|^2$ и т. д.), легко показать, что для любой ограниченной непрерывной функции $g_t : \tilde{\Omega} \to \mathbb{R}$, которая измерима относительно $\tilde{\mathcal{P}}_t$, выполняется соотношение

$$\lim_{i\to\infty} \int\limits_{\Omega} [(x(t+\Delta t) - x(t))(x(t+\Delta t) - x(t))^* - \int\limits_t^{t+\Delta t} \alpha_i(s, x(\cdot))ds] g_t(x(\cdot))d\mu_i =$$

$$= \int\limits_{\Omega} [(x(t+\Delta t) - x(t))(x(t+\Delta t) - x(t))^* - \int\limits_t^{t+\Delta t} \alpha(s, x(\cdot))ds] g_t(x(\cdot))d\mu.$$

Кроме того, при любом i

$$\int\limits_{\Omega} [(x(t+\Delta t) - x(t))(x(t+\Delta t) - x(t))^* - \int\limits_t^{t+\Delta t} \alpha_i(s, x(\cdot))ds] g_t(x(\cdot))d\mu_i = 0$$

и, таким образом,

$$\int\limits_{\Omega} [(x(t+\Delta t) - x(t))(x(t+\Delta t) - x(t))^* - \int\limits_t^{t+\Delta t} \alpha(s, x(\cdot))ds] g_t(x(\cdot))d\mu = 0.$$

Их этого мы получаем следующий результат.

Лемма 6.3. *Для координатного процесса* $\xi(t)$ *на вероятностном пространстве* $(\tilde{\Omega}, \tilde{\mathcal{F}}, \mu)$ *процесс* $\xi(t)\xi^*(t) - \int\limits_0^t \alpha(s, \xi(\cdot))ds$ *является мартингалом относительно* $\tilde{\mathcal{P}}_t$.

Из лемм 1.2 и 6.2 немедленно следует, что

$$D^{\xi}(\xi(t)-\int\limits_0^t a(\tau,\xi(\tau)d\tau)=0$$

и, таким образом, $D\xi(t)=a(t,\xi(t))\in \mathbf{a}(t,\xi(t))$.

Из определения (1.7) квадратичной производной вытекает, что $D^{\xi}(\xi(t)\xi^*(t))=D_2\xi(t)$. Тогда из леммы 6.3 мы выводим, что $D_2\xi(t)=\alpha(t,\xi(t))\in \boldsymbol{\alpha}(t,\xi(t))$.

Таким образом, $\xi(t)$ удовлетворяет (6.2). Из леммы 6.2 следует, что $\xi(t)$ является семимартингалом. Действительно, если $\xi(t)-\int\limits_0^t a(s,\xi(s))ds$ — мартингал, то $\xi(t)-\int\limits_0^t a(s,\xi(s))ds+\int\limits_0^t a(s,\xi(s))ds$ — семимартингал. □

7. Дифференциальные включения с производными в среднем слева

Уравнения и включения с производными в среднем слева возникают при описании некоторых специальных стохастических процессов в математической физике. Например, в [49, 50] (см. также литературу в этих работах) выведено уравнение второго порядка с производными слева на группах соболевских диффеоморфизмов, которое описывает процесс, чье математическое ожидание является потоком вязкой жидкости (см. главу 8). Следует отметить, что такие уравнения и включения весьма сложны для исследования по сравнению с уравнениями и включениями с производными в среднем справа. Тем не менее, имеется простой метод, связанный с использованием обращения времени у решений уравнений и включений с производными в среднем справа, который позволяет получить некоторые результаты и для случая производных слева. Здесь мы проиллюстрируем этот метод на простом примере.

Система

$$\begin{cases} D_*\xi(t)=a(t,\xi(t)), \\ D_2\xi(t)=\alpha(t,\xi(t)) \end{cases} \tag{7.1}$$

называется *уравнением первого порядка с производными в среднем слева.*

Мы не вводим понятие, аналогичное оператору D_2, в данном случае, так как из свойств интеграла Ито следует, что для процесса диффузионного типа $\xi(t)$ результат применения возможного аналога совпадает с $D_2\xi(t)$ (для случая диффузионных процессов это следует из результатов [81, 82]).

Пусть $\mathbf{a}(t,x)$ и $\boldsymbol{\alpha}(t,x)$ являются многозначными отображениями из $[0,T]\times\mathbb{R}^n$ в $\mathbb{R}^n$ и в $\bar{\mathrm{S}}_+(n)$, соответственно. Система вида

$$\begin{cases} D_*\xi(t)\in \mathbf{a}(t,\xi(t)), \\ D_2\xi(t)\in \boldsymbol{\alpha}(t,\xi(t)) \end{cases} \tag{7.2}$$

называется *включением первого порядка с производными в среднем слева.*

Рассмотрим решение $\eta(t)$, заданное на отрезке $t\in[0,T]$, с начальным условием $\eta(0)=0$ следующего дифференциального включения с производными в среднем справа:

$$\begin{cases} D\eta(t)\in -\mathbf{a}(1-t,\eta(t)), \\ D_2\eta(t)\in \boldsymbol{\alpha}(1-t,\eta(t)). \end{cases} \tag{7.3}$$

Теорема 7.1. *Процесс $\xi(t)=\xi_0-\eta(T)+\eta(T-t)$ является решением* (7.2) *с начальным условием $\xi(0)=\xi_0$, где $\eta(t)$ — решение* (7.3) *с начальным условием $\eta(0)=0$.*

Действительно, $D_*\xi(t)=-D\eta(T-t)\in \boldsymbol{a}(t,\eta(T-t))=\boldsymbol{a}(t,\xi(t))$. Для $D_2\xi(t)$ рассуждения аналогичны.

8. Уравнения с текущими скоростями

Как сказано выше, текущая скорость является прямым аналогом обычной скорости физических детерминированных процессов. Так что случай уравнений с текущими скоростями, по-видимому, является наиболее естественным с физической точки зрения.

Пусть $v : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ и $\alpha : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \bar{S}_+(n)$ — измеримые по Борелю отображения. Систему вида

$$\begin{cases} D_S\xi(t) = v(t, \xi(t)), \\ D_2\xi(t) = \alpha(t, \xi(t)) \end{cases} \tag{8.1}$$

мы называем *уравнением первого порядка с текущими скоростями.*

Определение 8.1. Говорят, что (8.1) имеет *решение на интервале* $[0, T]$, если существует вероятностное пространство $(\Omega, \mathcal{F}, \mathsf{P})$ и заданный на нем при $t \in [0, T]$ процесс $\xi(t)$, для которого выполняется (8.1) (см. замечание 5.1).

Теорема 8.1. *Пусть $v : [0, T] \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ и $\alpha : [0, T] \times \mathbb{R}^n \to \mathrm{S}_+(n)$ — гладкие по совокупности переменных (в частности, это означает, что при каждом t поле α определяет зависящую от времени риманову метрику $\alpha_t(\cdot, \cdot)$ на $\mathbb{R}^n$, введенную в разделе* 2*). Пусть также выполняются оценки*

$$\|v(t, x)\| < K(1 + \|x\|), \tag{8.2}$$

$$\operatorname{tr} \alpha(t, x) < K(1 + \|x\|^2), \tag{8.3}$$

$$\|\Xi(x)\| < K(1 + \|x\|) \tag{8.4}$$

для некоторого $K > 0$, где вектор $\Xi(x)$ введен в замечании 2.1. *Пусть ξ_0 — случайный элемент со значениями в $\mathbb{R}^n$, независимый от винеровского процесса $w(t)$ (см.* [11, гл. VIII, § 2]*) и такой, что его вероятностная плотность распределения ρ_0 относительно формы объема Λ_{α_0} метрики $\alpha_0(\cdot, \cdot)$ на $\mathbb{R}^n$ (см. раздел* 2*) гладка и нигде не равна нулю. Тогда для начального условия $\xi(0) = \xi_0$ уравнение* (8.1) *имеет решение, корректно определенное на всем отрезке $t \in [0, T]$, которое единственно как диффузионный процесс.*

Доказательство. Поскольку $v(t, x)$ гладко и для него выполнена оценка (8.2), поток g_t этого векторного поля корректно определен на всем отрезке $t \in [0, T]$. Символом $g_t(x)$ мы обозначаем орбиту этого потока (т. е. решение уравнения $x'(t) = v(t, x)$ с начальным условием $g_0(x) = x$). Поскольку $v(t, x)$ гладко, его поток также гладкий.

Используя лемму 2.2, преобразуем уравнение непрерывности (2.2) к виду

$$\frac{\partial \rho(t, x)}{\partial t} = -\alpha_t(v, \mathrm{Grad}_t\ \rho) - \rho \,\mathrm{Div}_t\ v. \tag{8.5}$$

Предположим, что $\rho(t, x)$ нигде не равно нулю в $[0, T] \times \mathbb{R}^n$. Тогда мы можем разделить (8.5) на ρ и, таким образом, преобразовать его к виду

$$\frac{\partial p}{\partial t} = -\alpha_t(v, \mathrm{Grad}_t\ p) - \mathrm{Div}_t\ v, \tag{8.6}$$

где $p = \ln \rho$. Введем $p_0 = \ln \rho_0$.

Покажем, что решение уравнения (8.6) с начальными условиями $p(0) = p_0$ описывается формулой $p(t, x) = p_0(g_{-t}(x)) - \int\limits_0^t (\mathrm{Div}_\tau\ v)(s, g_s(g_{-t}(x))\, ds$. Введем произведение $[0, T] \times \mathbb{R}^n$ и рассмотрим функцию p_0 как заданную на поверхности уровня $t = 0$. Рассмотрим векторное поле $(1, v(t, x))$ на $[0, T] \times \mathbb{R}^n$. Орбиты его потока $\hat{g}_t$, начинающиеся в точках поверхности $t = 0$, имеют вид $\hat{g}_t(0, x) = (t, g_t(x))$, и поток является гладким, как и g_t. Рассмотрим на $[0, T] \times \mathbb{R}^n$ риманову метрику $\bar{\alpha}(\cdot, \cdot)$ (см. раздел 2). Отметим, что для каждого (t, x) точка $\hat{g}_{-t}(t, x)$ принадлежит поверхности уровня $t = 0$, где функция p_0 задана. Таким образом, с одной стороны, $(1, v)p(t, x)$ — производная функции $p(t, x)$ по направлению векторного поля $(1, v)$ — по построению равна $-\mathrm{Div}_t\ v(t, x)$. А с другой стороны, нетрудно вычислить, что $(1, v)p(t, x) = \dfrac{\partial}{\partial t} p(t, x) + \alpha_t(v(t, x), \mathrm{Grad}_t\ p(t, x))$. Так что (8.6) выполняется.

Подчеркнем, что $\rho = e^p$, действительно, нигде не равно нулю и, таким образом, рассуждения корректны.

После нахождения плотности $\hat{\rho}(t, x)$ для решения уравнения (8.1) мы можем найти также осмотическую скорость $u^\xi(t, x)$ по формуле (2.1), т. е. $u = \dfrac{1}{2} \mathrm{Grad}_t\ \hat{p} + \dfrac{1}{2} \Xi = \mathrm{Grad}_t \ln \sqrt{\hat{\rho}} + \dfrac{1}{2} \Xi$. Отметим, что u однозначно определяется плотностью ρ и полем α и, таким образом, производная в среднем справа для решения также однозначно определяется формулой $a(t,x) = v(t,x) + \frac{1}{2}\operatorname{Grad}_t \hat{p} + \frac{1}{2}\Xi = v(t,x) + \operatorname{Grad}_t \ln\sqrt{\hat{\rho}} + \frac{1}{2}\Xi$.

Из леммы 5.1 и из условия теоремы вытекает, что имеется гладкое поле $A(t,x)$ такое, что $A(t,x)A^*(t,x) = \alpha(t,x)$ и выполняется оценка $\|A(t,x)\| < K(1+\|x\|)$. Тогда из общей теории уравнений с производными в среднем справа следует, что $\xi(t)$, как выше, удовлетворяет стохастическому дифференциальному уравнению

$$\xi(t) = \xi_0 + \int_0^t a(s,\xi(s))ds + \int_0^t A(s,\xi(s))dw(s). \tag{8.7}$$

Из условия теоремы и из результатов [10] следует, что (8.7) имеет сильное и сильно единственное решение $\xi(t)$ с начальной плотностью ρ_0, которое корректно определено на отрезке $t \in [0,T]$. Таким образом, из теоремы 1.2 мы выводим, что $D_2\xi(t) = \alpha(t,\xi(t))$. Тот факт, что $D_S\xi(t) = v(t,\xi(t))$, следует из построения. □

Замечание 8.1. В отличие от стандартных стохастических потоков, где обычно начальными значениями орбит являются детерминированные точки, для потока, порожденного уравнением (8.1), начальные значения являются распределенными случайными величинами с гладкими и нигде не равными нулю плотностями распределения (см. формулировку теоремы 8.1). Чтобы отличать потоки, существующие по теореме 8.1, от стандартных, мы назовем их *обобщенными.* Обозначим через a^i координаты вектора $a(t,x)$, через a^i_* — координаты вектора $a_*(t,x)$, а через α^{ij} — элементы матрицы $\alpha(t,x)$. Нетрудно видеть, что генератор обобщенного потока, порожденного уравнением (8.1), имеет вид $\mathcal{A} = a^i\frac{\partial}{\partial x^i} + \frac{1}{2}\alpha^{ij}\frac{\partial^2}{\partial x^i\partial x^j}$, а обратный генератор (генератор обратного обобщенного потока) имеет вид $\tilde{\mathcal{A}}_* = -a^i_*\frac{\partial}{\partial x^i} + \frac{1}{2}\alpha^{ij}\frac{\partial^2}{\partial x^i\partial x^j}$.

Лемма 8.1. *Пусть $\rho(t,x)$, $v(t,x)$, $\alpha(x)$ и Λ_α такие же, как в теореме* 8.1, *но $\alpha(x)$ автономно. Тогда поток векторного поля $(1, v(t,x))$ на $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n$ сохраняет форму объема $\rho(t,x)dt\wedge\Lambda_\alpha$, т. е., $L_{(1,v(t,x))}\rho(t,x)dt\wedge\Lambda_\alpha = 0$, где $L_{(1,v(t,x))}\rho(t,x)dt\wedge\Lambda_\alpha$ — производная Ли формы $\rho(t,x)dt\wedge\Lambda_\alpha$ по направлению векторного поля $(1,v(t,x))$*

Доказательство. Введем $p(t,x) = \ln\rho(t,x)$, т. е. $\rho(t,x) = e^{p(t,x)}$. Напомним, что $\rho(t,x)dt\wedge\Lambda_\alpha = \rho(t,x)\sqrt{\det(a_{ij})(x)}dt\wedge\Lambda_E$. Поскольку $\rho(t,x)\sqrt{\det(a_{ij})(x)}dt\wedge\Lambda_E$ — форма объема, то получаем $L_{(1,v)}\rho(t,x)\sqrt{\det(a_{ij})(x)}dt\wedge\Lambda_E = d((1,v)\rfloor\,\rho(t,x)\sqrt{\det(a_{ij})(x)}dt\wedge\Lambda_E)$, где $\rfloor$ обозначает внутреннее произведение вектора $(1,v)$ и формы $\rho(t,x)\sqrt{\det(a_{ij})(x)}dt\wedge\Lambda_E$ (см. [32]). Из последней формулы легко вывести, что

$$\begin{aligned}
&L_{(1,v)}\rho(t,x)\sqrt{\det(a_{ij})(x)}dt\wedge\Lambda_E = \\
&\qquad = \left(\frac{\partial\rho}{\partial t} + v\rho + \rho\operatorname{div} v\right)\sqrt{\det(a_{ij})(x)}dt\wedge\Lambda_E + \left(v\sqrt{\det(a_{ij})(x)}\right)\rho dt\wedge\Lambda_E = \\
&\qquad\qquad = \left(\frac{\partial p}{\partial t} + vp + \operatorname{div} v + v\ln\sqrt{\det(a_{ij})(x)}\right)\rho\sqrt{\det(a_{ij})(x)}dt\wedge\Lambda_E.
\end{aligned} \tag{8.8}$$

Но $\operatorname{div} v + v\ln\sqrt{\det(a_{ij})(x)} = \operatorname{Div} v$, а vp — производная p по направлению v, что по определению равно $\alpha(\operatorname{Grad} p, v)$, где Grad — градиент относительно метрики $\alpha(\cdot,\cdot)$. Таким образом,

$$L_{(1,v)}\rho(t,x)\sqrt{\det(a_{ij})(x)}dt\wedge\Lambda_E = \left(\frac{\partial p}{\partial t} + \operatorname{Div} v + \alpha(\operatorname{Grad} p, v)\right)\rho(t,x)\sqrt{\det(a_{ij})(x)}dt\wedge\Lambda_E. \tag{8.9}$$

С другой стороны, нетрудно вычислить, что $\operatorname{Div}(\rho v) = \rho v\ln\sqrt{\det(a_{ij})} + v\rho + \rho\operatorname{div} v$. Тогда уравнение неразрывности (2.2) преобразуется к виду $\frac{\partial\rho}{\partial t} = -\alpha(\operatorname{Grad}\rho, v) - \rho\operatorname{Div} v$, т. е., после деления на ρ, к виду $\frac{\partial p}{\partial t} = -\operatorname{Div} v - \alpha(\operatorname{Grad} p, v)$. После подстановки этого выражения для $\frac{\partial p}{\partial t}$ в (8.9) мы получаем, что $L_{(1,v)}\rho(t,x)\sqrt{\det(a_{ij})(x)}dt\wedge\Lambda_E = 0$. □

Замечание 8.2. Отметим, что плотность ρ не определяет процесс однозначно — для однозначного задания процесса необходима мера на пространстве выборочных траекторий. При заданных ρ и (α^{ij}) (следовательно, при заданном $\hat{\rho}$) осмотическая скорость $u(t,x)$ однозначно задается формулой (2.1). При этом из доказательство леммы 8.1 видно, что любое векторное поле $v(t,x)$ такое, что $L_{(1,v(t,x))}\rho(t,x)dt \wedge \Lambda_\alpha = 0$, является текущей скоростью некоторого процесса с плотностью ρ и коэффициентом диффузии (α^{ij}), поскольку для указанного v и заданного ρ выполняется равенство (2.2).

9. Необходимые и достаточные условия полноты случайных потоков

В этом разделе нас прежде всего интересуют необходимые и достаточные условия полноты случайных потоков, порожденных уравнениями (8.1) с текущими скоростями, у которых начальные значения орбит являются случайными величинами, независимыми от винеровского процесса $w(t)$ и имеющие гладкие плотности нигде не равными нулю. Тем не менее полнота обычных потоков тоже изучается в этом разделе. Из соображений доступности изложения мы рассматриваем задачу о полноте для уравнений в $\mathbb{R}^n$. Рассмотрение на многообразиях практически не отличается от случая линейных пространств. Для обычных потоков на многообразиях подробное изложение имеется в [50].

Рассмотрим одноточечную компактификацию $\mathbb{R}^n \cup \{\infty\}$ пространства $\mathbb{R}^n$, где система открытых окрестностей точки $\{\infty\}$ состоит из дополнений до всех компактных множеств в $\mathbb{R}^n$. Обозначим через $\xi(s) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n \cup \{\infty\}$ стохастический поток. Для любой точки $m \in \mathbb{R}^n$ и момента времени t орбита $\xi_{t,m}(s)$ этого потока — это единственное решение соответствующего стохастического уравнения с начальными условиями $\xi_{t,m}(t) = m$. Мы считаем коэффициенты уравнения гладкими, т. е. орбита — это сильное решение и марковский диффузионный процесс, заданный на некотором случайном интервале. Точка $\{\infty\}$ является «кладбищем» куда решения (заданные на случайном интервале) попадают после «взрыва».

Мы отсылаем читателя к [76] за более подробной информацией о поведении диффузионного процесса около бесконечности.

Напомним, что генератор потока $\mathcal{L}$ является касательным вектором второго порядка. В локальных координатах можно найти матрицу его коэффициентов чисто второго порядка, которая симметрична и неотрицательно определена.

Обозначим вероятностное пространство, на котором задан поток, через $(\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P})$ и предположим, что оно полно. Мы также всегда имеем дело с сепарабельными реализациями всех процессов.

Пусть $T > 0$ — вещественное число.

Определение 9.1. Поток $\xi(s)$ *полон на* $[0,T]$, если $\xi_{t,m}(s)$ п.н. принимает значения в $\mathbb{R}^n$ для любой пары (t,m) (с $0 \leqslant t \leqslant T$) и для всех $s \in [t,T]$. Поток $\xi(s)$ *полон*, если он полон на любом интервале $[0,T] \subset \mathbb{R}$.

Определение 9.2. Пусть X — топологическое пространство. Функция $\varphi : X \to \mathbb{R}$ называется *собственной* (т. е. *собственным отображением* в $\mathbb{R}$), если прообраз любого относительно компактного множества в $\mathbb{R}$ является относительно компактным множеством в X.

Теорема 9.1. *Пусть существует гладкая собственная функция φ на $\mathbb{R}^n$ такая, что для некоторого вещественного числа $C > 0$ выполнено $\mathcal{L}(t,m)\varphi < C$ во всех точках $t \in [0,+\infty)$ и $x \in \mathbb{R}^n$, где $\mathcal{L}(t,m)$ — генератор потока. Тогда поток $\xi(t,s)$ полон.*

Доказательство. Рассмотрим набор множеств $W_k = \varphi^{-1}([0,k))$ в $\mathbb{R}^n$ с натуральными числами $1, 2, \ldots, k, \ldots$ Так как φ собственная, эти множества относительно компактны и $\bigcup\limits_k W_k = \mathbb{R}^n$. Кроме того, по построению $W_i \subset W_{i+1}$ при всех $i = 1, 2, \ldots, k, \ldots$

Выберем произвольные $t \in [0,+\infty)$ и $x \in \mathbb{R}^n$ и рассмотрим орбиту $\xi_{t,m}(s)$. Обозначим через τ_k момент первого выхода $\xi_{t,m}(s)$ на границу W_k. Выразим $\varphi(\xi_{t,m}(s \wedge \tau_k))$ по формуле Ито. Так как W_k относительно компактно, интеграл Ито на отрезке $[t, s \wedge \tau_k)$ является мартингалом и, таким образом, его математическое ожидание равно 0. Тогда

$$E\varphi(\xi_{t,m}(s\wedge\tau_k)) = \varphi(m) + \int\limits_t^{s\wedge\tau_k} (\mathcal{L}\varphi)(\theta,\xi_{t,m}(\theta))d\theta < \varphi(m) + Cs,$$

так как $\mathcal{L}(t,m)\varphi < C$ и $s \geqslant s\wedge\tau_k$.

Рассмотрим множество $\Omega_s^k = \{\omega\in\Omega \mid s<\tau_k\}$. Очевидным образом

$$k(1-\mathsf{P}(\Omega_s^k)) < E\varphi(\xi_{t,m}(s\wedge\tau_k)),$$

поскольку для $\omega\notin\Omega_s^k$ мы имеем $\xi_{t,m}(s\wedge\tau_k,\omega) = \xi_{t,m}(\tau_k,\omega)$, т. е. $\varphi(\xi_{t,m}(s\wedge\tau_k,\omega)) = k$. Таким образом,

$$1-\mathsf{P}(\Omega_s^k) < \frac{\varphi(m)+Cs}{k}. \tag{9.1}$$

Следовательно, $\lim\limits_{k\to\infty}(1-\mathsf{P}(\Omega_s^k)) = 0$. Однако по построению $\lim\limits_{k\to\infty}\Omega_s^k = \bigcup\limits_{i=1}^{\infty}\Omega_s^i = \Omega$, т. е. для любого фиксированного $s\geqslant t$ значение $\xi_{t,m}(s)$ существует в M с вероятностью 1. □

Теорема 9.1 является вариантом результата, полученного в [45].

Нас более всего интересуют потоки, порожденные уравнениями (8.1) с текущими скоростями. У орбит этих потоков начальные значения являются случайными величинами с гладкими нигде не равными нулю плотностями вероятностей, а не «детерминированными» точками, как у обычных потоков.

Введем обозначение: если орбита обобщенного потока $\xi(s)$ принимает случайное значение ξ_0 в момент времени t, орбита обозначается $\xi_{t,\xi_0}(s)$.

Везде ниже мы предполагаем, что все случайные начальные условия являются интегрируемыми случайными величинами.

Для того, чтобы исследовать полноту обобщенного потока, т. е. существование решений всех задач Коши уравнения (8.1) при всех $t\in[0,\infty)$ в $\mathbb{R}^n$, надо иметь понятие локального решения уравнения и показать его продолжимость до ∞. Напомним, что локальное решение для уравнения с производными в среднем справа с детерминированными начальными данными (т. е. по сути дела для решения уравнения в форме Ито с детерминированными начальными данными) локальное решение определяется как решение на отрезке $[0,\tau]$, где τ — момент первого выхода на границу некоторой компактной области, содержащей начальное значение. Для случая обобщенных потоков такое определение локального решения некорректно. Мы предъявим модификацию этого понятия в данном случае.

Рассмотрим в $\mathbb{R}^n$ расширяющуюся последовательность компактов V_i с гладкими границами таких, что $V_i\subset V_{i+1}$ и $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} V_i = \mathbb{R}^n$. Построим систему гладких колоколообразных функций φ_i, равных единице в V_i, нулю вне V_{i+1} и имеющих равномерно ограниченные первые частные производные во всех $V_{i+1}\backslash V_i$. Пусть α^* — постоянная симметрическая невырожденная матрица. Рассмотрим последовательность уравнений

$$\begin{cases} D_S\xi_i(t) = \varphi_i v(t,\xi(t)),\\ D_2\xi_i(t) = \varphi_i\alpha(t,\xi(t)) + (1-\varphi_i)\alpha^* \end{cases} \tag{9.2}$$

с одним и тем же начальным условием, как в теореме 8.1. Из теоремы 8.1 следует, что все уравнения (9.2) имеют решения, которые мы назовем *локальными решениями уравнения* (8.1).

Определение 9.3. Обобщенный поток $\xi(s)$ называется *полным на* $[0,T]$, если $\xi_{t,\xi_0}(s)$ п.н. принимает значения в $\mathbb{R}^n$ для любого случайного начального условия ξ_0 и начального момента времени t (с $0\leqslant t\leqslant T$) и для всех $s\in[t,T]$. Обобщенный поток $\xi(s)$ называется *полным*, если он полон на любом интервале $[0,T]\subset\mathbb{R}$.

Отметим, что частным случаем определения 9.3 является стандартное определение 9.1 полноты обычного потока, в котором задействованы только орбиты, у которых начальные условия являются (детерминированными) точками из $\mathbb{R}^n$. Исследование полноты обобщенных потоков важно, так как именно обобщенные потоки порождаются уравнениями с текущими скоростями.

В этом случае доказательство утверждения типа теоремы 9.1 нуждается в модификации. Мы сформулируем и докажем это утверждение в виде отдельной теоремы.

Теорема 9.2. *Пусть существует гладкая положительная собственная функция φ на $\mathbb{R}^n$ такая, что $\mathcal{L}(t,x)\varphi < C$ для некоторого $C > 0$ при всех $t \in \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}^n$, где $\mathcal{L}$ — генератор обобщенного потока $\xi(s)$. Тогда обобщенный поток $\xi(s)$ полон.*

Доказательство. Рассмотрим набор множеств $W_k = \varphi^{-1}([0,k))$ в $\mathbb{R}^n$ для положительных целых чисел $1, 2, \dots, k, \dots$ Поскольку φ — собственная функция, эти множества относительно компактны и $\bigcup\limits_k W_k = \mathbb{R}^n$. Кроме того, по построению $W_i \subset W_{i+1}$ при $i = 1, 2, \dots, k, \dots$

Выберем произвольное $t \in [0, +\infty)$ и случайное начальное значение ξ_0 и рассмотрим орбиту $\xi_{t,\xi_0}(s)$. Опишем $\varphi(\xi_{t,\xi_0}(s))$ по формуле Ито. Поскольку интеграл Ито является мартингалом, его математическое ожидание равно нулю. Тогда

$$E\varphi(\xi_{t,\xi_0}(s)) = E\varphi(\xi_0) + E\int_t^s (\mathcal{L}\varphi)(\nu, \xi_{t,\xi_0}(\nu))d\nu < E\varphi(\xi_0) + Cs,$$

так как $\mathcal{L}(t,x)\varphi < C$.

Введем множество $\Omega^k = \{\omega \in \Omega \mid \xi_{0_\omega} \in W_k\}$ и обозначение $P(\Omega_k) = \lambda_k$. Так как для любого $\varepsilon > 0$ существует компакт $K_\varepsilon \subset \mathbb{R}^n$ такой, что $P(\omega \mid \xi_{0_\omega} \in K_\varepsilon) > 1 - \varepsilon$, понятно, что $\lim\limits_{k\to\infty} \lambda_k \to 1$.

Рассмотрим множество $\Omega_s^k = \{\omega \in \Omega^k \mid \xi_{0_\omega} \in W_k, s < \tau_k\}$, где τ_k — момент первого выхода выборочной траектории на границу множества W_k. Очевидным образом

$$k(\lambda_k - \mathsf{P}(\Omega_s^k) < \int_{\Omega^k} \varphi(\xi_{t,\xi_{0_\omega}}(s))d\mathsf{P},$$

так как при $\omega \in \Omega^k \backslash \Omega_s^k$ мы получаем $\xi_{t,\xi_0}(s \wedge \tau_k, \omega) = \xi_{t,\xi_0}(\tau_k, \omega)$, т. е. $\varphi(\xi_{t,\xi_0}(s \wedge \tau_k, \omega)) = k$. Но

$$\int_{\Omega^k} \varphi(\xi_{t,\xi_{0_\omega}}(s))d\mathsf{P} < E\varphi(\xi_{t,\xi_0}(s)) < E\varphi(\xi_0) + Cs.$$

Таким образом,

$$\lambda_k - P(\Omega_s^k) < \frac{E\varphi(\xi_0) + Cs}{k}. \tag{9.3}$$

Следовательно, $\lim\limits_{k\to\infty} (\lambda_k - \mathsf{P}(\Omega_s^k)) = 0$. Поскольку $\lim\limits_{k\to\infty} \lambda_k = 1$ (см. выше), то и $\lim\limits_{k\to\infty} \mathsf{P}(\Omega_s^k) = 1$. Однако по построению $\lim\limits_{k\to\infty} \Omega_s^k = \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} \Omega_s^i = \Omega$, т. е. при любых фиксированных $s \geqslant t$ значение $\xi_{t,\xi_0}(s)$ существует в $\mathbb{R}^n$ с вероятностью 1. □

Рассмотрим случайный элемент $\eta : \Omega \to \mathbb{R}^n$ и компакт $K \subset \mathbb{R}^n$. Введем измеримое множество $\Omega_K \subset \Omega$ соотношением $\Omega_K = \{\omega \in \Omega \mid \eta(\omega) \in K\}$. Понятно, что $\mathsf{P}(\Omega_K) > 0$. Обозначим $\mathsf{P}(\Omega_K) = \lambda > 0$.

Для собственной функции φ на $\mathbb{R}^n$ построим набор относительно компактных множеств $V_k = \varphi^{-1}([0,k))$, где k — положительное целое число. Очевидным образом $V_k \subset V_{k+1}$ для любого k и $\bigcup\limits_{k=1}^{\infty} V_k = \mathbb{R}^n$. Отметим, что K принадлежит всем V_k с достаточно большим k. Рассмотрим «орбиту» $\xi_{0,\eta}(s)$ обобщенного потока $\xi(s)$ со случайным начальным значением η.

Выберем произвольное $T > 0$. Следующая лемма является небольшой модификацией теоремы 9.1.

Лемма 9.1. *Пусть существует гладкая собственная положительная функция $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ такая, что при любых t и x выполняется неравенство $\mathcal{L}\varphi < C$ для некоторой вещественной константы $C > 0$, не зависящей от t и x, где $\mathcal{L}$ — генератор обобщенного потока $\xi(s)$. Тогда вероятность $\mathsf{P}\{\omega \in \Omega_K \mid \xi_{0,\eta}(\omega)(T) \notin V_n\}$ стремится к нулю при $n \to \infty$. Если имеется последовательность потоков, для которых это неравенство выполняется с теми же φ, C, T, K и λ, тогда соответствующие вероятности сходятся к нулю равномерно для всех таких процессов.*

Доказательство. Так как φ гладка, ее значения на компакте K равномерно ограничены некоторой константой $C_K > 0$: $\sup\limits_{x \in K} \varphi(x) < C_K$.

Из конструкции компактов V_k вытекает, что при k больше, чем некоторое N, все V_k содержат K. Ниже мы имеем дело только с такими k.

Рассмотрим вещественнозначный процесс $\varphi(\xi_{0,\eta}(s))$ и опишем его по формуле Ито. Интеграл Ито в этом описании является мартингалом и, таким образом, его математическое ожидание равно нулю. Тогда из формулы Ито и условия $\mathcal{L}\varphi < C$ мы получаем

$$E(\varphi(\xi_{0,\eta}(T)) - \varphi(\eta)) = E\int\limits_0^T \mathcal{L}\varphi(\xi_{0,\eta}(\nu))d\nu < CT. \tag{9.4}$$

Принимая во внимание, что $\sup\limits_{x \in K} \varphi(x) < C_K$ (см. выше), мы выводим из (9.4), что

$$\int\limits_{\Omega_K} \varphi(\xi_{0,\eta}(T))d\mathsf{P} < \int\limits_{\Omega_K} (\varphi(\eta))d\mathsf{P} + E\int\limits_0^T \mathcal{L}\varphi(\xi_{0,\eta})(\nu))d\nu < \lambda C_K + CT. \tag{9.5}$$

Введем множества $\Omega_T^k \subset \Omega_K$ соотношением

$$\Omega_T^k = \{\omega \in \Omega_K \mid T < \tau_k\},$$

где τ_k — момент первого выхода выборочной траектории $\xi_{0,\eta_\omega}(s)$ на границу компакта V_k. Тогда

$$k(\lambda - \mathsf{P}(\Omega_T^k)) < \int\limits_{\Omega_K} (\varphi(\eta))d\mathsf{P} + \int\limits_{\Omega_K}\int\limits_0^T \mathcal{L}\varphi(\nu, \xi_{0,\eta}(\nu))d\theta d\mathsf{P},$$

поскольку если $\omega \in \Omega_K$, но $\omega \notin \Omega_T^k$, мы получаем $\xi_{0,\eta}(\omega)(T \wedge \tau_k) = \xi_{0,\eta}(\omega)(\tau_k) = k$. Таким образом, из (9.5) следует, что для любого k

$$\lambda - \mathsf{P}(\Omega_T^k) < \frac{\lambda C_K + CT}{k}. \tag{9.6}$$

Следовательно $\lim\limits_{n\to\infty}(\lambda - \mathsf{P}(\Omega_T^n(k))) = 0$. Равномерная сходимость следует из того факта, что оценка (9.6) та же самая для всех рассматриваемых потоков. $\square$

Следуя Л. Шварцу [83, 85], дадим следующее определение.

Определение 9.4. Будем говорить, что поток $\eta(s)$ *непрерывен на бесконечности на отрезке* $[0,T] \subset \mathbb{R}$ по Шварцу, если при всех $0 \leqslant t \leqslant T$ и при любом компакте $K \subset \mathbb{R}^n$ для любой орбиты $\eta_{t,x_i}(s)$ с детерминированными начальными значениями x_i выполняется равенство

$$\lim_{\|x_i\|\to+\infty} \mathsf{P}(\eta_{t,x_i}(T)) \in K) = 0. \tag{9.7}$$

Поток *непрерывен на бесконечности*, если это выполняется при любом $T > 0$.

Модифицируем это определение на случай обобщенных потоков.

Определение 9.5. Говорят, что обобщенный поток $\eta(s)$ *непрерывен на бесконечности на отрезке* $[0,T] \subset \mathbb{R}$, если при всех $0 \leqslant t \leqslant T$ и при любом компакте $K \subset \mathbb{R}^n$ для любой орбиты $\eta_{t,\eta_i}(s)$ выполняется равенство

$$\lim_{\|E\eta_i\|\to+\infty} \mathsf{P}(\eta_{t,\eta_i}(T)) \in K) = 0. \tag{9.8}$$

Обобщенный поток *непрерывен на бесконечности*, если это выполняется при любом $T > 0$.

Легко видеть, что из непрерывности на бесконечности в смысле определения 9.5 следует непрерывность на бесконечности в смысле определения 9.4. Следующее утверждение мы докажем для обобщенных потоков. Из сказанного выше вытекает, что аналогичное утверждение выполняется и для обычных потоков.

Теорема 9.3. *Пусть на $\mathbb{R}^n$ имеется гладкая положительная собственная функция и такая, что $\tilde{\mathcal{L}}u < C$ для некоторой константы $C > 0$, где $\tilde{\mathcal{L}}$ — генератор обратного обобщенного потока $\tilde{\eta}(t)$. Тогда прямой обобщенный поток $\eta(t)$ непрерывен на бесконечности на $[0, T]$.*

Доказательство. Предположим противное, т. е. что прямой обобщенный поток не непрерывен на бесконечности на $[0, T] \subset \mathbb{R}$. Это означает, что существует последовательность случайных величин η_i со свойством $\|E\eta_i\| \to \infty$ такая, что для некоторого компакта K выполняется соотношение

$$\lim_{\|E\eta_i\|\to+\infty} \mathsf{P}(\eta_{t,\eta_i}(T) \in K) \neq 0.$$

Таким образом, существует $\lambda > 0$ такое, что

$$\mathsf{P}(\eta_{t,\eta_i}(T) \in K) > \lambda \tag{9.9}$$

при достаточно большом i.

Напомним, что по условию существует гладкая положительная собственная функция u такая, что $\tilde{\mathcal{L}}u < C$ на $\mathbb{R}^n$ для некоторой положительной константы C. По теореме 9.5 отсюда следует, что обратный обобщенный поток $\tilde{\eta}(s)$ полон. В частности, его орбиты п.н. корректно определены в любой момент времени $t \in [0, T]$. Рассмотрим орбиты $\tilde{\eta}_{(T,\eta_{t,\eta_i(T)})}(s)$ потока $\tilde{\eta}(s)$ с начальными условиями $\tilde{\eta}_{(T,\eta_{t,\eta_i}(T))}(T) = \eta_{t,\eta_i}(T)$. По лемме 9.1

$$\lim_{k\to\infty} \mathsf{P}\{\omega \in \Omega \mid \tilde{\eta}_{T,\eta_i(T)}(\omega)(T) \in K, \tilde{\eta}_{T,\eta_i(T)}(\omega)(t) \notin V_k\} = 0$$

при $k \to \infty$ равномерно по i, т. е. для любого $\varepsilon > 0$ существует $N(\varepsilon)$ такое, что при $n > N(\varepsilon)$ мы получаем

$$\mathsf{P}\{\omega \in \Omega \mid \tilde{\eta}_{T,\eta_i(T)}(\omega)(T) \in K, \tilde{\eta}_{T,\eta_i(T)}(\omega)(t) \notin V_k\} < \varepsilon$$

при всех i. Выберем $\varepsilon < \lambda$. Однако, из (9.9) вытекает, что при любом достаточно большом i существует множество $\{\omega \in \Omega \mid \tilde{\eta}_{T,\eta_i(T)}(\omega)(T) \in K, \tilde{\eta}_{T,\eta_i(T)}(\omega)(t) \notin V_k\}$ с вероятностью большей, чем λ, для которого $\tilde{\eta}_{T,\eta_i}(T)(t) = \eta_{t,\eta_i}(t)$ лежит вне любого V_k. Это противоречие завершает доказательство. □

Наша следующая задача — построить специальную собственную функцию, связанную с полным стохастическим потоком $\xi(s)$.

Рассмотрим расширяющуюся последовательность компактных множеств M_i таких, что $M_i \subset M_{i+1}$ для всех i и $\bigcup\limits_i M_i = \mathbb{R}^n$. Через T_i мы обозначаем возрастающую последовательность вещественных чисел, стремящуюся к $+\infty$.

Для $(t, m) \in [0, T_i] \times M_i$ функции распределения $\mu_{t,m,s}$ случайных элементов $\xi_{t,m}(s)$, $s \in [t, T_i]$, на $\mathbb{R}^n$ формирует слабо компактное множество мер. Действительно, возьмем произвольную последовательность случайных элементов $\xi_{t_k,m_k}(s_k)$ и соответствующие меры μ_{t_k,m_k,s_k}. Так как $[0, T_i] \times M_i \times [0, T_i]$ компактно, можно выбрать подпоследовательность $t_{k_q}, m_{k_q}, s_{k_q}$ последовательности t_k, m_k, s_k, сходящуюся к некоторому t_0, m_0, s_0. Хорошо известно, что функция $Ef(\xi_{t,m}(s))$ непрерывна по совокупности переменных t, m, s для любой ограниченной непрерывной функции $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Тогда мы получаем, что $E(f(\xi_{t_{k_q},m_{k_q}}(s_{k_q}))) \to E(f(\xi_{t_0,m_0}(s_0)))$, т. е. из любой указанной последовательности мер можно выбрать слабо сходящуюся подпоследовательность.

Возьмем монотонно убывающую последовательность положительных чисел $\varepsilon_i \to 0$ такую, что ряд $\sum\limits_{i=1}^{\infty} \sqrt{\varepsilon_i}$ сходится. Из теоремы Прохорова следует, что для мер, соответствующих $\xi_{t,m}(s)$, $s \in [t, T_i]$, $(t, m) \in [0, T_i] \times M_i$, указанных выше, существует компакт $\Xi_i \subset \mathbb{R}^n$ такой, что для всех $\mu_{t,m,s}$ выполняется неравенство $\mu_{t,m,s}(\mathbb{R}^n \backslash \Xi_i) < \varepsilon_i$. Построим расширяющуюся систему компактов $\Theta_i \supset \bigcup\limits_{k=0}^{i} \Xi_k$ для любого i, которые являются замыканиями открытых областей в $\mathbb{R}^n$ с гладкими границами, так что $\Theta_i \subset \Theta_{i+1}$ для любого i и $\bigcup\limits_i \Theta_i = \mathbb{R}^n$. По построению при $s \in [0, T_i]$, $(t, m) \in [0, T_i] \times M_i$ выполняется соотношение $\mu_{t,m,s}(\mathbb{R}^n \backslash \Theta_i) < \varepsilon_i$. В частности, $\mu_{t,m,s}(\Theta_{i+1} \backslash \Theta_i) < \varepsilon_i$.

Выберем окрестности $\mathfrak{U}_i \subset \tilde{\mathfrak{U}}_i$ множеств Θ_i, которые полностью принадлежат Θ_{i+1}, и рассмотрим гладкие функции ψ_i, которые равны 0 на $\mathfrak{U}_i$, равны 1 на $\Theta_{i+1} \backslash \tilde{\mathfrak{U}}_i$ и принимают значения между 0 и 1 на $\tilde{\mathfrak{U}}_i\backslash\mathfrak{U}_i$. Построим функцию θ на M так, чтобы ее значения на $\Theta_{i+1}\backslash\Theta_i$ были равны $\psi_i\dfrac{1}{\sqrt{\varepsilon_i}}+(1-\psi_i)\dfrac{1}{\sqrt{\varepsilon_{i-1}}}$. Отметим, что на $\Theta_{i+1}\backslash\Theta_i$ значения θ не превышают $\dfrac{1}{\sqrt{\varepsilon_i}}$.

По построению мы получаем следующее утверждение.

Лемма 9.2. *Для полного потока $\xi(s)$ функция θ, построенная выше, гладкая, положительная и собственная.*

Теорема 9.4. *Если поток $\xi(t)$ полон, для любых (t,m) и любого $T>t$ выполняется неравенство $E\theta(\xi_{t,m}(s))<\infty$ при всех $s\in[t,T]$.*

Доказательство. Возьмем i такое, что $[0,T]\subset[0,T_i]$, $t\in[0,T_i]$ и $m\in M_i$. Тогда $\mu_{t,m,s}(\mathbb{R}^n\backslash\Theta_i)<\varepsilon_i$ и, таким образом, $\mu_{t,m,s}(\Theta_i)>(1-\varepsilon_i)$. По построению значения непрерывной функции θ на компакте Θ_i ограничены константой $\dfrac{1}{\sqrt{\varepsilon_{i-1}}}$. Тогда, также по построению,

$$E\theta(\xi_{t,m}(s))\leqslant\frac{1}{\sqrt{\varepsilon_{i-1}}}+\sum_{k=i}^{\infty}\varepsilon_k\frac{1}{\sqrt{\varepsilon_k}}=\frac{1}{\sqrt{\varepsilon_{i-1}}}+\sum_{k=i}^{\infty}\sqrt{\varepsilon_k}<C<+\infty \tag{9.10}$$

для некоторой положительной константы C, поскольку по определению ряд $\sum\limits_{k=i+1}^{\infty}\sqrt{\varepsilon_k}$ сходится. □

Следствие 9.1. *Функция $E\theta(\xi_{t,m}(s))$ интегрируема по $s\in[t,T]$.*

Доказательство. Из построения и из теоремы 9.4 следует, что для заданных t,m выполняется оценка (9.10) с одинаковым C для всех $s\in[t,T]$. □

Теорема 9.5. *Для любого стохастического потока $\xi(s)$ на $\mathbb{R}^n$, который полон на интервале $[0,T]$, существует собственная положительная функция θ на $\mathbb{R}^n$ такая, что для всех $t\in[0,T]$, $m\in\mathbb{R}^n$ и $s\in[t,T]$ выполняется неравенство $E\theta(\xi_{t,m}(s))<\infty$.*

Теорема 9.5 следует из леммы 9.2 и теоремы 9.4.

Зафиксируем произвольное $T>0$ и рассмотрим прямое произведение $\mathbb{R}^n_+=[0,T]\times\mathbb{R}^n$. Обозначим через $\pi_+:\mathbb{R}^n_+\to\mathbb{R}^n$ естественную проекцию: $\pi_+(t,x)=x$.

Теорема 9.6. *Пусть генератор $\mathcal{L}$ полного потока является гладким и строго эллиптическим. Тогда функция $u(t,x)=E\theta(\xi_{t,x}(T))$ на $\mathbb{R}^n_+$ является гладкой и удовлетворяет уравнению*

$$\Big(\frac{\partial}{\partial t}+\mathcal{L}\Big)u=0. \tag{9.11}$$

Доказательство. Поскольку $\mathbb{R}^n$ паракомпактно, мы можем выбрать счетное локально конечное открытое покрытие $\{V_i\}_{i=1}^{\infty}$ на $\mathbb{R}^n$ такое, что все V_i имеют компактные замыкания. Рассмотрим гладкое разбиение единицы $\{\varphi_i\}_{i=1}^{\infty}$, подчиненное этому покрытию. Тогда в каждой точке $m\in\mathbb{R}^n$ выполняется равенство $\theta(m)=\sum\limits_{i=1}^{\infty}\varphi_i(m)\theta(m)$.

Введем функцию $v_i(m)=\varphi_i(m)\theta(m)$, а также функции $u_i(t,m)=Ev_i(\xi_{t,m}(T))$ и $\theta_k(t,m)=\sum\limits_{i=0}^{k}u_i(t,m)$. Отметим, что все $v_i(m)$ гладкие и ограниченные. Тогда каждое $v_i(m)$ удовлетворяет условию теоремы VIII.4.1 из [11] и, таким образом, любое $u_i(t,m)$ является C^1-гладким по t, C^2-гладким по m и удовлетворяет соотношению $\dfrac{\partial}{\partial t}u_i+\mathcal{L}u_i=0$. Следовательно, все функции $\theta_k(t,m)$, являющиеся конечными суммами функций $u_i(t,m)$, также C^1-гладкие по t, C^2-гладкие по m и удовлетворяют $\dfrac{\partial}{\partial t}\theta_k+\mathcal{L}\theta_k=0$.

Очевидным образом $\theta(t,m)$ является пределом $\theta_k(t,m)$ при $k\to\infty$, и функции $\theta_k(t,m)$ образуют возрастающую локально ограниченную последовательность. Тогда, так как $\mathcal{L}$ строго эллиптический, утверждение следует из стандартных оценок Шаудера. (Для автономного $\mathcal{L}$ см. [40, Lemma 1.8].) □

Теорема 9.7. *Если полный поток $\xi(s)$ непрерывен на бесконечности в смысле определения* 9.5*, то функция $u(t,x) = E\theta(\xi_{t,x}(T))$ на $\mathbb{R}^n_+$ является собственной.*

Доказательство. Пусть поток $\xi(s)$ непрерывен на бесконечности в смысле определения 9.5. Тогда очевидно, что сужение этого потока на орбиты с детерминированными начальными условиями является непрерывным на бесконечности по Шварцу (см. определение 9.4). Теперь, чтобы доказать собственность функции $u(t,x)$, достаточно показать, что из $u(t,x_i) \to \infty$ следует $\theta(x_i) \to \infty$, т. е. что для любого $C > 0$ существует $\Xi > 0$ такое, что из $\theta(x_i) > \Xi$ следует $u(t,x_i) > C$ для любого $t \in [0,T]$. Так как θ собственно, $K = \theta^{-1}([0,2C])$ компактно. Из формулы (9.8) следует, что для любого $t \in [0,T]$ существует Ξ такое, что $\mathrm{P}(\xi_{t,x_i}(T) \notin K) > \dfrac{1}{2}$ при $\theta(x_i) > \Xi$. Тогда $u(t,x) = E\theta(\xi_{t,x}(T)) > 2C \cdot \dfrac{1}{2} = C$. Так как t принадлежит компактному множеству $[0,T]$ и $u(t,x)$ непрерывно по t, это завершает доказательство. □

На $\mathbb{R}^n_+$ рассмотрим обобщенный поток $\eta(s) = (s, \xi(s))$. Очевидным образом при $(t,x) \in \mathbb{R}^n_+$ траектория потока $\eta_{(t,x)}(s)$ удовлетворяет соотношению

$$\pi_+(\eta_{(t,x)}(s)) = \xi_{t,x}(s).$$

Понятно, что генератор $\mathcal{L}_+$ потока $\eta(s)$ имеет вид:

$$\mathcal{L}_{+(t,x)} = \frac{\partial}{\partial t} + \mathcal{L}(t,x). \tag{9.12}$$

Теорема 9.8. *Обобщенный поток $\xi(s)$ на $\mathbb{R}^n$, имеющий гладкий строго эллиптический генератор и непрерывный на бесконечности в смысле определения* 9.5*, полон на $[0,T]$ тогда и только тогда, когда существует гладкая положительная собственная функция $u_+ : \mathbb{R}^n_+ \to \mathbb{R}$ такая, что $\mathcal{L}_+ u_+ < C$ для некоторой константы $C > 0$ во всех точках $(t,x) \in \mathbb{R}^n_+$.*

Доказательство. Пусть существует гладкая положительная собственная функция $u_+(t,x)$ на $\mathbb{R}^n_+$ такая, что $\mathcal{L}_+ u_+ < C$ во всех точках $\mathbb{R}^n_+$. Тогда из теоремы 9.1 следует, что поток $\eta(s)$ полон. Так что поток $\xi(s) = \pi\eta(s)$ также полон.

Пусть поток $\xi(s)$ полон. Рассмотрим функцию $\theta(x)$ на $\mathbb{R}^n_+$, указанную выше, и функцию $u_+(t,x) = E\theta(\xi_{t,x}(T))$ на $\mathbb{R}^n_+$. Поскольку поток $\xi(s)$ непрерывен на бесконечности, $u_+(t,x)$ является собственной функцией по теореме 9.7. По теореме 9.6 она также гладкая и удовлетворяет равенству $\Big(\dfrac{\partial}{\partial t} + \mathcal{A}\Big) u_+ = \mathcal{A}_+ u_+ = 0$. □

Следствие 9.2. *Обобщенный поток $\xi(s)$ на $\mathbb{R}^n$, как в теореме* 9.8*, полон тогда и только тогда, когда при любом $T > 0$ существует положительная собственная функция $u_+ : \mathbb{R}^n_+ \to \mathbb{R}$ на $\mathbb{R}^n_+$, которая C^1-гладка по $t \in [0,T]$, C^2-гладка по $x \in \mathbb{R}^n$ и такая, что $\mathcal{L}_+ u(t,x) < C$ для некоторой константы $C > 0$ во всех точках $(t,x) \in \mathbb{R}^n_+$.*

Обратимся теперь непосредственно к обобщенному потоку, порожденному уравнением (8.1). Напомним, что существование решения этого уравнения получено только в предположениях, что начальное значение решения является случайным и имеет гладкую плотность вероятности ρ_0, которая нигде не равна нулю. Кроме того, симметрические матрицы α гладки и положительно определены (т. е., в частности, не вырождены). В замечании 8.1 описан вывод формул для генератора $\mathcal{A}$ прямого обобщенного потока и генератора $\tilde{\mathcal{A}}$ обратного обобщенного потока, порожденных этим уравнением. Из полученных выше результатов получаем следующее:

Теорема 9.9. *Пусть для обратного генератора $\tilde{\mathcal{A}}$ выполнено условие теоремы* 9.3*, для прямого генератора $\mathcal{A}$ — условия теоремы* 9.1*. Тогда обобщенный поток, порожденный уравнением* (8.1)*, полон и непрерывен на бесконечности.*

При переходе на $\mathbb{R}^n_+$ получаем следующее утверждение.

Теорема 9.10. *Для того, чтобы одновременно прямой обобщенный поток $\xi(s)$ и обратный обобщенный поток $\tilde{\xi}(s)$, порожденные уравнением* (8.1)*, были непрерывны на бесконечности и* *полны, необходимо и достаточно, чтобы на* $\mathbb{R}^n_+$ *существовали положительные гладкие собственные функции* $u(t,x)$ *и* $\tilde{u}(t,x)$ *такие, что выполняются неравенства* $\Big(\dfrac{\partial}{\partial t}+\mathcal{A}\Big)u<C$ *и* $\Big(-\dfrac{\partial}{\partial t}+\tilde{\mathcal{A}}\Big)\tilde{u}<\tilde{C}$ *для некоторых положительных констант* C *и* $\tilde{C}$.

Здесь мы воспользовались описанием прямого и обратного генераторов в замечании 8.1.

10. Включения с текущими скоростями

В этом разделе мы рассмотрим дифференциальные включения с текущими скоростями на плоском n-мерном торе $\mathcal{T}^n$. Переход на тор позволяет упростить многие конструкции и сосредоточиться на свойствах самих включений, а не на технических трудностях, связанных с системами на $\mathbb{R}^n$. Напомним, что плоский тор — это фактор-пространство $\mathbb{R}^n$ по целочисленной решетке, на котором рассматривается риманова метрика, унаследованная из скалярного произведения в $\mathbb{R}^n$. Так что, с одной стороны, геометрические конструкции на плоском торе практически такие же, как в евклидовом пространстве, а с другой стороны, плоский тор является компактным многообразием, что резко упрощает исследование.

Отметим, что исследование дифференциальных включений с текущими скоростями является существенно более сложной задачей, чем исследование аналогичных уравнений. В этом разделе мы докажем достаточно простые теоремы существования решений для включений с текущими скоростями. Более общие теоремы существования будут рассмотрены в соответствующих разделах главы 3.

10.1. Некоторые технические конструкции. По лемме 5.1 на основе разложения Гаусса показано, что каждая матрица $\alpha\in S_+(n)$ представима в виде $\alpha=\zeta\delta\zeta^*$, где ζ — нижнетреугольная матрица с единицами на диагонали, ζ^* — ее транспонированная, т. е. верхнетреугольная матрица с единицами на диагонали, и δ — диагональная матрица, чьи угловые миноры (отметим, что все они положительны) совпадают с угловыми минорами матрицы α. Обозначим диагональные элементы матрицы δ через $\delta_1,\dots\delta_n$. Тогда $A=\zeta\sqrt{\delta}$, где $\sqrt{\delta}$ — диагональная матрица с $\sqrt{\delta_1},\dots,\sqrt{\delta_n}$ на диагонали, такова, что $\alpha=AA^*$.

Если при $t\in\mathbb{R}$ и $m\in\mathcal{T}^n$ поле $\alpha(t,m)$, непрерывно (измеримо, гладко), то $A(t,m)$ тоже непрерывно (измеримо, гладко, соответственно; см. следствие 5.1).

Обозначим через $\mathsf{T}_-(n)$ множество нижнетреугольных $n\times n$ матриц с нулями на диагонали. Это линейное подпространство в пространстве $\mathbb{R}^{n^2}$ всех $n\times n$ матриц. Очевидно, что ζ, описанное выше, принадлежит линейному подмногообразию $\mathsf{T}_-(n)+I$ в $\mathbb{R}^{n^2}$, где I — единичная $n\times n$ матрица. Обозначим через $\mathsf{T}:S_+(n)\to\mathsf{T}_-(n)$ гладкое отображение $\alpha\in S_+(n)$ в

$$\mathsf{T}\alpha=\zeta-I\in\mathsf{T}_-(n). \tag{10.1}$$

Обозначим через S_{LC} множество симметрических положительно определенных матриц с постоянным (равным $C>0$) определителем. В частности, это означает, что $\delta_1\cdot\ldots\cdot\delta_n=\mathrm{const}=C$, а $\sqrt{\delta_1}\cdot\ldots\cdot\sqrt{\delta_n}=\sqrt{C}$, где точка обозначает произведение.

Пусть $\mathsf{L}_0(n)$ — линейное подпространство в $\mathbb{R}^n$, состоящее из векторов $X=(X^1,\dots,X^n)$ таких, что $X^1+\ldots+X^n=0$. Введем гладкое отображение $\mathsf{L}_\mathsf{C}:S_{LC}\to\mathsf{L}_0$, переводящее симметрическую матрицу $\alpha\in S_{LC}$ в

$$\mathsf{L}_\mathsf{C}(\alpha)=(\ln\frac{\sqrt{\delta_1}}{\sqrt{C}},\dots,\ln\frac{\sqrt{\delta_n}}{\sqrt{C}})\in\mathsf{L}_0(n), \tag{10.2}$$

где δ_i — диагональные элементы матрицы δ, соответствующей α.

Отметим, что $\mathsf{T}_-(n)$ и $\mathsf{L}_0(n)$ — линейные пространства, т. е. понятие выпуклого множества в них корректно определено.

Напомним и слегка упростим для нашего случая конструкцию римановой метрики, порожденной гладким полем симметрических положительно определенных тензоров типа $(2,0)$ с матрицами $\alpha(m)=(\alpha^{ij}(m))$ (см. раздел 2). Отметим, что в отличие от раздела 2, здесь мы имеем дело с более простой ситуацией, когда указанное поле автономно. Поскольку все эти матрицы невырождены, поле обратных матриц (α_{ij}) существует и также гладко, кроме того, в каждом m матрица $(\alpha_{ij})(m)$ симметрична и положительно определена. Поэтому последнее поле задает на $\mathcal{T}^n$ новую риманову метрику (гладкое поле симметрических положительно определенных $(0,2)$-тензоров) $\alpha(\cdot,\cdot) = \alpha_{ij} dq^i \otimes dq^j$. Рассмотрим ее форму объема $\Lambda_\alpha = \sqrt{\det(\alpha_{ij})} dq^1 \wedge dq^2 \wedge \dots \wedge dq^n$.

Лемма 10.1 (см. [77])**.** *Для любого гладкого автономного $(2,0)$-тензорного поля $\alpha(m)$ на плоском торе $\mathcal{T}^n$ со значениями в S_{LC}:*

(i) *Форма объема Λ_α соответствующей римановой метрики $\alpha(\cdot,\cdot)$ (см. выше) равна $\sqrt{C}\Lambda_E$, где $\Lambda_E = dq^1 \wedge \dots \wedge dq^n$ — форма объема евклидовой метрики на $\mathcal{T}^n$, унаследованной из $\mathbb{R}^n$ при факторизации по целочисленной решетке.*

(ii) *Для любого гладкого векторного поля $v(t,m)$ на $\mathcal{T}^n$ его дивергенция $\operatorname{Div} v$ относительно Λ_α совпадает с обычной дивергенцией $\operatorname{div} v$ (т. е. относительно Λ_E).*

(iii) *Для любого случайного элемента со значениями в $\mathcal{T}^n$ его плотность распределения относительно Λ_α равна плотности распределения относительно Λ_E, деленной на $\sqrt{C}$.*

Доказательство. Действительно, $\Lambda_\alpha = \sqrt{\det(\alpha_{ij})} dq^1 \wedge \dots \wedge dq^n$, и поскольку $\det(\alpha_{ij}) = C$, то $\Lambda_\alpha = \sqrt{C}\Lambda_E = \sqrt{C} dq^1 \wedge \dots \wedge dq^n$.

Напомним, что дивергенция $\operatorname{Div} v$ находится из равенства $\mathcal{L}_v \Lambda_\alpha = (\operatorname{Div} v)\Lambda_\alpha$, где $\mathcal{L}_v$ — производная Ли вдоль v (см. подробности, например, в [13]). Напомним также, что $\mathcal{L}_v \Lambda_\alpha = d(v\rfloor\Lambda_\alpha)$, где $\rfloor$ обозначает внутреннее произведение векторов и дифференциальных форм. Поскольку C постоянно, то $d(v\rfloor\Lambda_\alpha) = \dfrac{\partial v^i}{\partial q^i}\sqrt{C}\Lambda_E = \dfrac{\partial v^i}{\partial q^i}\Lambda_\alpha$. Следовательно, $\operatorname{Div} v = \dfrac{\partial v^i}{\partial q^i} = \operatorname{div} v$.

Утверждение (iii) вытекает из (i). □

10.2. Существование решений в случае квадратичных производных из S_{LC}. Пусть $\mathbf{v}(t,m)$ — многозначное векторное поле, $\boldsymbol{\alpha}(t,m)$ — многозначное симметрическое положительно определенное $(2,0)$-тензорное поле на $\mathcal{T}^n$. Система вида

$$\begin{cases} D_S \xi(t) \in \mathbf{v}(t,\xi(t)), \\ D_2 \xi(t) \in \boldsymbol{\alpha}(t,\xi(t)) \end{cases} \tag{10.3}$$

называется *дифференциальным включением с текущими скоростями первого порядка.* Понятие решения включения (10.3) в точности аналогично понятию решения для уравнения с текущими скоростями, введенному в определении 8.1.

Мы накладываем на $\mathbf{v}(t,m)$ и $\boldsymbol{\alpha}(t,m)$ следующие условия.

Условие 10.1. *Многозначное векторное поле $\mathbf{v}(m)$ на $\mathbb{T}^n$ автономно, равномерно ограничено и имеет замкнутые значения. Существует последовательность положительных чисел $\varepsilon_k \to 0$ такая, что для любого ε_k поле $\mathbf{v}(m)$ имеет гладкую ε_k-аппроксимацию $v_i(m)$ и все эти аппроксимации имеют равномерно ограниченные одной и той же константой по совокупности $t \in [0,T]$ и $m \in \mathbb{T}^n$ первые частные производные $\dfrac{\partial v_i}{\partial m_j}$.*

Условие 10.2.

(i) *Многозначное $(2,0)$-тензорное поле $\boldsymbol{\alpha}$ на $\mathcal{T}^n$ принимает значения в S_{LC}; оно автономно и полунепрерывно сверху.*

(ii) *Значения $\boldsymbol{\alpha}$ замкнуты и равномерно ограничены.*

(iii) *Для каждого $m \in \mathcal{T}^n$ множество $\mathsf{T}(\boldsymbol{\alpha}(m))$ выпукло в $\mathsf{T}_-(n)$ и множество $\mathsf{L}_\mathsf{C}(\boldsymbol{\alpha}(m))$ выпукло в $\mathsf{L}_0(n)$.*

Лемма 10.2. *При выполнении условия 10.1 многозначное векторное поле $\mathbf{v}(t,m)$ имеет непрерывный селектор, к которому равномерно сходится подпоследовательность последовательности аппроксимаций $v_i(m)$ при $i \to \infty$.*

Действительно, из теоремы Асколи (см. [21]) нетрудно вывести, что при выполнении условия 10.1 последовательность $v_i(t,m)$ компактна в пространстве непрерывных векторных полей на $\mathcal{T}^n$.

Теорема 10.1. *Пусть многозначное векторное поле $\mathbf{v}(t,m)$ на $\mathcal{T}^n$ удовлетворяет условию 10.1, а многозначное $(2,0)$-тензорное поле $\boldsymbol{\alpha}(m)$ удовлетворяет условию 10.2. Рассмотрим случайный элемент ξ_0 со значениями в $\mathcal{T}^n$, независимый от винеровского процесса $w(t)$ и такой,* *что его распределение относительно формы объема* Λ_E *равно* $\sqrt{C}\rho_0$, *где* ρ_0 *гладко и нигде не равно нулю. Тогда для начального условия* $\xi(0) = \xi_0$ *включение* (10.3) *имеет решение, определенное на всем интервале* $t \in [0, T]$.

Доказательство. Так как отображения T и $\mathsf{L_C}$ гладки, многозначные отображения $\mathsf{T}\boldsymbol{\alpha}$ со значениями в $\mathsf{T}_-(n)$ и $\mathsf{L}_C\boldsymbol{\alpha}$ со значениями в $\mathsf{L}_0(n)$ полунепрерывны сверху, поскольку таково $\boldsymbol{\alpha}$. По условию 10.2 их значения выпуклы, замкнуты и равномерно ограничены. Тогда по теореме 43.7 для любой последовательности положительных чисел $\varepsilon_q \to 0$ существуют последовательности однозначных непрерывных ε_q-аппроксимаций, которые поточечно сходятся к борелевским селекторам полей $\mathsf{T}\boldsymbol{\alpha}$ и $\mathsf{L}_C\boldsymbol{\alpha}$, соответственно. Выберем указанные последовательности аппроксимаций для последовательности $\varepsilon_k \to 0$ из условия 10.1. Без ограничения общности все эти аппроксимации можно считать гладкими. Так что существует последовательность $\alpha_k(m)$ однозначных гладких и равномерно ограниченных $(2,0)$-тензорных полей из S_{LC}, которая поточечно сходится к борелевскому селектору $\alpha(m)$ многозначного поля $\boldsymbol{\alpha}(m)$. Компоненты поля $\alpha_k(m)$ мы обозначаем α_k^{ij}.

Построим римановы метрики $\alpha_k(\cdot,\cdot)$ из тензорных полей $\alpha_k(m)$, как выше.

Рассмотрим последовательность уравнений

$$\begin{cases} D_S\xi(t) = v_k(\xi(t)), \\ D_2\xi(t) = \alpha_k(\xi(t)). \end{cases} \tag{10.4}$$

Отметим, что по лемме 10.1 для всех этих уравнений можно рассматривать одно и то же начальное условие ξ_0, поскольку его плотности относительно всех $\alpha_k(\cdot,\cdot)$ совпадают между собой. Отметим также, что все v_k и α_k равномерно ограничены одной и той же константой, так как они являются ε-аппроксимациями равномерно ограниченных многозначных отображений. Поскольку все указанные ε-аппроксимации как минимум C^1-гладки и заданы на компактном множестве, то их частные производные равномерно ограничены для каждого k своей константой. Так что все уравнения (10.4) удовлетворяют условиям теоремы 8.1, т. е. для каждого уравнения существует решение. Решение k-го уравнения обозначим $\xi_k(t)$.

Как сказано в разделе 10.1, каждое $\alpha_k(m)$ представимо в виде $\alpha_k(m) = A_k(m)A_k^*(m)$, где $A_k(m)$ гладки и равномерно ограничены.

На банаховом многообразии $C^0([0,T], \mathcal{T}^n)$ непрерывных кривых в $\mathcal{T}^n$ введем σ-алгебру $\tilde{\mathcal{F}}$, порожденную цилиндрическими множествами, и обозначим через μ_k меру на $(C^0([0,T], \mathcal{T}^n), \tilde{\mathcal{F}})$, порожденную решением $\xi_k(t)$. Также введем семейство полных σ-подалгебр $\mathcal{P}_t$, порожденных цилиндрическими множествами с основаниями над $[0,t]$, $t \in [0,T]$, и семейство полных σ-подалгебр $\mathcal{N}_t$, порожденных прообразами борелевских множеств в $\mathcal{T}^n$ при отображении $x(\cdot) \mapsto x(t)$. Понятно, что $\mathcal{N}_t$ является σ-подалгеброй в $\mathcal{P}_t$ и что $\mathcal{P}_t$ является прошлым, а $\mathcal{N}_t$ — настоящим для координатных процессов.

Лемма 10.3. *Множество мер* μ_k *на* $(C^0([0,T], \mathcal{T}^n), \tilde{\mathcal{F}})$ *слабо компактно.*

Доказательство. Прежде всего отметим, что поскольку все процессы $\xi_k(t)$ принимают значения в компактном торе, то все $E\xi_k(t)$ равномерно ограничены.

Зафиксируем два вещественных числа $0 \leqslant s < t \leqslant T$ с малой разностью $t - s$. Тогда при любом k приращение ξ_k на $[s,t]$ аппроксимируется выражением $v_k\Big(\dfrac{s+t}{2}\Big)(t-s) + A_k(s)(w(t) - w(s))$. Рассмотрим $E\Big(\Big(v_k\Big(\dfrac{s+t}{2}\Big)(t-s) + A_k(s)(w(t)-w(s))\Big)(v_k\Big(\frac{s+t}{2}\Big)(t-s) + A_k(s)(w(t)-w(s)))^*\Big)$. Так как v_k и A_k равномерно ограничены при всех k одной и той же константой, то рассуждая так же, как в доказательстве теоремы 1.2, легко видеть, что среди полученных в этом выражении слагаемых только $\alpha_k(t-s)$ имеет порядок малости $t - s$, а все остальные слагаемые являются бесконечно малыми более высокого порядка, чем $t - s$. Значит, существует константа h_1 такая, что при малой разности $t-s$ указанное выражение по норме не превосходит $h_1(t-s)$. С помощью интегрирования отсюда нетрудно вывести, что существует константа $h > 0$, зависящая от T и от константы, ограничивающей нормы v_k и α_k, такая, что при любых $0 \leqslant t_1 < t_2 \leqslant T$ и любом k выполняется неравенство $E(\xi_k(t_2) - \xi_k(t_1))^4 < h(t_2 - t_2)^2$. Теперь утверждение леммы следует из [9, теорема 2, § 4, гл. VI]. ☐

Продолжим доказательство теоремы 10.1. Так как множество $\{\mu_k\}$ мер на $(C^0([0,T],\mathcal{T}^n),\tilde{\mathcal{F}})$ слабо компактно, можно выбрать подпоследовательность, которая слабо сходится к некоторой мере μ. Без ограничения общности можно считать, что последовательность μ_k слабо сходится к μ. Рассмотрим координатный процесс $\xi(t)$ на вероятностном пространстве $(C^0([0,T],\mathcal{T}^n),\tilde{\mathcal{F}},\mu)$, т. е. для каждого элементарного события $m(\cdot)\in C^0([0,T],\mathcal{T}^n)$ по определению $\xi(t,m(\cdot))=m(t)$. Напомним, что $\mathcal{P}_t$ является «прошлым» для $\xi(t)$, а $\mathcal{N}_t$ — «настоящим».

По построению $D_S\xi_k(t)=v_k(t,\xi_k(t))$ при любом k. Это означает, что для любой ограниченной непрерывной вещественной функции f на $C^0([0,T],\mathcal{T}^n)$, измеримой относительно $\mathcal{N}_t$, при всех k выполняется равенство

$$\lim_{\Delta t\to 0}\int\limits_{C^0([0,T],\mathcal{T}^n)}[m(t+\Delta t)-m(t-\Delta t)-v_k(m(t))]f(m(\cdot))d\mu_k=0.$$

Выберем произвольное $\varepsilon>0$. Так как μ_k слабо сходится к μ, существует $K(\varepsilon)$ такое, что при $k>K(\varepsilon)$

$$\left\|\int\limits_{C^0([0,T],\mathcal{T}^n)}[m(t+\Delta t)-m(t-\Delta t)]f(m(\cdot))d\mu_k-\int\limits_{C^0([0,T],\mathcal{T}^n)}[m(t+\Delta t)-m(t-\Delta t)]f(m(\cdot))d\mu\right\|<\varepsilon,$$

$$\left\|\int\limits_{C^0([0,T],\mathcal{T}^n)}f(\cdot)v(m(t))d\mu_k-\int\limits_{C^0([0,T],\mathcal{T}^n)}f(\cdot)v(m(t))d\mu\right\|<\varepsilon.$$

Наконец, так как $v_k(t,m)$ равномерно сходятся к $v(t,m)$, то равномерно для всех μ_i, включая μ, и равномерно по t

$$\int\limits_{C^0([0,T],\mathcal{T}^n)}f(m(\cdot))v_k(m(t))d\mu_i\to\int\limits_{C^0([0,T],\mathcal{T}^n)}f(m(\cdot))v(m(t))d\mu_i$$

при $k\to\infty$, т. е. для любого $\varepsilon_1>0$ существует K_1 такое, что при $k>K_1$ при всех i и при всех $t\in[0,T]$

$$\left\|\int\limits_{[0,T]\times\Omega}f(m(\cdot))v_k(m(t))d\mu_i-\int\limits_{[0,T]\times\Omega}f(m(\cdot))v(m(t))d\mu_i\right\|<\varepsilon_1.$$

Тогда при $k>\max(K,K_1)$

$$\begin{aligned}
&\left\|\int\limits_{C^0([0,T],\mathcal{T}^n)}[m(t+\Delta t)-m(t-\Delta t)-v(m(t))]f(m(\cdot))d\mu_k-\right.\\
&\qquad\left.-\int\limits_{C^0([0,T],\mathcal{T}^n)}[m(t+\Delta t)-m(t-\Delta t)-v_k(m(t))]f(m(\cdot))d\mu\right\|<\\
&\qquad<\left\|\int\limits_{C^0([0,T],\mathcal{T}^n)}[m(t+\Delta t)-m(t-\Delta t)]f(m(\cdot))d\mu_k-\right.\\
&\qquad\left.-\int\limits_{C^0([0,T],\mathcal{T}^n)}[m(t+\Delta t)-m(t-\Delta t)]f(m(\cdot))d\mu\right\|+\\
&\qquad+\left\|\int\limits_{[0,T]\times\Omega}f(m(\cdot))v_k(m(t))d\mu_k-\int\limits_{[0,T]\times\Omega}f(m(\cdot))v(m(t))d\mu_k\right\|+\\
&\qquad+\left\|\int\limits_{C^0([0,T],\mathcal{T}^n)}f(\cdot)v(m(t))d\mu_k-\int\limits_{C^0([0,T],\mathcal{T}^n)}f(\cdot)v(m(t))d\mu\right\|<2\varepsilon+\varepsilon_1.
\end{aligned}$$

Следовательно,

$$\lim_{\Delta t\to 0}\int\limits_{C^0([0,T],\mathcal{T}^n)}[m(t+\Delta t)-m(t-\Delta t)-v(m(t))]f(m(\cdot))d\mu=0.$$

Поскольку $f(m(\cdot))$ — произвольная ограниченная непрерывная функция, измеримая относительно $\mathcal{N}_t$, отсюда вытекает, что

$$D_S\xi(t)=v(\xi(t)).\tag{10.5}$$

Напомним, что по построению $v(\xi(t))\in\mathbf{v}(\xi(t))$ μ-п.н.

По построению, для любого $\xi_k(t)$ его квадратичная производная равна $\alpha_k(\xi_k(t))$. Это означает, что для любой функции $f(m(\cdot))$, как выше,

$$\lim_{\Delta t\to 0}\int\limits_{C^0([0,T],\mathcal{T}^n)}[(m(t+\Delta t)-m(t))(m(t+\Delta t)-m(t))^*-\alpha_k(m(t))]f(m(\cdot))d\mu_k=0.$$

Так как $\alpha_k(t,m)$ стремится к $\alpha(t,m)$ при $k\to\infty$ поточечно, $\alpha_k(t,m)$ стремится к $\alpha(t,m)$ п.н. относительно всех мер μ_k и относительно μ. Выберем $\delta>0$. По теореме Егорова (см., например, [20]) для любого i существует подмножество $\tilde K^i_\delta\subset C^0([0,T],\mathcal{T}^n)$ такое, что $(\mu_i)(\tilde K^i_\delta)>1-\delta$ и последовательность $\alpha_k(m(t))$ сходится к $\alpha(m(t))$ равномерно на $\tilde K^i_\delta$. Введем $\tilde K_\delta=\bigcup\limits_{i=0}^{\infty}\tilde K^i_\delta$. Последовательность $\alpha_k(m(t))$ сходится к $\alpha(m(t))$ равномерно на $\tilde K_\delta$ при всех i и $\mu(\tilde K_\delta)>1-\delta$.

Поле $\alpha(m(t))$ непрерывно на множестве полной меры μ на $C^0([0,T],\mathcal{T}^n)$. Действительно, рассмотрим последовательность $\delta_i\to 0$ и соответствующую последовательность $\tilde K_{\delta_i}$. По построению $\alpha(m(t))$ является равномерным пределом последовательности непрерывных функций на каждом $\tilde K_{\delta_i}$. Поэтому $\alpha(m(t))$ непрерывно на каждом $\tilde K_{\delta_i}$, т. е. и на любом конечном объединении $\bigcup\limits_{i=1}^{n}\tilde K_{\delta_i}$. Очевидным образом $\lim\limits_{n\to\infty}\mu\Big(\bigcup\limits_{i=1}^{n}\tilde K_{\delta_i}\Big)=1$.

Из-за описанной выше равномерной сходимости на $\tilde K_\delta$ при всех k мы выводим из ограниченности $f(m(\cdot))$, что при достаточно большом k

$$\left\|\int\limits_{\tilde K_\delta}[\alpha_k(m(t))-\alpha(m(t))]f(m(\cdot))d\mu_k\right\|<\delta.$$

Так как $f(m(\cdot))$ ограничено, имеется некоторое число $\Xi>0$ такое, что $|f(m(\cdot))|<\Xi$ при всех $m(\cdot)$. Напомним, что все $\alpha_k(m)$ и $\alpha(m)$ равномерно ограничены, т. е. их нормы не превосходят некоторого числа $Q>0$. Тогда, поскольку $\mu_k(C^0([0,T],\mathcal{T}^n)\backslash\tilde K_\delta)<\delta$ при всех достаточно больших k, то

$$\left\|\int\limits_{C^0([0,T],\mathcal{T}^n)\backslash\tilde K_\delta}[\alpha_k(m(t))-\alpha(m(t))]f(m(\cdot))d\mu_k\right\|<2\delta Q\Xi$$

при всех достаточно больших k. Так как δ — произвольное положительное число, то

$$\lim_{k\to\infty}\int\limits_{C^0([0,T],\mathcal{T}^n)}[\alpha_k(m(t))-\alpha(m(t))]f(m(\cdot))d\mu_k=0.$$

Функция $\alpha(m(t))$ μ-п.н. непрерывна и ограничена на $C^0([0,T],\mathcal{T}^n)$ (см. выше). Так как к тому же меры μ_k слабо сходятся к μ, то по лемме из [10, § VI.1]

$$\lim_{k\to\infty}\int\limits_{C^0([0,T],\mathcal{T}^n)}\alpha(m(t))f(m(\cdot))d\mu_k=\int\limits_{C^0([0,T],\mathcal{T}^n)}\alpha(m(t))f(m(\cdot))d\mu.$$

Очевидным образом

$$\lim_{k\to\infty}\int\limits_{C^0([0,T],\mathcal{T}^n)}[(m(t+\Delta t)-m(t))(m(t+\Delta t)-m(t))^*]f(m(\cdot))d\mu_k=$$

$$= \int\limits_{C^0([0,T],\mathcal{T}^n)} [(m(t+\Delta t) - m(t))(m(t+\Delta t) - m(t))^*] f(m(\cdot)) d\mu.$$

Таким образом,

$$\lim_{\Delta t \to 0} \int\limits_{C^0([0,T],\mathcal{T}^n)} [(m(t+\Delta t) - m(t))(m(t+\Delta t) - m(t))^* - \alpha(m(t))] f(m(\cdot)) d\mu = 0.$$

Поскольку $f(m(\cdot))$ — произвольная ограниченная непрерывная функция, измеримая относительно $\mathcal{N}_t$, это означает, что $D_2\xi(t) = \alpha(\xi(t))$. Но по построению $\alpha(\xi(t)) \in \boldsymbol{\alpha}(\xi(t))$ μ-п.н.

Вместе с (10.5) это означает, что $\xi(t)$ является искомым решением включения (10.3). ☐

10.3. Случай наличия гладких селекторов. Упрощенным вариантом теоремы 10.1 является утверждение о существовании решения при $\boldsymbol{\alpha}$, удовлетворяющем условию 10.2, и однозначном и гладком v. Этот случай исследован в [53]. Однако то же самое верно и в случае, когда $\mathbf{v}$ имеет гладкий селектор. Приведем для этого случая результаты из [24].

Теорема 10.2. *Пусть $\mathbf{v}(t,m)$ — многозначное равномерно ограниченное векторное поле на $\mathcal{T}^n$, имеющее гладкий селектор, а $\boldsymbol{\alpha}(m)$ — многозначное $(2,0)$-тензорное поле, удовлетворяющее условию 10.2. Пусть также ξ_0 — случайный элемент со значениями в $\mathcal{T}^n$, чья плотность ρ_0 гладка и нигде не равна нулю, который не зависит от винеровского процесса $w(t)$. Тогда для начального условия $\xi(0) = \xi_0$ включение (10.3) имеет решение, которое существует на всем интервале $t \in [0,T]$.*

Доказательство теоремы 10.2 очевидным образом является частным случаем доказательства теоремы 10.1.

Приведем теоремы существования решений из [24], использующие критерии наличия у многозначного отображения гладкого селектора.

Для телесного замкнутого выпуклого множества A и вектора V в $\mathbb{R}^n$ введем так называемую опорную функцию $\Psi(A,V) = \sup\limits_{y\in A}(y,V)$, где $(\cdot,\cdot)$ — скалярное произведение. Рассмотрим многозначное векторное поле $\mathbf{v}(t,m)$ на $\mathcal{T}^n$, у которого значения телесны, выпуклы и замкнуты. Поскольку касательное расслоение к тору тривиально, мы можем рассмотреть постоянное векторное поле V на торе. Обозначим через $\Psi(t,m,V)$ опорную функцию $\Psi(\mathbf{v}(t,m),V)$.

Условие 10.3. *При любом V функция $\Psi(t,m,V)$ является гладкой.*

Теорема 10.3. *Пусть $\mathbf{v}(t,m)$ — многозначное равномерно ограниченное непрерывное векторное поле на $\mathcal{T}^n$ имеющее телесные выпуклые замкнутые значения и удовлетворяющее условию 10.3, а $\boldsymbol{\alpha}(m)$ — многозначное $(2,0)$-тензорное поле, удовлетворяющее условию 10.2. Пусть также ξ_0 — случайный элемент со значениями в $\mathcal{T}^n$, чья плотность ρ_0 гладка и нигде не равна нулю, который не зависит от винеровского процесса $w(t)$. Тогда для начального условия $\xi(0) = \xi_0$ включение (10.3) имеет решение, которое существует на всем интервале $t \in [0,T]$.*

Доказательство. В работе [2] доказано, что при выполнении условия 10.3 непрерывное многозначное равномерно ограниченное векторное поле с замкнутыми выпуклыми значениями имеет гладкий селектор. Так что утверждение теоремы следует из теоремы 10.2. ☐

Теперь рассмотрим случай, когда значения поля $\mathbf{v}(t,m)$ не телесны. Вместо этого предположим, что каждое значение $\mathbf{v}(t,m)$ лежит в подпространстве в $T_m\mathcal{T}^n$, причем указанные подпространства имеют постоянную размерность $k < n$, не зависящую от $m \in \mathcal{T}^n$. Поставив каждому $m \in \mathcal{T}^n$ в соответствие указанное подпространство, мы получим отображение Φ из $\mathcal{T}^n$ в многообразие аффинных подпространств размерности k в касательных пространствах к $\mathcal{T}^n$.

Условие 10.4. *Отображение Φ является гладким.*

Теорема 10.4. *Пусть $\mathbf{v}(t,m)$ — многозначное равномерно ограниченное непрерывное векторное поле на $\mathcal{T}^n$ такое, что каждое значение $\mathbf{v}(t,m)$ лежит в подпространстве в $T_m\mathcal{T}^n$, причем указанные подпространства имеют постоянную размерность $k < n$, не зависящую от $m \in \mathcal{T}^n$, и выполнено условие 10.4. Пусть $\boldsymbol{\alpha}(m)$ — многозначное $(2,0)$-тензорное поле, удовлетворяющее* *условию* 10.2. *Пусть также ξ_0 — случайный элемент со значениями в $\mathcal{T}^n$, чья плотность ρ_0 гладка и нигде не равна нулю, и независимый от винеровского процесса $w(t)$. Тогда для начального условия $\xi(0) = \xi_0$ включение* (10.3) *имеет решение, которое существует на всем интервале $t \in [0, T]$.*

Доказательство. В работе [27] доказано, что в рассматриваемом случае при выполнении условия 10.4 непрерывное многозначное равномерно ограниченное векторное поле с замкнутыми выпуклыми значениями имеет гладкий селектор. Так что утверждение теоремы следует из теоремы 10.2. □

11. Уравнения с осмотическими скоростями

Рассмотрим C^∞-векторное поле $u(t,x)$ и C^∞ гладкое автономное $(2,0)$-тензорное поле симметрических положительно определенных матриц $\alpha(x) = (\alpha^{ij})(x)$ на $\mathbb{R}^n$. Так как поле $(\alpha^{ij})(x)$ C^∞-гладко и положительно определено, поле обратных матриц (α_{ij}) существует и его можно рассматривать как риманову метрику на $\mathbb{R}^n$ (см. раздел 2). Чтобы избежать некоторых технических трудностей, мы предполагаем, что $u(t,x)$, $\alpha(x)$ и $\Xi(x)$ (см. замечание 2.1) равномерно ограничены относительно соответствующих норм.

Определение 11.1. Система
$$\begin{cases} D_A\xi(t) = u(t, \xi(t)), \\ D_2\xi(t) = \alpha(\xi(t)) \end{cases} \tag{11.1}$$
называется *уравнением первого порядка с осмотическими скоростями.*

По техническим соображениям здесь мы рассматриваем автономное поле $\alpha(x)$. В общем случае можно рассматривать неавтономный случай, но в настоящий момент мы можем доказать существование решений только в автономном случае.

Определение 11.2. Говорят, что (11.1) *имеет решение на отрезке* $[0, T]$, если существует вероятностное пространство $(\Omega, \mathcal{F}, \mathsf{P})$ и заданный на нем при $t \in [0, T]$ случайный процесс $\xi(t)$ со значениями в $\mathbb{R}^n$ такие, что п.н. выполняется (11.1) (см. замечание 5.1).

Принимая во внимание формулу (2.1) и замечание 2.1, легко видеть, что (11.1) может иметь решение не для всех правых частей и начальных значений, поскольку u и α должны быть связаны формулой $u(t,x) = \dfrac{1}{2}(\Xi(x) + \operatorname{Grad} \ln \hat\rho(t,x))$ с вероятностной плотностью $\hat\rho(t,x)$ относительно меры Лебега на $\mathbb{R}^n$ для любого фиксированного t (см. (2.1)). В частности, это соотношение должно выполняться для начальной плотности ρ_0 (гладкой и нигде не равной нулю), начального значения осмотической скорости $u(0,x)$ и квадратичной производной $\alpha(x)$.

Лемма 11.1. *Для любого гладкого $u(t,x)$ и гладкого положительно определенного $\alpha(x)$ при каждом фиксированном t с точностью до мультипликативной константы существует положительная функция $\hat\rho(t,x)$ такая, что выполняется* (2.1).

Доказательство. Введем $\hat p_{(t)}(x) = \ln \hat\rho(t,x)$ (следовательно, $\hat\rho(t,x) = e^{\hat p_{(t)}(x)}$). Теперь мы можем преобразовать (2.1) к виду $u(t,x) = \dfrac{1}{2}\operatorname{Grad} \hat p_{(t)}(x) + \dfrac{1}{2}\Xi(x)$, где $\Xi(x)$ известно, поскольку его координаты состоят из первых частных производных известного и гладкого поля $\alpha(x)$. Напомним, что Grad задано относительно только пространственных переменных, а t здесь — только параметр. Отметим, что $u(t,x)$ известно по условию. Имеем: $\operatorname{Grad} \hat p(t,x) = 2u(t,x) - \Xi(x)$. Обозначим через $(2u(t,x) - \Xi(x))^i$ i-ю координату вектора $2u(t,x) - \Xi(x)$, а через $(d\hat p_{(t)})_j$ — j-ю координату 1-формы $d\hat p_{(t)}$ (полный дифференциал $\hat p_{(t)}$, здесь d — внешний дифференциал). Тогда $(d\hat p_{(t)})_j = \alpha_{ij}(2u(t,x) - \Xi(x))^i$ и, таким образом, $d\hat p_{(t)}$ известно. Подчеркнем, что $d\hat p_{(t)}$ задано для любого фиксированного t, а $d\hat p_{(t)}$ гладко по t по построению.

Хорошо известно, что можно восстановить $\hat p_{(t)}$ из $d\hat p_{(t)}$ на $\mathbb{R}^n$ с точностью до аддитивной константы. Действительно, зафиксируем некоторое значение $\hat p_{(t)}$ в некоторой точке x. Для определенности положим значение нуль в начале координат в $\mathbb{R}^n$. Для любого $x \in \mathbb{R}^n$ построим значение $\hat p_{(t)}(x)$ при любом фиксированном t следующим образом. Пусть $\sigma(s)$ — кривая, соединяющая начало координат и x. Зададим значение $\hat p_{(t)}(x) = \int_\sigma d\hat p_{(t)}$. Возьмем другую кривую $\sigma_1(s)$, соединяющую начало координат и x, изменим ориентацию на σ_1 и рассмотрим объединение σ и σ_1 как границу $\partial\Theta$ произвольного фиксированного 2-мерного подмногообразия Θ в $\mathbb{R}^n$. Тогда по теореме Стокса (см., например, [55]) $\oint\limits_{\partial\Theta} d\hat{p}_{(t)} = \iint\limits_{\Theta} dd\hat{p}_{(t)}$. Поскольку $d^2 = 0$, то $\oint\limits_{\partial\Theta} dp(t) = 0$ и, таким образом, значение $\hat{p}_{(t)}(x)$ не зависит от выбора кривой σ. В частности, можно построить $\hat{p}(t,x)$, используя указанные выше интегралы вдоль лучей, выходящих из начала координат.

По построению $\hat{\rho} = e^{\hat{p}}$ положительно при всех (t,x). Поскольку $\hat{p}$ определено с точностью до аддитивных констант, $\hat{\rho}$ определено с точностью до мультипликативных констант. □

Отметим, что необходимо, чтобы среди функций $\hat{\rho}(t,x)$, построенных по лемме 11.1, при каждом фиксированном t существовала такая функция, что $\int\limits_{\mathbb{R}^n} \hat{\rho}\Lambda_E = 1$, т. е. чтобы эта функция была плотностью распределения на $\mathbb{R}^n$. Поскольку функции $\hat{\rho}(t,x)$ построены с точностью до мультипликативных констант, то если при каждом t интеграл $\int\limits_{\mathbb{R}^n} \hat{\rho}\Lambda_E$ конечен для какой-либо одной функции, то он конечен и для всех остальных. В этом случае существует функция, для которой интеграл равен 1. Если же указанный интеграл не существует (бесконечен) для какой-либо одной функции, то он не существует и для всех остальных. В этом случае не удается выбрать $\hat{\rho}(t,x)$ с интегралом, равным 1, и задача о существовании решения для уравнения (11.1) некорректна. Сформулируем условие, при выполнении которого эта задача корректна, и более того, удается доказать существование решения.

Условие 11.1. *Среди функций $\hat{\rho}(t,x)$, существование которых гарантировано леммой* 11.1 *с точностью до мультипликативных констант, имеется функция, являющаяся при каждом $t \in [0,T]$ вероятностной плотностью распределения на $\mathbb{R}^n$ относительно Λ_E, и эта функция C^∞-гладка по совокупности переменных.*

Если мы знаем $\hat{\rho}(t,x)$ из условия 11.1, то мы можем найти соответствующую плотность $\rho(t,x)$ относительно Λ_α из формулы $\hat{\rho}(t,x) = \rho(t,x)\sqrt{\det(\alpha_{ij}(x))}$. В частности, поля $u(0,x)$ и $\alpha(x)$ однозначно определяют по описанной схеме рассуждений начальное значение ξ_0 с плотностью ρ_0 относительно Λ_α, и это единственное начальное условие, при котором может существовать решение.

Теорема 11.1. *Пусть векторное поле $u(t,x)$ гладко и равномерно ограничено, $\alpha(x)$ — гладкое равномерно ограниченное автономное поле симметрических положительно определенных матриц. Пусть также выполнено условие* 11.1. *Тогда при начальном условии $\xi(0) = \xi_0$, существует решение уравнения* (11.1)*, и это решение не единственно.*

Доказательство. Поскольку выполнено условие 11.1, то найдена плотность $\hat{\rho}(t,x)$ относительно Λ_E и, следовательно, мы можем найти плотность $\rho(t,x)$ относительно $dt \wedge \Lambda_\alpha$ из формулы $\hat{\rho}(t,x) = \rho(t,x)\sqrt{\det(\alpha_{ij}(x))}$, как сказано выше. Функция $\rho(t,x)$ позволяет нам найти хотя бы одно векторное поле $v(t,x)$ такое, что это текущая скорость одного из возможных решений, которые мы ищем. Мы найдем его, используя тот факт, что по замечанию 8.2 должно выполняться равенство $L_{(1,v)}\rho(t,x)dt \wedge \Lambda_\alpha = 0$. Напомним, что $\rho(t,x)dt \wedge \Lambda_\alpha = \rho(t,x)\sqrt{\det(a_{ij})(x)}dt \wedge \Lambda_E$. По формуле (8.8)

$$L_{(1,v)}\rho(t,x)\sqrt{\det(a_{ij})(x)}dt \wedge \Lambda_E = \left(\frac{\partial p}{\partial t} + vp + \operatorname{div} v + v\ln\sqrt{\det(a_{ij})(x)}\right)\rho\sqrt{\det(a_{ij})(x)}dt \wedge \Lambda_E,$$

и если $\dfrac{\partial p}{\partial t} + vp + \operatorname{div} v + v\ln\sqrt{\det(a_{ij})(x)} = 0$, то по замечанию 8.2 $v(t,x)$ является текущей скоростью одного из решений.

Мы будем искать векторное поле с этим свойством среди векторных полей, у которых только одна (для определенности, первая) координата не нулевая, а все остальные координаты равны нулю. В этом случае последняя формула принимает вид

$$\frac{\partial p}{\partial t} + v^1\frac{\partial p}{\partial x^1} + \frac{\partial v^1}{\partial x^1} + v^1\frac{\partial \ln\sqrt{\det(a_{ij})(x)}}{\partial x^1} = 0. \tag{11.2}$$

Отметим, что в (11.2) функции $\dfrac{\partial p}{\partial t}$, $\dfrac{\partial p}{\partial x^1}$ и $\dfrac{\partial \ln\sqrt{\det(a_{ij})(x)}}{\partial x^1}$ известны. Так что (11.2) при каждом фиксированном t можно рассматривать как обыкновенное дифференциальное уравнение первого порядка относительно v^1. Задав для этого уравнения начальное условие v_0^1 как гладкую функцию на подпространстве $x^1 = 0$ в $\mathbb{R}^n$ и использовав это начальное условие при всех t, мы получим решение $v^1(t, x^1)$, которое зависит как от параметров от точки подпространства $x^1 = 0$, из которой оно выходит, и от значения функции начального условия в этой точке. Положив равными нулю все остальные координаты, мы получим векторное поле $v(t, x)$ на $\mathbb{R}^n$, которое является текущей скоростью одного из решений (11.1). Тот факт, что это решение существует, доказывается следующими рассуждениями.

Мы теперь можем найти производную в среднем справа решения по формуле $a(t, x) = v(t, x) + u(t, x)$.

Из леммы 5.1 и из условия теоремы следует, что существует гладкое и равномерно ограниченное $A(x)$ такое, что $A(x)A^*(x) = \alpha(x)$. Тогда из общей теории уравнений с производными в среднем справа следует, что процесс $\xi(t)$, имеющий плотность $\rho(t, x)$, как выше, должен удовлетворять стохастическому дифференциальному уравнению

$$\xi(t) = \xi_0 + \int_0^t a(s, \xi(s))ds + \int_0^t A(s, \xi(s))dw(s). \tag{11.3}$$

Из условия теоремы и результатов [10] следует, что (11.3) при начальном условии ξ_0, независимом от винеровского процесса $w(t)$, имеет единственное сильное решение $\xi(t)$, определенное при $t \in [0, T]$. Тот факт, что $D_A\xi(t) = u(t, \xi(t))$ и $D_2\xi(t) = \alpha(\xi(t))$, выполняется по построению.

Понятно, что текущую скорость построенного выше типа можно найти среди векторных полей с какой-нибудь другой ненулевой координатой. Поэтому описанное решение не единственно. $\square$

12. Стохастические дифференциальные уравнения с производными в среднем относительно прошлого

12.1. $\mathcal{P}$-производные в среднем. Рассмотрим n-мерное векторное пространство $\mathbb{R}^n$ и стохастический процесс $\xi(t)$, $t \in [0, +\infty)$ со значениями в $\mathbb{R}^n$, заданный на некотором вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, \mathsf{P})$. Будем говорить, что $\xi(t)$ является L^1-процессом, если математическое ожидание $E(\xi(t))$ корректно определено при любом t.

Обозначим через $\mathcal{P}_t^\xi$ σ-подалгебру σ-алгебры $\mathcal{F}$, которая порождена прообразами борелевских множеств в $\mathbb{R}^n$ при всех отображениях $\xi(s) : \Omega \to \mathbb{R}^n$, $0 \leqslant s \leqslant t$. Через $E(\cdot \mid \mathcal{P}_t^\xi)$ обозначим условное математическое5 ожидание относительно $\mathcal{P}_t^\xi$. Следуя Э. Нельсону [80–82], мы называем $\mathcal{P}_t^\xi$ *прошлым* для процесса $\xi(t)$.

Определение 12.1. *Производная в среднем справа относительно прошлого* ($\mathcal{P}$-*производная в среднем*) $D^{\mathcal{P}}\xi(t)$ процесса $\xi(t)$ в момент времени t — это L^1-случайный элемент вида

$$D^{\mathcal{P}}\xi(t) = \lim_{\triangle t \to +0} E\left(\frac{\xi(t + \triangle t) - \xi(t)}{\triangle t} \,\Big|\, \mathcal{P}_t^\xi\right), \tag{12.1}$$

где предел предполагается существующим в L^1, а $\triangle t \to +0$ означает, что $\triangle t$ стремится к 0 и $\triangle t > 0$.

Определение 12.2. *Квадратичная производная в среднем относительно прошлого* (*квадратичная $\mathcal{P}$-производная в среднем*) $D_2^{\mathcal{P}}\xi(t)$ процесса $\xi(t)$ в момент времени t — это L^1-случайный элемент вида

$$D_2^{\mathcal{P}}\xi(t) = \lim_{\triangle t \to +0} E\left(\frac{(\xi(t + \triangle t) - \xi(t))(\xi(t + \triangle t) - \xi(t))^*}{\triangle t} \,\Big|\, \mathcal{P}_t^\xi\right), \tag{12.2}$$

где предел предполагается существующим в L^1, а $\triangle t \to +0$ означает, что $\triangle t$ стремится к 0 и $\triangle t > 0$, а $\otimes$ обозначает тензорное произведение в $\mathbb{R}^n$.

Формула (12.2) полностью аналогична формуле (1.7).

Напомним, что пространство $n \times n$ матриц изоморфно $\mathbb{R}^{n^2}$. Везде далее в этой главе для множества B в $\mathbb{R}^n$ или в $L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ мы используем нормы, введенные обычной формулой $\|B\| = \sup\limits_{y \in B} \|y\|$ (см. введение). Норма в $\mathbb{R}^n$ евклидова, а норма в $L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ евклидова в $\mathbb{R}^{n^2}$.

Везде ниже в этой главе для простоты изложения мы будем иметь дело с процессами, заданными на некотором конечном интервале $t \in [0,T] \subset \mathbb{R}$.

Напомним, что случайный процесс $\xi(t)$ в $\mathbb{R}^n$, заданный на некотором вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, \mathsf{P})$, называется *процессом Ито диффузионного типа* (см. раздел 1), если существуют: векторнозначный процесс $a(t)$, не упреждающий относительно $\mathcal{P}_t^\xi$ и такой, что интеграл Лебега $\int\limits_0^t a(s)ds$ вдоль его выборочных траекторий п.н. корректно определен; матричнозначный процесс $A(t) = (A_i^j(t))$, не упреждающий относительно $\mathcal{P}_t^\xi$ и такой, что $\mathsf{P}\Big\{\int\limits_0^T (A_i^j(t))^2 dt < \infty\Big\} = 1$ для всех i и j; и винеровский процесс $w(t)$, адаптированный к $\mathcal{P}_t^\xi$ такой, что

$$\xi(t) = \xi_0 + \int\limits_0^t a(s)ds + \int\limits_0^t A(s)dw(s).$$

В частности, это означает, что интеграл Ито $\int\limits_0^t A(s)dw(s)$ является мартингалом относительно $\mathcal{P}_t^\xi$. Для простоты мы имеем дело только с детерминированными начальными условиями $\xi_0 \in \mathbb{R}^n$.

Теорема 12.1. *Для указанных выше процессов Ито диффузионного типа $\xi(t)$ производные $D^{\mathcal{P}}\xi(t)$ и $D_2^{\mathcal{P}}\xi(t)$ существуют и имеют вид $D^{\mathcal{P}}\xi(t) = a(t)$ и $D_2^{\mathcal{P}}\xi(t) = A(t)A^*(t)$, где $A^*(t)$ — транспонированная матрица $A(t)$.*

Доказательство. Отметим, что

$$\xi(t+\triangle t) - \xi(t) = \int\limits_t^{t+\triangle t} a(s)ds + \int\limits_t^{t+\triangle t} A(s)dw(s).$$

Так как интеграл Ито — мартингал относительно $\mathcal{P}_t^\xi$, то $E\Big(\int\limits_t^{t+\triangle t} A(s)dw(s) \mid \mathcal{P}_t^\xi\Big) = 0$, и таким образом мы получаем

$$E(\xi(t+\triangle t) - \xi(t) \mid \mathcal{P}_t^\xi) = E\left(\int\limits_t^{t+\triangle t} a(t)dt \,\middle|\, \mathcal{P}_t^\xi\right) = \int\limits_t^{t+\triangle t} E(a(t) \mid \mathcal{P}_t^\xi)dt.$$

Применяя формулу (12.1), мы получаем, что $D^{\mathcal{P}}\xi(t) = E(a(t) \mid \mathcal{P}_t^\xi)$. Поскольку $a(t)$ измеримо относительно $\mathcal{P}_t^\xi$, то $E(a(t) \mid \mathcal{P}_t^\xi) = a(t)$.

Принимая во внимание свойства интеграла Лебега и интеграла Ито и затем вычисляя матричное произведение, как сказано выше, нетрудно увидеть, что $(\xi(t+\triangle t) - \xi(t))(\xi(t+\triangle t) - \xi(t))^*$ аппроксимируется $(a(t)a(t)^*)(\Delta t)^2 + (a(t)\Delta t)(A(t)\Delta w(t))^* + (A(t)\Delta w(t))(a(t)\Delta t)^* + A(t)A^*(t)\Delta t$. Применение формулы (12.2) и того факта, что $A(t)A^*(t)$ измеримо относительно $\mathcal{P}_t^\xi$, приводит к формуле $D_2^{\mathcal{P}}\xi(t) = A(t)A^*(t)$. □

Напомним, что символом $\mathrm{S}(n)$ мы обозначаем линейное пространство симметрических матриц размера $n \times n$, которое является подпространством в $L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$. Символ $\mathrm{S}_+(n)$ обозначает множество положительно определенных симметрических матриц размера $n \times n$, которое является выпуклым открытым множеством в $\mathrm{S}(n)$. Отметим, что у каждой матрицы из $\mathrm{S}_+(n)$ ее диагональ состоит из положительных вещественных чисел. Замыкание множества $\mathrm{S}_+(n)$, т. е. множество неотрицательно определенных симметрических матриц размера $n \times n$, обозначается $\bar{\mathrm{S}}_+(n)$.

Отметим, что для $A \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ матричное произведение AA^* — это симметрическая неотрицательно определенная матрица. Так что, из теоремы 12.1 следует, что для процесса Ито диффузионного типа $\xi(t)$ его производная в среднем $D_2^{\mathcal{P}}\xi(t)$ принимает значения в $\bar{S}_+(n)$.

12.2. Уравнения с $\mathcal{P}$-производными в среднем. Далее в этом разделе для простоты изложения мы будем иметь дело с процессами, заданными на некотором конечном интервале $t \in [0,T] \subset \mathbb{R}$.

Введем $\tilde{\Omega} = C^0([0,T],\mathbb{R}^n)$ — банахово пространство непрерывных кривых в $\mathbb{R}^n$, заданных на $[0,T]$, с обычной равномерной нормой и с σ-алгеброй $\tilde{\mathcal{F}}$ на $\tilde{\Omega}$ порожденной цилиндрическими множествами. Символом $\mathcal{P}_t$ мы обозначаем σ-подалгебру в $\tilde{\mathcal{F}}$, порожденную цилиндрическими множествами с основаниями над $[0,t] \subset [0,T]$. Напомним, что $\tilde{\mathcal{F}}$ является борелевской σ-алгеброй на $\tilde{\Omega}$ (см. [31]).

Пусть $a : [0,T] \times \tilde{\Omega} \to \mathbb{R}^n$ и $\alpha : [0,T] \times \tilde{\Omega} \to \bar{S}_+(n)$ — измеримые отображения. Первая задача — это найти стохастический процесс $\xi(t)$, чьи $\mathcal{P}$-производные в среднем справа и $\mathcal{P}$-квадратичные производные в среднем при каждом t равны $a(t,\xi(\cdot))$ и $\alpha(t,\xi(\cdot))$, соответственно.

Определение 12.3. *Уравнение с первого порядка $\mathcal{P}$-производными в среднем* — это система вида

$$\begin{cases} D^{\mathcal{P}}\xi(t) = a(t,\xi(\cdot)), \\ D_2^{\mathcal{P}}\xi(t) = \alpha(t,\xi(\cdot)). \end{cases} \tag{12.3}$$

Определение 12.4. Будем говорить, что уравнение (12.3) имеет *решение* $\xi(t)$, если существует вероятностное пространство $(\Omega,\mathcal{F},\mathsf{P})$ и случайный процесс $\xi(t)$, заданный на $(\Omega,\mathcal{F},\mathsf{P})$ и принимающий значения в $\mathbb{R}^n$ такой, что уравнение (12.3) выполняется P п.н (см. замечание 5.1).

Для простоты мы работаем только с детерминированными начальными условиями.

Пусть $B : [0,T] \times \tilde{\Omega} \to Z$ — отображение в некоторое метрическое пространство Z. Ниже мы будем часто предполагать, что такое отображение с различными пространствами Z удовлетворяет следующему условию:

Условие 12.1. *Для каждого $t \in [0,T]$ из того, что кривые $x_1(\cdot)$, $x_2(\cdot) \in \tilde{\Omega}$ совпадают при $0 \leqslant s \leqslant t$, следует, что $B(t,x_1(\cdot)) = B(t,x_2(\cdot))$.*

Замечание 12.1. Отметим, что тот факт, что отображение B удовлетворяет условию 12.1, эквивалентно тому факту, что B при каждом t измеримо относительно борелевской σ-алгебры на Z и $\mathcal{P}_t$ на $\tilde{\Omega}$ (см. [10]).

Следующее утверждение является обобщением леммы 5.1 на случай, когда рассматриваются пространства кривых и требуется выполнение условия 12.1.

Лемма 12.1. *Для непрерывного* (*измеримого, C^k-гладкого, $k \geqslant 1$*) *отображения $\alpha : [0,T] \times \tilde{\Omega} \to S_+(n)$, удовлетворяющего условию* 12.1, *существует непрерывное* (*измеримое, C^k-гладкое, соответственно*) *отображение $A : [0,T] \times \tilde{\Omega} \to L(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^n)$, которое удовлетворяет условию* 12.1 *и такое, что $\alpha(t,x(\cdot)) = A(t,x(\cdot))A^*(t,x(\cdot))$ для всех $(t,x(\cdot)) \in \mathbb{R} \times \tilde{\Omega}$.*

Доказательство. Так как симметрические матрицы $\alpha(t,x(\cdot)) \in S_+(n)$ положительно определены, все диагональные миноры этих матриц $\alpha(t,x(\cdot))$ положительны и, в частности, не равны нулю. Тогда для $\alpha(t,x(\cdot))$ выполняется разложение Гаусса (см. доказательство леммы 12.1 со ссылкой на [19, Theorem II.9.3]), т. е. существует единственная тройка матриц: $\zeta(t,x(\cdot))$ — нижнетреугольная матрица с единицами на диагонали, $z(t,x(\cdot))$ — верхнетреугольная матрица с единицами на диагонали, и $\delta(t,x(\cdot))$ — диагональная матрица такая, что $\alpha(t,x(\cdot)) = \zeta(t,x(\cdot))\delta(t,x(\cdot))z(t,x(\cdot))$. Дополнительно, элементы матриц $\zeta(t,x(\cdot))$, $\delta(t,x(\cdot))$ и $z(t,x(\cdot))$ рационально выражаются через элементы матрицы $\alpha(t,x(\cdot))$. Следовательно, если матрицы $\alpha(t,x(\cdot))$ непрерывны (измеримы, гладкие) по совокупности переменных $t,x(\cdot)$, то матрицы $\zeta(t,x(\cdot))$, $\delta(t,x(\cdot))$ и $z(t,x(\cdot))$ тоже непрерывны (измеримы, гладкие, соответственно) по совокупности переменных $t,x(\cdot)$. Из того, что $\alpha(t,x(\cdot))$ — симметрические матрицы, легко вывести, что $z(t,x(\cdot)) = \zeta^*(t,x(\cdot))$ (т. е. $z(t,x(\cdot))$ является транспонированной $\zeta(t,x(\cdot))$). Кроме того, элементы диагональной матрицы $\delta(t,x(\cdot))$ равны диагональным минорам матрицы $\alpha(t,x(\cdot))$ и таким образом, они положительны. Значит, диагональная матрица $\sqrt{\delta}(t,x(\cdot))$ корректно определена: ее диагональ состоит из квадратных корней соответствующих диагональных элементов матрицы $\delta(t,x(\cdot))$. Рассмотрим матрицу $A(t,x(\cdot)) = \zeta(t,x(\cdot))\sqrt{\delta}(t,x(\cdot))$. По построению, $A(t,x(\cdot))$ по совокупности переменных

$t, x(\cdot)$ непрерывна (измерима, гладка, соответственно) и

$$A(t,x(\cdot))A^*(t,x(\cdot)) = \zeta(t,x(\cdot))\delta(t,x(\cdot))z(t,x(\cdot)) = \alpha(t,x(\cdot)).$$

Тот факт, что $\zeta(t,x(\cdot))$, $\sqrt{\delta}(t,x(\cdot))$ и, таким образом, $A(t,x(\cdot))$ удовлетворяет условию 12.1, следует из построения. □

Теорема 12.2. *Пусть $a : [0,T]\times\tilde{\Omega}\to\mathbb{R}^n$ и $\alpha : [0,T]\times\tilde{\Omega}\to S_+(n)$ непрерывны по совокупности переменных $t, x(\cdot)$ и удовлетворяют условию 12.1. Пусть также выполнены следующие неравенства:*

$$\operatorname{tr}\alpha(t,x(\cdot)) < K_1(1+\|x(\cdot)\|)^2, \tag{12.4}$$

$$\|a(t,x(\cdot))\| < K_2(1+\|x(\cdot)\|). \tag{12.5}$$

Тогда для любого начального условия $\xi_0\in\mathbb{R}^n$ уравнение (12.3) имеет решение, которое определено на всем интервале $[0,T]$.

Доказательство. Отметим, что $\alpha(t,x(\cdot))$ удовлетворяет условию леммы 12.1 и, таким образом, существует непрерывное $A(t,x(\cdot))$ такое, что $A(t,x(\cdot))A^*(t,x(\cdot)) = \alpha(t,x(\cdot))$ и $A(t,x(\cdot))$ удовлетворяет условию 12.1. Непосредственно из определения следа в этом случае следует, что $\operatorname{tr}\alpha(t,x(\cdot))$ равен сумме квадратов всех элементов матрицы $A(t,x(\cdot))$, т. е. это квадрат евклидовой нормы в $L(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^n)$. Поскольку в конечномерном векторном пространстве все нормы эквивалентны, из оценки (12.4) следует, что $\|A(t,x(\cdot))\| < K_3(1+\|x(\cdot)\|)$ для некоторого $K_3>0$. Напомним, что $a(t,x(\cdot))$ непрерывно и удовлетворяет условию 12.1 и оценке (12.5). При этих условиях в силу [10, Theorem III.2.4] существует слабое решение $\xi(t)$ уравнения стохастического дифференциального уравнения диффузионного типа

$$\xi(t) = \xi_0 + \int\limits_0^t a(s,\xi(\cdot))ds + \int\limits_0^t A(s,\xi(\cdot))dw(s),$$

которое является процессом диффузионного типа, корректно определенном на всем интервале $[0,T]$. Из теоремы 12.1 и определения 12.4 следует, что $\xi(t)$ п.н. является решением (12.3). □

Замечание 12.2. Более общий результат о существовании решения, где $\alpha(t,x(\cdot))$ может принимать значения в $\bar{S}_+(n)$, получен в теореме 13.2 ниже, которая по сути дела является следствием теоремы 13.1. Доказательство теоремы 13.1 следует схеме рассуждений для теоремы существования решений для включений с $\mathcal{P}$-производными в среднем.

13. Стохастические дифференциальные включения с производными в среднем относительно прошлого

13.1. Технический результат о многозначных отображениях. Следующее утверждение является обобщением теоремы 43.7 на случай, когда коэффициенты уравнения заданы на множестве кривых и требуется выполнение условия 12.1.

Лемма 13.1. *Рассмотрим произвольную последовательность положительных вещественных чисел $\varepsilon_k\to 0$ при $k\to\infty$. Пусть $\boldsymbol{B}$ — полунепрерывное сверху многозначное отображение с компактными выпуклыми значениями, отображающее $[0,T]\times\tilde{\Omega}$ в конечномерное (евклидово) векторное пространство Y и удовлетворяющее условию 12.1. Тогда существует последовательность непрерывных однозначных отображений (ε_k-аппроксимаций) со следующими свойствами:*

- (i) *каждое B_k удовлетворяет условию 12.1;*
- (ii) *последовательность B_k поточечно сходится к селектору многозначного отображения $\boldsymbol{B}$, который измерим относительно борелевской σ-алгебры на Y и произведения борелевской σ-алгебры на $[0,T]$ и $\tilde{\mathcal{F}}$ на $\tilde{\Omega}$;*
- (iii) *при каждом $(t,x(\cdot))\in[0,T]\times\tilde{\Omega}$ неравенство $\|B_k(t,x(\cdot))\|\leqslant\|\boldsymbol{B}(t,x(\cdot))\|$ выполняется для всех k;*
- (iv) *если $\boldsymbol{B}$ принимает значения в замкнутом выпуклом множестве $\Xi\subset Y$, то значения всех B_k принадлежат Ξ.*

Доказательство. В этом доказательстве мы комбинируем и модифицируем идеи, использованные в доказательстве результата Б. Д. Гельмана [8, теорема 2] и нашего результата [39, теорема 2] (см. теорему 43.7).

При $t \in [0,T]$ введем отображение $f_t : \tilde{\Omega} \to \tilde{\Omega}$ формулой

$$f_t x(\cdot) = \begin{cases} x(s), & \text{если} \quad 0 \leqslant s \leqslant t, \\ x(t), & \text{если} \quad t \leqslant s \leqslant T. \end{cases} \tag{13.1}$$

Очевидно, что $f_t x(\cdot)$ непрерывно по совокупности переменных $t \in [0,T]$ и $x(\cdot) \in \tilde{\Omega}$. Поскольку $\boldsymbol{B}$ удовлетворяет условию 12.1, $\boldsymbol{B}(t, x(\cdot)) = \boldsymbol{B}(t, f_t x(\cdot))$ при всех $x(\cdot) \in \tilde{\Omega}$ и $t \in [0,T]$.

Зафиксируем элемент ε_k из последовательности. Так как $\boldsymbol{B}$ полунепрерывно сверху, при всех $(t, x(\cdot)) \in [0,T] \times \tilde{\Omega}$ существует $\delta_k(t,x) > 0$ такое, что для любого $(t^*, x^*(\cdot))$ из $\delta_k(t,x)$ окрестности $(t, x(\cdot))$ множество $\boldsymbol{B}(t^*, x^*(\cdot))$ содержится в $\frac{\varepsilon_k}{2}$-окрестности множества $\boldsymbol{B}(t, x(\cdot))$. Без потери общности мы можем положить $0 < \delta_k(t,x) < \varepsilon_k$ для любого $(t, x(\cdot))$. Рассмотрим $\frac{\delta_k(t,x)}{4}$-окрестность $(t, x(\cdot))$ в $[0,T] \times \tilde{\Omega}$ и построим открытое покрытие $[0,T] \times \tilde{\Omega}$ такими окрестностями для всех $(t, x(\cdot))$. Поскольку $[0,T] \times \tilde{\Omega}$ паракомпактно, существует локально конечное подпокрытие $\{V_j^k\}$ этого покрытия. Без потери общности мы может рассматривать каждое V_j^k как $\eta_k(t_j^k, x_j^k)$-окрестность некоторого $(t_j^k, x_j^k(\cdot))$, где по построению радиус $\eta_k(t_j, x_j) \leqslant \dfrac{\delta_k(t_j, x_j)}{4}$.

Рассмотрим непрерывное разбиение единицы $\{\varphi_j^k\}$, адаптированное $\{V_j^k\}$ и введем многозначное отображение $\Phi_k(t, x(\cdot)) = \sum\limits_j \varphi_j^k(t, x(\cdot)) \overline{co} \boldsymbol{B}(V_j^k)$, где $\overline{co}$ обозначает выпуклое замыкание. Так как $\boldsymbol{B}(t, x(\cdot))$ полунепрерывно сверху и имеет компактные значения, без потери общности мы можем положить $\delta_k(t,x)$ таким, что образы $\boldsymbol{B}(V_j^k)$ ограничены в Y и, таким образом, множества $\overline{co}\boldsymbol{B}(V_j^k)$ компактны. Обозначим через $\overline{\Phi}_k(t, x(\cdot))$ замыкание $\Phi_k(t, x(\cdot))$. Тогда легко видеть, что $\overline{\Phi}_k : [0,T] \times \tilde{\Omega} \to Y$ является непрерывным по Хаусдорфу многозначным отображением с компактными замкнутыми значениями.

Введем $\Psi_k : [0,T] \times \tilde{\Omega} \to Y$ формулой $\Psi_k(t, x(\cdot)) = \Phi_k(t, f_t x(\cdot))$ и рассмотрим многозначное отображение $\overline{\Psi}_k(t, x(\cdot))$. Поскольку f_t непрерывно, каждое $\overline{\Psi}_k$ является непрерывным по Хаусдорфу многозначным отображением с компактными выпуклыми значениями, удовлетворяющим по построению условию 12.1.

Пара $(t, f_t x(\cdot))$ принадлежит конечному набору окрестностей $V_{j_i}^k$ с центрами в $(t_{j_i}^k, x_{j_i}^k(\cdot))$, $i = 1, \ldots, n$, и таким образом, по построению $\boldsymbol{B}(t, x(\cdot)) = \boldsymbol{B}(t, f_t x(\cdot)) \subset \boldsymbol{B}(V_{j_i}^k)$ при каждом i. Следовательно, $\boldsymbol{B}(t, x(\cdot)) = \boldsymbol{B}(t, f_t x(\cdot)) \subset \Psi_k(t, x(\cdot))$ для любой пары $(t, x(\cdot))$.

Пусть l — число из набора индексов j_i, как выше, и такое, что $\eta_k(t_l^k, x_l^k)$ принимает наибольшее значение среди $\eta_k(t_{j_i}^k, x_{j_i}^k)$. Тогда все $(t_{j_i}^k, x_{j_i}^k(\cdot))$ содержатся в $2\eta_k(t_l^k, x_l^k)$-окрестности $(t_l^k, x_l^k(\cdot))$ и таким образом каждое $V_{j_i}^k$ содержится в $3\eta_k(t_l^k, x_l^k)$-окрестности $(t_l^k, x_l^k(\cdot))$, которая содержится в $\delta_k(t_l^k, x_l^k(\cdot))$-окрестности (t_l^k, x_l^k) по построению. Следовательно, также по построению, $\Psi_k(t, x(\cdot))$ принадлежит $\frac{\varepsilon_k}{2}$-окрестности $\boldsymbol{B}(t_l^k, x_l^k(\cdot))$. Так как и $\Psi_k(t, x(\cdot))$, и $\boldsymbol{B}(t_l^k, x_l^k(\cdot))$ выпуклы, это означает, что $\overline{\Psi}_k(t, x(\cdot))$ также принадлежит $\frac{\varepsilon_k}{2}$-окрестности $\boldsymbol{B}(t_l^k, x_l^k(\cdot))$. Отметим, что это выполняется при любом k.

Поскольку $\boldsymbol{B}(t, x(\cdot)) \subset \Psi_k(t, x(\cdot)) \subset \overline{\Psi}_k(t, x(\cdot))$, для уклонения Хаусдорфа $\bar{H}$ мы имеем

$$\bar{H}(\boldsymbol{B}(t, x(\cdot)), \overline{\Psi}_k(t, x(\cdot))) = 0.$$

Следовательно, для метрики Хаусдорфа H мы получаем

$$H(\overline{\Psi}_k(t, x(\cdot)), \boldsymbol{B}(t, x(\cdot))) = \bar{H}(\overline{\Psi}_k(t, x(\cdot)), \boldsymbol{B}(t, x(\cdot))).$$

Поскольку $\varepsilon_k \to 0$, для $(t, x(\cdot))$ существует целое число $\theta = \theta(t, x(\cdot)) > 0$ такое, что $\varepsilon_{k+\theta} < \delta_k(t, x(\cdot))$. Без потери общности мы можем положить, что $\theta \geqslant 1$.

Таким образом, $\boldsymbol{B}(t_l^{k+\theta}, x_l^{k+\theta}(\cdot))$ принадлежит $\dfrac{\varepsilon_k}{2}$-окрестности $\boldsymbol{B}(t, x(\cdot))$ и, следовательно,

$$\bar{H}(\boldsymbol{B}(t_l^{k+\theta}, x_l^{k+\theta}(\cdot)), \boldsymbol{B}(t, x(\cdot))) < \frac{\varepsilon_k}{2}.$$

Так как $\overline{\Psi}_{k+\theta}(t, x(\cdot))$ принадлежит $\dfrac{\varepsilon_{k+\theta}}{2}$-окрестности $\boldsymbol{B}(t_l^{k+\theta}, x_l^{k+\theta}(\cdot))$ (см. выше), мы получаем, что

$$\bar{H}(\overline{\Psi}_{k+\theta}(t, x(\cdot)), \boldsymbol{B}(t_l^{k+\theta}, x_l^{k+\theta)}(\cdot))) < \frac{\varepsilon_{k+\theta}}{2}.$$

Таким образом,

$$H(\overline{\Psi}_{k+\theta}(t, x(\cdot)), \boldsymbol{B}(t, x(\cdot))) = \bar{H}(\overline{\Psi}_{k+\theta}(t, x(\cdot)), \boldsymbol{B}(t, x(\cdot))) \leqslant$$
$$\leqslant \bar{H}(\overline{\Psi}_{k+\theta}(t, x(\cdot)), \boldsymbol{B}(t_l^{k+\theta}, x_l^{k+\theta}(\cdot))) + \bar{H}(\boldsymbol{B}(t_l^{k+\theta}, x_l^{k+\theta}(\cdot)), \boldsymbol{B}(t, x(\cdot))) < \frac{\varepsilon_{k+\theta}}{2} + \frac{\varepsilon_k}{2} < \varepsilon_k.$$

Итак, при каждом $(t, x(\cdot))$ мы получаем, что $H(\overline{\Psi}_k(t, x(\cdot)), \boldsymbol{B}(t, x(\cdot))) \to 0$ при $k \to \infty$ и $\boldsymbol{B}(t, x(\cdot)) \subset \Psi_k(t, x(\cdot))$ для всех k.

Рассмотрим минимальный селектор $B_k(t, x(\cdot))$ в $\overline{\Psi}_k(t, x(\cdot))$, т. е. $B_k(t, x(\cdot))$ — ближайшая к началу координат точка в $\overline{\Psi}_i(t, x(\cdot))$. Мы отсылаем читателя к [34], где дано полное описание минимальных селекторов. В частности, там показано, что в нашей ситуации минимальный селектор непрерывен. По построению все B_k удовлетворяют условию 12.1.

По построению, минимальные селекторы $B_k(t, x(\cdot))$ в $\overline{\Psi}_k(t, x(\cdot))$ поточечно сходятся к минимальному селектору $B(t, x(\cdot))$ предельного отображения $\boldsymbol{B}(t, x(\cdot))$ при $k \to \infty$, так как в каждом $(t, x(\cdot))$ выполняется, что $H(\overline{\Psi}_k(t, x(\cdot)), \boldsymbol{B}(t, x(\cdot))) \to 0$ при $k \to \infty$ и $\boldsymbol{B}(t, x(\cdot)) \subset \Psi_k(t, x(\cdot))$ при всех k (см. выше). Хорошо известно, что поточечный предел B последовательности непрерывных отображений B_k измерим относительно борелевских σ-алгебр в Y и в $[0, T] \times \tilde{\Omega}$ (см. [26]). Последняя σ-алгебра совпадает с произведением борелевской σ-алгебры на $[0, T]$ и $\tilde{\mathcal{F}}$ на $\tilde{\Omega}$ (см. [31]). Свойства (iii) и (iv) следуют непосредственно из построения. □

Замечание 13.1. Отметим, что в отличие от $\bar{\Psi}_k(t, x(\cdot))$, многозначные отображения $\bar{\Phi}_k(t, x(\cdot))$ могут не удовлетворять условию 12.1, так как две разные кривые $x_1(\cdot)$ и $x_2(\cdot)$, совпадающие на $[0, t]$, могут иметь значения в разных окрестностях V_j^k, которым они принадлежат, и таким образом, значения $\bar{\Phi}_k(t, x_1(\cdot))$ и $\bar{\Phi}_k(t, x_2(\cdot))$ могут различаться. С другой стороны, из [8] вытекает, что $\bar{\Phi}_k$ является ε_k-аппроксимацией для $\boldsymbol{B}$, в то время как это не выполняется для $\bar{\Psi}_k$.

13.2. Включения с $\mathcal{P}$-производными в среднем. Рассмотрим многозначные отображения $\boldsymbol{a}(t, x)$ и $\boldsymbol{\alpha}(t, x)$, отображающие $[0, T] \times \tilde{\Omega}$ в $\mathbb{R}^n$ и в $\overline{S}_+(n)$, соответственно, и удовлетворяющие условию 12.1. Дифференциальное включение с $\mathcal{P}$-производными в среднем справа — это система вида

$$\begin{cases} D^{\mathcal{P}}\xi(t) \in \boldsymbol{a}(t, \xi(\cdot)), \\ D_2^{\mathcal{P}}\xi(t) \in \boldsymbol{\alpha}(t, \xi(\cdot)). \end{cases} \tag{13.2}$$

Определение 13.1. Будем говорить, что включение (13.2) *имеет решение* с начальными условиями $\xi_0 \in \mathbb{R}^n$, если существует вероятностное пространство и случайный процесс $\xi(t)$, заданный на нем и принимающий значения в $\mathbb{R}^n$, такие, что $\xi(0) = \xi_0$ и п.н. $\xi(t)$ удовлетворяет включению (13.2) (см. замечание 5.1).

Как и выше, мы будем рассматривать только детерминированные начальные условия.

Если, скажем, $\boldsymbol{a}(t, x)$ и $\boldsymbol{\alpha}(t, x)$ полунепрерывны снизу и имеют замкнутые выпуклые значения, то по теореме Майкла они имеют непрерывные селекторы $a(t, x(\cdot))$ и $\alpha(t, x(\cdot))$, соответственно. Если эти селекторы удовлетворяют условиям теоремы 12.2, решения уравнения (12.3) с коэффициентами $a(t, x(\cdot))$ и $\alpha(t, x(\cdot))$, которые существуют по теореме 12.2, очевидным образом являются решениями (13.2).

Основной результат этого раздела — это следующая теорема существования решения в случае, когда $\boldsymbol{a}(t, x)$ и $\boldsymbol{\alpha}(t, x)$ полунепрерывны сверху.

Теорема 13.1. *Пусть $\boldsymbol{\alpha}(t, x)$ — отображение из $[0, T] \times \tilde{\Omega}$ в $\overline{S}_+(n)$, полунепрерывное сверху, многозначное, с замкнутыми выпуклыми значениями, удовлетворяющее условию* 12.1*, и пусть* *при каждом $\alpha(t,x(\cdot))\in\boldsymbol{\alpha}(t,x(\cdot))$ выполняется оценка*

$$\operatorname{tr}\alpha(t,x(\cdot)) < K_1(1+\|x(\cdot)\|)^2 \tag{13.3}$$

для некоторого $K_1>0$.

Пусть $\boldsymbol{a}(t,x(\cdot))$ — полунепрерывное сверху многозначное отображение из $[0,T]\times\tilde{\Omega}$ в $\mathbb{R}^n$ с замкнутыми выпуклыми значениями, удовлетворяющее условию 12.1, и выполнена оценка

$$\|\boldsymbol{a}(t,x(\cdot))\| < K_2(1+\|x(\cdot)\|) \tag{13.4}$$

для некоторого $K_2>0$.

Тогда для любого начального условия $\xi(0)\in\mathbb{R}^n$ включение (13.2) имеет решение.

Доказательство. Выберем последовательность положительных чисел $\varepsilon_k\to 0$. Многозначное отображение $\boldsymbol{a}(t,x(\cdot))$ удовлетворяет условиям леммы 13.1 и, следовательно, существует последовательность непрерывных однозначных отображений $a_k:[0,T]\times\tilde{\Omega}\to\mathbb{R}^n$, которая поточечно сходится к некоторому измеримому по Борелю селектору $a(t,x(\cdot))$ отображения $\boldsymbol{a}(t,x(\cdot))$, и при этом каждое $a_k(t,x(\cdot))$ удовлетворяет условию 12.1 и оценке

$$\|a_k(t,x(\cdot))\| < K_2(1+\|x(\cdot)\|). \tag{13.5}$$

Отображение $\boldsymbol{\alpha}(t,x(\cdot))$, которое принимает значения в замкнутом выпуклом множестве $\bar{S}_+(n)$ пространства всех симметрических матриц размера $n\times n$, также удовлетворяет условию леммы 13.1, и, таким образом, существует последовательность непрерывных однозначных отображений $\tilde{\alpha}_k:[0,T]\times\tilde{\Omega}\to\bar{S}_+(n)$, которая поточечно сходится к измеримому по Борелю селектору $\alpha(t,x(\cdot))$ отображения $\boldsymbol{\alpha}(t,x(\cdot))$, и при этом каждое $\tilde{\alpha}_k(t,x(\cdot))$ удовлетворяет условию 12.1 и оценке

$$\operatorname{tr}\tilde{\alpha}_k(t,x(\cdot)) < K_1(1+\|x(\cdot)\|)^2. \tag{13.6}$$

Создадим другую последовательность $\alpha_k(t,x(\cdot))=\tilde{\alpha}_k(t,x(\cdot))+\varepsilon_k I$, где I — единичная матрица, которая очевидным образом поточечно сходится также к $\alpha(t,x(\cdot))$. Все отображения $\alpha_k(t,x(\cdot))$ непрерывны, удовлетворяют условию 12.1 и оценке (13.6) — хотя бы при достаточно больших k — и в дополнение они все принимают значения в открытом множестве $S_+(n)$ положительно определенных симметрических матриц. Поэтому по лемме 5.1 для любого $\alpha_k(t,x(\cdot))$ существует непрерывное $A_k:[0,T]\times\tilde{\Omega}:\to L(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^n)$ такое, что $\alpha_k(t,x(\cdot))=A_k(t,x(\cdot))A_k^*(t,x(\cdot))$ и все $A(t,x(\cdot))$ удовлетворяют условию 12.1.

Как и в теореме 5.1, непосредственно из определения следа в этом случае вытекает, что $\operatorname{tr}\alpha_k(t,x(\cdot))$ равен сумме квадратов всех элементов матрицы $A_k(t,x(\cdot))$, т. е. является квадратом евклидовой нормы $A_k(t,x(\cdot))$ в $L(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^n)$. Следовательно, из (13.6) следует, что

$$\|A_k(t,x(\cdot))\| < K_1(1+\|x(\cdot)\|). \tag{13.7}$$

Таким образом, из (13.5) и (13.7) вытекает, что при всех k пара $(a_k(t,x(\cdot)),A_k(t,x(\cdot)))$ удовлетворяет так называемому условию Ито

$$\|a_k(t,x(\cdot))\|+\|A_k(t,x(\cdot))\| < K(1+\|x(\cdot)\|) \tag{13.8}$$

с некоторым $K>0$, одним и тем же для всех k.

Рассмотрим последовательность стохастических дифференциальных уравнений Ито диффузионного типа

$$\xi_k(t)=\xi_0+\int_0^t a_k(s,\xi_k(\cdot))ds+\int_0^t A_k(s,\xi_k(\cdot))dw(s). \tag{13.9}$$

Так как их коэффициенты непрерывны, удовлетворяют условию 12.1 и оценке (13.8) с одним и тем же K, то в силу [10, Theorem III.2.4] они все имеют слабые решения $\xi_k(t)$, заданные на всем интервале $[0,T]$, и множество мер μ_k, порожденное этими $\xi_k(t)$ на $(\tilde{\Omega},\tilde{\mathcal{F}})$, слабо компактно (см. [10, следствие из леммы III.2.2]). Следовательно, мы можем выбрать подпоследовательность (мы сохраним обозначение μ_k для этой подпоследовательности), которая слабо сходится к некоторой вероятностной мере μ. Обозначим через $\xi(t)$ координатный процесс на вероятностном пространстве $(\tilde{\Omega},\tilde{\mathcal{F}},\mu)$ (напомним, это означает, что $\xi(t,x(\cdot))=x(t)$).

Покажем, что $\xi(t)$ — это искомое решение. Прежде всего заметим, что $\mathcal{P}_t$ — это σ-алгебра «прошлое» для $\xi(t)$.

Обозначим через λ нормализованную меру Лебега на $[0,T]$. Введем меры ν_k на $(\tilde{\Omega}, \tilde{\mathcal{F}})$ соотношениями $d\nu_k = (1+\|x(\cdot)\|)d\mu_k$. По лемме 6.1 эти ν_k слабо сходятся к мере ν, заданной соотношением $d\nu = (1+\|x(\cdot)\|)d\mu$.

Так как $a_i(t, x(\cdot))$ при $i \to \infty$ сходятся к $a(t, x(\cdot))$ поточечно, они сходятся п.н. относительно всех мер $\lambda \times \mu_k$, и, таким образом, функции $\dfrac{a_i(t,x(\cdot))}{1+\|x(\cdot)\|}$ сходятся п.н. к $\dfrac{a(t,x(\cdot))}{1+\|x(\cdot)\|}$ относительно всех мер $\lambda \times \nu_k$. Зафиксируем $\delta > 0$. По теореме Егорова (см., например, [20]) для любого k существует подмножество $\tilde{K}^k_\delta \subset [0,T] \times \tilde{\Omega}$ такое, что $(\lambda \times \nu_k)(\tilde{K}^k_\delta) > 1-\delta$, и последовательность $\dfrac{a_i(t,x(\cdot))}{1+\|x(\cdot)\|}$ сходится к $\dfrac{a(t,x(\cdot))}{1+\|x(\cdot)\|}$ равномерно на $\tilde{K}^k_\delta$. Введем $\tilde{K}_\delta = \bigcup\limits_{i=0}^{\infty} \tilde{K}^k_\delta$. Последовательность $\dfrac{a_i(t,x(\cdot))}{1+\|x(\cdot)\|}$ сходится к $\dfrac{a(t,x(\cdot))}{1+\|x(\cdot)\|}$ равномерно на $\tilde{K}_\delta$ и $(\lambda \times \nu_k)(\tilde{K}_\delta) > 1-\delta$ для всех $k = 0, \ldots, \infty$.

Отметим, что $a(t, x(\cdot))$ непрерывно на множестве полной меры $\lambda \times \nu$ на $[0,T] \times \tilde{\Omega}$. Действительно, рассмотрим последовательность $\delta_k \to 0$ и соответствующую последовательность $\tilde{K}_{\delta_k}$ из теоремы Егорова. По приведенному выше построению $a(t, x(\cdot))$ является равномерным пределом непрерывных функций на каждом $\tilde{K}_{\delta_k}$. Поэтому $a(t, x(\cdot))$ непрерывно на каждом $\tilde{K}_{\delta_k}$ и, таким образом, на каждом конечном объединении $\bigcup\limits_{i=1}^{n} \tilde{K}_{\delta_i}$. Очевидно, что $\lim\limits_{n\to\infty} (\lambda \times \nu)(\bigcup\limits_{i=1}^{n} \tilde{K}_{\delta_i}) = (\lambda \times \nu)([0,T] \times \tilde{\Omega})$.

Следовательно, $\dfrac{a(t,x(\cdot))}{1+\|x(\cdot)\|}$ непрерывно на множестве полной меры $\lambda \times \nu$ на $[0,T] \times \tilde{\Omega}$.

Пусть $g_t(x(\cdot))$ — ограниченная (пусть для определенности $|g_t(x(\cdot))| < \Theta$ для всех $x(\cdot) \in \tilde{\Omega}$) и непрерывная $\mathcal{P}_t$-измеримая функция на $\tilde{\Omega}$.

Из доказанной выше равномерной сходимости на $\tilde{K}_\delta$ для всех k и ограниченности g_t мы выводим, что при достаточно больших k

$$\left\| \int\limits_{\tilde{K}_\delta} \left(\int\limits_t^{t+\Delta t} (a_k(\tau, x(\cdot)) - a(\tau, x(\cdot))) d\tau \right) g_t(x(\cdot)) d\mu_k \right\| =$$
$$= \left\| \int\limits_{\tilde{K}_\delta} \left(\int\limits_t^{t+\Delta t} \frac{a_k(\tau, x(\cdot)) - a(\tau, x(\cdot))}{1+\|x(\cdot)\|} d\tau \right) g_t(x(\cdot)) d\nu_k \right\| < \delta.$$

Так как $(\lambda \times \mu_k)(\tilde{K}_\delta) > 1-\delta$ для всех k, $\left\| \dfrac{a_k(t,x(\cdot)) - a(t,x(\cdot))}{1+\|x(\cdot)\|} \right\| < Q$ для всех k и $|g_t(x(\cdot))| < \Theta$ (см. выше), мы получаем

$$\left\| \int\limits_{\tilde{\Omega}\setminus\tilde{K}_\delta} \left(\int\limits_t^{t+\Delta t} (a_k(\tau, x(\cdot)) - a(\tau, x(\cdot))) d\tau \right) g_t(x(\cdot)) d\mu_k \right\| =$$
$$= \left\| \int\limits_{\tilde{\Omega}\setminus\tilde{K}_\delta} \left(\int\limits_t^{t+\Delta t} \frac{a_k(\tau, x(\cdot)) - a(\tau, x(\cdot))}{1+\|x(\cdot)\|} d\tau \right) g_t(x(\cdot)) d\nu_k \right\| < 2Q\Theta\delta.$$

Из того факта, что δ — произвольное положительное число, следует, что

$$\lim_{k\to\infty} \int\limits_{\tilde{\Omega}} \left(\int\limits_t^{t+\Delta t} a_k(\tau, x(\cdot)) d\tau - \int\limits_t^{t+\Delta t} a(\tau, x(\cdot)) d\tau \right) g_t(x(\cdot)) d\mu_k = 0.$$

Функция $\dfrac{a(t,x(\cdot))}{1+\|x(\cdot)\|}$ является $\lambda\times\nu$-п.н. непрерывной (см. выше) и ограниченной на $[0,T]\times\tilde\Omega$. Следовательно, в силу [9, леммы в § VI.4] из слабой сходимости мер ν_k к ν вытекает, что

$$\lim_{k\to\infty}\int\limits_{\tilde\Omega}\left(\int\limits_t^{t+\Delta t} a(\tau,x(\cdot))d\tau\right) g_t(x(\cdot))d\mu_k=\lim_{k\to\infty}\int\limits_{\tilde\Omega}\left(\int\limits_t^{t+\Delta t}\frac{a(\tau,x(\cdot))}{1+\|x(\cdot)\|}d\tau\right) g_t(x(\cdot))d\nu_k=$$
$$=\int\limits_{\tilde\Omega}\left(\int\limits_t^{t+\Delta t}\frac{a(\tau,x(\cdot))}{1+\|x(\cdot)\|}d\tau\right) g_t(x(\cdot))d\nu=\int\limits_{\tilde\Omega}\left(\int\limits_t^{t+\Delta t} a(\tau,x(\cdot))d\tau\right) g_t(x(\cdot))d\mu. \quad (13.10)$$

Очевидным образом

$$\lim_{i\to\infty}\int\limits_{\tilde\Omega}(x(t+\Delta t)-x(t))d\mu_k=\lim_{i\to\infty}\int\limits_{\tilde\Omega}\frac{x(t+\Delta t)-x(t)}{1+\|x(\cdot)\|}d\nu_k=$$
$$=\int\limits_{\tilde\Omega}\frac{x(t+\Delta t)-x(t)}{1+\|x(\cdot)\|}d\nu=\int\limits_{\tilde\Omega}(x(t+\Delta t)-x(t))d\mu. \quad (13.11)$$

Отметим, что

$$\int\limits_{\tilde\Omega}\left(\Big[x(t+\Delta t)-x(t)\Big]-\int\limits_t^{t+\Delta t} a_k(\tau,x(\cdot))d\tau\right) g_t(x(\cdot))d\mu_k=0, \quad (13.12)$$

так как

$$\int\limits_{\tilde\Omega}[x(t+\Delta t)-x(t)]g_t(x(\cdot))d\mu_k=E\left[(\xi_k(t+\Delta t)-\xi_k(t))g_t(\xi_k(t))\right],$$

$$\int\limits_{\tilde\Omega}\left(\int\limits_t^{t+\Delta t} a_k(\tau,x(\cdot))d\tau\right) g_t(x(\cdot))d\mu_k=E\left[\left(\int\limits_t^{t+\Delta t} a_k(\tau,\xi_k(\tau))d\tau\right) g_t(\xi_k(t))\right],$$

и $\xi_k(t)$ является решением (13.9).

Формулы (13.10), (13.11) и (13.12) приводят к равенству

$$\int\limits_{\tilde\Omega}\left(\Big[x(t+\Delta t)-x(t)\Big]-\int\limits_t^{t+\Delta t} a(s,x(\cdot))ds\right) g_t(x(\cdot))d\mu=0.$$

Поскольку g_t — произвольная непрерывная ограниченная функция, измеримая относительно $\mathcal{P}_t$, последнее соотношение эквивалентно следующему:

$$E\left(\Big[\xi(t+\Delta t)-\xi(t)\Big]-\int\limits_t^{t+\Delta t} a(s,\xi(\cdot))ds\,\Big|\,\mathcal{P}_t\right)=0. \quad (13.13)$$

Из (13.13) очевидным образом следует, что

$$D^{\mathcal{P}}\xi(t)=a(t,\xi(\cdot))\subset\boldsymbol{a}(t,\xi(\cdot)) \quad (13.14)$$

и что процесс $\xi(t)-\int\limits_0^t a(s,\xi(\cdot))ds$ является мартингалом на $(\tilde\Omega,\tilde{\mathcal{F}},\mu)$ относительно $\mathcal{P}_t$.

Теперь обратимся к $A_k(t,x(\cdot))$. Напомним, что $\alpha_k(t,x(\cdot))=A_k(t,x(\cdot))A_k^*(t,x(\cdot))$ поточечно сходится к $\alpha(t,x(\cdot))$, измеримому селектору отображения $\boldsymbol{\alpha}(t,x(\cdot))$. Полностью аналогично предыдущим рассуждениям нетрудно показать, что

$$\int\limits_{\tilde\Omega}\left(\Big[(x(t+\Delta t)-x(t))\otimes(x(t+\Delta t)-x(t))\Big]-\int\limits_t^{t+\Delta t}\alpha(s,x(\cdot))ds\right) g_t(x(\cdot))d\mu=0 \quad (13.15)$$

для g_t, как выше. Соотношение (13.15) эквивалентно

$$E\left(\Big[(\xi(t+\Delta t)-\xi(t))\otimes(\xi(t+\Delta t)-\xi(t))\Big]-\int\limits_t^{t+\Delta t}\alpha(s,\xi(\cdot)))ds\,\Big|\,\mathcal{P}_t\right)=0,$$

из чего очевидным образом следует, что

$$D_2^{\mathcal{P}}\xi(t)=\alpha(t,\xi(\cdot))\subset\boldsymbol{\alpha}(t,\xi(\cdot)), \tag{13.16}$$

и что процесс $[\,\xi(t)\otimes\xi(t)\,]-\int\limits_0^t\alpha(t,\xi(\cdot))dt$ является мартингалом на $(\tilde{\Omega},\tilde{\mathcal{F}},\mu)$ относительно $\mathcal{P}_t$.

Соотношения (13.14) и (13.16) означают, что $\xi(t)$ — искомое решение включения (13.2). $\square$

Замечание 13.2. Из (13.13) очевидным образом следует, что решение $\xi(t)$ включения (13.2), полученное в теореме 13.1, является семимартингалом относительно $\mathcal{P}_t$, так как процесс $\xi(t)-\int\limits_0^t a(s,\xi(\cdot))ds$ — мартингал относительно $\mathcal{P}_t$.

Теорема 13.2. *Пусть $a(t,x(\cdot))$ и $\alpha(t,x(\cdot))$ такие же, как в теореме* 12.2, *но α отображает $[0,T]\times\tilde{\Omega}$ в $\bar{S}_+(n)$ вместо $S_+(n)$. Тогда для любого начального условия $\xi_0\in\mathbb{R}^n$ уравнение* (12.3) *имеет решение, корректно определенное на всем интервале* $[0,T]$.

Действительно, мы можем построить последовательность непрерывных однозначных отображений $\alpha_k=\alpha+\varepsilon_k I:[0,T]\times\tilde{\Omega}\to S_+(n)$, удовлетворяющих условию 12.1, которая сходится к α. Тогда доказательство теоремы 13.2 проводится с той же схемой рассуждений, что и в доказательстве теоремы 13.1.

Глава 3

ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ

14. Оптимальные решения для включений с производными в среднем

Определение 14.1. *Совершенное решение* включения (6.2) — это стохастический процесс с непрерывными выборочными траекториями такой, что он является решением в смысле определения 6.1, и мера, соответствующая ему на пространстве непрерывных кривых, является слабым пределом мер, порожденных решениями последовательности уравнений Ито диффузионного типа с непрерывными коэффициентами.

Замечание 14.1. Отметим, что совершенные решения, аппроксимируемые решениями уравнений диффузионного типа, естественным образом возникают в приложениях. Однако это открытый вопрос, все ли решения являются совершенными или существуют несовершенные решения.

Напомним, что в лемме 6.1 показано следующее. Рассмотрим последовательность вероятностных мер μ_k на $(\Omega,\mathcal{F})$ такую, что (6.1) выполняется для всех i. Пусть меры μ_i слабо сходятся к некоторой мере μ при $i\to\infty$. Введем меры ν_i соотношениями $d\nu_i=(1+\|x(\cdot)\|_{C^0})d\mu_i$ и меры ν_i^1 соотношениями $d\nu_i^1=(1+\|x(\cdot)\|_{C^0}^2)d\mu_i$. Тогда меры ν_i слабо сходятся к мере ν, заданной соотношением $d\nu=(1+\|x(\cdot)\|_{C^0})d\mu$, а меры ν_i^1 слабо сходятся к мере ν^1, заданной соотношением $d\nu^1=(1+\|x(\cdot)\|_{C^0}^2)d\mu$.

Ниже мы имеем дело с последовательностью процессов $\xi_i(t)$ (решениями последовательности стохастических дифференциальных уравнений в $\mathbb{R}^n$), описанных в замечании 6.1, для которых выполняется (6.1). Для таких процессов нам будет нужно использовать следующее техническое утверждение, которое является следствием из леммы 6.1.

Лемма 14.1. *Пусть $b:[0,T]\times\Omega\to\mathbb{R}^n$ — непрерывная вектор-функция, для которой выполнено $\|b(t,x(\cdot))\|<K(1+\|x(\cdot)\|_{C^0})$, и аналогично b^1 — такая, что $\|b^1(t,x(\cdot))\|<K(1+\|x(\cdot)\|_{C^0}^2)$ для некоторого $K>0$. Тогда*

(i) $\lim\limits_{k\to\infty}\int\limits_{\Omega} b(t,x(\cdot))d\mu_k = \int\limits_{\Omega} b(t,x(\cdot))d\mu$;

(ii) $\lim\limits_{k\to\infty}\int\limits_{\Omega} b(t,x(\cdot))^2 d\mu_k = \int\limits_{\Omega} b(t,x(\cdot))^2 d\mu$.

Доказательство. Действительно, $\int\limits_{\Omega} b(t,x(\cdot))d\mu_k = \int\limits_{\Omega} \frac{b(t,x(\cdot))}{1+\|x(\cdot)\|}d\nu_k$ по лемме 6.1 стремится к $\int\limits_{\Omega} \frac{b(t,x(\cdot))}{1+\|x(\cdot)\|}d\nu$, поскольку $\frac{b(t,x(\cdot))}{1+\|x(\cdot)\|}$ непрерывно и ограничено. Но $\frac{b(t,x(\cdot))}{1+\|x(\cdot)\|}d\nu = b(t,x(\cdot))d\mu$. Доказательство (ii) в точности аналогично. □

Теорема 14.1. *Выберем произвольное начальное значение $\xi_0 \in \mathbb{R}^n$. Пусть $\mathbf{a}(t,x)$ — полунепрерывное сверху многозначное отображение с замкнутыми выпуклыми образами из $[0,T]\times\mathbb{R}^n$ в $\mathbb{R}^n$, и пусть оно удовлетворяет оценке*

$$\|\mathbf{a}(t,x)\|^2 < K(1+\|x\|^2) \tag{14.1}$$

для некоторого $K>0$.

Пусть $\boldsymbol{\alpha}(t,x)$ — полунепрерывное сверху многозначное отображение с замкнутыми выпуклыми образами из $[0,T]\times\mathbb{R}^n$ в $\bar{\mathrm{S}}_+(n)$ такое, что для каждого $\alpha(t,x)\in\boldsymbol{\alpha}(t,x)$ выполняется оценка

$$|\operatorname{tr}\alpha(t,x)| < K(1+\|x\|^2) \tag{14.2}$$

при некотором $K>0$.

Тогда для каждой последовательности $\varepsilon_i \to 0$, $\varepsilon_i > 0$, каждая пара последовательностей $a_i(t,x)$ и $\alpha_i(t,x)$ ε_i-аппроксимаций отображений $\mathbf{a}(t,x)$ и $\boldsymbol{\alpha}(t,x)$, соответственно, порождает совершенное решение включения (13.2) с начальным условием ξ_0.

Доказательство. Выберем последовательность $\varepsilon_i \to 0$ и последовательности ε_i-аппроксимаций $a_i(t,x)$ и $\tilde{\alpha}_i(t,x)$ как в условии теоремы. Без ограничения общности мы можем предполагать, что $\tilde{\alpha}_i(t,x)$ являются $\frac{\varepsilon_i}{2}$-аппроксимациями отображения $\boldsymbol{\alpha}(t,x)$.

В качестве нормы в $\mathrm{S}(n)$ возьмем сужение на $\mathrm{S}(n)$ евклидовой нормы (т. е. квадратный корень из суммы квадратов всех элементов матрицы) в пространстве $L(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^n)$, изоморфном $\mathbb{R}^{n^2}$. Поскольку все нормы в конечномерном пространстве $\mathrm{S}(n)$ эквивалентны, для этой нормы (14.2) также выполняется, возможно, с другой константой, для которой мы сохраним обозначение K.

Все $a_i(t,x)$ удовлетворяют (14.1) с некоторой константой большей, чем K из условия теоремы. Тем не менее мы сохраним обозначение K для этой константы. Поскольку $1+\|x\|^2 \leqslant (1+\|x\|)^2$, для $a_i(t,x)$

$$\|a_i(t,x)\| < K(1+\|x\|), \tag{14.3}$$

также выполняется.

Аппроксимации $\tilde{\alpha}_i(t,x)$ принимают значения в $\bar{\mathrm{S}}_+(n)$. Введем $\alpha_i(t,x) = \tilde{\alpha}_i(t,x) + \frac{\varepsilon_i}{4}I$, где I — единичная матрица. Сразу из построения следует, что $\alpha_i(t,x)$ при любом i является непрерывной ε_i-аппроксимацией отображения $\boldsymbol{\alpha}(t,x)$ и что в любой точке (t,x) оно принадлежит $\mathrm{S}_+(n)$, т. е. является строго положительно определенным. Кроме того, $\alpha_i(t,x)$ удовлетворяет (14.2), где константа $K>0$ больше, чем константа из условия теоремы, но тем не менее мы сохраним обозначение K для нее.

По лемме 5.1 существует непрерывное $A_i(t,x)$ такое, что $\alpha_i(t,x) = A_i(t,x)A_i^*(t,x)$. Непосредственно из определения следа мы получаем, что $\operatorname{tr}\alpha_i(t,x)$ равно сумме квадратов всех элементов матрицы $A_i(t,x)$, т. е. это квадрат евклидовой нормы в $L(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^n)$. Следовательно, из (14.2) и из очевидного неравенства $1+\|x\|^2 \leqslant (1+\|x\|)^2$ вытекает, что $A_i(t,x)$ удовлетворяет неравенству

$$\|A_i(t,x)\| < K(1+\|x\|). \tag{14.4}$$

Без ограничения общности мы можем предположить, что указанные выше непрерывные ε_i-аппроксимации a_i и A_i являются гладкими. Действительно, если некоторое a_i не гладко, мы можем аппроксимировать его последовательностью гладких отображений a_{ij}, которая сходится к a_i при $j\to\infty$ относительно равномерной нормы на компактах. Следовательно, при достаточно большом j график отображения a_{ij} лежит в ε_i-окрестности графика $\mathbf{a}$. Таким образом, a_{ij} — ε_i-аппроксимация $\mathbf{a}$. Тогда мы заменим непрерывное a_i этим a_{ij}, т. е. примем его за новое a_i. Для A_i

рассуждения те же самые. Отметим, что после такой замены оценки (14.3) и (14.4) остаются справедливыми. Таким образом, все стохастические дифференциальные уравнения

$$\xi_i(t) = \xi_0 + \int_0^t a_i(s, \xi_i(s))ds + \int_0^t A_i(s, \xi_i(s))dw(s) \tag{14.5}$$

имеют сильные решения $\xi_i(t)$ корректно определенные на всем интервале $[0, T]$ (см. [10]). В частности, это означает, что каждый процесс ξ_i может быть задан на любом подходящем вероятностном пространстве, где $w(t)$ подчинен своему собственному «прошлому».

Рассмотрим измеримое пространство $(\tilde{\Omega}, \tilde{\mathcal{F}})$, введенное в разделе 4. Обозначим через $\mathcal{P}_t$ σ-подалгебру в $\tilde{\mathcal{F}}$, порожденную цилиндрическими множествами с основаниями на $[0, t]$, а через $\mathcal{N}_t$ — σ-алгебру, порожденную прообразами борелевских множеств в $\mathbb{R}^n$ при отображении $x(\cdot) \mapsto x(t)$.

Поскольку все решения $\xi_i(t)$ сильные, они все могут быть заданы на некотором едином вероятностном пространстве $(\bar{\Omega}, \bar{\mathcal{F}}, \mathsf{P})$ и, таким образом, они все могут рассматриваться как измеримые отображения из $(\bar{\Omega}, \bar{\mathcal{F}})$ в $(\tilde{\Omega}, \tilde{\mathcal{F}})$.

На измеримом пространстве $([0, T], \mathcal{B})$, где $\mathcal{B}$ — борелевская σ-алгебра, через λ_1 мы обозначаем нормализованную меру Лебега.

Напомним, что каждый процесс $\xi_i(t)$ определяет меру μ_i на $(\tilde{\Omega}, \tilde{\mathcal{F}})$, и на вероятностном пространстве $(\tilde{\Omega}, \tilde{\mathcal{F}}, \mu_i)$ координатный процесс описывает $\xi_i(t)$.

Поскольку все $a_i(t, x)$ удовлетворяют (14.3), а все $A_i(t, x)$ удовлетворяют (14.4) с одним и тем же K (см. выше), то уравнения (14.5) удовлетворяют условию [10, лемма III.2.1] и замечанию после этой леммы при всех i, и таким образом, оценка

$$E(\sup_{t \leqslant T} \|\xi_i(t)\|^2) \leqslant C_2. \tag{14.6}$$

выполняется для ξ_i, где C_2 зависит только от интервала $[0, T]$ и от K из формул (14.3) и (14.4).

Замечание 14.2. В доказательстве [10, Lemma III.2.1] оценка (14.6) выведена из соотношения

$$E(\sup_{t \leqslant T} \|\xi_i(t)\|^2) \leqslant K(1 + \int_0^t E(\sup_{u \leqslant s} \|\xi_i(s)\|^2 ds).$$

Поскольку решения сильные, они могут быть заданы на различных вероятностных пространствах и последнее неравенство выполняется на любом из этих пространств. В частности, оно выполняется на вероятностном пространстве $(\tilde{\Omega}, \tilde{\mathcal{F}}, \mu_i)$, где решение описано как координатный процесс. Это означает, что (6.1) выполняется при всех i для некоторого C_2, зависящего только от интервала $[0, T]$ и от K из (14.3) и (14.4).

Кроме того, по следствию из [10, § III.2] множество мер $\{\mu_i\}$ слабо компактно. Так что для заданных последовательностей аппроксимаций a_i и A_i, из последовательности соответствующих мер μ_i можно выделить подпоследовательность, которая слабо сходится к некоторой мере μ. Для простоты мы положим, что сама последовательность μ_i слабо сходится к μ. Обозначим через $\xi(t)$ координатный процесс на вероятностном пространстве $(\tilde{\Omega}, \tilde{\mathcal{F}}, \mu)$. Отметим, что $\mathcal{P}_t$ является σ-алгеброй «прошлым», а $\mathcal{N}_t$ — σ-алгеброй «настоящим» для $\xi(t)$.

Лемма 14.2 (см. [10])**.** $\int_\Omega (\sup_{0 \leqslant t \leqslant T} \|x(t)\|^2) d\mu \leqslant C_2$, *где константа* $C_2 > 0$ *зависит только от интервала* $[0, T]$ *и от* K *из* (14.3) *и* (14.4).

Так как последовательность мер μ_i слабо сходится к μ, лемма 14.2 следует непосредственно из замечания 14.2 и леммы 14.1 (ii).

Продолжим доказательство теоремы 14.1. Так как $\|a_i(t, x(t))\|^2 \leqslant K(1 + \|x(t)\|^2)$ по (14.1), то, принимая во внимание лемму 14.2, мы получаем, что для некоторого $K_1 > 0$

$$\int_{[0,T] \times \Omega} \|a_i(t, x(t))\|^2 d\lambda_1 \times d\mu \leqslant K_1. \tag{14.7}$$

Введем отображения $\tilde{a}_i : [0,T] \times \tilde{\Omega} \to \mathbb{R}^n$ по формуле $\tilde{a}_i(t, x(\cdot)) = a_i(t, x(t))$. Тогда из формулы (14.7) вытекает, что множество всех $\tilde{a}_i$ равномерно ограничено относительно нормы в гильбертовом пространстве $L_2([0,T] \times \tilde{\Omega}, \mathbb{R}^n)$, заданном относительно мер λ_1 в $[0,T]$ и μ в $\tilde{\Omega}$. Следовательно, множество всех $\tilde{a}_i$ слабо относительно компактно в $L_2([0,T] \times \tilde{\Omega}, \mathbb{R}^n)$, так что можно выбрать подпоследовательность, которая слабо сходится в $L_2([0,T] \times \tilde{\Omega}, \mathbb{R}^n)$ к некоторому $\mathsf{a} : [0,T] \times \tilde{\Omega} \to \mathbb{R}^n$. Для простоты, пусть сама $\tilde{a}_i(t, x(\cdot))$ будет этой подпоследовательностью.

Введем также $a(t, x(\cdot)) = E(\mathsf{a} \mid \mathcal{N}_t)$ на вероятностном пространстве $(\tilde{\Omega}, \tilde{\mathcal{F}}, \mu)$, $x(\cdot) \in \tilde{\Omega}$.

По лемме Мазура (см., например, [20]), для слабо сходящейся последовательности $\tilde{a}_i(t, x(\cdot))$ к $\mathsf{a} : [0,T] \times \tilde{\Omega} \to \mathbb{R}^n$ в $L_2([0,T] \times \tilde{\Omega}, \mathbb{R}^n)$ существует последовательность конечных выпуклых комбинаций ее элементов, которая сходится в том же пространстве сильно (по норме). Выпуклые комбинации имеют вид

$$\bar{a}_k(t, x(\cdot)) = \sum_{i=j(k)}^{n(k)} \beta_i \tilde{a}_i(t, x(\cdot)),$$

где $\beta_i \geqslant 0$, $i = j(k), \ldots, n(k)$, $\sum\limits_{i=j(k)}^{n(k)} \beta_i = 1$ и $j(k) \to \infty$ при $k \to \infty$. Введем $\tilde{\mathbf{a}}(t, x(\cdot)) = \mathbf{a}(t, x(t))$. Так как $\mathbf{a}(t,x)$ имеет выпуклые образы, $\bar{a}_i$ являются ε-аппроксимациями отображений $\tilde{\mathbf{a}}(t, x(\cdot))$ для некоторой последовательности $\varepsilon \to 0$. Поскольку сходимость сильная в $L_2([0,T] \times \tilde{\Omega}, \mathbb{R}^n)$, предел $\mathsf{a}(t, x(\cdot))$ принадлежит $\tilde{\mathbf{a}}(t, x(\cdot))$ μ-п.н. Тогда из свойств условного математического ожидания следует, что μ-п.н. выполняется, что $a(t, \xi(\cdot))$ — селектор отображения $\tilde{\mathbf{a}}(t, \xi(\cdot)) = \mathbf{a}(t, \xi(t))$, измеримый относительно $\mathcal{N}_t$.

Отметим, что по построению и по свойствам условного математического ожидания последовательность $\bar{a}_i(t, x(\cdot))$ сходится сильно к $a(t, x(\cdot))$ в $L_2([0,T] \times \tilde{\Omega}, \mathbb{R}^n)$, где $\tilde{\Omega}$ снабжено σ-алгеброй $\mathcal{N}_t$. Следовательно, она сходится также и по вероятности и можно выбрать подпоследовательность, которая сходится μ-п.н. Чтобы не менять обозначения, мы полагаем, что $\bar{a}_i(t, x(\cdot))$ сходится к $a(t, x(\cdot))$ μ-п.н.

Выберем $\delta > 0$. По тереме Егорова (см., например, [20]) существует множество $\mathsf{K}_\delta \subset \tilde{\Omega}$ такое, что $\mu(\mathsf{K}_\delta) > 1 - \delta$, и на этом множестве последовательность $\bar{a}_i(t, x(\cdot))$ сходится к $a(t, x(\cdot))$ равномерно.

Пусть $f : \Omega \to \mathbb{R}$ — произвольная ограниченная непрерывная функция, измеримая относительно $\mathcal{N}_t$. Выберем произвольное $\varepsilon > 0$. Из указанной выше равномерной сходимости на K_δ и ограниченности f вытекает, что при всех i и всех $t \in [0,T]$ одновременно существует $N(\varepsilon) > 0$ такое, что при $k > N(\varepsilon)$

$$\left\| \int\limits_{\mathsf{K}_\delta} f(x(\cdot)) \left(\bar{a}_k(t, x(\cdot)) - a(t, x(\cdot)) \right) d\mu_i \right\| < \varepsilon. \tag{14.8}$$

Так как f ограничено, существует некоторое $\Xi > 0$ такое, что $|f(x(\cdot))| < \Xi$ для всех $x(\cdot) \in \tilde{\Omega}$. Отметим также, что $\mu(\Omega \backslash \mathsf{K}_\delta) < \delta$. С другой стороны, $\|a_i(t, \xi_i(t))\| < K(1 + \|\xi_i(t)\|)$ по (14.3) и $\sup\limits_i \int\limits_\Omega \|\bar{\xi}_i\|^2_{C^0} d\mu < C_2$ по (14.6). Отметим также соотношение

$$\int\limits_{\|\xi_i\| > c} \|\xi_i\|_{C^0} d\mu_i < \frac{1}{c} \int\limits_{\|\xi_i\| > c} \|\xi_i\|^2_{C^0} d\mu$$

(см. [3]). Таким образом, принимая во внимание замечание 14.2, мы получаем

$$\left\| \int\limits_{\tilde{\Omega} \backslash \mathsf{K}_\delta} f(x(\cdot)) \left(\bar{a}_k(t, x(\cdot)) - a(t, x(\cdot)) \right) d\mu_i \right\| < \frac{\delta \Xi K (1 + C_2)}{c},$$

т. е. поскольку δ — произвольное положительное число, приведенная выше норма интеграла становится меньше любого положительного числа, когда $\delta \to 0$. Вместе с (14.8) это означает, что

$$\lim_{k\to\infty}\left\|\int\limits_{\Omega} f(x(\cdot))\,(\bar a_k(t,x(\cdot)) - a(t,x(\cdot)))\,d\mu_i\right\| = 0 \tag{14.9}$$

для всех i равномерно.

Отметим, что $a(t,x(\cdot))$ непрерывно на множестве полной меры μ в $\tilde\Omega$. Действительно, оно является равномерным пределом непрерывных функций на K_δ при любом $\delta>0$ и, таким образом, на любом конечном объединении множеств K_δ. Так что оно непрерывно на конечных объединениях множеств K_δ. Очевидным образом $\lim\limits_{j\to\infty}\mu(\bigcup\limits_{i=1}^{j}\mu(\mathsf{K}_{\delta_i})) = 1$ для последовательности $\delta_i \to 0$.

Тогда по свойствам слабой сходимости мер и по (14.3) мы можем применить лемму 14.1 (i) и получить, что

$$\lim_{k\to\infty}\int\limits_{\Omega} f(x(\cdot))a(t,x(\cdot))d\mu_k = \int\limits_{\Omega} f(x(\cdot))a(t,x(\cdot))d\mu$$

и что

$$\lim_{k\to\infty}\int\limits_{\Omega} f(x(\cdot))(x(t+\Delta t)-x(t))d\mu_k = \int\limits_{\Omega} f(x(\cdot))(x(t+\Delta t)-x(t))d\mu.$$

Поскольку по построению $D\xi_k(t) = a_k(t,\xi_k(t))$, то

$$\lim_{\Delta t\to+0}\int\limits_{\Omega} f(x(\cdot))(x(t+\Delta t)-x(t)-a_k(t,x(t)))d\mu_k = 0.$$

Следовательно,

$$\lim_{\Delta t\to+0}\left(\sum_{i=j(k)}^{n(k)}\beta_i\left(\int\limits_{\Omega} f(x(\cdot))(x(t+\Delta t)-x(t)-a_i(t,x(t)))d\mu_i\right)\right) = 0.$$

Выполняются следующие соотношения:

$$\begin{aligned}
&\left\|\sum_{i=j(k)}^{n(k)}\beta_i\left(\int\limits_{\Omega} f(x(\cdot))(x(t+\Delta t)-x(t)-a_i(t,x(t)))d\mu_i\right) - \int\limits_{\Omega} f(x(\cdot))(x(t+\Delta t)-x(t)-a(t,x(\cdot)))d\mu\right\| \leqslant\\
&\leqslant \left\|\int\limits_{\Omega} f(x(\cdot))(x(t+\Delta t)-x(t))d\mu_k - \int\limits_{\Omega} f(x(\cdot))(x(t+\Delta t)-x(t))d\mu\right\| +\\
&+\left\|\sum_{i=j(k)}^{n(k)}\beta_i\left(\int\limits_{\Omega} f(x(\cdot))a_i(t,x(t))d\mu_i - \int\limits_{\Omega} f(x(\cdot))a_i(t,x(t))d\mu\right)\right\| +\\
&+\left\|\int\limits_{\Omega} f(x(\cdot))\bar a_k(t,x(\cdot))d\mu - \int\limits_{\Omega} f(x(\cdot))a(t,x(\cdot))d\mu\right\|,
\end{aligned}$$

где правая часть этого неравенства становится меньше любого положительного числа при достаточно большом k. Так что

$$\begin{aligned}
&\lim_{\Delta t\to+0}\int\limits_{\Omega} f(x(\cdot))(x(t+\Delta t)-x(t)-a(t,x(\cdot)))d\mu =\\
&= \lim_{\Delta t\to+0}\left(\sum_{i=j(k)}^{n(k)}\beta_i\left(\int\limits_{\Omega} f(x(\cdot))(x(t+\Delta t)-x(t)-a_i(t,x(t)))d\mu_i\right)\right) = 0,
\end{aligned}$$

и, таким образом, $D\xi(t) = a(t,\xi(\cdot)) \in \tilde{\mathbf{a}}(t,\xi(\cdot)) = \mathbf{a}(t,\xi(t))$ μ-п.н.

Так как $\|A_i(t,x(t))\|^2 = \operatorname{tr}\alpha_i(t,x(t)) \leqslant K(1+\|x(t)\|^2)$ по (14.2), то, принимая во внимание лемму 14.2, мы получаем

$$\int\limits_{\Omega\times[0,T]} \|A_i(t,x(t))\|^2 d\mu\times d\lambda_1 \leqslant K_2. \tag{14.10}$$

для всех i и некоторого $K_2>0$. Введем $\tilde{A}_i(t,x(\cdot)) = A_i(t,x(t))$. Тогда из (14.10) следует, что множество всех $\tilde{A}_i$ равномерно ограничено относительно нормы в гильбертовом пространстве $L_2([0,T]\times\tilde{\Omega}, L(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^n))$. Следовательно, это множество слабо относительно компактно в этом пространстве и, таким образом, можно выбрать подпоследовательность, которая слабо сходится в $L_2([0,T]\times\tilde{\Omega}, L(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^n))$ к некоторому $\mathsf{A}:[0,T]\times\tilde{\Omega}\to L(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^n)$. Для простоты пусть сама $\tilde{A}_i(t,x(\cdot))$ будет этой подпоследовательностью. Рассмотрим также $A(t,x(\cdot)) = E(\mathsf{A}\mid\mathcal{N}_t)$ на вероятностном пространстве $(\tilde{\Omega},\tilde{\mathcal{F}},\mu)$, $x(\cdot)\in\tilde{\Omega}$. По построению μ-п.н. $A(t,\xi(\cdot))A^*(t,\xi(\cdot))$ является селектором $\boldsymbol{\alpha}(t,\xi(t))$.

Тогда, применяя лемму Мазура и теорему Егорова, аналогично рассуждениям выше мы показываем, что для $f(\cdot)$, как выше,

$$\lim_{\Delta t\to+0}\int\limits_{\Omega} f(\cdot)[(x(t+\Delta t)-x(t))(x(t+\Delta t)-x(t))^* - A(t,x(t))A^*(t,x(t))]d\mu = 0.$$

Следовательно, $D_2\xi(t) = A(t,\xi(t))A(t,\xi(t))^*$. □

Замечание 14.3. Отметим, что все последовательности ε-аппроксимаций при всех последовательностях $\varepsilon_i\to 0$, использованных при доказательстве теоремы 14.1, удовлетворяют (14.3) и (14.4) с одним и тем же K, так что по следствию из [10, § III.2] множество мер $\{\mu_i\}$ (соответствующих всем последовательностям и всем i) слабо компактно.

Пусть f — непрерывная ограниченная вещественная функция на $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n$. Для решений включения (13.2) рассмотрим функционал качества вида

$$J(\xi(\cdot)) = E\int\limits_0^T f(t,\xi(t))dt. \tag{14.11}$$

Мы ищем решения, на которых этот функционал качества принимает минимальное значение.

Теорема 14.2. *Среди совершенных решений включения* (13.2), *построенных в доказательстве теоремы* 14.1, *имеется решение* $\xi(t)$, *на котором значение* J *минимально.*

Доказательство. Поскольку все меры на $(\tilde{\Omega},\tilde{\mathcal{F}})$, построенные в доказательстве теоремы 14.1 о совершенных решениях включения (13.2), являются вероятностными и функция f в (14.11) ограничена, то множество значений J на этих мерах ограничено. Если это множество значений имеет минимум, тогда соответствующая мера μ — именно та, которую мы ищем: координатный процесс на пространстве $(\tilde{\Omega},\tilde{\mathcal{F}},\mu)$ и есть оптимальное решение.

Предположим, что указанное выше множество значений не имеет минимума, но тогда оно имеет инфимум $\aleph$, который является предельной точкой в этом множестве. Пусть μ_i^* — последовательность такая, что для соответствующих решений $\xi_i^*(t)$ значения $J(\xi_i^*(t))$ сходятся к $\aleph$. Каждая μ_i^* есть слабый предел последовательности мер μ_{ij}, соответствующих некоторой последовательности ε_j-аппроксимаций при $j\to\infty$. Выберем из последовательности подпоследовательность (для простоты мы обозначаем ее тем же символом μ_{ij}) такую, что для соответствующих решений $\xi_{ij}(t)$ и для всех i мы получаем равномерную сходимость значений $J(\xi_{ij}(\cdot))$ к $J(\xi_i^*(\cdot))$ при $j\to\infty$. Тогда $J(\xi_{ii}(\cdot))\to\aleph$ при $i\to\infty$. Поскольку множество всех мер, соответствующих всем аппроксимациям, слабо компактно (см. выше), мы можем выбрать из μ_{ii} подпоследовательность (обозначим ее тем же символом μ_{ii}), которая слабо сходится к некоторой мере μ^*. По построению для координатного процесса $\xi^*(t)$ на $(\tilde{\Omega},\tilde{\mathcal{F}},\mu^*)$ мы получаем $J(\xi^*(\cdot))=\aleph$, т. е. значение минимально. Поскольку μ^* — предел мер μ_{ii}, то $\xi^*(t)$ — совершенное решение (13.2), которое мы ищем. □

15. Случай включений типа геометрического броуновского движения

Здесь мы имеем дело со следующим обобщением так называемого геометрического броуновского движения, а именно, с процессом $S(t)$, который удовлетворяет системе стохастических дифференциальных уравнений[1]:

$$\mathrm{d}S^\alpha(t) = S^\alpha a^\alpha(t; S^1(t), \dots, S^n(t))\mathrm{d}t + S^\alpha(t) A^\alpha_\beta(t; S^1(t), \dots, S^n(t))\mathrm{d}w^\beta, \tag{15.1}$$

где w^β — независимые винеровские процессы в $\mathbb{R}^1$, которые в совокупности образуют винеровский процесс в $\mathbb{R}^n$, $a(t,x)$ — векторное поле на $\mathbb{R}^n$, $A(t,x)$ — отображение из $[0,T]\times\mathbb{R}^n$ в пространство линейных операторов $L(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^n)$, а (A^α_β) обозначает матрицу оператора A. Отметим, что (стандартное) геометрическое броуновское движение удовлетворяет (15.1) в случае, когда $a(t)$ и $A(t)$ зависят только от времени t (т. е. не зависят от точки $x\in\mathbb{R}^n$).

Процессы, удовлетворяющие (15.1), возникают в различных стохастических моделях.

Предположим, что координаты S^α решения (15.1) положительны при всех t. Тогда по формуле Ито процесс

$$\xi(t) = \ln S(t) = \{\ln S^1(t), \dots, \ln S^n(t)\}$$

удовлетворяет уравнению

$$\mathrm{d}\xi^\alpha(t) = \left(a^\alpha - \frac{1}{2}(A^\alpha_\beta \delta^{\beta\gamma} A^\alpha_\gamma)\right)(t,\xi(t))\mathrm{d}t + A^\alpha_\beta(t,\xi(t))\mathrm{d}w^\beta(t), \tag{15.2}$$

поскольку $\mathrm{d}w^\alpha \mathrm{d}w^\beta = \delta^{\alpha\beta}\mathrm{d}t$ (здесь $\delta^{\alpha\beta}$ — символ Кронекера: $\delta^{\alpha\alpha}=1$, $\delta^{\alpha\beta}=0$ для $\alpha\neq\beta$).

Аналогично, из формулы Ито мы выводим, что если процесс $\xi(t)$ удовлетворяет (15.2), то процесс

$$S(t) = \exp\xi(t) = (\exp\xi^1(t), \dots, \exp\xi^n(t))$$

удовлетворяет (15.1). Отметим, что в этом случае координаты S^α положительны.

Обозначим через B симметрическую положительно определенную матрицу AA^* (где A^* — оператор, сопряженный к A, как выше), а через $\operatorname{diag} B$ — вектор, построенный из диагональных элементов матрицы B. Отметим, что $A^\alpha_\beta\delta^{\beta\gamma}A^\alpha_\gamma$ — это α-й элемент $B^{\alpha\alpha}$ из $\operatorname{diag} B$. Если процесс удовлетворяет (15.2), он также удовлетворяет следующему уравнению с производными в среднем:

$$\begin{cases} D\xi(t) = \left(a - \dfrac{1}{2}\operatorname{diag} B\right)(t,\xi(t)), \\ D_2\xi(t) = B(t,\xi(t)), \end{cases} \tag{15.3}$$

или, эквивалентно,

$$\begin{cases} D\xi(t) + \dfrac{1}{2}\operatorname{diag} D_2(\xi(t)) = a(t,\xi(t)), \\ D_2\xi(t) = B(t,\xi(t)). \end{cases} \tag{15.4}$$

Пусть $\xi(t)$ — решение уравнения (15.3) (или (15.4)). Мы называем его *логарифмом* процесса $S(t) = \exp\xi(t) = (e^{\xi^1(t)}, \dots, e^{\xi^n(t)})$.

Отметим, что если уравнение (15.3) (или (15.4)) задано a priory с некоторым $B\in\bar{S}_+(n)$, то процесс $S(t) = \exp(\xi(t))$ может не удовлетворять (15.1). Таким образом, модели, основанные на уравнениях (15.3) или (15.4), покрывают более широкий класс задач, чем те, которые основаны на (15.2).

Рассмотрим многозначные отображения $\mathbf{a} : [0,T]\times\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ и $\mathbf{B} : [0,T]\times\mathbb{R}^n \to \bar{S}_+(n)$ и следующее включение с производными в среднем:

$$\begin{cases} D\xi(t) + \dfrac{1}{2}\operatorname{diag} D_2\xi(t) \in \mathbf{a}(t,\xi(t)), \\ D_2\xi(t) \in \mathbf{B}(t,\xi(t)). \end{cases} \tag{15.5}$$

Включение (15.5) называется *включением типа геометрического броуновского движения*. Такое включение может быть построено из уравнения вида (15.4) с управлением обычным способом. Пусть правые части $a(t,x,u)$ и $B(t,x,u)$ уравнения (15.4) зависят от управляющего параметра u, а $U(t,x)$ — множество возможных значений управляющего параметра в (t,x). Тогда построив

[1]Напомним, что мы используем соглашение Эйнштейна о суммировании по повторяющемуся верхнему и нижнему индексу.

$\mathbf{a}(t,x) = cl \bigcup\limits_{u\in U(t,x)} a(t,x,u)$ и $\mathbf{B}(t,x) = cl \bigcup\limits_{u\in U(t,x)} B(t,x,u)$, где cl обозначает выпуклое замыкание, мы получим включение (15.5).

Ниже мы опишем условия, при которых решения (15.5) существуют, и докажем существование оптимального решения, максимизирующего (или минимизирующего) функционал качества J, введенный в предыдущем разделе.

Подчеркнем, что включение (15.5) имеет вид, аналогичный уравнению (15.4). Включение вида, аналогичного (15.3), некорректно.

Теорема 15.1. *Зафиксируем произвольное начальное значение $\xi_0 \in \mathbb{R}^n$. Пусть $\mathbf{a}(t,x)$ — полунепрерывное сверху многозначное отображение с замкнутыми выпуклыми образами из $[0,T]\times\mathbb{R}^n$ в $\mathbb{R}^n$, и пусть для всех $a \in \mathbf{a}(t,x)$ выполняется оценка*

$$\|a\|^2 < K(1+\|x\|^2) \tag{15.6}$$

для некоторого $K>0$.

Пусть $\mathbf{B}(t,x)$ — полунепрерывное сверху многозначное отображение с замкнутыми выпуклыми образами из $[0,T]\times\mathbb{R}^n$ в $\bar{\mathrm{S}}_+(n)$ такое, что для каждого $B(t,x)\in\mathbf{B}(t,x)$ выполняется оценка

$$|\operatorname{tr} B(t,x)| < K(1+\|x\|) \tag{15.7}$$

для некоторого $K>0$.

Тогда для каждой последовательности $\varepsilon_i \to 0$, $\varepsilon_i > 0$, каждая пара последовательностей $a_i(t,x)$ и $B_i(t,x)$ ε_i-аппроксимаций $\mathbf{a}(t,x)$ и $\mathbf{B}(t,x)$, соответственно, порождает совершенное решение включения (15.5) с начальным условием ξ_0.

Доказательство. Теорема 15.1 доказывается по той же схеме рассуждений, как и теорема 14.1, с небольшими модификациями, вызванными наличием дополнительного слагаемого $\frac{1}{2}\operatorname{diag} D_2\xi(t)$ в первом включении системы (15.5) по сравнению с первым включением системы (13.2) и, как следствие, различием между неравенствами (14.2) и (15.7). Поэтому мы приведем подробно первую часть доказательства — частично повторяющую первую часть доказательства теоремы 14.1, но содержащую указанные модификации — и оставим завершение доказательства читателю, поскольку оно совпадает с завершением доказательства теоремы 14.1.

Зафиксируем последовательность $\varepsilon_i \to 0$ и последовательности ε_i-аппроксимаций $a_i(t,x)$ и $\tilde{B}_i(t,x)$ из условия теоремы. Без потери общности мы можем считать, что $\tilde{B}_i(t,x)$ являются $\frac{\varepsilon_i}{2}$-аппроксимациями $\mathbf{B}(t,x)$.

В качестве нормы в $\mathrm{S}(n)$ мы возьмем сужение на $\mathrm{S}(n)$ евклидовой нормы в пространстве $L(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^n)$, изоморфном $\mathbb{R}^{n^2}$. Без потери общности мы положим, что (15.7) выполняется в этой норме.

Отметим, что $a_i(t,x)$ удовлетворяют (15.6) с некоторой константой, которая больше, чем K из условия теоремы. Тем не менее мы сохраним обозначение K для этой константы. Так как $1+\|x\|^2 \leqslant (1+\|x\|)^2$, то для $a_i(t,x)$ выполняется оценка

$$\|a_i(t,x)\| < K(1+\|x\|). \tag{15.8}$$

Аппроксимации $\tilde{B}_i(t,x)$ принимают значения в $\bar{\mathrm{S}}_+(n)$. Введем $B_i(t,x) = \tilde{B}_i(t,x) + \frac{\varepsilon_i}{4}I$, где I — единичная матрица. Непосредственно из построения следует, что $B_i(t,x)$ при любом i является непрерывной ε_i-аппроксимацией $\mathbf{B}(t,x)$ и что в каждой точке (t,x) она принадлежит $\mathrm{S}_+(n)$, т. е. она строго положительно определена. Кроме того, $B_i(t,x)$ удовлетворяет (15.7), где константа $K>0$ больше, чем константа из условия теоремы. Но тем не менее мы сохраним обозначение K для новой константы.

По лемме 5.1 существуют непрерывные поля $A_i(t,x)$ такие, что $B_i(t,x) = A_i(t,x)A_i^*(t,x)$. Прямо по определению следа мы получаем, что $\operatorname{tr} B_i(t,x)$ равен сумме квадратов всех элементов матрицы $A_i(t,x)$, т. е. квадрату евклидовой нормы $A_i(t,x)$ в $L(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^n)$. Следовательно, из (15.7) и очевидного неравенства $(1+\|x\|) \leqslant (1+\|x\|)^2$ вытекает, что все $A_i(t,x)$ удовлетворяют

$$\|A_i(t,x)\| < K(1+\|x\|). \tag{15.9}$$

Без ограничения общности, как и в доказательстве теоремы 14.1, мы можем считать, что указанные выше непрерывные аппроксимации a_i и A_i являются гладкими (см. доказательство теоремы 14.1).

Рассмотрим последовательность стохастических дифференциальных уравнений

$$d\xi_i(t) = (a_i - \frac{1}{2}\operatorname{diag} B_i)(t, \xi_i(t))dt + A_i(t, \xi_i(t))dw(t), \tag{15.10}$$

где $w(t)$ — винеровский процесс в $\mathbb{R}^n$.

Отметим, что каждое $\Big(a_i - \dfrac{1}{2}\operatorname{diag} B_i\Big)(t, x)$ гладко как разность гладких отображений.

Рассмотрим $\Big\|\Big(a_i - \dfrac{1}{2}\operatorname{diag} B_i\Big)(t, x)\Big\|$ и покажем, что для него выполняется оценка типа (15.8) с константой большей, чем K. Действительно,

$$\Big\|\Big(a_i - \frac{1}{2}\operatorname{diag} B_i\Big)(t, x)\Big\| \leqslant \|a_i(t, x)\| + \Big\|\frac{1}{2}\operatorname{diag} B_i(t, x)\Big\| < K(1 + \|x\|) + K_1 \operatorname{tr} B_i(t, x) < K_2(1 + \|x\|). \tag{15.11}$$

Таким образом, коэффициенты уравнений (15.10) гладки и удовлетворяют оценкам (15.11) и (15.9). Значит, каждой уравнение (15.10) этой последовательности имеет единственное сильное решение $\xi_i(t)$, корректно определенное на всем промежутке $[0, T]$ (см. [10]).

Дальнейшее доказательство совпадает с доказательством теоремы 14.1. □

Отметим, что для мер, соответствующих ε-аппроксимациям из доказательства теоремы 15.1, выполняется замечание 14.3, т. е. это множество мер слабо компактно.

Пусть f — непрерывная ограниченная вещественная функция на $\mathbb{R}^n$. Для решений (15.5) рассмотрим функционал качества (14.11).

Теорема 15.2. *Среди совершенных решений включения* (15.5), *построенных в доказательстве теоремы* 14.1, *имеется решение* $\bar{\xi}(t)$, *на котором значение* J *минимально* (*или максимально*).

Доказательство теоремы 15.2 совпадает с доказательством теоремы 14.2.

Замечание 15.1. Отметим, что с помощью тех же рассуждений, как в доказательстве теоремы 15.2, можно доказать существование максимального (минимального) решения для другого функционала качества. Например, пусть f — непрерывная ограниченная вещественная функция на $[0, T] \times \mathbb{R}^n$. Для решений (15.5) рассмотрим функционал качества вида

$$J_1(\xi(\cdot)) = Ef(T, \xi(T))dt. \tag{15.12}$$

Тогда существует совершенное решение $\xi(t)$ на котором значение J_1 максимально (минимально).

Пример применения. Рассмотрим включение (15.5), полученное из уравнения с управлением. Напомним, что решения $\xi(t)$ включения (15.5) — логарифмы процессов $S(t)$, которые часто возникают в приложениях. Естественно предполагать, что на конечном временном интервале $[0, T]$ значения всех координат процесса $S(t)$ не могут уйти в бесконечность и, таким образом, их сумма не превышает некоторого числа $C > 0$. При этих предположениях рассмотрим функцию $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, заданную формулой

$$g(X) = \begin{cases} x^1 + \dots + x^n, & \text{если } x^1 + \dots + x^n < C, \\ C, & \text{если } x^1 + \dots + x^n \geqslant C, \end{cases} \tag{15.13}$$

где $x^1, \dots, x^n$ — координаты вектора $X \in \mathbb{R}^n$. Введем функцию $f(X) = g(e^{x^1}, \dots, e^{x^n})$. Отметим, что по построению, f является ограниченной непрерывной функцией, так что мы можем рассмотреть функционал качества J_1 (см. (15.12)) с этой f. Тогда оптимальное решение, существование которого доказано в теореме 15.2, максимизирует среднее значение тотальной цены в конечный момент времени T среди процессов $S(t) = \exp \xi(t)$, логарифмы которых $\xi(t)$ удовлетворяют (15.5). Если мы рассмотрим функционал качества J (см. (14.11)), оптимальное решение максимизирует (минимизирует) интеграл среднего значения тотальной цены от начального значения времени до момента T.

16. Дифференциальные включения с производными в среднем, имеющие экстремальные правые части, и оптимальное управление

16.1. Включения с разложимыми правыми частями. Существование решений. Здесь мы используем материал из раздела 12 и понятие разложимых множеств из раздела 43.

Теорема 16.1. *Пусть многозначное векторное поле*

$$\mathbf{a} : [0,T] \times C^0([0,T],\mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}^n$$

является полунепрерывным снизу, имеет замкнутые значения и равномерно ограничено, т. е.

$$\|a(t,x(\cdot))\| < C \tag{16.1}$$

для некоторого $C > 0$ и для всех $a(t,x(\cdot)) \in \mathbf{a}(t,x(\cdot))$, и удовлетворяет условию 12.1.

Пусть $\boldsymbol{\alpha} : [0,T] \times C^0([0,T],\mathbb{R}^n) \to S_+(n)$ — многозначное, полунепрерывное снизу отображение, имеющее замкнутые выпуклые образы, равномерно ограниченное и удовлетворяющее условию 12.1. *Мы также предполагаем, что существуют константы $C_0 > 0$ и $C_1 > C_0$ такие, что равномерно выполняется неравенство*

$$C_0 < \operatorname{tr}\alpha(t,x(\cdot)) < C_1, \tag{16.2}$$

для всех $\alpha(t,x(\cdot)) \in \boldsymbol{\alpha}(t,x(\cdot))$.

Тогда при описанных выше условиях включение

$$\begin{cases} D^{\mathcal{P}}\xi(t) \in \mathbf{a}(t,\xi(\cdot)), \\ D_2^{\mathcal{P}}\xi(t) \in \boldsymbol{\alpha}(t,\xi(\cdot)) \end{cases} \tag{16.3}$$

имеет решение при начальных условиях $\xi(0) = \xi_0$, корректно определенное на всем интервале $t \in [0,T]$.

Доказательство. Прежде всего, по теореме Майкла 43.1 существует непрерывный селектор $\alpha(t,\xi(\cdot))$ отображения $\boldsymbol{\alpha}(t,\xi(\cdot))$, который очевидным образом удовлетворяет условию 12.1 и неравенству (16.2).

Пусть $x(\cdot)$ — непрерывная кривая. Рассмотрим многозначное векторное поле $\mathbf{a}(t,x(\cdot))$ вдоль $x(\cdot)$ и обозначим через $\mathcal{P}\mathbf{a}(\cdot,x(\cdot))$ множество всех измеримых селекторов $\mathbf{a}(t,x(\cdot))$, т. е. множество измеримых отображений $\{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n : f(x(t)) \in \mathbf{a}(t,x(\cdot))\}$. Очевидно, что поскольку выполнена оценка (16.1), все эти селекторы интегрируемы на любом конечном интервале в $\mathbb{R}$ относительно меры Лебега.

В $C^0([0,T],\mathbb{R}^n)$ введем σ-алгебру $\tilde{\mathcal{F}}$, порожденную цилиндрическими множествами. Через $\tilde{\mathcal{P}}_t$ обозначим σ-алгебру, порожденную цилиндрическими множествами с основаниями над $[0,t] \subset [0,T]$.

Рассмотрим многозначное отображение B, которое переводит $x(\cdot) \in C^0([0,T],\mathbb{R}^n)$ в $\mathcal{P}\mathbf{a}(\cdot,x(\cdot))$. Из-за выполнения оценки (16.1) все селекторы из $\mathcal{P}\mathbf{a}(\cdot,x(\cdot))$ интегрируемы (см. выше), следовательно, B принимает значения в пространстве $L^1(([0,T],\mathcal{B},\lambda),\mathbb{R}^n)$. Известно (см., например, [72, § 5.5]), что при указанных выше условиях

$$B : C^0([0,T],\mathbb{R}^n) \to L^1(([0,T],\mathcal{B},\lambda),\mathbb{R}^n)$$

полунепрерывно снизу и для каждого $x(\cdot) \in C^0([0,T],\mathbb{R}^n)$ множество $\mathcal{P}\mathbf{a}(\cdot,x(\cdot))$ (образ $B(x(\cdot))$) разложимо и замкнуто. Таким образом, по лемме 43.2 отображение B имеет непрерывный селектор $b : C^0([0,T],\mathbb{R}^n) \to L^1(([0,T],\mathcal{B},\lambda),\mathbb{R}^n)$.

При любом $t \in [0,T]$ введем отображение $f_t : C^0([0,T],\mathbb{R}^n) \to C^0([0,T],\mathbb{R}^n)$, переводящее кривую $x(\cdot) \in C^0([0,T],\mathbb{R}^n)$ в кривую

$$f_t(\tau,x(\cdot)) = \begin{cases} x(\tau) & \text{при } \tau \in [0,t], \\ x(t) & \text{при } \tau \in [t,l]. \end{cases}$$

Очевидным образом отображение f_t непрерывно. Поскольку $f_t(\tau,x(\cdot))$ принадлежит $C^0([0,T],\mathbb{R}^n)$, кривая $b(f_t(\tau,x(\cdot))) \in L^1(([0,T],\mathcal{B},\lambda),\mathbb{R}^n)$ корректно определена. По построению $b(f_t(\tau,x(\cdot))) \in \mathbf{a}(\tau,x(\tau))$ для почти всех $\tau \in [0,t]$, и, таким образом, этот селектор непрерывно зависит от t в $L^1(([0,T],\mathcal{B},\lambda),\mathbb{R}^n)$.

Введем отображение $a : [0,T] \times C^0([0,T],\mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}^n$ формулой

$$a(t,x(\cdot)) = b(f_t(\tau,x(\cdot))). \tag{16.4}$$

По построению это отображение непрерывно по совокупности переменных $t \in [0,T]$ и $x(\cdot) \in C^0([0,T],\ \mathbb{R}^n)$. При этом очевидно, что если $x_1(\cdot)$ и $x_2(\cdot)$ совпадают на $[0,t]$, то $a(t,x_1(\cdot)) = a(t,x_2(\cdot))$. Это означает, что $a(t,x(\cdot))$ измеримо относительно $\tilde{\mathcal{P}}_t$. (т. е. выполнено замечание 12.1).

Принимая во внимание (16.1), легко увидеть, что $\|a(t,x(\cdot))\|$ равномерно ограничено.

Из леммы 5.1 вытекает, что существует непрерывное отображение $A : [0,T] \times C^0([0,T],\mathbb{R}^n) \to L(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^n)$, которое удовлетворяет условию 12.1 и такое, что $\alpha(t,x(\cdot)) = A(t,x(\cdot))A^*(t,x(\cdot))$ при любом $(t,x(\cdot)) \in \mathbb{R} \times C^0([0,T],\mathbb{R}^n)$.

Рассмотрим уравнение диффузионного типа

$$d\xi(t) = A(t,\xi(\cdot))dw(t). \tag{16.5}$$

В силу [9, § III.2, теорема 4] уравнение (16.5) имеет решение. Отметим, что из (16.2) следует, что $A(t,x(\cdot))$ равномерно ограничено и имеет равномерно ограниченный обратный оператор. Тогда по следствию к [9, § III.2, теорема 2] уравнение

$$d\xi(t) = a(t,\xi(\cdot))dt + A(t,\xi(\cdot))dw(t) \tag{16.6}$$

также имеет решение. Легко видеть, что решение $\xi(t)$ уравнения (16.6) является решением (16.3). Из общей теории уравнений с производными в среднем следует, что $D^{\mathcal{P}}\xi(t) = a(t,\xi(\cdot) \in \mathbf{a}(t,\xi(\cdot))$ и $D_2^{\mathcal{P}}\xi(t) = \alpha(t,\xi(\cdot))$. $\square$

Отметим, что решение уравнения (16.6) не единственно.

16.2. Включения с экстремальными правыми частями. Уравнения с управлением с обратной связью.

Определение 16.1. Точка q выпуклого множества $\mathbf{Q}$ называется *экстремальной*, если не существует открытый отрезок прямой линии в $\mathbf{Q}$, который содержит q.

Рассмотрим многозначное векторное поле $\mathbf{Q}(t,x(\cdot))$ и обозначим через $Ext\,\mathbf{Q}(t,\xi(\cdot)$ многозначное векторное поле, у которого значения во всех $(t,x(\cdot))$ состоят из экстремальных точек в $\mathbf{Q}(t,x(\cdot))$.

Лемма 16.1. *Для многозначного ограниченного непрерывного по Хаусдорфу векторного поля $\mathbf{Q}(t,x(\cdot))$ с выпуклыми замкнутыми значениями многозначное векторное поле $Ext\,\mathbf{Q}(t,x(\cdot))$ полунепрерывно снизу.*

Лемма 16.1 является известным фактом из многозначного анализа. Доказательство можно найти в [42, Proposition 6.2]. Отметим, что $Ext\,\mathbf{Q}(t,x)$ ограничено, но может не иметь выпуклых значений. Всюду далее в этом разделе мы имеем дело с многозначными полунепрерывными снизу векторными полями $Ext\,\mathbf{Q}(t,x)$, полученными по лемме 16.1 из ограниченного непрерывного по Хаусдорфу многозначного векторного поля $\mathbf{Q}(t,x)$ с выпуклыми замкнутыми значениями.

Далее мы изучаем включения

$$\begin{cases} D^{\mathcal{P}}\xi(t) \in \mathbf{Q}(t,x(\cdot)), \\ D_2^{\mathcal{P}}\xi(t) = \alpha(t,\xi(\cdot)), \end{cases} \tag{16.7}$$

$$\begin{cases} D^{\mathcal{P}}\xi(t) \in Ext\,\mathbf{Q}(t,x(\cdot)), \\ D_2^{\mathcal{P}}\xi(t) = \alpha(t,\xi(\cdot)), \end{cases} \tag{16.8}$$

где $\alpha(t,\xi(\cdot))$ однозначно, непрерывно, равномерно ограничено, удовлетворяет условию 12.1 и для него существуют C_0 и C_1, для которых выполняется (16.2). В условиях теоремы 16.1 существуют решения включения (16.8), и по теореме 14.2 среди них имеется решение, оптимизирующее (14.11).

Рассмотрим систему с управлением с обратной связью вида

$$\begin{cases} D^{\mathcal{P}}\xi(t) = a(t,\xi(\cdot),u(t,\xi(\cdot))), \\ D_2^{\mathcal{P}}\xi(t) = \alpha(t,\xi(\cdot)), \\ u(t,\xi(\cdot)) \in U(t,\xi(\cdot)). \end{cases} \tag{16.9}$$

Здесь $a : [0,T] \times C^0([0,T],\mathbb{R}^n) \times C^0([0,T],\mathbb{R}^m) \to \mathbb{R}^n$ — измеримое по Борелю отображение; $\alpha : [0,T] \times C^0([0,T],\mathbb{R}^n) \to S_+(n)$ — непрерывное однозначное отображение, удовлетворяющее условию 12.1 и неравенству (16.2); $\mathbb{R}^m$ — пространство управляющих параметров; $U : [0,T] \times C^0([0,T],\mathbb{R}^n) \to K(\mathbb{R}^m)$ — многозначное отображение обратной связи.

Решение (16.9) — это пара $\{\xi(t), u(t))\}$, состоящая из процесса $\xi(t)$ и управления $u(t)$, которая п.н. удовлетворяет включению (16.9).

Имеется стандартная процедура перехода от уравнений типа (16.9) к включениям. Введем многозначное отображение $\mathbf{a}(t,x(\cdot)) = a(t,x(\cdot),U(t,x(\cdot)))$ и перейдем от (16.9) к включению

$$\begin{cases} D^{\mathcal{P}}\xi(t) \in \mathbf{a}(t,\xi(\cdot)), \\ D_2^{\mathcal{P}}\xi(t) = \alpha(t,\xi(\cdot)). \end{cases} \tag{16.10}$$

Очевидным образом каждое решение (16.9) является и решением (16.10). Мы предполагаем, что включения (16.7) и (16.8) получены этой процедурой из уравнений типа (16.9), и покажем, что существует управление, которое реализует оптимальное решение (16.8), полученное по лемме 14.2 как оптимальное решение соответствующего уравнения с управлением (аналог теоремы Филиппова). Мы предполагаем, что $\mathbf{Q}(t,x(\cdot))$ — ограниченное непрерывное по Хаусдорфу многозначное векторное поле с выпуклыми замкнутыми значениями, так что для $Ext\,\mathbf{Q}(t,x(\cdot))$ выполняется лемма 16.1.

Наши дальнейшие рассуждения основаны на теореме 43.3, теореме 43.4 и лемме 19.1. Мы отсылаем читателя к разделу 43, где описаны понятия замкнутости и непрерывности многозначного отображения.

Теорема 16.2. *Пусть* $\mathbf{Q}(t,x)$ *— многозначное непрерывное по Хаусдорфу отображение с замкнутыми выпуклыми значениями, удовлетворяющее условию* 12.1*, которое отображает* $[0,T]\times C^0([0,T],\mathbb{R}^n)$ *в* $\mathbb{R}^n$*, и которое получено описанной выше процедурой из уравнения с управлением*

$$\begin{cases} D^{\mathcal{P}}\xi(t) = q(t,\xi(\cdot),u(t,\xi(\cdot))), \\ D_2^{\mathcal{P}}\xi(t) = \alpha(t,\xi(\cdot)), \\ u(t,\xi(\cdot)) \in U(t,\xi(\cdot)). \end{cases} \tag{16.11}$$

Пусть, кроме того, $\alpha(t,x(\cdot))$ *— непрерывное однозначное отображение, удовлетворяющее условию* 12.1 *и неравенству* (16.2)*, а многозначное отображение* $U : [0,T]\times C^0([0,T],\mathbb{R}^n) \to K(\mathbb{R}^m)$ *полунепрерывно сверху. Тогда для любого решения* $\xi(t)$ *включения* (16.7) *существует измеримое по Борелю управление* $u(t) \in U$ *такое, что при этом управлении процесс* $\xi(t)$ *является решением уравнения* (16.11)*.*

Доказательство. Так как $\mathbf{Q}(t,x(\cdot))$ непрерывно по Хаусдорфу, то оно, в частности, полунепрерывно сверху. Существование решений таких включений при выполнении условия теоремы доказано в [37, Theorem 3], где в доказательстве показано, что для любого решения $\xi(t)$ включения (16.7) существует измеримый селектор $q_\xi(t,x(\cdot))$ такой, что $D^{\mathcal{P}}\xi(t) = q_\xi(t,\xi(\cdot))$. Таким образом, ξ — решение уравнения $d\xi(t) = q_\xi(t,\xi(\cdot)dt + A(t,\xi(\cdot))dw(t)$, где $A(t,x(\cdot)$ получено из $\alpha(t,x(\cdot))$ по лемме 5.1.

Обозначим через μ_ξ порожденную ξ меру на $C^0([0,T],\mathbb{R}^n)$. Тот факт, что $q_\xi(t,x(\cdot))$ непрерывно на множестве полной меры $\lambda\times\mu_\xi$ на $[0,T]\times C^0([0,T],\mathbb{R}^n)$, где λ — нормализованная мера Лебега на $[0,T]$, доказывается с помощью теоремы Егорова аналогично рассуждениям в доказательстве леммы 6.1 или теоремы 10.1.

Рассмотрим

$$\Gamma(t,x(\cdot)) = \{u(t,x(\cdot))|u(t,x(\cdot)) \in \mathbb{R}^m, q_\xi(t,x(\cdot)) \in \mathbf{Q}(t,x(\cdot),u(t,x(\cdot)))\}.$$

По лемме 19.1 многозначное отображение Γ замкнуто на множестве полной меры μ_ξ. Легко видеть, что многозначное отображение $\Phi = \Gamma\cap U : [0,T]\times C^0([0,T]\mathbb{R}^n) \to K(\mathbb{R}^m)$ корректно определено и его любой измеримый селектор — это управление, которое мы ищем. Отметим, что $\Gamma\cap U \neq \varnothing$. Так что по теореме 43.4 Φ полунепрерывно сверху на множестве полной меры μ_ξ. Поскольку полунепрерывное отображение измеримо, Φ имеет измеримый селектор на множестве полной меры μ_ξ. $\square$

Теперь рассмотрим уравнение с управлением, где под управлением правая часть принимает значения только в экстремальных точках в $\mathbf{Q}$. Правую часть с управлением в таком уравнении обозначим $Ext\, q(t, \xi(\cdot), u(t, \xi(\cdot)))$.

Следствие 16.1. *Пусть $Ext\, \mathbf{Q}(t, x(\cdot))$, как выше, получено описанной выше процедурой из уравнения с управлением*

$$\begin{cases} D^{\mathcal{P}}\xi(t) = Ext\, q(t, \xi(\cdot), u(t, \xi(\cdot))), \\ D_2^{\mathcal{P}}\xi(t) = \alpha(t, \xi(\cdot)), \\ u(t, \xi(\cdot)) \in U(t, \xi(\cdot)), \end{cases} \tag{16.12}$$

где $\alpha(t, x(\cdot))$ — то же самое, как в теореме 16.1, *и многозначное отображение $U : [0, T] \times C^0([0, T], \mathbb{R}^n) \to K(\mathbb{R}^m)$ полунепрерывно сверху. Тогда для любого решения $\xi(t)$ уравнения* (16.8) *существует измеримое по Борелю управление $u(t) \in U$ такое, что при этом управлении процесс $\xi(t)$ является решением включения* (16.12). *В частности, для оптимального решения включения* (16.8), *которое существует по теореме* 14.2, *существует управление, которое реализует это решение как оптимальное решение включения* (16.12).

Утверждение следствия 16.1 вытекает из того факта, что любое решение включения (16.8) является решением (16.7).

17. Оптимальные решения для стохастических дифференциальных включений с текущими скоростями

Здесь мы рассматриваем включения на плоском n-мерном торе $\mathcal{T}^n$.

Пусть $\mathbf{v}(t, m)$ — многозначное векторное поле и $\boldsymbol{\alpha}(t, m)$ — многозначное симметрическое неотрицательно определенное $(2, 0)$-тензорное поле на $\mathcal{T}^n$. Система вида

$$\begin{cases} D_S\xi(t) \in \mathbf{v}(t, \xi(t)), \\ D_2\xi(t) \in \boldsymbol{\alpha}(t, \xi(t)) \end{cases} \tag{17.1}$$

называется *дифференциальным включением первого порядка с текущими скоростями.*

Определение решения и совершенного решения включения (17.1) в точности аналогичны определениям 13.1 и 14.1, соответственно.

Теорема 17.1. *Пусть многозначное векторное поле $\mathbf{v}(m)$ и многозначное $(2, 0)$-тензорное поле $\boldsymbol{\alpha}(m)$, принимающее значения в $S_+(n)$, на $\mathcal{T}^n$ автономны, равномерно ограничены, имеют замкнутые выпуклые значения и полунепрерывны сверху. Тогда для любого начального условия $\xi(0) = \xi_0$, независимого от винеровского процесса $w(t)$ и имеющего гладкую плотность, которая нигде не равна нулю, включение* (17.1) *имеет совершенное решение, которое существует на всем интервале $t \in [0, T]$.*

Доказательство. Прежде всего, по теореме 43.7 в условиях теоремы для каждой последовательности положительных чисел $\varepsilon_q \to 0$ существует последовательность однозначных непрерывных ε_q-аппроксимаций $v_q(m)$ отображения $\mathbf{v}(m)$ и $\alpha_q(m)$ отображения $\boldsymbol{\alpha}(m)$, которые поточечно сходятся к измеримым по Борелю селекторам $v(m)$ отображения $\mathbf{v}(m)$ и $\alpha(m)$ отображения $\boldsymbol{\alpha}(m)$, соответственно. Без ограничения общности, как и выше, мы можем положить, что эти ε_q-аппроксимации гладкие.

Построим последовательность римановых метрик $\alpha_q(\cdot, \cdot)$ из тензорных полей $\alpha_q(m)$, как в разделе 2.

Рассмотрим последовательность уравнений

$$\begin{cases} D_S\xi(t) &= v_q(\xi(t)), \\ D_2\xi(t) &= \alpha_q(\xi(t)). \end{cases} \tag{17.2}$$

Мы задаем одно и то же начальное условие ξ_0 для всех этих уравнений. Отметим, что v_q и α_q равномерно ограничены одной и той же константой, поскольку они являются ε-аппроксимациями равномерно ограниченных многозначных отображений. Так как все эти ε_q-аппроксимации хотя бы C^1-гладкие и заданы на компактном торе, их первые частные производные равномерно ограничены при любом k константой, зависящей от k. Так что все уравнения (17.2) удовлетворяют условиям теоремы 8.1, т. е. каждое уравнение имеет решение. Обозначим символом $\xi_q(t)$ решение q-го уравнения.

По лемме 10.3 множество $\{\mu_q\}$ мер на $(C^0([0,T],\mathcal{T}^n),\tilde{\mathcal{F}})$ слабо компактно. Следовательно, можно выбрать слабо сходящуюся подпоследовательность, которая слабо сходится к некоторой мере μ. Без ограничения общности мы можем положить, что сама последовательность μ_q слабо сходится к μ. Рассмотрим координатный процесс $\xi(t)$ на вероятностном пространстве $(C^0([0,T],\mathcal{T}^n),\tilde{\mathcal{F}},\mu)$ (см. раздел 10.2), т. е. для любого элементарного события $x(\cdot)\in C^0([0,T],\mathcal{T}^n)$ по определению $\xi(t,x(\cdot))=x(t)$. Напомним, что $\mathcal{P}_t$ (см. раздел 10.2) является «прошлым» для $\xi(t)$, а $\mathcal{N}_t$ — «настоящим» для этого координатного процесса.

Для любого фиксированного t введем $\alpha_q(t,m(\cdot))=\alpha_q(m(t))$ и $\alpha(t,m(\cdot))=\alpha(m(t))$. Получим, что $\alpha_q(m(t))$ и $\alpha(m(t))$ можно рассматривать как заданные на $C^0([0,T],\mathcal{T}^n)$.

По построению для любого $\xi_q(t)$ его квадратичная производная равна $\alpha_q(\xi_q(t))$. Это означает, что при любой ограниченной непрерывной вещественной функции $f(m(\cdot))$ на $C^0([0,T],\mathcal{T}^n)$, которая измерима относительно $\mathcal{N}_t$, выполняется равенство

$$\lim_{\Delta t\to 0}\int\limits_{C^0([0,T],\mathcal{T}^n)}\Big[\frac{(m(t+\Delta t)-m(t))(m(t+\Delta t)-m(t))^*}{\Delta t}-\alpha_q(m(t))\Big]f(m(\cdot))d\mu_q=0.$$

Так как $\alpha_q(m)$ поточечно сходится к $\alpha(m)$ при $q\to\infty$, то $\alpha_q(m(t))=\alpha_q(t,m(\cdot))$ сходится к $\alpha(m(t))=\alpha(t,m(\cdot))$ п.н. на $C^0([0,T],\mathcal{T}^n)$ относительно каждой меры μ_q и относительно μ. Зафиксируем $\delta>0$. По теореме Егорова (см., например, [20]) при любом i существует подмножество $\tilde{K}^i_\delta\subset C^0([0,T],\mathcal{T}^n)$ такое, что $(\mu_i)(\tilde{K}^i_\delta)>1-\delta$ и последовательность $\alpha_q(m(\cdot))$ на $\tilde{K}^i_\delta$ сходится к $\alpha(m(\cdot))$ равномерно. Введем $\tilde{K}_\delta=\bigcup\limits_{i=0}^{\infty}\tilde{K}^i_\delta$. Последовательность $\alpha_q(m(\cdot))$ на $\tilde{K}_\delta$ для всех i сходится к $\alpha(m(t))$ равномерно к $\mu(\tilde{K}_\delta)>1-\delta$.

Теперь тот факт, что поле $\alpha(m(\cdot))$ непрерывно на множестве полной меры μ на $C^0([0,T],\mathcal{T}^n)$, доказывается аналогично рассуждениям в доказательстве леммы 6.1 и теоремы 10.1.

Принимая во внимание равномерную сходимость на $\tilde{K}_\delta$ при всех k (см. выше), мы выводим из ограниченности $f(m(\cdot))$, что при достаточно большом q

$$\Big\|\int\limits_{\tilde{K}_\delta}[\alpha_q(m(t))-\alpha(m(t))]f(m(\cdot))d\mu_q\Big\|<\delta.$$

Так как $f(m(\cdot))$ ограничено, существует некоторое число $\Xi>0$ такое, что $|f(m(\cdot))|<\Xi$ во всех $m(\cdot)$. Напомним, что все $\alpha_q(m)$ и $\alpha(m)$ равномерно ограничены, т. е. их нормы не превышают некоторого числа $Q>0$. Тогда, поскольку

$$\mu_q(C^0([0,T],\mathcal{T}^n)\backslash\tilde{K}_\delta)<\delta$$

при всех достаточно больших q, получаем

$$\Big\|\int\limits_{C^0([0,T],\mathcal{T}^n)\backslash\tilde{K}_\delta}[\alpha_q(m(t))-\alpha(m(t))]f(m(\cdot))d\mu_q\Big\|<2\delta Q\Xi$$

для всех достаточно больших q. Так как δ — произвольное положительное число, то

$$\lim_{q\to\infty}\int\limits_{C^0([0,T],\mathcal{T}^n)}[\alpha_q(m(t))-\alpha(m(t))]f(m(\cdot))d\mu_q=0.$$

Функция $\alpha(m(t))$ является μ-п.н. непрерывной и ограниченной на $C^0([0,T],\mathcal{T}^n)$ (см. выше). Так как к тому же меры μ_q слабо сходятся к μ, то по лемме из [10, § VI.1]

$$\lim_{k\to\infty}\int\limits_{C^0([0,T],\mathcal{T}^n)}\alpha(m(t))f(m(\cdot))d\mu_q=\int\limits_{C^0([0,T],\mathcal{T}^n)}\alpha(m(t))f(m(\cdot))d\mu.$$

Очевидным образом

$$\lim_{k\to\infty}\int\limits_{C^0([0,T],\mathcal{T}^n)}\left[\frac{(m(t+\Delta t)-m(t))(m(t+\Delta t)-m(t))^*}{\Delta t}\right]f(m(\cdot))d\mu_q=$$

$$= \int\limits_{C^0([0,T],\mathcal{T}^n)} \left[\frac{(m(t+\Delta t)-m(t))(m(t+\Delta t)-m(t))^*}{\Delta t}\right] f(m(\cdot))d\mu.$$

Так что

$$\lim_{\Delta t\to 0} \int\limits_{C^0([0,T],\mathcal{T}^n)} \left[\frac{(m(t+\Delta t)-m(t))(m(t+\Delta t)-m(t))^*}{\Delta t} - \alpha(m(t))\right] f(m(\cdot))d\mu = 0.$$

Так как $f(m(\cdot))$ — произвольная ограниченная непрерывная функция, измеримая относительно $\mathcal{N}_t$. Это означает, что $D_2\xi(t) = \alpha(\xi(t))$. Но по построению $\alpha(\xi(t)) \in \boldsymbol{\alpha}(\xi(t))$ μ-п.н.

На следующем шаге мы обратимся к текущей скорости решения. Так же, как $\alpha_q(m(t))$ и $\alpha(m(t))$ (см. выше), $v_q(m(t))$ и $v(m(t))$ для любого фиксированного t можно рассматривать как заданные на $C^0([0,T],\mathcal{T}^n)$. По построению $D_S\xi_q(t) = v_q(\xi_q(t))$ при всех k. Это означает, что для любой вещественной ограниченной непрерывной функции f на $C^0([0,T],\mathcal{T}^n)$, измеримой относительно $\mathcal{N}_t$, при всех q выполняется равенство

$$\lim_{\Delta t\to 0} \int\limits_{C^0([0,T],\mathcal{T}^n)} \left[\frac{m(t+\Delta t)-m(t-\Delta t)}{2\Delta t} - v_q(m(t))\right] f(m(\cdot))d\mu_q = 0.$$

Зафиксируем произвольное $\varepsilon > 0$. Так как μ_q слабо сходится к μ, существует $K(\varepsilon)$ такое, что для $q > K(\varepsilon)$

$$\left\| \int\limits_{C^0([0,T],\mathcal{T}^n)} \left[\frac{m(t+\Delta t)-m(t-\Delta t)}{2\Delta t}\right] f(m(\cdot))d\mu_q - \int\limits_{C^0([0,T],\mathcal{T}^n)} \left[\frac{m(t+\Delta t)-m(t-\Delta t)}{2\Delta t}\right] f(m(\cdot))d\mu \right\| < \varepsilon,$$

$$\left\| \int\limits_{C^0([0,T],\mathcal{T}^n)} f(m(\cdot))v(m(t))d\mu_q - \int\limits_{C^0([0,T],\mathcal{T}^n)} f(m(\cdot))v(m(t))d\mu \right\| < \varepsilon.$$

Такими же рассуждениями, как выше, с использованием теоремы Егорова, мы доказываем, что

$$\lim_{q\to\infty} \int\limits_{C^0([0,T],\mathcal{T}^n)} [v_q(m(t)) - v(m(t))] f(m(\cdot))d\mu_q = 0$$

и что v непрерывно на множестве полной меры. Напомним, что v ограничено как селектор ограниченного многозначного отображения.

Тогда по лемме из [10, § VI.1] мы получаем

$$\lim_{q\to\infty} \int\limits_{C^0([0,T],\mathcal{T}^n)} v(m(t))f(m(\cdot))d\mu_q = \int\limits_{C^0([0,T],\mathcal{T}^n)} v(m(t))f(m(\cdot))d\mu.$$

Очевидным образом

$$\lim_{q\to\infty} \int\limits_{C^0([0,T],\mathcal{T}^n)} \left[\frac{(m(t+\Delta t)-m(t-\Delta t))}{2\Delta t}\right] f(m(\cdot))d\mu_q = \int\limits_{C^0([0,T],\mathcal{T}^n)} \left[\frac{(m(t+\Delta t)-m(t-\Delta t))}{2\Delta t}\right] f(m(\cdot))d\mu.$$

Так что

$$\lim_{\Delta t\to 0} \int\limits_{C^0([0,T],\mathcal{T}^n)} \left[\frac{m(t+\Delta t)-m(t-\Delta t)}{2\Delta t} - v(m(t))\right] f(m(\cdot))d\mu = 0.$$

Поскольку $f(m(\cdot))$ — произвольная ограниченная непрерывная функция, измеримая относительно $\mathcal{N}_t$, Это означает, что $D_S\xi(t) = v(\xi(t))$. Но по построению $v(\xi(t)) \in \mathbf{v}(\xi(t))$ μ-п.н. Также по построению мера μ является слабым пределом мер μ_q. Так что построенное решение является совершенным. Это завершает доказательство. □

Замечание 17.1 (см. [65])**.** Отметим, что все последовательности ε_q-аппроксимаций для всех последовательностей $\varepsilon_q \to 0$, использованных в доказательстве теоремы 17.1, удовлетворяют рассуждениям перед леммой 10.3, и, таким образом, множество мер $\{\mu_q\}$, соответствующих всем последовательностям ε_q, слабо компактно.

Рассмотрим функционал качества (14.11), введенный в разделе 14.

Теорема 17.2. *Среди решений включения* (17.1)*, существование которых доказано в теореме* 17.1*, есть совершенное решение, минимизирующее значение* J.

Доказательство теоремы 17.2 совпадает с доказательством теоремы 14.2.

18. Оптимальные решения для стохастических дифференциальных включений типа геометрического броуновского движения с текущими скоростями

Так же, как и в предыдущем разделе, здесь мы рассматриваем включения на плоском n-мерном торе $\mathcal{T}^n$.

Пусть $\mathbf{v}(t,m)$ — многозначное векторное поле, а $\mathbf{B}(t,m)$ — многозначное симметрическое неотрицательно определенное $(2,0)$-тензорное поле на $\mathcal{T}^n$. Система вида

$$\left\{\begin{array}{l} D_S\xi(t) + \dfrac{1}{2}\operatorname{diag} D_2\xi(t) \in \mathbf{v}(t,\xi(t)), \\ D_2\xi(t) \in \mathbf{B}(t,\xi(t)) \end{array}\right. \tag{18.1}$$

называется *дифференциальным включением первого порядка типа геометрического броуновского движения с текущими скоростями* (ср. (15.5)).

Определение решения и совершенного решения включения (18.1) в точности аналогичны определениям 13.1 и 14.1, соответственно.

Теорема 18.1. *Пусть на* $\mathcal{T}^n$ *заданы многозначное векторное поле* $\mathbf{v}(t,m)$ *и многозначное* $(2,0)$*-тензорное поле* $\mathbf{B}(t,m)$*, которые принимают значения в симметрических положительно определенных матрицах, равномерно ограничены, имеют замкнутые выпуклые значения и полунепрерывны сверху. Тогда для любого начального значения* $\xi(0)=\xi_0$ *с гладкой нигде не равной нулю плотностью, независимого от винеровского процесса* $w(t)$*, включение* (18.1) *имеет совершенное решение, существующее при всех* $t\in[0,T]$.

Доказательство. Так же, как в доказательстве теоремы 17.1, по теореме 43.7 в условиях теоремы для каждой последовательности положительных чисел $\varepsilon_q\to 0$ существует последовательность однозначных непрерывных ε_q-аппроксимаций $v_q(m)$ отображения $\mathbf{v}(m)$ и $\alpha_q(m)$ отображения $\boldsymbol{\alpha}(m)$, которые поточечно сходятся к измеримым по Борелю селекторам $v(m)$ отображения $\mathbf{v}(m)$ и $\alpha(m)$ отображения $\boldsymbol{\alpha}(m)$, соответственно. Без ограничения общности, как и выше, мы можем положить, что эти ε_q-аппроксимации гладкие.

Рассмотрим последовательность уравнений

$$\left\{\begin{array}{rcl} D_S\xi(t) + \dfrac{1}{2}\operatorname{diag} B_q &=& v_q(t,\xi(t)), \\ D_2\xi(t) &=& B_q(t,\xi(t)), \end{array}\right. \tag{18.2}$$

у которых мы задаем одно и то же начальное условие ξ_0. Отметим, что все v_q и B_q равномерно ограничены одной и той же константой, поскольку они являются ε-аппроксимациями равномерно ограниченных многозначных отображений. Так как все ε_q-аппроксимации хотя бы C^1-гладкие и заданы на компактном торе, их первые частные производные равномерно ограничены для каждого k константой, зависящей от k. Таким образом, все уравнения (18.2) удовлетворяют условию теоремы 8.1, т. е. каждое уравнение имеет решение. Мы обозначаем через $\xi_q(t)$ решение q-го уравнения.

Тогда по [10, Lemma 3] множество мер $\{\mu_q\}$ на $(C^0([0,T],\mathcal{T}^n),\tilde{\mathcal{F}})$ (напомним, что $\tilde{\mathcal{F}}$ — это σ-алгебра, порожденная цилиндрическими множествами) слабо компактно. Следовательно, можно выделить подпоследовательность, которая слабо сходится к некоторой мере μ. Без ограничения общности мы можем положить, что последовательность μ_q слабо сходится к μ. Рассмотрим координатный процесс $\xi(t)$ на вероятностном пространстве $(C^0([0,T],\mathcal{T}^n),\tilde{\mathcal{F}},\mu)$, т. е. для каждого элементарного события $x(\cdot)\in C^0([0,T],\mathcal{T}^n)$ по определению $\xi(t,x(\cdot))=x(t)$. Обозначим через $\mathcal{P}_t$ σ-алгебру, порожденную цилиндрическими множествами с основаниями над $[0,t]$, а через $\mathcal{N}_t$ — σ-алгебру, порожденную прообразами борелевской σ-алгебры при отображении из $(C^0([0,T],\mathcal{T}^n)$ в $\mathcal{T}^n$, которое каждому $x(\cdot)$ ставит в соответствие $x(t)$. Напомним, что $\mathcal{P}_t$ — это «прошлое» для $\xi(t)$, тогда как $\mathcal{N}_t$ — «настоящее» для этого координатного процесса.

Для любого фиксированного t введем $B_q(t, m(\cdot)) = B_q(t, m(t))$ и $B(t, m(\cdot)) = B(t, m(t))$. Получим, что $B_q(t, m(t))$ и $B(t, m(t))$ можно рассматривать, как заданные на $C^0([0,T], \mathcal{T}^n)$. Точно так же переопределим $v_q(t, m(\cdot)) = v_q(t, m(t))$ и $v(t, m(\cdot)) = v(t, m(t))$.

Тот факт, что $D_2\xi(t) = \alpha(\xi(t))$, доказывается с использованием теоремы Егорова точно так же, как в доказательстве теоремы 17.1. Но по построению $\alpha(\xi(t)) \in \boldsymbol{\alpha}(\xi(t))$ μ-п.н.

Доказательство того, что $D_S\xi(x(t)) = v(x(t))$, нуждается в модификации.

По построению $D_S\xi_q(t) + \dfrac{1}{2}\operatorname{diag} B_q(t, m(t)) = v_q(t, \xi_q(t))$ для всех k. Это означает, что для любой вещественной ограниченной непрерывной функции f на $C^0([0,T], \mathcal{T}^n)$, измеримой относительно $\mathcal{N}_t$, при всех q выполняется равенство

$$\lim_{\Delta t \to 0} \int\limits_{C^0([0,T],\mathcal{T}^n)} \Big[\frac{m(t+\Delta t) - m(t-\Delta t)}{2\Delta t} + \frac{1}{2}\operatorname{diag} B_q(t, m(t)) - v_q(m(t))\Big] f(m(\cdot)) d\mu_q = 0.$$

Зафиксируем произвольное $\varepsilon > 0$. Так как μ_q слабо сходятся к μ, существует $K(\varepsilon)$ такое, что при $q > K(\varepsilon)$

$$\Bigg\| \int\limits_{C^0([0,T],\mathcal{T}^n)} \Big[\frac{m(t+\Delta t) - m(t-\Delta t)}{2\Delta t}\Big] f(m(\cdot)) d\mu_q - \int\limits_{C^0([0,T],\mathcal{T}^n)} \Big[\frac{m(t+\Delta t) - m(t-\Delta t)}{2\Delta t}\Big] f(m(\cdot)) d\mu \Bigg\| < \varepsilon,$$

$$\Bigg\| \int\limits_{C^0([0,T],\mathcal{T}^n)} f(m(\cdot)) v(m(t)) d\mu_q - \int\limits_{C^0([0,T],\mathcal{T}^n)} f(m(\cdot)) v(m(t)) d\mu \Bigg\| < \varepsilon.$$

С помощью таких рассуждений, как при доказательстве теоремы 17.1, с использованием теоремы Егорова мы доказываем, что

$$\lim_{q \to \infty} \int\limits_{C^0([0,T],\mathcal{T}^n)} [v_q(m(t)) - v(m(t))] f(m(\cdot)) d\mu_q = 0$$

и что v непрерывно на множестве полной меры. Напомним, что v ограничено как селектор многозначного отображения.

Тогда по лемме из [10, Sec. VI.1] мы получаем

$$\lim_{q \to \infty} \int\limits_{C^0([0,T],\mathcal{T}^n)} v(m(t)) f(m(\cdot)) d\mu_q = \int\limits_{C^0([0,T],\mathcal{T}^n)} v(m(t)) f(m(\cdot)) d\mu.$$

Очевидным образом

$$\lim_{q \to \infty} \int\limits_{C^0([0,T],\mathcal{T}^n)} \Big[\frac{(m(t+\Delta t) - m(t-\Delta t))}{2\Delta t} + \frac{1}{2}\operatorname{diag} B_q(t, m(t))\Big] f(m(\cdot)) d\mu_q =$$
$$= \int\limits_{C^0([0,T],\mathcal{T}^n)} \Big[\frac{(m(t+\Delta t) - m(t-\Delta t))}{2\Delta t} + \frac{1}{2}\operatorname{diag} B_q(t, m(t))\Big] f(m(\cdot)) d\mu.$$

Так что

$$\lim_{\Delta t \to 0} \int\limits_{C^0([0,T],\mathcal{T}^n)} \Big[\frac{(m(t+\Delta t) - m(t-\Delta t)}{2\Delta t} + \frac{1}{2}\operatorname{diag} B_q(t, m(t)) - v(m(t))\Big] f(m(\cdot)) d\mu = 0.$$

Поскольку $f(m(\cdot))$ — произвольная ограниченная непрерывная функция, измеримая относительно $\mathcal{N}_t$, это означает, что $D_S\xi(t) = v(\xi(t))$. Но по построению $v(\xi(t)) \in \mathbf{v}(\xi(t))$ μ-п.н. Также по построению мера μ является слабым пределом мер μ_q. Таким образом, построенное решение является совершенным. □

Замечание 18.1. Отметим, что все последовательности ε_q-аппроксимаций для всех последовательностей $\varepsilon_q \to 0$, использованных в доказательстве теоремы 18.1, удовлетворяют рассуждениям перед леммой 10.3, и, таким образом, множество мер $\{\mu_q\}$, соответствующих всем последовательностям ε_q и всем q, слабо компактно.

Рассмотрим функционал качества (14.11), введенный в разделе 14.

Теорема 18.2. *Среди решений включения* (18.1)*, существование которых доказано в теореме* 18.1*, есть совершенное решение, минимизирующее значение* J*.*

Доказательство теоремы 18.2 совпадает с доказательством теоремы 14.2.

19. Аналог леммы Филиппова

19.1. Случай систем с производными в среднем справа. Здесь мы получим модификацию известной леммы Филиппова из оптимального управления детерминированными системами, а именно, покажем, что для уравнений с управлением с производными в среднем для оптимальных решений соответствующих включений, существование которых доказано в разделах 14 и 15, существует управление, их реализующее.

Мы отсылаем читателя к разделу 43, где описаны понятия замкнутости и непрерывности многозначного отображения.

Нам понадобится следующее техническое утверждение.

Лемма 19.1. *Пусть многозначное отображение* $F : [0,T] \times C^0 \times \mathbb{R}^m \to C(\mathbb{R}^n)$ *замкнуто, отображение* $g : [0,T] \times C^0 \to \mathbb{R}^n$ *непрерывно и для любого* $t \in [0,T]$ *найдется* $u(t,x(\cdot)) \in \mathbb{R}^m$ *такое, что*

$$g(t,x(\cdot)) \in F(t,x(\cdot),u(t,x(\cdot))).$$

Тогда многозначная функция $\Gamma : [0,T] \times C^0 \to C(\mathbb{R}^m)$,

$$\Gamma(t,x(\cdot)) = \{u(t,x(\cdot)) | u(t,x(\cdot)) \in \mathbb{R}^m, g(t,x(\cdot)) \in F(t,x(\cdot),u(t,x(\cdot)))\}$$

замкнута.

Доказательство. Нам необходимо доказать, что многозначное отображение Γ замкнуто. По теореме 43.5 это означает, что для любых последовательностей $\{t_k, x_k(\cdot)\} \in [0,T] \times C^0$, $\{t_k, x_k(\cdot)\} \to \{t, x(\cdot)\}$, и для $u_k(t,x(\cdot))$, таких что

$$u_k(t,x(\cdot)) \in \mathbb{R}^m, g(t_k,x_k(\cdot)) \in F(t_k,x_k(\cdot),u_k(t,x(\cdot))),$$
$$u_k(t,x(\cdot)) \to u(t,x(\cdot)),$$

выполнено $u(t,x(\cdot)) \in \mathbb{R}^m, g(t,x(\cdot)) \in F(t,x(\cdot),u(t,x(\cdot)))$.

Многозначное отображение F замкнуто. Тогда по теореме 43.5 для любых последовательностей

$$\{t_k, x_k(\cdot), u_k(t,x(\cdot))\} \in [0,T] \times C^0 \times \mathbb{R}^m,$$
$$\{t_k, x_k(\cdot), u_k(t,x(\cdot))\} \to \{t, x(\cdot), u_k(t,x(\cdot))\},$$

и $y_k \subset \mathbb{R}^n$, таких что $y_k \in F(t_k,x_k(\cdot),u_k(t,x(\cdot)))$, $y_k \to y$, выполнено $y \in F(t,x(\cdot),u(t,x(\cdot)))$.

Так как отображение g непрерывно, то для любых $\{t_k, x_k(\cdot)\} \to \{t, x(\cdot)\}$ $g(t_k,x_k(\cdot)) \to g(t,x(\cdot))$. Объединив два утверждения, получим замкнутость отображения Γ. $\square$

Будем рассматривать управляемую систему с обратной связью вида

$$\begin{cases} D\xi(t) = a(t,\xi(t),u_1(t\xi(t))), \\ D_2\xi(t) = \alpha(t,\xi(t),u_2(t\xi(t))), \\ u_1(t,\xi(t)) \in U_1(t,\xi(t)), \\ u_2(t,\xi(t)) \in U_2(t,\xi(t)). \end{cases} \tag{19.1}$$

Здесь $a : [0,T] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ и $\alpha : [0,T] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \to \overline{S}_+(n)$ — измеримые по Борелю отображения; $\mathbb{R}^m$ — пространство управляющих параметров; $U_1, U_2 : [0,T] \times \mathbb{R}^n \to \mathsf{K}(\mathbb{R}^m)$ — многозначные функции обратной связи, где $\mathsf{K}(\mathbb{R}^m)$ — множество компактов в $\mathbb{R}^m$.

Решением управляемой системы (19.1) назовем пару $\{\xi(t), (u_1, u_2)\}$, состоящую из процесса $\xi(t)$ и управления (u_1, u_2). Здесь $\xi(t) : [0,T] \to \mathbb{R}^n$ — процесс диффузионного типа, такой что P-п.н. удовлетворяет (19.1) почти всюду на $[0,T]$, а $u_1, u_2 : [0,T] \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ — измеримые по Борелю функции, удовлетворяющие включениям из (19.1) всюду на $[0,T]$.

Введем многозначные отображения $\mathbf{a}(t,x) = a(t,x,U_1(t,x))$ и $\boldsymbol{\alpha}(t,x) = \alpha(t,x,U_2(t,x))$. От управляемой системы перейдем к ассоциированному с ней дифференциальному включению

$$\begin{cases} D\xi(t) \in \mathbf{a}(t,\xi(t)), \\ D_2\xi(t) \in \boldsymbol{\alpha}(t,\xi(t)). \end{cases} \tag{19.2}$$

Очевидно, что каждая траектория системы 19.1 является решением включения 19.2. Установим и обратную зависимость.

Теорема 19.1. *Пусть $\mathbf{a}(t,x)$ является полунепрерывным сверху многозначным отображением с замкнутыми выпуклыми образами из $[0,T]\times\mathbb{R}^n$ в $\mathbb{R}^n$ и удовлетворяет оценке*

$$\|\mathbf{a}(t,x)\|^2 < K(1+\|x\|^2) \tag{19.3}$$

для некоторого $K>0$.

Пусть $\boldsymbol{\alpha}(t,x)$ является полунепрерывным сверху многозначным отображением с замкнутыми выпуклыми образами из $[0,T]\times\mathbb{R}^n$ в $\bar{\mathrm{S}}_+(n)$, таким что для любого $\alpha(t,x)\in\boldsymbol{\alpha}(t,x)$ имеет место оценка

$$|\operatorname{tr}\alpha(t,x)| < K(1+\|x\|^2) \tag{19.4}$$

для некоторого $K>0$.

Многозначные отображения $U_1(t,x), U_2(t,x) : [0,T]\times\mathbb{R}^n \to \mathsf{K}(\mathbb{R}^m)$ полунепрерывны сверху и

$$\begin{cases} D\xi(t) \in \boldsymbol{a}(t,\xi(t)), \\ D_2\xi(t) \in \boldsymbol{\alpha}(t,\xi(t)) \end{cases}$$

почти для всех $t\in I$.

Тогда существует такие измеримые селекторы $u_1 \in S_{U_1}$ и $u_2\in S_{U_2}$ (где S_{U_1} S_{U_2} — множество селекторов многозначных отображений U_1 и U_2, соответственно), что

$$\begin{cases} D\xi(t) = a(t,\xi(t),u_1(t)), \\ D_2\xi(t) = \alpha(t,\xi(t),u_2(t)), \\ u_1(t)\in U_1(t), \\ u_2(t)\in U_2(t) \end{cases}$$

почти для всех $t\in[0,T]$.

Доказательство. Рассмотрим последовательность $\varepsilon_i \to 0$ и соответствующие ей последовательности непрерывных аппроксимаций $a_i(t,x)$ и $\alpha_i(t,x)$, как в теореме 14.1 (напомним, что $\alpha_i(t,x)$ принадлежат $S_+(n)$). Все $a_i(t,x)$ удовлетворяют (19.3) с некоторой константой, большей чем K из условия теоремы. Сохраним обозначение K для этой константы. Так как $1+\|x\|^2 \leqslant (1+\|x\|)^2$, для $a_i(t,x)$ выполнена оценка

$$\|a_i(t,x)\| < K(1+\|x\|). \tag{19.5}$$

По лемме 5.1 существуют непрерывные $A_i(t,x)$, такие что $\alpha_i(t,x) = A_i(t,x)A_i^*(t,x)$. Из определения следа получаем, что $\operatorname{tr}\alpha_i(t,x)$ равен сумме квадратов всех элементов $A_i(t,x)$, т. е. это квадрат евклидовой нормы в $L(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^n)$. Следовательно, из (19.4) и неравенства $1+\|x\|^2 \leqslant (1+\|x\|)^2$ следует, что $A_i(t,x)$ удовлетворяет

$$\|A_i(t,x)\| < K(1+\|x\|). \tag{19.6}$$

Без ограничения общности мы можем предполагать, что непрерывные ε_i-аппроксимации a_i и A_i являются гладкими. Таким образом, стохастические уравнения

$$\xi_i(t) = \xi_0 + \int_0^t a_i(s,\xi_i(s))ds + \int_0^t A_i(s,\xi_i(s))dw(s)$$

имеют сильные решения $\xi_i(t)$, определенные на всем интервале $[0,T]$.

Процесс $\xi_i(t)$ определяет меру μ_i на $(\Omega,\mathcal{F})$. На вероятностном пространстве $(\Omega,\mathcal{F},\mu_i)$ процесс $\xi_i(t)$ является координатным процессом, т. е. $\xi(t,x(\cdot)) = x(t), x(\cdot)\in\Omega$.

По замечанию в [10, § III.2] множество мер $\{\mu_i\}$ слабо компактно. Таким образом, для заданной последовательности аппроксимаций a_i и A_i, из последовательности соответствующих мер μ_i

можно выбрать подпоследовательность, которая слабо сходится к некоторой мере μ. Для простоты предположим, что сама последовательность μ_i слабо сходится к μ. Обозначим через $\xi(t)$ координатный процесс на пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$.

Будем использовать следующее утверждение.

Лемма 19.2 (см. [10]). $\int\limits_{\Omega}(\sup\limits_{0\leqslant t\leqslant T}\|x(t)\|^2)d\mu \leqslant C_2$, *где константа* $C_2 > 0$ *зависит только от интервала* $[0,T]$ *и* K *из* (19.5) *и* (19.6).

Так как $\|a_i(t,x(t))\|^2 \leqslant K(1+\|x(t)\|^2)$ по (19.3), то, используя лемму 19.2, получим, что для некоторого $K_1 > 0$
$$\int\limits_{[0,T]\times\Omega} \|a_i(t,x(t))\|^2 d\lambda_1 \times d\mu \leqslant K_1. \tag{19.7}$$

Введем отображения $\tilde{a}_i : [0,T]\times\Omega \to \mathbb{R}^n$ по формуле $\tilde{a}_i(t,x(\cdot)) = a_i(t,x(t))$. Из (14.7) следует, что множество всех $\tilde{a}_i$ равномерно ограничено относительно нормы в гильбертовом пространстве $L_2([0,T]\times\Omega,\mathbb{R}^n)$, определенном относительно мер λ_1 в $[0,T]$ и μ в Ω. Так как множество всех $\tilde{a}_i$ слабо относительно компактно в $L_2([0,T]\times\Omega,\mathbb{R}^n)$, можно выбрать подпоследовательность, которая слабо сходится в $L_2([0,T]\times\Omega,\mathbb{R}^n)$ к определенному $\mathsf{a} : [0,T]\times\Omega\to\mathbb{R}^n$. Для простоты, пусть само $\tilde{a}_i(t,x(\cdot))$ будет этой подпоследовательностью.

Введем также $\bar{a}(t,x(\cdot)) = E(\mathsf{a} \mid \mathcal{N}_t)$ на вероятностном пространстве $(\Omega,\mathcal{F},\mu)$, $x(\cdot)\in\Omega$. Из доказательства теоремы 10.1 следует, что $\bar{a}(t,x(\cdot))$ непрерывно на множестве полной меры μ в Ω и $D\xi(t) = \bar{a}(t,\xi(\cdot))$.

Рассмотрим многозначную функцию $\Gamma : [0,T]\times C^0 \to C(\mathbb{R}^m)$,
$$\Gamma(t,x(\cdot)) = \{u(t,x(\cdot)) | u(t,x(\cdot))\in\mathbb{R}^m, \bar{a}(t,x(\cdot)) \in a(t,x(\cdot),U_1(t,x(\cdot))).$$
Нетрудно видеть, что многозначная функция $\Phi = \Gamma\cap U_1 : [0,T]\times C^0 \to \mathsf{K}(\mathbb{R}^m)$ корректно определена и ее измеримый селектор является искомой функцией $u_1 : [0,T]\times\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$. Следовательно, для доказательства теоремы достаточно доказать измеримость многозначного отображения Φ.

Из теоремы 43.3 следует замкнутость многозначного отображения $\boldsymbol{a}$ на $[0,T]\times\mathbb{R}^n$, но тогда в силу леммы 19.1 многозначная функция Γ замкнута на множестве полной меры μ в Ω. Следовательно, по теореме 43.4 многозначное отображение Φ полунепрерывно сверху на множестве полной меры μ в Ω, откуда в силу измеримости полунепрерывного сверху многозначного отображения легко вытекает измеримость Φ на множестве полной меры μ в Ω.

Аналогично доказывается измеримость
$$\Psi = \Pi\cap U_2 : [0,T]\times C^0 \to \mathsf{K}(\mathbb{R}^m),$$
$$\Pi(t,x(\cdot)) = \{u(t,x(\cdot)) | u(t,x(\cdot))\in\mathbb{R}^m, \bar{\alpha}(t,x(\cdot)) \in \alpha(t,x(\cdot),U_2(t,x(\cdot)))\}.$$
Поэтому существуют измеримые селекторы $u_1\in U_1, u_2\in U_2$, такие что
$$\begin{cases} D\xi(t) = a(t,\xi(t),u_1(t)), \\ D_2\xi(t) = \alpha(t,\xi(t),u_2(t)). \end{cases} \tag{19.8}$$

Таким образом, при указанных выше условиях для любого решения $\xi(t)$ включения 19.2 найдутся такие измеримые функции $u_1,u_2 : [0,T]\to\mathbb{R}^m$, что пара $\{\xi(t),(u_1,u_2)\}$ будет решением системы (19.1). □

В частности, полученное утверждение верно для оптимальных решений, чье существование доказано в двух предыдущих разделах.

Для включения с производными в среднем справа типа геометрического броуновского движения, рассмотренной в разделе 15, доказательство аналога леммы Филиппова аналогично.

19.2. Случай систем с текущими скоростями. Здесь мы докажем аналог леммы Филиппова, показывающий существование управления для уравнений с текущими скоростями, реализующего оптимальные решения включений с текущими скоростями, рассмотренных в разделах 17, 18.

Везде ниже в этом разделе символом $K(Y)$ мы обозначаем семейство всех непустых компактных множеств в топологическом пространстве Y, а символом $C(Y)$ — семейство всех выпуклых ограниченных множеств в Y.

Напомним, что многозначное отображение из топологического пространства X в топологическое пространство Y называется *замкнутым*, если его график является замкнутым множеством в $X \times Y$.

Нам потребуется теорема 43.3, теорема 43.4 и теорема 43.5.

Рассмотрим следующую систему с управлением при наличии обратной связи:

$$\left\{ \begin{array}{l} D_S\xi(t) = v(\xi(t), u_1(\xi(t))), \\ D_2\xi(t) = \alpha(\xi(t), u_2(\xi(t))), \\ u_1(\xi(t)) \in U_1(\xi(t)), \\ u_2(\xi(t)) \in U_2(\xi(t)). \end{array} \right. \tag{19.9}$$

Здесь $v : \mathcal{T}^n \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ and $\alpha : \mathcal{T}^n \times \mathbb{R}^m \to \overline{S}_+(n)$ — измеримые по Борелю отображения, $\mathbb{R}^m$ — пространство управляющих параметров и $U_1, U_2 : \mathcal{T}^n \to K(\mathbb{R}^m)$ — многозначные отображения обратной связи.

Решение (19.9) — это пара $\{\xi(t), (u_1(\xi(t)), u_2(\xi(t))\}$, которая состоит из процесса $\xi(t)$ и управления (u_1, u_2). Здесь $\xi(t) : [0, T] \to \mathcal{T}^n$ — процесс, который P-п.н. удовлетворяет (19.9) почти всюду на $[0, T]$, а $u_1, u_2 : \mathcal{T}^n \to \mathbb{R}^m$ — измеримые по Борелю функции, удовлетворяющие включениям из (19.2) (см. ниже) везде на $[0, T]$.

Введем многозначные отображения $\mathbf{v}(x) = v(x, U_1(x))$ и $\boldsymbol{\alpha}(t, x) = \alpha(x, U_2(x))$ и перейдем от (19.9) к включению

$$\left\{ \begin{array}{l} D_S\xi(t) \in \mathbf{v}(\xi(t)), \\ D_2\xi(t) \in \boldsymbol{\alpha}(\xi(t)). \end{array} \right. \tag{19.10}$$

Очевидным образом каждое решение (19.9) является решением (19.10).

Теорема 19.2. *Пусть многозначные отображения* $\mathbf{v}(x)$ *и* $\boldsymbol{\alpha}(x)$ *удовлетворяют условиям теоремы* 17.1. *Пусть также многозначные отображения* $U_1(x), U_2(x) : [0, T] \times \mathcal{T}^n \to K(\mathbb{R}^m)$ *являются полунепрерывными сверху и имеют замкнутые равномерно ограниченные значения. Тогда существуют измеримые по Борелю селекторы* $u_1(x)$ *отображения* $U_1(x)$ *и* $u_2(x)$ *отображения* $U_2(x)$ *такие, что п.н.*

$$\left\{ \begin{array}{l} D_S\xi(t) = v(\xi(t), u_1(\xi(t))), \\ D_2\xi(t) = \alpha(\xi(t), u_2(\xi(t))), \\ u_1(\xi(t)) \in U_1(\xi(t)), \\ u_2(\xi(t)) \in U_2(\xi(t)), \\ v(\xi(t), u_1(\xi(t))) \in \mathbf{v}(\xi(t)), \\ \alpha(\xi(t), u_2(\xi(t))) \in \boldsymbol{\alpha}(\xi(t)) \end{array} \right. \tag{19.11}$$

при почти всех $t \in [0, T]$.

Доказательство. Так же, как в доказательстве теоремы 17.1, рассмотрим $v(m(t))$, $\alpha(m(t))$, $u_1(m(t))$, $u_2(m(t))$ как заданные на $C^0([0, T], \mathcal{T}^n)$. Поскольку условия теоремы 17.1 выполнены, включение (19.10) имеет совершенное решение $\xi(t)$. Мы сохраняем обозначения из доказательства теоремы 17.1.

Рассмотрим многозначное отображение

$$\Gamma(x) = \{u_1(x) | u_1(x) \in U_1(x) \subset \mathbb{R}^m, v(x) \in v(x, U_1(x)) = \mathbf{v}(x)\}.$$

Легко видеть, что многозначное отображение $\Phi = \Gamma \cap U_1 : \mathcal{T}^n \to K(\mathbb{R}^m)$ корректно определено и его измеримый селектор является искомым отображением $u_1 : \mathcal{T}^n \to \mathbb{R}^m$. Следовательно, чтобы доказать теорему, достаточно доказать, что Φ измеримое.

Из теоремы 43.3 следует, что многозначное отображение $\mathbf{v}$ на $\mathcal{T}^n$ замкнуто и, таким образом, оно замкнуто как заданное на $C^0([0, T], \mathcal{T}^n)$. Так что для $\mathbf{v}$ утверждение теоремы 43.5 выполняется на $C^0([0, T], \mathcal{T}^n)$. Напомним, что v непрерывно на множестве полной меры μ в $C^0([0, T], \mathcal{T}^n)$. Следовательно, на этом множестве полной меры теорема 43.5 выполняется также и для Γ и, таким образом, Γ замкнуто на множестве полной меры μ. Так что по теореме 43.4 Φ полунепрерывно верху на множестве полной меры. Поскольку полунепрерывные сверху отображения измеримы, Φ измеримо на множестве полной меры μ.

Тот факт, что $\Psi = \Pi \cap U_2 : [0,T] \times C^0 \to K(\mathbb{R}^m)$, где

$$\Pi(t, x(\cdot)) = \{u(t, x(\cdot)) | u(t, x(\cdot)) \in \mathbb{R}^m, \bar{\alpha}(t, x(\cdot)) \in \alpha(t, x(\cdot), U_2(t, x(\cdot)))\}$$

доказывается аналогично. □

Следствие 19.1. *Теорема* 19.2 *означает, что для любого совершенного решения включения* (19.10)*, существование которого доказано в теореме* 17.1*, существует управление, при котором это решение реализуется как решение управляемой системы* (19.9)*. В частности, это верно для оптимальных решений.*

Для включения с текущими скоростями типа геометрического броуновского движения, рассмотренного в разделе 18, доказательство аналога леммы Филиппова аналогично.

Глава 4

УРАВНЕНИЯ ЛЕОНТЬЕВСКОГО ТИПА СО СЛУЧАЙНЫМИ ВОЗМУЩЕНИЯМИ

20. Некоторые факты из теории матриц

Начнем мы с предварительных сведений для этой главы. Подробное описание этого материала имеется, например, в [29].

Определение 20.1. Пусть заданы две $n \times n$ матричные функции $A(x)$ и $B(x)$, где x — вектор из линейного пространства X (например, X может быть $\mathbb{R}^1$, и в этом случае мы используем обозначение t вместо x). Выражение $\lambda A(x) + B(x)$, где λ — вещественный или комплексный параметр, называется *пучком переменных матриц.* Многочлен $\det(\lambda A(x) + B(x))$ (относительно λ) называется *характеристическим многочленом* пучка.

Теорема 20.1.

(i) *Пусть $A(t)$ и $B(t)$ — аналитические по $t \in (a,b) \subset \mathbb{R}^1$, $A(t)$ вырождено, а $B(t)$ не вырождено, и старший коэффициент характеристического многочлена нигде на (a,b) не равен нулю. Тогда существуют невырожденные матрицы $P(t)$ и $Q(t)$, аналитические по $t \in (a,b)$, такие, что при соответствующей нумерации векторов базиса*

$$P(t)(\lambda A(t) + B(t))Q(t) = \lambda \begin{pmatrix} I_d & 0 \\ 0 & N(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} J(t) & 0 \\ 0 & I_{n-d} \end{pmatrix}, \tag{20.1}$$

где I_d и I_{n-d} — единичные матрицы соответствующих размерностей, $N(t)$ — верхнетреугольная матрица с нулями на диагонали и $J(t)$ — некоторый блок размера $d \times d$. Матрицы $N(t)$ и $J(t)$ зависят от $t \in (a,b)$ аналитически.

(ii) *Если $A(t)$ и $B(t)$ C^i-гладки по $t \in (a,b)$ $(i = 1, 2, \dots \infty)$, то существует подынтервал $(a_1, b_1) \subset (a,b)$ такой, что при $t \in (a_1, b_1)$ существуют C^i-гладкие невырожденные матрицы $P(t)$ и $Q(t)$, корректно определенные и такие, что выполняется формула* (20.1)*. В этом случае $N(t)$ и $J(t)$ C^i-гладки в $t \in (a_1, b_1)$.*

Определение 20.2. Пусть, как и выше, старший коэффициент характеристического многочлена нигде не равен нулю на интервале (a,b). Если характеристический многочлен удовлетворяет равенству

$$\operatorname{rank}(A(t)) = \deg(\det(\lambda A(t) + B(t))), \tag{20.2}$$

то говорят, что матричный пучок удовлетворяет *условию ранг-степень.*

Отметим, что при выполнении условия ранг-степень ранг матрицы $A(t)$ имеет постоянное значение на (a,b).

Теорема 20.2. *Если матричный пучок удовлетворяет условию ранг-степень, утверждение* (ii) *теоремы* 20.1 *выполняется на всем интервале* (a, b), *т. е.* $(a_1, b_1) = (a, b)$ *и формула* (20.1) *имеет вид*

$$P(t)(\lambda A(t) + B(t))Q(t) = \lambda \begin{pmatrix} I_d & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} J(t) & 0 \\ 0 & I_{n-d} \end{pmatrix}. \qquad (20.3)$$

Имеется следующее обобщение утверждения (ii) теоремы 20.1 для случая, когда матрицы зависят от вектора $x \in \mathbb{R}^n$.

Теорема 20.3. *Пусть матрицы* $A(x)$ *и* $B(x)$ *являются* C^i*-гладкими* $(i = 1, 2, \dots, \infty)$ *по* $x \in U$, *где* U — *некоторая открытая область в* $\mathbb{R}^n$. *Тогда существует открытая область* $U_1 \subset U$, *на которой существуют* C^i*-гладкие невырожденные матрицы* $P(x)$ *и* $Q(x)$ $(x \in U_1)$ *такие, что*

$$P(x)(\lambda A(x) + B(x))Q(x) = \lambda \begin{pmatrix} I_d & 0 \\ 0 & N(x) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} J(x) & 0 \\ 0 & I_{n-d} \end{pmatrix}, \qquad (20.4)$$

где I_d *и* I_{n-d} — *единичные матрицы соответствующих размерностей,* $N(x)$ — *верхнетреугольная матрица с нулями на диагонали и* $J(x)$ — *некоторый блок размера* $d \times d$. *Матрицы* $N(x)$ *и* $J(x)$ C^i*-гладки по* $x \in U_1$.

21. Постановка задачи

Термин «уравнение леонтьевского типа» предложен Г. А. Свиридюком. Этот термин обусловлен тем обстоятельством, что при некоторых дополнительных предположениях система моделирует межотраслевую экономику «затраты — выпуск» Леонтьева с учетом запасов. Это специальный тип так называемых алгебро-дифференциальных уравнений, в которых в левой части при производной стоит вырожденная матрица, а перед неизвестном в правой части — невырожденная матрица, и кроме того, в правой части имеется свободный член, зависящий только от времени. В работах А. Л. Шестакова и Г. А. Свиридюка [30, 86] в терминах этих уравнений была создана и изучена модель динамического искажения сигналов в радиоустройствах (при этом зависящий от времени свободный член интерпретируется как входящий сигнал). В работах Л. А. Власенко, А. Г. Руткаса, М. С. Филипковской и др. рассматриваемые системы возникают при математическом моделировании колебаний и электрических цепей.

В указанных выше задачах, естественно, надо учитывать помехи, которые обычно описываются белым шумом. Однако уравнения леонтьевского типа имеют характерную особенность — при нахождении и исследовании решений приходится использовать производные свободных членов достаточно высокого порядка. При наличии помех нужны производные белого шума, что требует использования обобщенных функций. В настоящей главе мы реализуем подход, в котором вместо белого шума используется текущая скорость (симметрическая производная в среднем), которая, как сказано выше, является прямым аналогом обычной скорости детерминированного процесса. В основном мы используем текущую скорость винеровского процесса, для которого в разделе 2 найдены формулы для симметрических производных высокого порядка. Это дает возможность получения аналитических формул для решений уравнений леонтьевского типа с помехами. Альтернативный подход к этой задаче, также использующий текущие скорости винеровского процесса, разработан А. Л. Шестаковым и Г. А. Свиридюком [87].

Затем мы выводим уравнение, аналогичное леонтьевскому, но в терминах текущей скорости его решения, как это сделано для общих уравнений с текущими скоростями в разделе 8.

Мы начинаем исследование с общего уравнения леонтьевского типа со случайными возмущениями (помехами), которое имеет вид

$$\tilde{L}\xi(t) = \tilde{M}\int_0^t \xi(s)ds + \int_0^t f(s))ds + B\tilde{w}(t),$$

где $\tilde{L}$ — вырожденная матрица размера $n \times n$, $\tilde{M}$ и B — невырожденные матрицы размера $n \times n$, $\xi(t)$ — n-мерный случайный процесс, $f(t)$ — гладкая n-мерная вектор-функция и $\tilde{w}(t)$ — винеровский процесс в $\mathbb{R}^n$. Физический смысл состоит в следующем: $f(t)$ — сигнал, входящий в устройство, описываемое матрицами $\tilde{L}$ и $\tilde{M}$, тогда как $B\dot{\tilde{w}}(t)$ (где $\dot{\tilde{w}}(t)$ — «производная» винеровского процесса, т. е. белый шум) описывает помехи.

22. Стохастические уравнения леонтьевского типа и их канонический вид

В этом разделе матрицы $\tilde{L}$ и $\tilde{M}$, а также P и Q не зависят от t.

Как отмечено в разделе 21, стохастическое дифференциальное уравнение леонтьевского типа — это стохастическое дифференциальное уравнение в $\mathbb{R}^n$ вида $\tilde{L}\xi(t) = \tilde{M}\int\limits_0^t \xi(s)ds + \int\limits_0^t f(s))ds + B\tilde{w}(t)$, где $\xi(t)$ — случайный, а $f(t)$ — детерминированный n-мерные векторы; $\tilde{L}$, $\tilde{M}$ и B — матрицы размера $n \times n$, где $\tilde{L}$ вырождена (имеет нулевой определитель), тогда как $\tilde{M}$ и B невырождены; $\tilde{w}(t)$ — винеровский процесс. Их физическая интерпретация следующая: $f(t)$ — входящий сигнал в устройство, описываемое операторами $\tilde{L}$ и $\tilde{M}$; $B\dot{\tilde{w}}$, где $\dot{\tilde{w}}(t)$ — белый шум, это помехи, а $\xi(t)$ — выходящий сигнал. Вектор-функция $f(t)$ предполагается гладкой.

Если матричный пучок $\tilde{M} + \lambda\tilde{L}$ регулярный (т. е. характеристический многочлен $\det(\tilde{M} + \lambda\tilde{L})$ не является тождественно равным нулю), то можно применить операторы P и Q из раздела 20 и свести матрицы $\tilde{L}$ и $\tilde{M}$ к квазидиагональному виду. Сопряженный к P оператор мы обозначаем P^*.

Обозначим через $(\cdot,\cdot)$ стандартное скалярное произведение (евклидову метрику) в $\mathbb{R}^n$. Напомним, что винеровский процесс $\tilde{w}(t)$ является гауссовым со средним значением 0 и матрицей ковариаций tI, где I — единичная матрица, т. е. с плотностью распределения $\rho^w(t,x) = \dfrac{1}{(2\pi t)^{\frac{n}{2}}} e^{-\frac{x^2}{2t}}$ относительно формы объема евклидовой метрики $(\cdot,\cdot)$.

Введем матрицу $C = PB$. Поскольку матрицы P и B невырождены, C также невырождена, как и матрица $CC^* = PBB^*P^*$. Следовательно, обратная матрица $(CC^*)^{-1} = C^{*-1}C^{-1}$ корректно определена. Таким образом (см. [10]), $C\tilde{w}(t)$ также является гауссовым процессом со средним 0 и матрицей ковариаций tCC^* и, следовательно, с плотностью

$$\rho^{C\tilde{w}}(t,x) = ((2\pi t)^{-n/2}\Delta^{-1/2}) \exp\left(\frac{-((CC^*)^{-1}x, x)}{2t}\right) \qquad (22.1)$$

относительно той же самой формы объема, где Δ — определитель матрицы CC^*.

Введем новое скалярное произведение (евклидову метрику) $\langle\cdot,\cdot\rangle$ в $\mathbb{R}^n$ формулой $\langle X, Y\rangle = ((CC^*)^{-1}X, Y)$.

Теорема 22.1.

(i) *Для любых векторов X и Y в $\mathbb{R}^n$ выполняется тождество $\langle CX, CY\rangle = (X, Y)$.*

(ii) *Процесс $w(t) = C\tilde{w}(t)$ является винеровским в $\mathbb{R}^n$ с евклидовой метрикой $\langle\cdot,\cdot\rangle$.*

Доказательство. Напомним, что $(CC^*)^{-1} = C^{*-1}C^{-1}$. Тогда

$$\langle CX, CY\rangle = (C^{*-1}C^{-1}CX, CY) = (C^{-1}CX, C^{-1}CY) = (X, Y).$$

Форма объема метрики $\langle\cdot,\cdot\rangle$ отличается от формы объема метрики $(\cdot,\cdot)$ коэффициентом $\Delta^{-1/2}$, т. е. плотность $C\tilde{w}(t)$ относительно формы объема метрики $\langle\cdot,\cdot\rangle$ имеет вид

$$((2\pi t)^{-n/2}) \exp\left(\frac{-((CC^*)^{-1}x, x)}{2t}\right) = ((2\pi t)^{-n/2}) \exp\left(\frac{-\langle x, x\rangle}{2t}\right). \qquad (22.2)$$

Очевидным образом выполнены все остальные свойства винеровского процесса для $C\tilde{w}(t)$ в $\mathbb{R}^n$ с метрикой $\langle\cdot,\cdot\rangle$. □

Пусть $e_1, \ldots, e_n$ — естественный ортонормированный базис в $\mathbb{R}^n$ с $(\cdot,\cdot)$.

Следствие 22.1. $Ce_1, \ldots, Ce_n$ — *ортонормированный базис в $\mathbb{R}^n$ с $\langle\cdot,\cdot\rangle$.*

Следствие 22.2. *Введем $\eta(t) = Q^{-1}\xi(t)$. В $\mathbb{R}^n$ с $\langle\cdot,\cdot\rangle$ стохастическое уравнение леонтьевского типа принимает вид $L\eta(t) = \int\limits_0^t M\eta(s)ds + \int\limits_0^t Pf(s)ds + w(t)$.*

Нетрудно видеть, что в выражении для регрессии текущей скорости для $w(t)$ содержится $\mathrm{Grad}(C^{-1}x, C^{-1}x)$, где Grad — градиент относительно скалярного произведения $\langle\cdot,\cdot\rangle$.

Лемма 22.1. *$d\langle x,x\rangle = d(C^{-1}x, C^{-1}x) = 2C^{*-1}C^{-1}x$, где d — внешний дифференциал.*

Лемма 22.2. $\mathrm{Grad}\langle x,x\rangle = \mathrm{Grad}(C^{-1}x, C^{-1}x) = 2x$.

Доказательство вытекает из формулы поднятия индексов

$$\mathrm{Grad}(C^{-1}x, C^{-1}x) = CC^{*}d(C^{-1}x, C^{-1}x)$$

и из леммы 22.1.

Следовательно, в $\mathbb{R}^n$ с $\langle\cdot,\cdot\rangle$ формулы для текущей скорости и для симметрических производных винеровского процесса $w(t)$ высокого порядка имеют обычный вид, как в леммах 3.1–3.5.

23. Решения стохастических уравнений леонтьевского типа

Здесь по-прежнему $\tilde{L}$ и $\tilde{M}$ не зависят от t.

Итак (см. следствие 22.2), если матричный пучок $\tilde{M} + \lambda\tilde{L}$ регулярен, можно применить операторы P и Q и привести уравнение к каноническому виду типа (20.1).

Для удобства изложения изменим нумерацию векторов базиса так, чтобы система

$$L\eta(t) = \int\limits_0^t M\eta(\tau)d\tau + \int\limits_0^t Pf(\tau)d\tau + w(t) \tag{23.1}$$

относительно $\eta(t) = Q^{-1}\xi(t)$ принимала следующий более простой вид. В $L = P\tilde{L}Q$ сначала вдоль диагонали идут жордановы клетки с нулями на диагонали, а последняя матрица вдоль диагонали — единичная матрица. В $M = P\tilde{M}Q$ в строках, соответствующих жордановым клеткам, стоит единичная матрица, а последний блок представляет из себя невырожденную матрицу общего вида. То есть матрицы системы имеют вид

$$L = P\tilde{L}Q = \begin{pmatrix}
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0\\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0\\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & 0 & \dots & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & \dots & 0\\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & \dots & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 & \dots & 0\\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 1
\end{pmatrix}, \tag{23.2}$$

$$M = P\tilde{M}Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_{n-q}^{n-q} & a_{n-q+1}^{n-q} & \dots & a_n^{n-q} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_{n-q}^{n-q+1} & a_{n-q+1}^{n-q+1} & \dots & a_n^{n-q+1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_{n-q}^{n} & a_{n-q+1}^{n} & \dots & a_n^{n} \end{pmatrix}. \tag{23.3}$$

Везде ниже мы имеем дело с уравнением (23.1) в $\mathbb{R}^n$ с $\langle\cdot,\cdot\rangle$.

Понятно (ср. (1.9)), что здесь для простоты начальное условие в (23.1) предполагается равным нулю: $\xi(0) = 0$. Отметим однако, что решения, которые мы построим, этому условию не удовлетворяют и, более того, в момент времени 0 они не определены. Поэтому мы аппроксимируем решения процессами, которые удовлетворяют нулевому начальному условию, но становятся решениями только после некоторого заранее выбранного сколь угодно малого момента времени $t_0 > 0$ (см. подробности в замечании 23.2 ниже).

Замечание 23.1. Перепишем (23.1) в форме

$$L\eta(t) - M\int_0^t \eta(s)ds - P\int_0^t f(s)ds = w(t).$$

Мы видим, что «настоящее» для процесса

$$L\eta(t) - M\int_0^t \eta(s)ds - P\int_0^t f(s)ds$$

совпадает с «настоящим» для $w(t)$. Поэтому мы используем последнюю σ-алгебру для вычисления производных в среднем, т. е. мы применяем к (23.1) производные D^w, D^w_* или D^w_S. Отметим, что решения, найденные ниже, измеримы относительно «настоящего» процесса $w(t)$ при всех t.

Принимая во внимание структуру матриц (23.2) и (23.3), мы видим, что (23.1) распадается на несколько независимых систем уравнений. Одно из них, «внизу», соответствует единичной диагональной матрице в L и последнему блоку (невырожденной матрице) в M. Обозначим последнюю матрицу через K и через $\zeta(t)$ — вектор размерности $q+1$, построенный из последних $q+1$ координат вектора $\eta(t)$. Тогда $\zeta(t)$ описывается уравнением

$$\zeta(t) = K\int_0^t \zeta(s)ds + \int_0^t Pf(\tau)d\tau + w(t) \tag{23.4}$$

в $\mathbb{R}^{q+1}$. Здесь $w(t)$ — $(q+1)$-мерный винеровский процесс, построенный из последних $q+1$ координат процесса $w(t)$ в $\mathbb{R}^n$, а $Pf(\tau)$ — $(q+1)$-мерный вектор, построенный из последних $q+1$ координат $Pf(t)$. Для (23.4) известна аналитическая формула для решения:

$$\zeta(t) = \int_0^t e^{K(t-\tau)}Pf(\tau)d\tau + \int_0^t e^{K(t-\tau)}dw(\tau).$$

Другие подсистемы соответствуют жордановым клеткам в L и единичной матрице, построенной из строк и столбцов в M. Как пример, рассмотрим матрицу размера $(p+1)\times(p+1)$

(жорданову клетку) N в левом верхнем углу (23.2):

$$N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix},$$

и соответствующую единичную матрицу из (23.3). Остальные системы в точности аналогичны.

Через $(Pf)_{(p+1)}$ обозначим $(p+1)$-мерный вектор, построенный из первых $p+1$ координат Pf, через $\eta_{(p+1)}(t)$ — $(p+1)$-мерный вектор с координатами $(\eta^1(t), \dots, \eta^{p+1}(t))$, построенный из первых $p+1$ координат $\eta(t)$ и через $w_{(p+1)}(t)$ — вектор с координатами $(w^1(t), \dots, w^{p+1}(t))$, построенный из первых $p+1$ координат винеровского процесса $w(t)$. Понятно, что координаты Pf имеют вид $(Pf)^i = \sum\limits_{j=1}^{n} a^i_j f^j$. Тогда $\eta_{(p+1)}(t)$ описывается уравнением

$$N\eta_{(p+1)}(t) = \int\limits_0^t \big(\eta_{(p+1)}(s) + (Pf)_{(p+1)}(s)\big)\, ds + w_{(p+1)}(t).$$

Записанная в координатах, эта система принимает вид

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \eta^1(t) \\ \eta^2(t) \\ \vdots \\ \eta^p(t) \\ \eta^{p+1}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \int_0^t (\eta^1(s) + \sum_{j=1}^n a^1_j f^j) ds \\ \int_0^t (\eta^2(s) + \sum_{j=1}^n a^2_j f^j) ds \\ \vdots \\ \int_0^t (\eta^p(s) + \sum_{j=1}^n a^p_j f^j) ds \\ \int_0^t (\eta^{p+1} + \sum_{j=1}^n a^{p+1}_j f^j) ds \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} w^1(t) \\ w^2(t) \\ \vdots \\ w^p(t) \\ w^{p+1}(t) \end{pmatrix}, \tag{23.5}$$

где (a^i_j) — матрица оператора P. Из последнего уравнения из (23.5) мы находим

$$\int\limits_0^t \eta^{p+1}(s) ds = -\int\limits_0^t \Big(\sum_{j=1}^n a^{p+1}_j f^j\Big) ds - w^{p+1}(t). \tag{23.6}$$

Поскольку текущая скорость (симметрическая производная в среднем) соответствует физической скорости, из этого уравнения мы находим $\eta^{p+1}(t)$, применяя производную D^w_S к обеим частям равенства (см. замечание 23.1). Очевидным образом производные в среднем D^w и D^w_* (и, таким образом, D^w_S), примененные к интегралам в обеих частях последнего равенства дают, соответственно, $\eta^{p+1}(t)$ и $\sum\limits_{j=1}^{n} a^{p+1}_j f^j$. Значит мы получаем

$$\eta^{p+1}(t) = -\sum_{j=1}^n a^{p+1}_j f^j - D^w_S w^{p+1}(t) = -\sum_{j=1}^n a^{p+1}_j f^j - \frac{w^{p+1}(t)}{2t}. \tag{23.7}$$

Из предпоследнего уравнения мы получаем

$$\eta^{p+1}(t) = \int\limits_0^t (\eta^p(s) + \sum_{j=1}^n a^p_j f^j) ds + w^p(t). \tag{23.8}$$

Используя аналогичные рассуждения, мы выводим, что

$$\eta^p(t) = D^w_S \eta^{p+1}(t) - \sum_{j=1}^n a^p_j f^j - D^w_S w^p(t).$$

Подставив выражение для $\eta^{p+1}(t)$ из (23.7) в последнее равенство и используя лемму 3.3, мы получаем

$$\eta^p(t) = -\sum_{j=1}^{n} a_j^{p+1}\frac{df^j}{dt} - \sum_{j=1}^{n} a_j^p f^j + \frac{w^{p+1}(t)}{4t^2} - \frac{w^p(t)}{2t}. \tag{23.9}$$

В точности аналогично для $1 \leqslant i \leqslant p$ мы получаем рекуррентную формулу

$$\eta^i(t) = D_S^w \eta^{i+1}(t) - \sum_{j=1}^{n} a_j^i f^j - D_S^w w^i(t). \tag{23.10}$$

Принимая во внимание лемму 3.5, мы выводим из (23.10) явное выражение для любого $\eta^i(t)$, $1 \leqslant i \leqslant p$, в виде:

$$\eta^i(t) = -\sum_{k=i}^{p}\left(\sum_{j=1}^{n} a_j^{k+1}\frac{d^{k-i}f^j}{dt^{k-i}}\right) - \sum_{j=1}^{n} a_j^i f^j + \sum_{k=i+1}^{p+1}\left((-1)^{k-i+1}\,\frac{\prod\limits_{j=1}^{k-i}(2j-1)}{2^{k-i+1}}\,\frac{w^k(t)}{t^{k-i+1}}\right) - \frac{w^i(t)}{2t}. \tag{23.11}$$

Замечание 23.2. Вернемся к вопросу о нулевых начальных условиях для решений системы (23.5). Из определения симметрических производных в среднем ясно, что они корректно определены только на открытых интервалах, поскольку в них задействованы приращения и вправо, и влево. Из формулы (23.11) легко понять, что построенные выше решения имеют вид суммы, в которой некоторые слагаемые имеют сомножители типа $\dfrac{w^j(t)}{t^k}$, $k \geqslant 1$. Так что решения стремятся к бесконечности, когда $t \to 0$, т. е. в $t = 0$ они не существуют.

Вариант выхода из этих трудностей состоит в следующем. Зафиксируем произвольное малое значение времени $t_0 \in (0, T)$ и зададим функцию $t_0(t)$ формулой

$$t_0(t) = \begin{cases} t_0 & \text{если} \quad 0 \leqslant t \leqslant t_0; \\ t & \text{если} \quad t_0 \leqslant t. \end{cases} \tag{23.12}$$

В формулах (23.7), (23.9) и (23.10) заменим $\dfrac{w^j(t)}{t^k}$ на $\dfrac{w^j(t)}{(t_0(t))^k}$. После этого процессы примут нулевое значение при $t = 0$, но только при $t > t_0$ они станут решениями (23.1). Отметим, что для двух разных значений $t_0^{(1)}$ и $t_0^{(2)}$ при $t > \max(t_0^{(1)}, t_0^{(2)})$ значения соответствующих решений п.н. совпадают.

Напомним, что значения производных в среднем существенно зависят от того, σ-алгебру «настоящее» какого процесса мы используем. Проиллюстрируем это на примере полученных выше формул. В замечании 23.1 мы обосновали использование σ-алгебры «настоящее» n-мерного винеровского процесса (т. е. использование производной D_S^w), исходя из рассмотрения (23.1) как единой системы. Однако, вообще говоря, в условие конкретной задачи может входить требование об использовании какой-нибудь другой σ-алгебры. Тогда формулы для решений изменятся. Например, так произойдет, если рассматривать уравнения системы (23.5) по отдельности. Уравнение (23.6) не зависит от других уравнений системы (23.5) и может исследоваться отдельно от (23.5). В этом случае, рассуждая как в замечании 23.1, можно прийти к выводу, что в конструкции производных в среднем для процессов $\xi^{p+1}(t)$ и $w^{p+1}(t)$ надо использовать σ-алгебру «настоящее» процесса $w^{p+1}(t)$. Перепишем затем уравнение (23.8) в виде $\xi^{p+1}(t) - \int\limits_0^t \xi^p(s)ds = w^p(t)$. Опять рассуждая аналогично замечанию 23.1, придем к выводу, что для производных в среднем процессов из этого уравнения надо использовать σ-алгебру «настоящее» процесса $w^p(t)$ и т. д. Напомним, что координаты n-мерного процесса $w(t)$ являются независимыми 1-мерными винеровскими процессами. По свойствам условного математического ожидания это означает, что $E_t^{w^i}(w^j(t)) = E(w^j(t)) = 0$ при $i \neq j$. Аналог рекуррентной формулы (23.10) примет вид $\xi^i(t) = D_S^{w^i}\xi^{i+1}(t) - D_S^{w^i} w^i(t)$. Однако из сказанного выше и конструкции производных в среднем вытекает, что $D_S^{w^i}\xi^{i+1}(t)=0$, т. е.

$$\xi^i(t)=-D_S^{w^i}w^i(t)=-\frac{w^i(t)}{2t}$$

при всех $i=1,\dots,p+1$.

24. Случай с непостоянными коэффициентами

Здесь мы используем операторы $P(t)$ и $Q(t)$, зависящие от времени в полном соответствии с разделом 20.

Классическое уравнение леонтьевского типа, у которого входящие в него матрицы зависят от времени, имеет вид:

$$\tilde L(t)\dot\xi(t)=\tilde M(t)\xi(t)+\tilde f(t), \tag{24.1}$$

где $\tilde L(t)$ — вырожденная матрица размера $n\times n$, $\tilde M(t)$ — невырожденная матрица размера $n\times n$, $\xi(t)$ — n-мерный процесс, $f(t)$ — гладкая n-мерная вектор-функция. При наличии помех в уравнении (24.1) появляется дополнительное слагаемое в правой части, выраженное через белый шум. Как обычно, вместо уравнения с белым шумом мы переходим к стохастическому дифференциальному уравнению

$$\tilde L(t)\eta(t)=\int\limits_0^t\tilde M(s)\eta(s)ds+\int\limits_0^t f(s)ds+w(t). \tag{24.2}$$

Мы имеем дело с уравнениями на некотором интервале $[0,T]\subset\mathbb{R}$. Предположим, что матричный пучок $\lambda\tilde L+\tilde M$ невырожден. Сначала мы рассмотрим аналитический случай, в котором существуют матрицы $P(t)$ и $Q(t)$ из теоремы 20.1 (i), корректно определенные на всем интервале $[0,T]\subset\mathbb{R}$. Введем матрицы $L(t)=P(t)\tilde L(t)Q(t)$ и $M(t)=P(t)\tilde M(t)Q(t)$. Чтобы перевести уравнение (24.2) в форму с матрицами L и M, нам надо применить матрицу $P(t)$ к каждому вектору в $\mathbb{R}^n$ и заменить $\xi(t)$ на $\eta(t)=Q^{-1}(t)\xi(t)$. После этого, принимая во внимание помехи, перейдем к следующему стохастическому дифференциальному уравнению в форме Ито:

$$L(t)\eta(t)=\int\limits_0^t M(s)\eta(s)ds+\int\limits_0^t P(s)f(s)ds+\int\limits_0^t P(s)dw(s) \tag{24.3}$$

с начальными условиями $\eta(0)=0$, где $w(t)$ — винеровский процесс. По формуле (20.1) уравнение (24.3) имеет вид

$$\begin{pmatrix} I_d & 0\\ 0 & N(t)\end{pmatrix}\eta(t)=\int\limits_0^t\begin{pmatrix} J(s) & 0\\ 0 & I_{n-d}\end{pmatrix}\eta(s)ds+\int\limits_0^t P(s)f(s)ds+\int\limits_0^t P(s)dw(s).$$

Для верхней пары блоков мы получаем систему

$$\begin{pmatrix}\eta^1(t)\\ \eta^2(t)\\ \vdots\\ \eta^d(t)\end{pmatrix}=\int\limits_0^t J(s)\begin{pmatrix}\eta^1(s)\\ \eta^2(s)\\ \vdots\\ \eta^d(s)\end{pmatrix}ds+\int\limits_0^t\begin{pmatrix}P_1^1(s) & P_2^1(s) & \cdots & P_n^1(s)\\ P_1^2(s) & P_2^2(s) & \cdots & P_n^2(s)\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ P_1^d(s) & P_2^d(s) & \cdots & P_n^d(s)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}f^1(s)\\ f^2(s)\\ \vdots\\ f^n(s)\end{pmatrix}ds+$$
$$+\int\limits_0^t\begin{pmatrix}P_1^1(s) & P_2^1(s) & \cdots & P_n^1(s)\\ P_1^2(s) & P_2^2(s) & \cdots & P_n^2(s)\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ P_1^d(s) & P_2^d(s) & \cdots & P_n^d(s)\end{pmatrix}d\begin{pmatrix}w^1(s)\\ w^2(s)\\ \vdots\\ w^n(s)\end{pmatrix}. \tag{24.4}$$

Хорошо известно, что это уравнение имеет единственное решение с нулевыми начальными данными (см. [10]).

Для нижней пары блоков мы получаем систему

$$\begin{pmatrix} 0 & N^{d+1}_{d+2}(t) & N^{d+1}_{d+3}(t) & \cdots & N^{d+1}_{n}(t) \\ 0 & 0 & N^{d+2}_{d+3}(t) & \cdots & N^{d+2}_{n}(t) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & N^{n-1}_{n}(t) \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \eta^{d+1}(t) \\ \eta^{d+2}(t) \\ \vdots \\ \eta^{n-1}(t) \\ \eta^{n}(t) \end{pmatrix} = \int_0^t \begin{pmatrix} \eta^{d+1}(s) \\ \eta^{d+2}(s) \\ \vdots \\ \eta^{n-1}(s) \\ \eta^{n}(s) \end{pmatrix} ds + \\ + \int_0^t \begin{pmatrix} P^{d+1}_1(s) & P^{d+1}_2(s) & \cdots & P^{d+1}_n(s) \\ P^{d+2}_1(s) & P^{d+2}_2(s) & \cdots & P^{d+2}_n(s) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ P^{n}_1(s) & P^{n}_2(s) & \cdots & P^{n}_n(s) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f^{d+1}(s) \\ \vdots \\ f^{n-1}(s) \\ f^{n}(s) \end{pmatrix} ds + \\ + \int_0^t \begin{pmatrix} P^{d+1}_1(s) & P^{d+1}_2(s) & \cdots & P^{d+1}_n(s) \\ P^{d+2}_1(s) & P^{d+2}_2(s) & \cdots & P^{d+2}_n(s) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ P^{n}_1(s) & P^{n}_2(s) & \cdots & P^{n}_n(s) \end{pmatrix} d \begin{pmatrix} w^{d+1}(s) \\ \vdots \\ w^{n-1}(s) \\ w^{n}(s) \end{pmatrix}. \qquad (24.5)$$

Из физических соображений производные в среднем решений этого уравнения надо вычислять относительно σ-алгебры «настоящее» $\mathcal{N}^w_t$ винеровского процесса. Мы используем текущие скорости (поскольку они являются естественными аналогами физической скорости детерминированных процессов) и принимаем во внимание формулы для симметрических производных в среднем (т. е. текущих скоростей) из лемм 3.1 и 3.5 и теоремы 3.1. Отметим также, что для неслучайной гладкой функции (такой, как $N(t)$ и $P(t)$) симметрическая производная в среднем совпадает с обычной производной.

Из последнего уравнения (24.5) мы выводим, что при $t > 0$ справедлива следующая формула:

$$\eta^n = -\sum_{j=1}^{n} P^n_j f^j - \sum_{j=1}^{n} P^n_j \frac{w^j}{2t}. \qquad (24.6)$$

Тогда

$$D^w_S \eta_n = -\frac{d}{dt}\sum_{j=1}^{n} P^n_j f^j - \sum_{j=1}^{n}\Big(\frac{d}{dt}P^n_j\Big)\frac{w^j}{2t} + \sum_{j=1}^{n} P^n_j \frac{w^j}{4t^2}.$$

Из $(n-1)$-го уравнения мы получаем

$$\Big(\frac{d}{dt}N^{n-1}_n\Big)\eta_n + N^{n-1}_n D^w_S \eta_n = \eta^{n-1} + \sum_{j=1}^{n} P^{n-1}_j f^j + \sum_{j=1}^{n-1} P^n_j \frac{w^j}{2t}.$$

Таким образом,

$$\eta^{n-1} = \Big(\frac{d}{dt}N^{n-1}_n\Big)\Big(-\sum_{j=1}^{n} P^n_j f^j - \sum_{j=1}^{n} P^n_j \frac{w^j}{2t}\Big) + \\ + N^{n-1}_n\Big(-\frac{d}{dt}\sum_{j=1}^{n} P^n_j f^j - \sum_{j=1}^{n}\Big(\frac{d}{dt}P^n_j\Big)\frac{w^j}{2t} + \sum_{j=1}^{n} P^n_j \frac{w^j}{4t^2}\Big) - \sum_{j=1}^{n} P^{n-1}_j f^j - \sum_{j=1}^{n-1} P^n_j \frac{w^j}{2t}.$$

Очевидным образом при $d+1 \leqslant i \leqslant n-1$ имеет место следующая рекуррентная формула:

$$D^w_S \sum_{j=i+1}^{n} N^i_j \eta^j = \eta^i + \sum_{j=1}^{n} P^i_j f^j + \sum_{j=1}^{n} P^i_j \frac{w^j}{2t}, \qquad (24.7)$$

где нетрудно видеть, что

$$D^w_S \sum_{j=i+1}^{n} N^i_j \eta^j = \sum_{j=i+1}^{n}\Big(\Big(\frac{d}{dt}N^i_j\Big)\eta^j + N^i_j D^w_S \eta^j\Big).$$

Используя (24.7), можно найти все координаты $\eta(t)$ шаг за шагом тем же способом, что и выше.

Отметим, что формулы (24.6) и (24.7) для решений некорректны при $t = 0$. Чтобы преодолеть эту трудность, надо использовать прием из замечания 23.2, т. е. заменить время t на функцию $t_0(t)$.

Если матрицы $\tilde{L}(t)$ и $\tilde{M}(t)$ гладки, но не аналитичны, мы можем применить теорему 20.1 (ii) и получить решение на некотором подынтервале с помощью тех же рассуждений.

Теперь рассмотрим систему в случае, когда матрицы $\tilde{L}(t)$ и $\tilde{M}(t)$ гладки и дополнительно удовлетворяют условию «ранг-степень». Применив теорему 20.2 и использованные выше рассуждения, мы сведем (24.3) к

$$\begin{pmatrix} I_d & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \eta(t) = \int\limits_0^t \begin{pmatrix} J(s) & 0 \\ 0 & I_{n-d} \end{pmatrix} \eta(s)ds + \int\limits_0^t P(s)f(s)ds + \int\limits_0^t P(s)dw(s). \tag{24.8}$$

Очевидным образом для верхней пары блоков в (24.8) мы получим уравнения того же типа, что и (24.4). Но для нижней пары блоков уравнение превращается в

$$\int\limits_o^t \begin{pmatrix} \eta^{d+1}(s) \\ \eta^{d+2}(s) \\ \vdots \\ \eta^{n-1}(s) \\ \eta^n(s) \end{pmatrix} ds = -\int\limits_o^t \begin{pmatrix} P_1^{d+1}(s) & P_2^{d+1}(s) & \cdots & P_n^{d+1}(s) \\ P_1^{d+2}(s) & P_2^{d+2}(s) & \cdots & P_n^{d+2}(s) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ P_1^n(s) & P_2^n(s) & \cdots & P_n^n(s) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f^{d+1}(s) \\ \vdots \\ f^{n-1}(s) \\ f^n(s) \end{pmatrix} ds -$$

$$- \int\limits_0^t \begin{pmatrix} P_1^{d+1}(s) & P_2^{d+1}(s) & \cdots & P_n^{d+1}(s) \\ P_1^{d+2}(s) & P_2^{d+2}(s) & \cdots & P_n^{d+2}(s) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ P_1^n(s) & P_2^n(s) & \cdots & P_n^n(s) \end{pmatrix} d \begin{pmatrix} w^{d+1}(s) \\ \vdots \\ w^{n-1}(s) \\ w^n(s) \end{pmatrix}. \tag{24.9}$$

Таким образом, для (24.9) мы получаем следующие формулы для решений:

$$\begin{pmatrix} \eta^{d+1}(t) \\ \eta^{d+2}(t) \\ \vdots \\ \eta^{n-1}(t) \\ \eta^n(s) \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} P_1^{d+1}(t) & P_2^{d+1}(t) & \cdots & P_n^{d+1}(t) \\ P_1^{d+2}(t) & P_2^{d+2}(t) & \cdots & P_n^{d+2}(t) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ P_1^n(t) & P_2^n(t) & \cdots & P_n^n(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f^{d+1}(t) \\ \vdots \\ f^{n-1}(t) \\ f^n(t) \end{pmatrix} -$$

$$- \begin{pmatrix} P_1^{d+1}(t) & P_2^{d+1}(t) & \cdots & P_n^{d+1}(t) \\ P_1^{d+2}(t) & P_2^{d+2}(t) & \cdots & P_n^{d+2}(t) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ P_1^n(t) & P_2^n(t) & \cdots & P_n^n(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dfrac{w^{d+1}}{2t} \\ \vdots \\ \dfrac{w^{n-1}}{2t} \\ \dfrac{w^n}{2t} \end{pmatrix}. \tag{24.10}$$

Чтобы выполнялись начальные условия $\eta(0) = 0$, в $\dfrac{w^i(t)}{2t}$ мы, как и выше, заменяем t на $t_0(t)$ (см. замечание 23.2).

Для исследования стохастических уравнений леонтьевского типа с матрицами, зависящими от пространственной переменной, можно использовать только теорему 20.3, что приводит к дополнительным трудностям и позволяет доказать существование только локальных решений в смысле стохастического анализа. Поэтому мы рассмотрим только самый простой случай, в котором a priory система представлена в виде

$$\begin{pmatrix} I_d & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \eta(t) = \int\limits_0^t \begin{pmatrix} J(\eta(s)) & 0 \\ 0 & I_{n-d} \end{pmatrix} \eta(s)ds + \int\limits_0^t f(s)ds + w(t), \tag{24.11}$$

где $J(x)$ — некоторая матрица размера $d \times d$, гладкая по $x \in \mathbb{R}^n$.

Для верхней пары блоков мы получаем систему

$$\begin{pmatrix}\eta^1(t)\\ \eta^2(t)\\ \vdots\\ \eta^d(t)\end{pmatrix} = \int\limits_0^t J(\eta(s))\begin{pmatrix}\eta^1(s)\\ \eta^2(s)\\ \vdots\\ \eta^d(s)\end{pmatrix} ds + \int\limits_0^t \begin{pmatrix}f^1(s)\\ f^2(s)\\ \vdots\\ f^n(s)\end{pmatrix} ds + \begin{pmatrix}w^1(t)\\ w^2(t)\\ \vdots\\ w^n(t)\end{pmatrix}.$$

Поскольку линейный оператор $J(x)$ очевидным образом удовлетворяет условию Ито (подлинейного роста) и $J(x)$ гладко по x, эта система имеет единственное решение с нулевыми начальными условиями (см. [10]).

Система для нижней пары блоков имеет вид

$$\int\limits_o^t \begin{pmatrix}\eta^{d+1}(s)\\ \vdots\\ \eta^{n-1}(s)\\ \eta^n(s)\end{pmatrix} ds = -\int\limits_0^t \begin{pmatrix}f^{d+1}(s)\\ \vdots\\ f^{n-1}(s)\\ f^n(s)\end{pmatrix} ds - \begin{pmatrix}w^{d+1}(t)\\ \vdots\\ w^{n-1}(t)\\ w^n(t)\end{pmatrix}.$$

Следовательно, формула для решения имеет вид

$$\begin{pmatrix}\eta^{d+1}(t)\\ \vdots\\ \eta^{n-1}(t)\\ \eta^n(t)\end{pmatrix} = -\begin{pmatrix}f^{d+1}(t)\\ \vdots\\ f^{n-1}(t)\\ f^n(t)\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}\dfrac{w^{d+1}}{2t}\\ \vdots\\ \dfrac{w^{n-1}}{2t}\\ \dfrac{w^n}{2t}\end{pmatrix}.$$

Чтобы удовлетворить нулевому начальному условию $\eta(0)=0$, в $\dfrac{w^i(t)}{2t}$ мы заменим t на $t_0(t)$, как и выше (см. замечание 23.2).

25. Уравнения леонтьевского типа в терминах текущих скоростей решения

25.1. Основная конструкция. Пусть $\tilde{L}$ — вырожденная матрица, а $\tilde{M}$ — невырожденная матрица такие, что матричный пучок $\lambda\tilde{L}+\tilde{M}$ регулярен. Везде ниже в этом разделе мы предполагаем, что этот пучок удовлетворяет условию «ранг-степень» (см. определение 20.2). Возьмем матрицы P и Q из теоремы 20.2 и построим матрицы $L=P\tilde{L}Q$ и $M=P\tilde{M}Q$. Из теоремы 20.2 вытекает, что $L=\begin{pmatrix} I_d & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$ и $M=\begin{pmatrix} J & 0\\ 0 & I_{n-d}\end{pmatrix}$. Отметим, что поскольку $\tilde{M}$ невырождена, J также невырождена.

Введем матрицу $\overline{\Lambda}=QLQ^*$. Для C^∞-гладкой вектор-функции $f(t)$ рассмотрим систему

$$\begin{cases} \tilde{L}D_S\xi(t)=\tilde{M}\xi(t)+\tilde{f}(t),\\ D_2\xi(t)=\overline{\Lambda}, \end{cases} \tag{25.1}$$

которую мы называем *стохастическим уравнением леонтьевского типа в текущих скоростях решения*. Адекватные начальные условия для решений уравнения (25.1) будут рассмотрены ниже. Отметим, что и матрица L, и матрица $\overline{\Lambda}$ по построению симметричны и неотрицательно определены. Поэтому вторая строка в (25.1) корректна.

Рассмотрим $\eta(t)=Q^{-1}\xi(t)$ и $f(t)=P\tilde{f}(t)$. Тогда в соответствии с преобразованием уравнения (25.1), указанном в теореме 20.2, мы получаем первую строку в (25.1) в форме $LD_S\eta(t)=M\eta(t)+f(t)$. Поскольку $\eta(t)=Q^{-1}\xi(t)$, из определения L и определения D_2 по формуле (1.2) мы получаем, что вторая строка (25.1) для $\eta(t)$ принимает вид $D_2\eta(t)=L$. Таким образом, уравнение (25.1) преобразовано в уравнение для $\eta(t)$ вида

$$\begin{cases} LD_S\eta(t)=M\eta(t)+f(t),\\ D_2\eta(t)=L, \end{cases} \tag{25.2}$$

где вторая строка корректна, поскольку L симметрична и неотрицательно определена. Так что $\mathbb{R}^n$ разлагается в прямую сумму двух подпространств $\mathbb{R}^d$ и $\mathbb{R}^{n-d}$, и уравнение (25.2) разлагается в два независимых уравнения в этим подпространствах:

$$\begin{cases} D_S\eta^{(1)}(t) = J\eta^{(1)}(t) + f^{(1)}(t), \\ D_2\eta^{(1)}(t) = I_d \end{cases} \quad \text{в } \mathbb{R}^d, \tag{25.3}$$

$$\begin{cases} \eta^{(2)}(t) + f^{(2)}(t) = 0, \\ D_2\eta^{(2)}(t) = 0 \end{cases} \quad \text{в } \mathbb{R}^{n-d}. \tag{25.4}$$

Из второй строки (25.4) вытекает, что решение (25.4) неслучайно. Тогда из первой строки следует, что решение имеет вид $\eta^{(2)}(t) = -f^{(2)}(t)$ с очевидными начальными условиями $\eta^{(2)}(0) = -f^{(2)}(0)$.

Для исследования (25.3) мы применяем теорему 8.1.

Для простоты обозначим C^∞-гладкое векторное поле $Jx + f^{(1)}(t)$ на $\mathbb{R}^d$ символом $v(t,x)$, а символом g_t его поток.

Из второй строки (25.3) следует, что решение, если оно существует, должно иметь форму (1.9). Зафиксируем гладкую вероятностную плотность ρ_0 на $\mathbb{R}^d$, нигде не равную нулю. В этом случае из теоремы 8.1 следует, что плотность $\rho(t)$ решения с начальной плотностью ρ_0 имеет вид $\rho(t) = e^{p(t)}$, где $p(t,x) = p_0(g_{-t}(x)) - \int\limits_0^t (\operatorname{div} v)(s, g_s(g_{-t}(x))ds$, $p_0 = \ln\rho_0$.

Подчеркнем, что $\rho(t,x)$ корректно определено для всех $t \in [0,T]$. Обозначим через $\eta_0^{(1)}$ случайный элемент в $\mathbb{R}^d$ с плотностью ρ_0, а через $\eta^{(1)}(t)$ — искомое решение.

По построению $D_S\eta^{(1)}(t) = v(t, \eta^{(1)}(t))$. По следствию 2.1 осмотическая скорость решения стохастического дифференциального уравнения с постоянным A имеет вид $u = \dfrac{1}{2}\operatorname{grad} p = \operatorname{grad}\ln\sqrt{\rho}$. Введем $a(t,x) = v(t,x) + u(t,x)$. Используя те же рассуждения, что и доказательстве теоремы 8.1, мы приходим к выводу, что $\eta^{(1)}(t)$ должно удовлетворять стохастическому дифференциальному уравнению

$$\eta^{(1)}(t) = \eta_0^{(1)} + \int\limits_0^t a(s, \eta^{(1)}(s))ds + w(s), \tag{25.5}$$

которое имеет решение. Это и есть решение (25.3) в форме (1.9), которое мы ищем.

Таким образом, мы доказали следующую теорему.

Теорема 25.1. *При описанных выше условиях уравнение* (25.1)*, преобразованное к виду* (25.2)*, с начальными условиями* $\eta^{(2)}(0) = -f^{(2)}(0)$ *в* $\mathbb{R}^{n-d}$ *и случайном элементе с плотностью* ρ_0*, нигде не равной нулю, независимом от винеровского процесса* $w(t)$ *в* $\mathbb{R}^d$*, имеет решение.*

25.2. Одно обобщение. Рассмотрим некоторую симметрическую положительно определенную матрицу Ξ в $\mathbb{R}^d$. Поскольку она положительно определена, она не вырождена, и (см. лемму 5.1) существует невырожденная матрица A в $\mathbb{R}^d$ такая, что $\Xi = AA^*$, где A^* — транспонированная A. Введем матрицу $\Theta = \begin{pmatrix} \Xi & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ и матрицу $\overline{\Theta} = Q\Theta Q^*$ в $\mathbb{R}^n$. Рассмотрим уравнение

$$\begin{cases} \tilde{L}D_S\xi(t) = \tilde{M}\xi(t) + \tilde{f}(t), \\ D_2\xi(t) = \overline{\Theta}. \end{cases} \tag{25.6}$$

Теми же рассуждениями, как (25.1) было преобразовано к виду (25.2), применяя P и Q, мы преобразуем (25.6) в уравнение

$$\begin{cases} LD_S\eta(t) = M\eta(t) + f(t), \\ D_2\eta(t) = \Theta. \end{cases} \tag{25.7}$$

Отметим, что поскольку по построению матрицы $\overline{\Theta}$ и Θ симметричны и неотрицательно определены, уравнения (25.6) и (25.7) корректны.

Так же, как выше, (25.7) распадается на два независимых уравнения

$$\begin{cases} D_S\eta^{(1)}(t) = J\eta^{(1)}(t) + f^{(1)}(t), \\ D_2\eta^{(1)}(t) = \Xi \end{cases} \quad \text{в } \mathbb{R}^d, \tag{25.8}$$

$$\begin{cases} \eta^{(2)}(t) + f^{(2)}(t) = 0, \\ D_2\eta^{(2)}(t) = 0 \end{cases} \qquad \text{в } \mathbb{R}^{n-d}. \tag{25.9}$$

Отметим, что (25.9) совпадает с (25.4), и можно применить те же рассуждения, что выше, для его исследования.

Для изучения (25.8) введем в $\mathbb{R}^d$ новое скалярное произведение $\langle\cdot,\cdot\rangle$ такое, что для произвольных векторов X и Y в $\mathbb{R}^d$ его значение задается как $\langle X, Y\rangle = (\Xi^{-1}X, Y)$. Зафиксируем начальное распределение ρ_0 в $\mathbb{R}^d$, нигде не равное нулю. Рассмотрим векторное поле $v(t,x) = Mx + f(t)$ и обозначим через g_t его поток. Тогда из теоремы 8.1 следует, что плотность ρ_0 имеет вид $\rho(t) = e^{p(t)}$ с $p(t,x) = p_0(g_{-t}(x)) - \int\limits_0^t (\operatorname{Div} v)(s, g_s(g_{-t}(x))ds$, где $p_0 = \ln\rho_0$ и Div обозначает дивергенцию в $\mathbb{R}^d$ со скалярным произведением $\langle\cdot,\cdot\rangle$. Дополнительная модификация построения здесь состоит в том, что $\eta^{(1)}(t) = \eta_0^{(1)} + \int\limits_0^t a(s, \eta^{(1)}(s))ds + Aw(s)$ (аналог (25.5)). Таким образом, мы доказали следующее утверждение.

Теорема 25.2. *При сделанных выше предположениях уравнение* (25.6)*, преобразованное к виду* (25.7)*, с начальными условиями $\eta^{(2)}(0) = -f^{(2)}(0)$ в $\mathbb{R}^{n-d}$ и случайным элементом с плотностью ρ_0, нигде не равной нулю в $\mathbb{R}^d$, имеет решение.*

Глава 5

ПРОИЗВОДНЫЕ В СРЕДНЕМ НА МНОГООБРАЗИЯХ

26. Расслоение Ито и уравнения Ито на многообразии

Отметим, что согласно формуле Ито при замене координат $\varphi_{\beta\alpha}$ из карты $\mathcal{U}_\alpha$ в карту $\mathcal{U}_\beta$ уравнение в Форме Ито

$$d\xi(t) = a(t,\xi(t))dt + A(t,\xi(t))dw(t)$$

в карте $\mathcal{U}_\alpha$ преобразуется в уравнение

$$d\varphi_{\beta\alpha}(\xi(t)) = \varphi'_{\beta\alpha}[a(t,\xi(t))dt + A(t,\xi(t))dw(t)] + \frac{1}{2}\operatorname{tr}\varphi''_{\beta\alpha}(A(t,\xi(t)), A(t,\xi(t)))dt, \tag{26.1}$$

т. е. уравнение в форме Ито представляют собой сечение специального расслоения. Чтобы ввести это расслоение в точном соответствии со стандартным определением, сначала опишем его структурную группу.

Пусть M — гладкое многообразие размерности n. Обозначим через $L(\mathbb{R}^k, \mathbb{R}^n)$ пространство линейных операторов, переводящих $\mathbb{R}^k$ в $\mathbb{R}^n$; через $GL(n,\mathbb{R})$ — группу невырожденных матриц размера $n \times n$ (или невырожденных линейных операторов, действующих в $\mathbb{R}^n$); и через $\mathbf{L}^2(\mathbb{R}^n)$ — набор билинейных отображений $\alpha : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$.

Определение 26.1. *Группа Ито G_I* — это множество пар (B,β), где $B \in GL(n,\mathbb{R})$ и $\beta \in \mathbf{L}^2(\mathbb{R}^n)$, с операцией, определяемой следующим равенством:

$$(B,\beta)\cdot(C,\gamma) = (B\circ C, B\circ\gamma(\cdot,\cdot) + \beta(C(\cdot), C(\cdot))). \tag{26.2}$$

Теорема 26.1. *G_I с операцией* (26.2) *является на самом деле группой.*

Доказательство. Ассоциативность (26.2) проверяется непосредственно. Единицей в G_I является пара $(I,0)$, где I — единичный оператор, а 0 — нулевое «билинейное» отображение. Для пары (B,β) обратный элемент относительно (26.2) — это пара $(B,\beta)^{-1} = (B^{-1}, -B^{-1}\circ\beta(B^{-1}(\cdot), B^{-1}(\cdot)))$. $\square$

Замечание 26.1. Как и для любой группы Ли, касательное пространство $T_{(I,0)}G_I$ в точке единица $(I,0)$ группы G_I имеет структуру алгебры Ли. Отметим, что $T_{(I,0)}G_I$ состоит из пар $\{(D,\delta)\}$, где $D \in L(\mathbb{R}^n)$ — группа всех линейных операторов в $\mathbb{R}^n$ (матрицы размера $n\times n$) и $\delta \in$

$\mathbf{L}^2(\mathbb{R}^n)$. Прямые вычисления с левоинвариантными векторными полями на G_I дают следующую формулу для скобки векторов (D,δ) и (E,ε) из $T_{(I,0)}G_I$:

$$[(D,\delta),(E,\varepsilon)] = (DE - ED, E(\delta(I,D)) - D(\varepsilon(I,E))). \tag{26.3}$$

Мы называем эту алгебру Ли со скобкой (26.3) *алгеброй Ито.*

Напомним, что для билинейного оператора $\Psi(\cdot,\cdot)$ на n-мерном евклидовом пространстве, принимающем значения в том же пространстве, его *след* — это вектор, определяемый формулой

$$\operatorname{tr}\Psi = \sum_{i=1}^{n} \Psi(e_i, e_i), \tag{26.4}$$

где $e_1,\ldots,e_n$ — ортонормированный базис, причем след не зависит от выбора ортонормированной базиса.

Пусть задан билинейный оператор Ψ в касательном пространстве T_mM на римановом многообразии, который также принимает значения в T_mM. Обозначим через Ψ^k_{ij} его коэффициенты относительно базиса $\dfrac{\partial}{\partial q^1},\ldots,\dfrac{\partial}{\partial q^n}$ в некоторой карте и через g^{ij} — компоненты метрического тензора. Тогда легко видеть, что в локальных координатах след описывается формулой

$$\operatorname{tr}\Psi = g^{ij}\Psi^k_{ij}\frac{\partial}{\partial q^k}. \tag{26.5}$$

Введем левое действие группы G_I на произведении $\mathbb{R}^n \times L(\mathbb{R}^k,\mathbb{R}^n)$ по формуле

$$(B,\beta)\cdot(X,A) = (BX + \frac{1}{2}\operatorname{tr}\beta(A(\cdot),A(\cdot)), B\circ A). \tag{26.6}$$

Определение 26.2. *Расслоение Ито* $I(M)$ над многообразием M является расслоением со стандартным слоем $\mathbb{R}^n \times L(\mathbb{R}^k,\mathbb{R}^n)$ и структурной группой G_I, действующей на $\mathbb{R}^n \times L(\mathbb{R}^k,\mathbb{R}^n)$ слева по формуле (26.6).

Подчеркнем, что над каждой картой $\mathcal{U}_\alpha$ на M расслоение Ито представимо как прямое произведение $\mathcal{U}_\alpha \times (\mathbb{R}^n \times L(\mathbb{R}^k,\mathbb{R}^n))$ и при замене координат $\varphi_{\beta\alpha}$ из карты $\mathcal{U}_\alpha$ в другую карту $\mathcal{U}_\beta$ произвольная точка $(m^\alpha,(a^\alpha,A^\alpha))$ преобразуется по правилу

$$(m^\alpha,(a^\alpha,A^\alpha)) \mapsto (\varphi_{\beta\alpha}m^\alpha, (\varphi'_{\beta\alpha}a^\alpha + \frac{1}{2}\operatorname{tr}\varphi''_{\beta\alpha}(A^\alpha,A^\alpha), \varphi'_{\beta\alpha}A^\alpha)). \tag{26.7}$$

Определение 26.3. Сечения расслоения Ито $I(M)$ называются *уравнениями Ито.*

Введем обозначения для уравнения Ито в виде пары $(\hat{a},A)$, значение в точке m обозначается $(\hat{a}_m,A_m)$ или $(\hat{a}(m),A(m))$ (в неавтономном случае $(\hat{a}(t,m),A(t,m))$). В каждой карте это обозначение имеет точный смысл. Обратите внимание, что второй элемент пары корректно определен как линейный оператор $A_m:\mathbb{R}^k \to T_mM$ (при заменах координат A преобразуется как линейный оператор такого типа). Принимая некоторую тривиализацию в карте, $\hat{a}$ можно отождествить с вектором из T_mM, но это отождествление зависит от выбора карты и тривиализации (правило преобразования $\hat{a}$ при заменах координат зависит от A).

Пусть $(\hat{a},A)$ — уравнение Ито, а $w(t)$ — винеровский процесс в $\mathbb{R}^k$. В некоторой карте $\mathcal{U}_\alpha$ рассмотрим следующее стохастическое дифференциальное уравнение в форме Ито:

$$d\xi(t) = \hat{a}(t,\xi(t))dt + A(t,\xi(t))dw(t). \tag{26.8}$$

Сравнивая формулу Ито и формулу (26.7), легко видеть, что уравнение (26.8) корректно преобразуется при заменах координат, т. е. (26.8) можно рассматривать на всем многообразии M.

Рассмотрим другое левое действие G_I на $\mathbb{R}^n \times L(\mathbb{R}^k,\mathbb{R}^n)$ по формуле

$$(B,\beta)\cdot(X,A) = (BX - \frac{1}{2}\operatorname{tr}\beta(A(\cdot),A(\cdot)), B\circ A). \tag{26.9}$$

Определение 26.4. *Обратное расслоение Ито* $I_*(M)$ над многообразием M является расслоением со стандартным слоем $\mathbb{R}^n \times L(\mathbb{R}^k,\mathbb{R}^n)$ и структурной группой G_I, действующей на $\mathbb{R}^n \times L(\mathbb{R}^k,\mathbb{R}^n)$ слева по формуле (26.9).

Над каждой картой $\mathcal{U}_\alpha$ на M обратное расслоение Ито представимо как прямое произведение $\mathcal{U}_\alpha \times (\mathbb{R}^n \times L(\mathbb{R}^k, \mathbb{R}^n))$, и при замене координат $\varphi_{\beta\alpha}$ из карты $\mathcal{U}_\alpha$ в другую карту $\mathcal{U}_\beta$ произвольная точка $(m^\alpha, (a^\alpha, A^\alpha))$ преобразуется по правилу

$$(m^\alpha, (a^\alpha, A^\alpha)) \mapsto (\varphi_{\beta\alpha} m^\alpha, (\varphi'_{\beta\alpha} a^\alpha - \frac{1}{2} \operatorname{tr} \varphi''_{\beta\alpha}(A^\alpha, A^\alpha), \varphi'_{\beta\alpha} A^\alpha)). \tag{26.10}$$

Определение 26.5. Сечения обратного расслоения Ито $I_*(M)$ называются *обратными уравнениями Ито* и обозначаются $(\hat{a}_*, A)$.

Введем понятие векторного поля Ито — это пара (a, A), где a — векторное поле на M, а A — линейный оператор $A_m : \mathbb{R}^k \to T_m M$.

Определение 26.6. Векторное поле Ито (a, A) и уравнение Ито $(\hat{a}, \hat{A})$ называются *канонически соответствующими друг другу в точке $m \in M$ относительно связности* H, если в m они совпадают при тривиализации в нормальной карте связности H в m. Если такое отождествление выполнено во всех точках $m \in M$, (a, A) и $(\hat{a}, A)$ называются *канонически соответствующими друг другу относительно* H *на* M.

Лемма 26.1. *Векторное поле Ито (a, A) и уравнение Ито $(\hat{a}, \hat{A})$ канонически соответствуют друг другу относительно связности H на M тогда и только тогда, когда в любой карте $\mathcal{U}_\alpha$ поля линейных операторов A и $\hat{A}$ тождественно совпадают, а a и $\hat{a}$ связаны формулой*

$$\hat{a}(t, m) = a(t, m) - \frac{1}{2} \operatorname{tr} \mathbf{\Gamma}_m(A(t, m), A(t, m)), \tag{26.11}$$

где $\mathbf{\Gamma}_m(\cdot, \cdot)$ — локальный коннектор связности H (локальный коэффициент связности, см. раздел 44) в этой карте.

Доказательство. Равенство $A(t, m) = \hat{A}(t, m)$ тривиально следует из того, что эти линейные операторы в каждой точке совпадают в нормальной карте и имеют одинаковые правила преобразования при заменах координат.

Чтобы доказать (26.11), выберем некоторое $m \in \mathcal{U}_\alpha$ и рассмотрим нормальную карту $\mathcal{U}_n$ связности H в этой точке. Пусть $X, Y \in T_m M$. Рассмотрим вектор в $T_{(m,X)}TM$ такой, что в $\mathcal{U}_n$ он описывается четверкой $(m, X, Y, 0)$ (см. [50, § 2.1]). Тогда по формуле [50, формула (2.10)] в другой карте $\mathcal{U}_\alpha$ этот вектор имеет вид $(\varphi_{\alpha n} m, \varphi'_{\alpha n} X, \varphi'_{\alpha n} Y, \varphi''_{\alpha n}(X, Y))$. Поскольку в $\mathcal{U}_n$ локальный коннектор связности H в m равен нулю, то известно, что в этом случае $\mathbf{\Gamma}_m(X, Y) = -\varphi''_{\alpha n}(X, Y)$ (см. [50, формула (2.21)] в $\mathcal{U}_\alpha$.

Поскольку $a(t, m)$ и $\hat{a}(t, m)$ совпадают при тривиализации в $\mathcal{U}_n$ и при замене координат $\varphi_{\alpha n}$ они преобразуются по разным формулам: $a(t, m)$ как обычный касательный вектор, а $\hat{a}(t, m)$ — по формуле (26.7), то в карте $\mathcal{U}_\alpha$ они удовлетворяют соотношению

$$\hat{a}(t, m) = a(t, m) + \frac{1}{2} \operatorname{tr} \varphi''_{\alpha n}(A(t, m), A(t, m)) = a(t, m) - \frac{1}{2} \operatorname{tr} \mathbf{\Gamma}_m(A(t, m), A(t, m)). \tag{26.12}$$

Доказательство достаточности основано на тех же формулах. □

Учитывая совпадение A и $\hat{A}$, в дальнейшем мы будем обозначать уравнения Ито парами $(\hat{a}, A)$.

Обозначим через $\hat{a}^i(t, m)$ координаты $\hat{a}$ в некоторой карте, а через α^{ij} — элементы матрицы $\alpha = AA^*$. Отметим, что для уравнения Ито $(\hat{a}, A)$ соответствующий ему генератор однозначно находится по формуле

$$\mathcal{A} = \hat{a}^i \frac{\partial}{\partial q^i} + \frac{1}{2} \alpha^{ij} \frac{\partial^2}{\partial q^i \partial q^j}.$$

Лемма 26.2. *Пусть (a, A) — векторное поле Ито, канонически соответствующее уравнению Ито $(\hat{a}, A)$ относительно связности H. Тогда $a = \mathcal{H}(\mathcal{A})$, где $\mathcal{H} : \tau M \to TM$ — отображение, порожденное связностью H по формуле* (45.3).

Доказательство. Отметим, что $\operatorname{tr} \mathbf{\Gamma}_m(A(t, m), A(t, m)) = \Gamma^k_{ij} a^{ij} \dfrac{\partial}{\partial q^k}$, где, как и выше, a^{ij} — элементы матрицы AA^* в локальных координатах. По лемме 26.1 $\hat{a}(t, m) = a(t, m) - \dfrac{1}{2} \operatorname{tr} \mathbf{\Gamma}_m(A, A)$. Тогда $\mathcal{H}\mathcal{A} = a(t, m) - \dfrac{1}{2} \Gamma^k_{ij} a^{ij} \dfrac{\partial}{\partial q^k} + \dfrac{1}{2} \Gamma^k_{ij} a^{ij} \dfrac{\partial}{\partial q^k} = a(t, m)$. □

27. Производные в среднем справа и слева

Пусть на многообразии M задана некоторая связность H. Пусть $\xi(t)$ — случайный процесс на M. По формулам (1.1) и (1.2) мы можем ввести производные в среднем справа и слева от $\xi(t)$, если они существуют, в любой карте. Но из формулы (26.12) очевидно следует, что, например, для решений уравнения Ито $(\hat{a}, A)$, мы получили бы производные в среднем, зависящие от локального коннектора связности H и даже от A, а по физическим причинам производные должны быть векторами. Поэтому мы модифицируем определение производных в среднем следующим образом.

Рассмотрим борелевские поля $Y^0(t,\cdot)_\alpha$ и $Y^0_*(t,\cdot)_\alpha$ на карте $\mathcal{U}_\alpha$ (регрессии) такие, что производная в среднем справа (соответственно, слева) от $\xi(t)$ в точке t, найденная в $\mathcal{U}_\alpha$, представима в виде $Y^0(t,\xi(t))_\alpha$ (соответственно, $Y^0_*(t,\xi(t))_\alpha$). Конечно, $Y^0(t,\cdot)_\alpha$ и $Y^0_*(t,\cdot)_\alpha$ не преобразуются как векторы при заменах координат. Теперь построим векторное поле $Y^0(t,\cdot)$ (и $Y^0_*(t,\cdot)$) на M, вектор которого в любом $m \in M$ совпадает с $Y^0(t,m)_n$ (с $Y^0_*(t,m)_n$, соответственно), где $Y^0(t,m)_n$ ($Y^0_*(t,m)_n$, соответственно) вычисляется в нормальной карте $\mathcal{U}_n(m)$ связности H в точке m. Очевидно, что поля Y^0 и Y^0_* являются измеримыми по Борелю сечениями касательного расслоения TM.

Определение 27.1. $D^{\mathsf{H}}\xi(t) = Y^0(t,\xi(t))$ и $D^{\mathsf{H}}_*\xi(t) = Y^0_*(t,\xi(t))$ называются *производными в среднем справа* и *слева*, соответственно, от $\xi(\cdot)$ в точке t на M относительно H; $D_S\xi(t) = v^\xi(t,\xi(t))$ и $D_A\xi(t) = u^\xi(t,\xi(t))$ называются *текущей* и *осмотической скоростями*, соответственно, от $\xi(\cdot)$ относительно H, где $v^\xi(t,m) = \dfrac{1}{2}(Y^0(t,m) + Y^0_*(t,m))$ и $u^\xi(t,m) = \dfrac{1}{2}(Y^0(t,m) - Y^0_*(t,m))$.

Отметим, что текущая и осмотическая скорости не зависят от связности (см. теорему 28.1 ниже), поэтому мы не указываем связность в обозначениях. Если связность H зафиксирована, мы не будем указывать ее также в обозначениях производных в среднем.

Замечание 27.1. Пусть $f : M \to M_1$ — гладкое отображение многообразий. Отметим, что, поскольку значение производной в среднем зависит от σ-алгебры «настоящее», касательное отображение Tf переводит производные в среднем процесса $\eta(t)$ в производные в среднем процесса $\xi(t) = f(\eta(t))$ только в следующем смысле: $Tf(D\eta(t)) = D^\eta(\xi(t))$ или $Tf(D^\xi\eta(t)) = D\xi(t)$, но, вообще говоря, $Tf(D\eta(t)) \neq D\xi(t)$. Аналогичный факт имеет место и для производных в среднем слева: $Tf(D_*\eta(t)) = D^\eta_*(\xi(t))$ или $Tf(D^\xi_*\eta(t)) = D_*\xi(t)$, но, вообще говоря, $Tf(D_*\eta(t)) \neq D_*\xi(t)$.

Лемма 27.1. *Зафиксируем связность* H. *Пусть $\xi(t)$ — решение уравнения* (26.8), *полученного из уравнения Ито* $(\hat{a}, A)$. *Тогда $Y^0(t,m) = a(t,m)$ и поэтому $D^{\mathsf{H}}\xi(t) = a(t,\xi(t))$, где (a,A) — векторное поле Ито, канонически соответствующее уравнению Ито $(\hat{a}, A)$ относительно связности* H.

Доказательство. Выберем $m \in M$ и рассмотрим нормальную карту $\mathcal{U}_n(m)$ связности H в m. В этой карте локальный коннектор H в m равен нулю. Учитывая формулу (26.7) и тот факт, что при равном нулю локальном коннекторе в нормальной карте $\mathbf{\Gamma}_m(X,Y) = -\varphi''_{\alpha n}(X,Y)$ в $\mathcal{U}_\alpha$ (см. [50, формула (2.21)]), а также определение 27.1 и формулу (26.11), мы получаем утверждение леммы. □

Лемма 27.2. *Для решения $\xi(t)$ уравнения Ито $(\hat{a}, A)$ его производная в среднем справа $D^{\mathsf{H}}\xi(t)$ относительно связности H удовлетворяет равенству*

$$D^{\mathsf{H}}\xi(t) = \hat{a}(t,\xi(t)) + \frac{1}{2}\operatorname{tr}\mathbf{\Gamma}_{\xi(t)}(A(t,\xi(t)), A(t,\xi(t)) = \mathcal{H}(\mathcal{A}),$$

где $\mathcal{A}$ — генератор потока, порожденного уравнением $(\hat{a}, A)$, $\mathcal{H} : \tau M \to TM$ — отображение, порожденное связностью H по формуле (45.3), *а $\mathbf{\Gamma}$ — локальный коннектор* H.

Доказательство. По формуле (26.11) $\hat{a}(t,m) = a(t,m) - \dfrac{1}{2}\operatorname{tr}\mathbf{\Gamma}_{\xi(t)}(A(t,\xi(t)), A(t,\xi(t))$. Таким образом, равенство $D^{\mathsf{H}}\xi(t) = \hat{a}(t,\xi(t)) + \dfrac{1}{2}\operatorname{tr}\mathbf{\Gamma}_{\xi(t)}(A(t,\xi(t)), A(t,\xi(t))$ следует из леммы 27.1. Тот факт, что

$$a(t,m) = \hat{a}(t,\xi(t)) + \frac{1}{2}\operatorname{tr}\mathbf{\Gamma}_{\xi(t)}(A(t,\xi(t)), A(t,\xi(t)) = \mathcal{H}\mathcal{A}),$$

следует из леммы 26.2. □

Из лемм 27.1 и 27.2 следует, что если мы применим ту же связность для перехода от $(\hat{a}, A)$ к (a, A) и для определения производной в среднем, то получим для решения $\xi(t)$, что $D^{\mathsf{H}}\xi(t) = a(t, \xi(t))$. Более того, если мы изменим связность, векторное поле Ито (a, A), канонически соответствующее $(\hat{a}, A)$, и производная в среднем справа $D^{\mathsf{H}}\xi(t)$ изменятся, но равенство $D^{\mathsf{H}}\xi(t) = a(t, \xi(t))$ для этих новых значений сохранится.

Обозначим через $\hat{a}_*$ регрессию производной в среднем слева для решения уравнения (26.8), порожденного в некоторой карте уравнением Ито $(\hat{a}, A)$ (т. е. $\hat{a}_*$ не является вектором). Производная слева a_* в смысле определения 27.1 (т. е. вектор) описывается следующим образом.

Лемма 27.3. *Для решения $\xi(t)$ уравнения Ито $(\hat{a}, A)$ его производная в среднем слева $D_*\xi(t)$ относительно связности* H *удовлетворяет равенству*

$$D^{\mathsf{H}}\xi(t) = a_*(t, \xi(t)) = \hat{a}_*(t, \xi(t)) - \frac{1}{2}\operatorname{tr}\mathbf{\Gamma}_{\xi(t)}(A(t, \xi(t)), A(t, \xi(t)),$$

где $\mathbf{\Gamma}$ — локальный коннектор H.

Доказательство леммы 27.3 основано на рассуждениях, аналогичных приведенным выше.

28. Текущая и осмотическая скорости и квадратичная производная

Теперь рассмотрим текущую скорость $D_S\xi(t) = \dfrac{1}{2}(a(t, \xi(t)) + a_*(t, \xi(t)) = v^{\xi}(t, \xi(t))$, где $v^{\xi}(t, m) = \dfrac{1}{2}(a(t, m) + a_*(t, m))$ — регрессия.

Теорема 28.1. *$v^{\xi}(t, m)$ — вектор, касательный к M, не зависит от выбора связности, относительно которой определяются производные в среднем справа и слева.*

Доказательство. Действительно,

$$v^{\xi}(t, m) = \frac{1}{2}(a(t, m) + a_*(t, m)) =$$
$$= \frac{1}{2}(\hat{a}(t, m) - \frac{1}{2}\operatorname{tr}\mathbf{\Gamma}_{\ xi(t)}(A, A) + \frac{1}{2}\operatorname{tr}\mathbf{\Gamma}_{\xi(t)}(A, A) + \hat{a}_*(t, m))\frac{1}{2}(\hat{a}(t, m) + \hat{a}_*(t, m)).$$

При замене координат $\varphi_{\beta\alpha}$ между картами $\mathcal{U}_\alpha$ и $\mathcal{U}_\beta$ правило преобразования для $\hat{a}(t, m)$ описывается формулой (26.7), а $\hat{a}_*(t, m)$ преобразуется по формуле (26.10). Таким образом,

$$v^{\xi}(t, m)^{\beta} = \frac{1}{2}(\hat{a}(t, m)^{\beta} + \hat{a}_*(t, m)^{\beta}) =$$
$$= \frac{1}{2}\varphi'_{\beta\alpha}\hat{a}(t, m)^{\alpha} + \frac{1}{2}\operatorname{tr}\varphi''_{\beta\alpha}(A^{\alpha}, A^{\alpha}) + \varphi'_{\beta\alpha}\hat{a}_*(t, m) - \frac{1}{2}\operatorname{tr}\varphi''_{\beta\alpha}(A^{\alpha}, A^{\alpha})) =$$
$$= \frac{1}{2}\varphi'_{\beta\alpha}(\hat{a}(t, m)^{\alpha} + \hat{a}_*(t, m)^{\alpha}) = \varphi'_{\beta\alpha}v^{\xi}(t, m)^{\alpha}.$$

Следовательно, при замене координат $v^{\xi}(t, m)$ преобразуется как стандартный касательный вектор, не зависящий от выбор связности. $\square$

Отметим, что для текущей и осмотической скоростей на многообразии сохраняются все конструкции и результаты из раздела 2.

Для случайного процесса $\xi(t)$, заданного на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ со значениями в многообразии M, введем его квадратичную производную следующим образом (см. формулу (1.8) для случая линейных пространств). Возьмем любую карту $\mathcal{U}$ и рассмотрим в L^1 случайную величину, определяемую правилом

$$D_2\xi(t) = \lim_{\Delta t \to +0} E^{\xi}_{t}\left(\frac{(\xi(t + \Delta t) - \xi(t)) \cdot (\xi(t + \Delta t) - \xi(t))^*}{\Delta t}\right), \tag{28.1}$$

где $(\xi(t + \Delta t) - \xi(t))$ рассматривается как вектор-столбец в локальных координатах, а $(\xi(t + \Delta t) - \xi(t))^*$ — как строка в локальных координатах, и где предполагается, что предел существует в $L^1(\Omega, \mathcal{F}, P)$.

Определение 28.1. $D_2\xi(t)$ называется *квадратичной производной в среднем* процесса $\xi(t)$ на M в момент времени t.

Отметим, что в любой карте для $D_2\xi(t)$ существует регрессия.

Важной геометрической особенностью квадратичной производной в среднем является то, что (как и текущая скорость) она не зависит от выбора связности, а именно, ее регрессия представляет собой $(2,0)$-тензорное поле.

Пусть $\xi(t)$ задается уравнением Ито $(\hat{a}, A)$. Напомним, что здесь $A(t,m)$ — поле линейных операторов $A(t,m) : \mathbb{R}^k \to T_mM$ с достаточно большим k.

Лемма 28.1. *Предположим, что $\xi(t)$ задано уравнением Ито $(\hat{a}, A)$. Тогда*

$$D_2\xi(t) = A(t,\xi(t))A^*(t,\xi(t)) = 2(\mathcal{Q}\mathcal{A})(t,\xi(t)), \tag{28.2}$$

где A^* — сопряженный оператор, $\mathcal{A}$ — соответствующий генератор и $\mathcal{Q}$ вводится формулой (45.2). *Кроме того, $A(t,m)A^*(t,m)$ является $(2,0)$-тензорным полем на M.*

29. Производные в среднем от векторных полей вдоль случайных процессов на многообразиях

Конструкция производных в среднем от векторных полей вдоль случайного процесса нуждается в модификации, обычной при переходе от векторных пространств к многообразиям.

Пусть $Y(t,m)$ — векторное поле на M. Рассмотрим инвариантные производные в среднем

$$DY(t,\xi(t)) = \lim_{\Delta t\to+0} E_t^\xi\left(\frac{Y(t+\Delta t,\xi(t+\Delta t)) - Y(t,\xi(t))}{\Delta t}\right),$$
$$D_*Y(t,\xi(t)) = \lim_{\Delta t\to+0} E_t^\xi\left(\frac{Y(t,\xi(t)) - Y(t-\Delta t,\xi(t-\Delta t))}{\Delta t}\right), \tag{29.1}$$

принимающие значения в TTM (касательное расслоение к TM). Зафиксируем связность H и обозначим через $K : TTM \to TM$ ее коннектор (см. раздел 44). Введем *ковариантную производную в среднем* от вектора $Y(t,m)$ вдоль $\xi(t)$ по аналогии с обычной ковариантной производной по формуле

$$\mathbf{D}Y(t,\xi(t)) = K\circ \lim_{\Delta t\to+0} E_t^\xi\left(\frac{Y(t+\Delta t,\xi(t+\Delta t)) - Y(t,\xi(t))}{\Delta t}\right) = K\circ DY(t,\xi(t)),$$

$$\mathbf{D}_*Y(t,\xi(t)) = K\circ \lim_{\Delta t\to+0} E_t^\xi\left(\frac{Y(t,\xi(t)) - Y(t-\Delta t,\xi(t-\Delta t))}{\Delta t}\right) = K\circ D_*Y(t,\xi(t)). \tag{29.2}$$

Для процесса Ито $\xi(t)$ на M (см. [50]) обозначим через $\Gamma_{s,t}$ оператор параллельного переноса вдоль $\xi(\cdot)$ из $\xi(t)$ в $\xi(s)$. Пусть $Y(t,m)$ — C^2-гладкое векторное поле на M. Легко видеть, что ковариантные производные в среднем $\mathbf{D}Y(t,\xi(t))$ и $\mathbf{D}_*Y(t,\xi(t))$, определенные формулами (29.2), могут быть эквивалентно описаны формулами

$$\mathbf{D}Y(t,\xi(t)) = \lim_{\Delta t\to+0} E_t^\xi\left(\frac{\Gamma_{t,t+\Delta t}Y(t+\Delta t,\xi(t+\Delta t)) - Y(t,\xi(t))}{\Delta t}\right),$$
$$\mathbf{D}_*Y(t,\xi(t)) = \lim_{\Delta t\to+0} E_t^\xi\left(\frac{Y(t,\xi(t)) - \Gamma_{t,t-\Delta t}Y(t-\Delta t,\xi(t-\Delta t))}{\Delta t}\right). \tag{29.3}$$

Напомним, что векторное поле Y можно рассматривать как отображение $Y : M \to TM$ с дополнительным условием $\pi Y = id$, где $\pi : TM \to M$ — естественная проекция, а id — тождественное отображение. В частности, касательное отображение $TY = (Y, dY)$ переводит TM в TTM. Зафиксируем точку $m \in M$. Сужение дифференциала dY на T_mM является линейным оператором производной $Y' : T_mM \to T_{(m,Y(m))}TM$. Обозначим через Y'' билинейное отображение второй производной, которое переводит $T_mM \times T_mM$ в $T_{(m,Y(m))}TM$.

Пусть $\xi(t)$ — процесс на M, заданный уравнением Ито $(\hat{a}, A)$ с автономным и гладким оператором $A(m)$, имеющим максимальный ранг в каждой точке m как отображение $A(m) : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^n$ для некоторого $k \geqslant n$. Тогда, как и выше, $\alpha(m) = A(m)A^*(m)$ в локальных координатах имеет симметрическую, гладкую и невырожденную матрицу (α^{ij}), а ее обратная (α_{ij}) определяет на M риманову метрику $\alpha(\cdot,\cdot)$. Ниже мы имеем дело со связностью Леви-Чивита H этой римановой метрики. В частности, в формулах (29.2) K — коннектор этой связности, все ковариантные производные, оператор Лапласа—Бельтрами и все производные в среднем справа и слева процесса $\xi(t)$ вычисляются относительно этой связности.

Пусть $\xi(t)$ имеет производные в среднем $D\xi(t) = a(t, \xi(t))$ и $D_*\xi(t) = a_*(t, \xi(t))$. Рассмотрим векторные поля $a(t, m)$ и $a_*(t, m)$ — регрессии производных $D\xi(t)$ и $D_*\xi(t)$, соответственно. Тогда, принимая во внимание прямую и обратную формулы Ито и [50, формула (6.13)], а также конструкцию производных в среднем, легко можно увидеть, что $DY(t, \xi(t))$ является вектором в $T_{(\xi(t), Y(t,\xi(t))} TM$ вида

$$\frac{\partial Y}{\partial t} + Y'(a(t, \xi(t)) + \frac{1}{2} \operatorname{tr} Y''(I, I),$$

а $D_*Y(t, \xi(t))$ — вектор в том же пространстве вида

$$\frac{\partial Y}{\partial t} + Y'(a_*(t, \xi(t)) - \frac{1}{2} \operatorname{tr} Y''(I, I).$$

По определению ковариантной производной (см. раздел 44)

$$K(TY(a(t, m)) = \nabla_{a(t,m)} Y, \qquad K(TY(a_*(t, m))) = \nabla_{a_*(t,m)} Y.$$

Легко видеть, что $K\Big(\frac{1}{2} \operatorname{tr} Y''(I, I)\Big) = \frac{1}{2}\Delta Y$, где Δ — оператор Лапласа—Бельтрами, так что из формул выше мы получаем следующее описание регрессий $\mathbf{D}Y$ и $\mathbf{D}_*Y$ ковариантных производных (29.2):

$$\mathbf{D}Y = \frac{\partial Y}{\partial t} + \nabla_a Y + \frac{1}{2}\Delta Y, \tag{29.4}$$

$$\mathbf{D}_*Y = \frac{\partial Y}{\partial t} + \nabla_{a_*} Y - \frac{1}{2}\Delta Y. \tag{29.5}$$

Формулы (29.4) и (29.5) являются естественными аналогами (1.12) и (1.13), соответственно.

В случае, когда a priori на M задана риманова метрика (т. е. не метрика, порожденная коэффициентом диффузии уравнения), понятие ковариантных производных вводятся с использованием модификации конструкции ковариантных производных, основанной на применении параллельного переноса. При этом получаются аналоги формул (29.4) и (29.5).

Глава 6

УРАВНЕНИЯ И ВКЛЮЧЕНИЯ С ПРОИЗВОДНЫМИ В СРЕДНЕМ НА МНОГООБРАЗИЯХ

30. Два технических утверждения

Мы начинаем этот раздел с двух лемм, используемых в дальнейшем. Первая из них является аналогом леммы 5.1 для случая многообразий. Мы приводим это утверждение, поскольку оно требует модификации доказательства.

Лемма 30.1. *Рассмотрим симметрическое* $(2, 0)$*-тензорное поле* $\alpha(t, m)$ *на* n*-мерном многообразии* M*. Существует* $k > n$ *такое, что если* $\alpha(t, m)$ *положительно определено во всех точках и непрерывно (гладко), то существует непрерывное (гладкое, соответственно) поле линейных операторов* $A(t, m) : \mathbb{R}^k \to T_m M$ *такое, что выполняется соотношение* $\alpha(t, m) = A(t, m)A^*(t, m)$.

Доказательство. Обозначим через (α^{ij}) матрицу $\alpha(t, m)$ в локальных координатах некоторой карты $\mathcal{U}_\alpha$. Введем произвольную риманову метрику $g(\cdot, \cdot)$ на M с матрицей (g_{ij}) и обозначим символом $\bar{g}$ соответствующий метрический $(2, 0)$-тензор с матрицей (g^{ij}). Тогда $(2, 0)$-тензорное поле α представимо в виде $\alpha(\cdot, \cdot) = \bar{g}(b(\cdot), \cdot)$, где $b(t, m)(\cdot)$ — $(1, 1)$-тензорное поле самосопряженных линейных операторов, действующих в кокасательных пространствах к M. Существование и единственность b выводится следующим образом. В локальных координатах $\mathcal{U}_\alpha$ выражение

$\alpha(\cdot,\cdot) = \bar{g}(b(\cdot),\cdot)$ принимает вид $\alpha^{ij} = g^{ik}b^j_k$, где b^i_j — коэффициенты матрицы $(b)^\alpha$. Поскольку (g_{ij}) не вырождено, b^i_j представимы в виде $b^i_j = g_{jk}\alpha^{ik}$. Так как метрический тензор является C^∞-гладким, поле b непрерывно (гладко, соответственно), если таково α.

Пусть $a^1,\dots,a^n$ — поле ортонормальных базисов относительно метрики $\bar{g}(\cdot,\cdot)$ в касательных пространствах в точках карты $\mathcal{U}_\alpha$. Относительно этих базисов b описывается матрицей $(\bar{b})$, которая симметрична, положительно определена и удовлетворяет условию для применения гауссовского разложения, как в доказательстве леммы 5.1. Следовательно, $b(t,m)$ представимо в виде $b(t,m) = f(t,m)f^*(t,m)$.

Вложим по теореме Нэша (см. [79]) многообразие M с метрикой $g(\cdot,\cdot)$ изометрично в некоторое евклидово пространство $\mathbb{R}^k$. Отметим, что k зависит только от M (по теореме Нэша k определяется размерностью M), т. е. k одно и то же для любой римановой метрики на M.

Обозначим через P_m ортогональный проектор из $\mathbb{R}^k$ на его подпространство T_mM (касательное пространство к M в точке $m \in M$). Введем $A(t,m) = f(t,m)\circ P_m : \mathbb{R}^k \to T_mM$. Тогда легко видеть, что $\alpha(t,m) = A(t,m)A^*(t,m)$ и по построению $A(t,m)$ непрерывно (гладко, соответственно). □

Следующее утверждение дает достаточное условие для того, чтобы меры, соответствующие решениям последовательности уравнений Ито на многообразии, были слабо компактны.

Лемма 30.2. *Рассмотрим на многообразии M последовательность гладких уравнений Ито $(\hat{a}_q(t,m),\ A_q(t,m))$, $t \in [0,T] \subset \mathbb{R}$, с генераторами $\mathcal{A}_q(t,m)$, соответственно, такие, что:*

(a) *над каждым компактным множеством $\mathbf{K} \subset M$ значения $(\hat{a}_q([0,T],\mathbf{K}), A_q([0,T],\mathbf{K}))$ при всех q принадлежат некоторому компактному множеству в $I(M)$;*

(b) *существует C^2-гладкая собственная функция $\psi : M \to \mathbb{R}$ такая, что для всех q выполняется неравенство*
$$|\mathcal{A}_q\psi| < C \tag{30.1}$$
для некоторой константы $C > 0$, которая не зависит от q, t, m.

Тогда:

(i) *для каждого $m_0 \in M$ существует единственное решение $\xi_q(t)$ с начальным условием $\xi_q(0) = m_0$ всех уравнений Ито $(\hat{a}_q(t,m), A_q(t,m))$, и все они существуют на всем $[0.T]$;*

(ii) *множество мер $\{\mu_q\}$, соответствующих $\xi_q(\cdot)$ на банаховом многообразии $\tilde{\Omega} = C^0([0,T],M)$ непрерывных кривых в M, снабженном σ-алгеброй $\tilde{\mathcal{F}}$, порожденной цилиндрическими множествами, слабо компактно.*

Доказательство. Напомним, что решение, которое существует до первого выхода на границу некоторой карты, включающей m_0, называется *локальным.* Существование и строгая единственность локального решения $\xi_q(\cdot)$ для всех q вытекает из того, что все $(\hat{a}_q(t,m), A_q(t,m))$ гладкие и, следовательно, ограниченные на любой относительно компактной карте. Глобальное существование вытекает из условия (b) по теореме 9.1.

Для любого целого числа $p > 0$ рассмотрим множество $W_p = \psi^{-1}([0,p])$. Так как ψ собственная, эти множества компактны и $\bigcup\limits_p W_p = M$. Кроме того, по построению $W_p \subset W_{p+1}$ при всех $p = 1,2,\dots$ Так что m_0 принадлежит W_p для достаточно большого p.

Для кривой $x(\cdot) \in C^0([0,T],M)$ обозначим через $\theta_p^{x(\cdot)}$ момент времени первого выхода на границу W_p. Введем подмножество в $\tilde{\Omega}$ вида $\Omega_p = \{x(\cdot) \mid T < \theta_p^{x(\cdot)}\}$ (т. е. каждое $x(t)$ из Ω_p лежит в W_p при всех t от $t = 0$ до $t = T$). Принимая во внимание условие (b), мы получаем, что из доказательства теоремы 9.1 (см. (9.6)) следует, что $\mu_q(\Omega_p) > 1 - \dfrac{\psi(m_0) + CT}{p}$ для всех q. Так что для каждого $\varepsilon > 0$ существует достаточно большое p такое, что
$$\mu_q(\Omega_p) > 1 - \frac{\varepsilon}{2} \tag{30.2}$$
для всех q.

Применяя стандартный аппарат разложения единицы, нетрудно построить последовательность гладких уравнений Ито $(\tilde{a}_q(t,m), \tilde{A}_q(t,m))$ такую, что: $(\tilde{a}_q(t,m), \tilde{A}_q(t,m))$ совпадает с $(\hat{a}_q(t,m), A_q(t,m))$ при $m \in W_p$ для всех q и $(\tilde{a}_q(t,m), \tilde{A}_q(t,m))$ равно нулю вне некоторой относительно компактной окрестности V_p множества W_p при всех q.

Теперь зафиксируем произвольную полную риманову метрику $g(\cdot,\cdot)$ на M и по теореме Нэша (см. [79]) вложим M изометрично в некоторое евклидово пространство $\mathbb{R}^K$ с достаточно большим K. Введем векторное поле Ито $(\breve{a}_q(t,m), \breve{A}_q(t,m))$ на V_p, полагая $\breve{A}_q(t,m) = \tilde{A}_q(t,m)$ и в каждой карте $\mathcal{U}$ в V_p полагая $\breve{a}^k(t,m) = \tilde{a}^k(t,m) + \Gamma^k_{ij}\tilde{\alpha}^{ij}$, где Γ^k_{ij} — символы Кристоффеля второго рода связности Леви-Чивита метрики $g(\cdot,\cdot)$ в $\mathcal{U}$, $(\tilde{\alpha}^{ij}) = (\tilde{A}^i_l)(\tilde{A}^j_l)^*$.

Пусть $\mathsf{N}(M)$ — нормальное расслоение M в $\mathbb{R}^K$ со слоями N_m, $m \in M$. Обозначим символом Θ относительно компактную трубчатую окрестность M над V_p в $\mathbb{R}^K$ (она существует, так как V_p относительно компактно), а символом $r : \Theta \to V_p$ — гладкую ретракцию Θ на V_p вдоль слоев $\mathsf{N}(M)$.

Напомним, что Θ имеет структуру прямого произведения

$$\Theta = V_p \times \mathcal{O}, \tag{30.3}$$

где $\mathcal{O}$ — открытый шар в $\mathbb{R}^{K-n}$ такой, что любая точка $m \in V_p$ может быть отождествлена с нормальным пространством N_m.

В каждой точке $(m,x) \in \Theta$ представление (30.3) порождает представление касательного пространства к $\mathbb{R}^K$ вида $T_{(m,x)}\mathbb{R}^K = T_mM \times T_x\mathcal{O}$. Введем новую риманову метрику $g_1(\cdot,\cdot)$ на Θ путем переноса риманова скалярного произведения из T_mM в сомножитель T_mM в прямом произведении (см. выше) и путем задания скалярного произведения в сомножителе $T_x\mathcal{O}$ как сужения евклидова скалярного произведения в $\mathbb{R}^K$ и полагая сомножители в $T_mM \times T_x\mathcal{O}$ ортогональными друг другу. Пусть $\mathcal{U}$ — карта на V_p. Рассмотрим карту $\mathscr{U} = \mathcal{U} \times \mathcal{O}$ в Θ. В этой карте матрица $(0,2)$-метрического тензора $g_1(\cdot,\cdot)$ обозначается (g^1_{ij}), а матрица соответствующего $(2,0)$-метрического тензора — (g^{ij}_1).

Вычислим символы Кристоффеля $\bar{\Gamma}^l_{ij}$ связности Леви-Чивита метрики $g_1(\cdot,\cdot)$ в $\mathscr{U}$ по обычной формуле $\bar{\Gamma}^l_{ij} = \dfrac{1}{2}g^{lk}_1\Big(\dfrac{\partial}{\partial q^i}g^1_{jk} + \dfrac{\partial}{\partial q^j}g^1_{ik} - \dfrac{\partial}{\partial q^k}g^1_{ij}\Big)$. Получим:

(a) Если $\dfrac{\partial}{\partial q^i}, \dfrac{\partial}{\partial q^j}, \dfrac{\partial}{\partial q^k}, \dfrac{\partial}{\partial q^l} \in T_mM$, то $\bar{\Gamma}^l_{ij} = \Gamma^l_{ij}$, где Γ^l_{ij} — символы Кристоффеля связности Леви-Чивита метрики $g(\cdot,\cdot)$ на M в карте $\mathcal{U}$.

(b) Если $\dfrac{\partial}{\partial q^k} \in T_mM$ и $\dfrac{\partial}{\partial q^l} \in T_x\mathcal{O}$ или наоборот, то $\bar{\Gamma}^l_{ij} = 0$ для всех $\dfrac{\partial}{\partial q^i}$ и $\dfrac{\partial}{\partial q^j}$, так как $g^{kl}_1 = 0$.

(c) Если $\dfrac{\partial}{\partial q^k}, \dfrac{\partial}{\partial q^l} \in T_mM$ и $\dfrac{\partial}{\partial q^i} \in T_x\mathcal{O}, \dfrac{\partial}{\partial q^j} \in T_mM$, то $g^1_{jk} = g_{jk}$ не зависит от $\dfrac{\partial}{\partial q^i}$, и таким образом $\dfrac{\partial}{\partial q^i}g^1_{jk} = 0$. Также очевидно, что $g^1_{ik} = 0$ и $g^1_{ij} = 0$. Следовательно, $\bar{\Gamma}^l_{ij} = 0$. Применяя аналогичные рассуждения, мы получаем, что $\bar{\Gamma}^l_{ij} = 0$ для $\dfrac{\partial}{\partial q^i} \in T_mM$, $\dfrac{\partial}{\partial q^j} \in T_x\mathcal{O}$ и $\bar{\Gamma}^l_{ij} = 0$ для $\dfrac{\partial}{\partial q^i}, \dfrac{\partial}{\partial q^j} \in T_x\mathcal{O}$.

(d) Если $\dfrac{\partial}{\partial q^k}, \dfrac{\partial}{\partial q^l} \in T_x\mathcal{O}$, то для всех $\dfrac{\partial}{\partial q^i}$ и $\dfrac{\partial}{\partial q^j}$ мы получаем $\bar{\Gamma}^l_{ij} = 0$.

Выберем некоторую окрестность O множества V_p в Θ такую, что $\overline{O} \subset \Theta$, где $\overline{O}$ — замыкание O. Пусть $\phi(y) : \mathbb{R}^K \to \mathbb{R}$ — гладкая функция, удовлетворяющая соотношениям $0 \leqslant \phi \leqslant 1$, $\phi(y) = 1$ для $y \in \overline{O}$, и $\phi(y) = 0$ для $y \notin \Theta$. Используя представление карты $\mathscr{U}$ на Θ как указанное выше прямое произведение, введем новый объект на $\mathscr{U}$ формулой

$$\widehat{\Gamma}^k_{i,j}(m,x) = (\phi(m,x)\bar{\Gamma}^k_{ij}(m), 0), \quad (m,x) \in \Theta. \tag{30.4}$$

Рассмотрим Θ как карту с локальными координатами, унаследованными из глобальных координатной системы в $\mathbb{R}^K$. Эту карту назовем *глобальной*. Найдем символы Кристоффеля $\bar{\Gamma}^k_{ij}$ в глобальной карте и определим значения $\widehat{\Gamma}^k_{ij}$ на дополнении $\mathbb{R}^k \backslash \Theta$ как $\widehat{\Gamma}^k_{ij}(m,x) = 0$, $(m,x) \notin \Theta$. Таким образом, значения $\widehat{\Gamma}^k_{ij}$ заданы на всем $\mathbb{R}^K$ и, поскольку функции $\widehat{\Gamma}^k_{ij}$ гладкие и имеют ненулевые значения только на компакте, их значения равномерно ограничены. По построению и в карте $\mathscr{U}$, и в глобальной карте символы $\widehat{\Gamma}^k_{ij}$ на O совпадают с соответствующими $\bar{\Gamma}^k_{ij}$.

Определим векторные поля $\widehat{a}_q$, поля линейных операторов $\widehat{A}_q : \mathbb{R}\times\mathbb{R}^N \to T\mathbb{R}^K$ и $(2,0)$-тензорные поля $\mathfrak{a}_q$ на $\mathbb{R}^K$, полагая их значения в карте $\mathcal{U}$ формулами

$$\widehat{a}_q(t,m,x) = (\phi(m,x)\breve{a}_q(t,m),0),$$
$$\widehat{A}_q(t,m,x) = \begin{pmatrix} \phi(m,x)\breve{A}_q(t,m) \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathfrak{a}_q(t,m,x) = \begin{pmatrix} \phi(m,x)(\tilde{\alpha}^{ij}) & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{30.5}$$

и продолжая их на все $\mathbb{R}^K$ нулевыми значениями.

Отметим, что из условия (a) и из построения следует, что все поля $\widehat{a}_q(t,m,x)$, $\widehat{A}_q(t,m,x)$ и $\mathfrak{a}_q(t,m,x)$ равномерно ограничены на $[0,T]\times\mathbb{R}^K$.

Обозначим матрицу $\mathfrak{a}_q(t,m,x)$ в карте $\mathcal{U}$ символом $(\mathfrak{a}^{ij})$, а для объекта, который в $\mathcal{U}$ задается как $\widehat{\Gamma}^k_{ij}\mathfrak{a}^{ij}$, введем инвариантное обозначение $\mathrm{tr}(\widehat{\mathbf{\Gamma}}(\widehat{A},\widehat{A}))$.

Рассмотрим следующую задачу в $\mathbb{R}^K$:

$$d\widehat{\xi}_q(t) = \widehat{a}_q(t,\widehat{\xi}_q(t))dt - \frac{1}{2}\,\mathrm{tr}(\widehat{\mathbf{\Gamma}}_{\widehat{\xi}_q(t)}(\widehat{A}_q(t,\widehat{\xi}_q(t)),\widehat{A}_q(t,\widehat{\xi}_q(t))))dt + \widehat{A}_q(t,\widehat{\xi}_q(t))dw(t),$$
$$\widehat{\xi}_q(0) = m_0 \in M. \tag{30.6}$$

Поскольку коэффициенты всех уравнений (30.6) гладкие и ограниченные, все эти уравнения имеют единственные решения $\widehat{\xi}_q(t)$, существующие на всем интервале $[0,T]$.

После перехода к карте $\mathcal{U}$, принимая во внимание вид символов Кристоффеля (см. выше), легко видеть, что в окрестности $O\cap\mathcal{U}$ уравнения (30.6) превращаются в системы

$$\begin{cases} d\breve{\xi}_q(t) = \breve{a}_q(t,\breve{\xi}_q(t))dt - \dfrac{1}{2}\,\mathrm{tr}(\bar{\mathbf{\Gamma}}_{\breve{\xi}_q}(\breve{A}_q,\breve{A}_q))dt + \breve{A}_q(t,\breve{\xi}_q(t))dw(t), \\ d\bar{\xi}_q(t) = 0 \end{cases} \tag{30.7}$$

с начальными условиями $\breve{\xi}_q(0) = m_0$ и $\bar{\xi}_q(0) = 0$. Следовательно решения (30.7) (и таким образом решения (30.6)) п.н. принадлежат M при всех $t\in[0,T]$ и совпадают с решениями первых частей (30.7). В частности, соответствующие меры $\widehat{\mu}_q$ на пространстве путей принимают значения 1 на кривых, лежащих в M. Но поскольку коэффициенты (30.6) равномерно ограничены в $\mathbb{R}^K$, из следствия к [10, Lemma III.2.2] вытекает, что множество соответствующих мер $\{\widehat{\mu}_q\}$ на $\tilde{\Omega}$ слабо компактно. Тогда по теореме Прохорова (см., например, [9]) для каждого $\varepsilon > 0$ существует компакт $\Xi\subset C^0([0,T],M)$ такой, что для всех q выполняется неравенство $\widehat{\mu}_q(\Xi) > 1-\dfrac{\varepsilon}{2}$.

Отметим, что по построению правые части первых уравнений в (30.7) совпадают на W_p с $(\hat{a}_q, A_q)$. Тогда (см., например, [18, Theorem III.3.3]) процессы $\xi_q(t)$ и $\widehat{\xi}_q(t)$ п.н. совпадают до выхода из W_p для всех q. Из этого и из (30.2) вытекает, что для компакта $\Omega_p\cap\Xi$ выполняется неравенство $\mu_q(\Omega_p\cap\Xi) > 1-\varepsilon$ для всех q.

Таким образом, для каждого $\varepsilon > 0$ существует компакт в $\tilde{\Omega}$, у которого мера μ_q при всех q больше $1-\varepsilon$. По теореме Прохорова это означает, что множество $\{\mu_q\}$ слабо компактно. □

31. Уравнения и включения

В этом разделе мы описываем дифференциальные уравнения и включения с производными в среднем на многообразиях и доказываем некоторые достаточно простые теоремы существования решения. Напомним, что производные в среднем на многообразиях введены в главе 5.

Пусть M — риманово многообразие. В этом разделе мы используем связность Леви-Чивита H этой римановой метрики, т. е. везде ниже мы используем производные в среднем относительно H. Так как связность фиксирована, мы не обозначаем ее в производных в среднем (см. раздел 27).

Выберем $t\in[0,T]$. Рассмотрим векторное поле $a(t,m)$ и симметрическое положительно определенное $(2,0)$-тензорное поле $\alpha(t,m)$ на M.

Дифференциальным уравнением первого порядка с производными в среднем справа на M, аналогично разделу 5 мы называем систему вида

$$\begin{cases} D\xi(t) = a(t,\xi(t)), \\ D_2\xi(t) = \alpha(t,\xi(t)). \end{cases} \tag{31.1}$$

Определение 31.1. Будем говорить, что (31.1) *имеет решение на* $[0,T]$ с начальным условием $\xi(0)=m_0$, если существует вероятностное пространство $(\Omega,\mathcal{F},\mathsf{P})$ и процесс $\xi(t)$, заданный на $(\Omega,\mathcal{F},\mathsf{P})$ и принимающий значения в M, такие, что P-п.н. и при почти всех t в $[0,T]$ система (31.1) выполняется (см. замечание 5.1).

Так же как и в случае линейных пространств, понятно, что первое уравнение системы (31.1) определяет снос решения, тогда как второе определяет коэффициент диффузии.

В некоторой точке (t,m) построим генератор, обозначаемый $\mathcal{A}_{a,\alpha}(t,m)$, который определен формулами $\mathcal{H}\mathcal{A}_{a,\alpha}(t,m)=a(t,m)$ и $\mathcal{Q}\mathcal{A}_{a,\alpha}(t,m)=\alpha(t,m)$ (см. формулы (45.3) и (45.2)).

Теорема 31.1. *Предположим, что в* (31.1) $a(t,m)$ *и* $\alpha(t,m)$ *являются* C^1*-гладкими,* $\alpha(t,m)$ *положительно определено и* $\mathcal{A}_{a,\alpha}(t,m)$ *удовлетворяет условиям теоремы* 9.1. *Тогда при любом начальном условии* $\xi(0)=m_0\in M$ *уравнение* (31.1) *имеет решение, которое существует при всех* $t\in[0,T]$.

Доказательство. По лемме 30.1 мы можем построить поле линейных операторов $A(t,m)$, которое C^1-гладко и такое, что $\alpha(t,m)=A(t,m)A^*(t,m)$. Рассмотрим уравнение Ито $(\hat{a}(t,m),A(t,m))$, которое канонически соответствует векторному полю Ито $(a(t,m),A(t,m))$ относительно связности H (см. определение 26.1). В картах оно записывается в виде

$$d\xi(t)=\hat{a}(t,\xi(t))dt+A(t,\xi(t))dw(t). \tag{31.2}$$

Поскольку $a(t,m)$ является C^1-гладким, то и $\hat{a}(t,m)$ является C^1-гладким, т. е. коэффициенты (31.2) локально липшицевы. Значит, при любом начальном условии $\xi(0)=m_0\in M$ оно имеет строго единственное локальное решение, которое существует на всем интервале $t\in[0,T]$ по теореме 9.1. Нетрудно видеть, что это решение удовлетворяет (31.1). □

Теперь рассмотрим включения с производными в среднем на M. Пусть на M заданы многозначное векторное поле $\mathbf{a}(t,m)$ и многозначное поле симметрических неотрицательно определенных матриц $\boldsymbol{\alpha}(t,m)$ ($(2,0)$-тензорное поле). Рассмотрим задачу

$$\begin{cases} D\xi(t)\in\mathbf{a}(t,\xi(t)),\\ D_2\xi(t)\in\boldsymbol{\alpha}(t,\xi(t)). \end{cases} \tag{31.3}$$

Определение 31.2. Будем говорить, что (31.3) *имеет решение на* $[0,T]$ с начальным условием $\xi(0)=m_0$, если существует вероятностное пространство $(\Omega,\mathcal{F},\mathsf{P})$ и процесс $\xi(t)$, заданный на $(\Omega,\mathcal{F},\mathsf{P})$ и принимающий значения в M, такие, что P-п.н. и при почти всех t в $[0,T]$ включение (31.3) выполняется (см. замечание 5.1).

Обозначим через $\boldsymbol{\mathcal{A}}_{\mathbf{a},\boldsymbol{\alpha}}(t,m)$ многозначное поле векторов второго порядка со значениями $\boldsymbol{\mathcal{A}}_{\mathbf{a},\boldsymbol{\alpha}}(t,m)=\{\mathcal{A}_{a,\alpha}(t,m)\mid a\in\mathbf{a}(t,m),\ \alpha\in\boldsymbol{\alpha}(t,m)\}$, определяемых формулами $\mathcal{H}\mathcal{A}_{a,\alpha}(t,m)=a(t,m)$ и $\mathcal{Q}\mathcal{A}_{a,\alpha}(t,m)=\alpha(t,m)$ (см. формулы (45.3) и (45.2)).

Теорема 31.2. *Пусть* $\boldsymbol{\alpha}(t,m)$ *и* $\mathbf{a}(t,m)$ *— полунепрерывное сверху многозначное поле симметрических неотрицательно определенных матриц* (*многозначное* $(2,0)$*-векторное поле*) *и многозначное векторное поле на* M*, соответственно, с замкнутыми выпуклыми значениями. Пусть дополнительно для любого компакта* $\mathbf{K}\subset M$ *множества* $\mathbf{a}([0,T],\mathbf{K})$ *и* $\boldsymbol{\alpha}([0,T],\mathbf{K})$ *компактны, а также в каждой точке* (t,m) *генератор* $\mathcal{A}_{a,\alpha}$ *из некоторой окрестности* $\mathcal{V}$ *графика* $\boldsymbol{\mathcal{A}}_{\mathbf{a},\boldsymbol{\alpha}}(t,m)$ *удовлетворяет условию теоремы* 9.1 *с одной и той же собственной функцией* φ*. Тогда при любом начальном условии* $\xi(0)=m_0$ *на всем интервале* $[0,T]$ *существует решение включения* (31.3).

Доказательство. Зададим последовательность положительных чисел $\varepsilon_q\to0$. По теореме 43.7 для любого ε_q существует однозначная непрерывная ε_q-аппроксимация $a_q(t,m)$ отображения $\mathbf{a}(t,m)$ и однозначная непрерывная ε_q-аппроксимация $\tilde{\alpha}_q(t,m)(\cdot,\cdot)$ отображения $\boldsymbol{\alpha}(t,m)$ такие, что последовательности этих аппроксимаций поточечно сходятся к измеримым по Борелю селектору $a(t,m)$ отображения $\mathbf{a}(t,m)$ и селектору $\alpha(t,m)$ отображения $\boldsymbol{\alpha}(t,m)$, соответственно, при $q\to\infty$.

Напомним, что тензорные поля $\tilde{\alpha}_q(t,m)(\cdot,\cdot)$ симметричны и неотрицательно определены. Введем другое поле

$$\alpha_q(t,m)(\cdot,\cdot)=\tilde{\alpha}_q(t,m)(\cdot,\cdot)+\varepsilon_q g(m)(\cdot,\cdot),$$

где $g(m)(\cdot,\cdot)$ — $(2,0)$-метрический тензор (риманова метрика). Очевидно, что тензорные поля $\alpha_q(t,m)(\cdot,\cdot)$ непрерывны, положительно определены и симметричны, и что построенная последовательность $\alpha_q(t,m)(\cdot,\cdot)$ поточечно сходится к $\alpha(t,m)(\cdot,\cdot)$ при $q\to\infty$. Так как непрерывные поля могут быть аппроксимированы гладкими, без ограничения общности мы можем положить, что все поля $a_q(t,m)$ и $\alpha_q(t,m)(\cdot,\cdot)$ гладкие. Для простоты обозначим через $\mathcal{A}_q(t,m)$ генератор $\mathcal{A}_{a_q,\alpha_q}(t,m)$.

Из леммы 30.1 следует, что существует достаточно большое целое число K и последовательность гладких полей линейных операторов $A_q(t,m):\mathbb{R}^K\to T_mM$ такие, что $\alpha_q(t,m)=A_q(t,m)A_q^*(t,m)$ для всех q, t и m. Отметим, что K зависит только от размерности M, так как $\mathbb{R}^K$ является пространством, куда M с произвольной римановой метрикой по теореме Нэша может быть изометрично вложена (см. [79].)

Теперь введем $\hat a_q(t,m)$, которое в карте на M имеет координаты $\hat a^k_q=a^k-\dfrac12\Gamma^k_{ij}\alpha^{ij}_q$, где Γ^k_{ij} — символы Кристоффеля связности H и (α^{ij}_q) — матрица α_q. Отметим, что $\mathcal{A}_q(t,m)$ является полем генераторов для уравнения Ито $(\hat a_q,A_q)$. По построению $(m,\mathcal{A}_q(t,m))$ принадлежит $\mathcal{V}$ для достаточно большого q. Тогда из условия теоремы легко вывести, что уравнения Ито $(\hat a_q,A_q)$ удовлетворяют условиям леммы 30.2, и, таким образом, уравнения $(\hat a_q,A_q)$ имеют сильные и сильно единственные решения ξ_q, существующие на всем промежутке $[0,T]$, и множество соответствующих мер $\{\mu_q\}$ на $(\tilde\Omega,\tilde{\mathcal{F}})$ слабо компактно. Следовательно, мы можем выбрать подпоследовательность, которая слабо сходится к некоторой мере μ. Для удобства изложения мы полагаем, что сама последовательность μ_q слабо сходится к μ. Обозначим символом $\xi(t)$ координатный процесс на вероятностном пространстве $(\tilde\Omega,\tilde{\mathcal{F}},\mu)$. Напомним, что для каждого $x(\cdot)\in C^0([0,T],M)$ координатный процесс описывается формулой $\xi(t,x(\cdot))=x(t)$.

Покажем, что $\xi(t)$ является искомым решением.

Напомним, что σ-алгебра «настоящее» $\mathcal{N}^\xi_t$ для $\xi(t)$ — это σ-подалгебра $\mathcal{P}^\xi_t$, и поэтому для условных математических ожиданий выполняется равенство

$$E(E(\cdot\mid\mathcal{P}_t)\mid\mathcal{N}_t)=E(\cdot\mid\mathcal{N}_t).\tag{31.4}$$

Рассмотрим символы $\widehat\Gamma^k_{ij}$, введенные в доказательстве леммы 30.2. Введем $\bar a_q(t,m,x)$, $\bar A_q(t,m,x)$ и $\bar\alpha_q(t,m,x)(\cdot,\cdot)$ формулой (30.5), где $\breve a$, $\breve A$ и $(\tilde\alpha^{ij})$ заменяются на $a(t,m)$, $A(t,m)$ и (α^{ij}), соответственно. Введем также $\bar a(t,m)$ и $\bar\alpha(t,m)(\cdot,\cdot)$ теми же формулами с $a(t,m)$ и $\alpha(t,m)$, соответственно.

Так же, как в доказательстве леммы 30.2, нетрудно показать, что уравнение

$$d\bar\xi_q(t)=\bar a_q(t,\bar\xi_q(t))dt-\frac12\operatorname{tr}(\widehat{\mathbf{\Gamma}}_{\bar\xi_q(t)}(\bar A_q(t,\bar\xi_q(t)),\bar A_q(t,\bar\xi_q(t))))dt+\bar A_q(t,\bar\xi_q(t))dw(t)\tag{31.5}$$

(аналог уравнения (30.6)) корректно определено на всем $\mathbb{R}^K$ и что $\mathcal{U}$ преобразует его в систему

$$\begin{cases} d\xi_q(t)=a_q(t,\xi_q(t))dt-\dfrac12\operatorname{tr}(\mathbf{\Gamma}_{\xi_q}(A_q,A_q))dt+A_q(t,\xi_q(t))dw(t),\\ d\bar\xi_q(t)=0,\end{cases}\tag{31.6}$$

где $\operatorname{tr}\mathbf{\Gamma}(A_q,A_q)=\Gamma^k_{ij}\alpha^{ij}_q$, и, таким образом, с вероятностью 1 решение (31.5) с начальным условием $\bar\xi_q(0)=m_0\in M$ лежит в M и совпадает с соответствующим решением для $(\hat a_q,A_a)$ при всех q. Так что меры на пространстве путей в $\mathbb{R}^K$ соответствуют решениям, лежащим в $C^0([0,T],M)$, и совпадают там μ_q при всех q.

По построению последовательность $\bar a_q(t,x(\cdot))=\bar a_q(t,x(t))$ поточечно сходится к $\bar a(t,x(\cdot))=\bar a(t,x(t))$. Следовательно, она сходится почти наверное относительно всех мер $\lambda\times\mu_q$, где λ — нормализованная мера Лебега на $[0,T]$.

Тот факт, что

$$E(\bar\xi((t+\Delta t)\wedge\theta^{x(\cdot)}_p)-x(t\wedge\theta^{\xi(\cdot)}_p)-\int\limits_{t\wedge\theta^{x(\cdot)}_p}^{(t+\Delta t)\wedge\theta^{x(\cdot)}_p}[\bar a(s,\xi(\cdot))-\frac12\operatorname{tr}(\widehat\Gamma(\bar\alpha))]ds\mid\mathcal{P}_t)=0,$$

доказывается с помощью небольшой модификации доказательства [50, лемма 8.47]. Введем компакт W_p, как в лемме 30.2. Принимая во внимание (31.4) и то, что $a(t,m)$ и $\alpha(t,m)$ измеримы по Борелю, получаем, что приведенные выше рассуждения действуют при любом достаточно большом p и соответствующем $\bigcup\limits_p W_p = M$, и, таким образом, каждое m принадлежит W_p с достаточно большим p. Переходом к (31.6) легко вывести из последнего выражения, что регрессия имеет вид $Y^o(t,m) = a(t,m) - \dfrac{1}{2}\operatorname{tr}(\mathbf{\Gamma}_m(\alpha(t,m))$. Так как в нормальной карте каждого $m \in M$ относительно H все символы Кристоффеля $\Gamma^k_{ij}(m) = 0$, мы получаем, что $D^{\mathsf{H}}\xi(t) = a(t,\xi(t))$.

Тот факт, что

$$E((\bar{\xi}((t+\Delta t)\wedge\theta_p^{x(\cdot)}) - \bar{\xi}(t\wedge\theta_p^{x(\cdot)}))\otimes(\bar{\xi}((t+\Delta t)\wedge\theta_p^{x(\cdot)}) - \bar{\xi}(t\wedge\theta_p^{x(\cdot)})) - \int\limits_{t\wedge\theta_p^{x(\cdot)}}^{(t+\Delta t)\wedge\theta_p^{x(\cdot)}} \bar{\alpha}(s,\bar{\xi}(\cdot))ds \mid \mathcal{P}_t) = 0,$$

доказывается простой модификацией доказательства [50, лемма 8.48]. Из последнего соотношения мы легко выводим, что $D_2\xi(t) = \alpha(t,\xi(t))$. □

32. Стохастические дифференциальные включения в терминах инфинитезимальных генераторов

В этом разделе мы имеем дело с таким обобщением понятия инфинитезимального генератора случайного процесса на многообразии, что генератор оказывается корректно определенным и для немарковских стохастических процессов. Мы исследуем включения с такими генераторами, доказываем теоремы существования решений, у которых доказательства используют производные в среднем.

Для процесса $\xi(t)$ со значениями в многообразии M (в частности, в $\mathbb{R}^n$) мы вводим генератор как поле полуэллиптических дифференциальных операторов второго порядка, действующих на достаточно гладкую функцию f по следующему правилу:

$$\mathcal{A}(t,m)f = \lim_{\Delta t\to+0} E\Big(\frac{f(\xi((t+\Delta t)\wedge\tau_m)) - f(\xi(t\wedge\tau_m))}{\Delta t} \mid \xi(t) = m\Big), \tag{32.1}$$

где τ_m — марковский момент первого выхода ξ на границу некоторой карты, содержащей m (напомним, что символом $t\wedge\tau_m$ обозначается минимум t и τ_m). Разница между операторами (32.1) и стандартными генераторами марковских процессов состоит в том, что здесь мы используем регрессию (см. раздел 1) вместо (безусловного) математического ожидания. Отметим, что если $\xi(t)$ — марковский процесс, то и конструкция (32.1), и конструкция стандартного генератора вводят один и тот же объект.

Очевидным образом генератор, введенный формулой (32.1), является касательным вектором второго порядка (см. раздел 45). Так же, как в лемме 27.2 и в лемме 28.1, легко показать, что если $\mathcal{A}$ — генератор $\xi(t)$, для заданной связности H имеют место формулы

$$D^{\mathsf{H}}\xi(t) = (\mathcal{H}\mathcal{A})(t,\xi(t)), \tag{32.2}$$

$$D_2\xi(t) = 2(\mathcal{Q}\mathcal{A})(t,\xi(t)), \tag{32.3}$$

где $\mathcal{Q}$ и $\mathcal{H}$ введены формулами (45.2) и (45.3), соответственно.

Предположим, что поле касательных векторов второго порядка $\mathfrak{A}(t,m)$ многозначно, т. е. в каждом касательном пространстве второго порядка $\tau_m M$ к многообразию M задано множество $\mathfrak{A}(t,m)$, зависящее от $t\in[0,\infty)$. Мы хотим найти стохастический процесс $\xi(\cdot)$ такой, что для каждого t его генератор $\mathcal{A}(t,m)$ п.н. удовлетворяет включению

$$\mathcal{A}(t,\xi(t)) \in \mathfrak{A}(t,\xi(t)). \tag{32.4}$$

Задачи такого типа естественным образом возникают, если процесс описан в терминах его генератора.

Если многозначное поле $\mathfrak{A}(t,m)$ имеет непрерывный селектор с некоторыми свойствами регулярности, то можно найти процесс, имеющий этот селектор как генератор, и этот процесс будет решением (32.4). Скажем, если $\mathfrak{A}(t,m)$ полунепрерывно снизу и имеет выпуклые замкнутые значения, то по теореме Майкла имеется непрерывный селектор. Если этот селектор имеет положительно определенную $(2,0)$-тензорную компоненту, указанная схема рассуждений применима для доказательства существования решений (32.4).

Если селектор может не существовать, доказательство разрешимости (32.4) становится существенно более сложным. Мы рассмотрим важный для приложений и достаточно общий случай такой ситуации, когда $\mathfrak{A}(t,m)$ полунепрерывно сверху и не обязательно положительно определено.

Теорема 32.1. *Пусть $\mathfrak{A}(t,m)$, $t\in[0,T]$ — полунепрерывное сверху многозначное поле векторов второго порядка на многообразии M с замкнутыми выпуклыми значениями такое, что*:

(i) *для каждого $t\in[0,T]$, $m\in M$ и каждого $\mathcal{A}\in\mathfrak{A}(t,m)$ соответствующий $(2,0)$-тензор $\mathcal{Q}_m\mathcal{A}$ является симметрическим и неотрицательно определенным*;

(ii) *для каждого компакта $\mathbf{K}\in M$ множество $\mathfrak{A}([0,T],\mathbf{K})$ компактно в τM*;

(iii) *существует собственная функция $\psi: M\to\mathbb{R}$, константа $C>0$ и окрестность $\mathcal{V}$ графика $\mathfrak{A}$ в $[0,T]\times\tau(M)$ такие, что для любого $(t,m,\mathcal{A})\in\mathcal{V}$ выполняется неравенство $|\mathcal{A}\psi|<C$.*

Тогда для каждого $m_0\in M$ существует вероятностное пространство и случайный процесс $\xi(t)$ с начальным условием $\xi(0)=m_0$, определенный при всех $t\in[0,T]$, заданный на указанном вероятностном пространстве и принимающий значения в M, такой, что для его инфинитезимального генератора п.н. выполняется включение (32.4).

Доказательство. В этом доказательстве мы рассматриваем банахово многообразие $C^0([0,T],M)$ и σ-алгебру $\tilde{\mathcal{F}}$, порожденную цилиндрическими множествами на нем. Символом $\mathcal{P}_t$ мы обозначаем σ-подалгебру в $\tilde{\mathcal{F}}$, порожденную цилиндрическими множествами с базами над $[0,t]\subset[0,T]$.

Зафиксируем произвольную полную риманову метрику $g(\cdot,\cdot)$ на M с компонентами этого тензора g_{ij} в картах. Эта метрика превращает M в метрическое пространство относительно соответствующего риманова расстояния. Обозначим через H связность Леви-Чивита метрики $g(\cdot,\cdot)$. Напомним, что $g_m(\cdot,\cdot)$ является скалярным произведением в T_mM, $m\in M$. Это порождает скалярное произведение $\mathbf{g}_m(\cdot,\cdot)$ в пространстве $(2,0)$-тензоров в $m\in M$ по правилу $\mathbf{g}_m((\alpha^{ij}),(\beta^{lk}))=g_{ik}g_{jl}\alpha^{ij}\beta^{kl}$. Введем скалярное произведение в τ_mM формулой

$$\mathfrak{g}(\mathcal{A}_1,\mathcal{A}_2)=g(\mathcal{H}\mathcal{A}_1,\mathcal{H}\mathcal{A}_2)+\mathbf{g}(\mathcal{Q}\mathcal{A}_1,\mathcal{Q}\mathcal{A}_2).$$

Таким образом, во всех T_mM, τ_mM и в пространствах $(2,0)$-тензоров над M заданы евклидовы нормы, гладко зависящие от m.

Введем последовательность положительных чисел $\varepsilon_q\to 0$. По теореме 43.7 для каждого ε_q существует однозначная ε_q-аппроксимация $\tilde{\mathcal{A}}_q(t,m)$ отображения $\mathfrak{A}(t,m)$ такая, что последовательность $\mathcal{A}_q(t,m)$ поточечно сходится к измеримому по Борелю селектору $\mathcal{A}(t,m)$ отображения $\mathfrak{A}(t,m)$ при $q\to\infty$.

Рассмотрим последовательность векторных полей $a_q(t,m)=\mathcal{H}\mathcal{A}_q(t,m)$ и $(2,0)$-тензорных полей $\tilde{\alpha}_q(t,m)(\cdot,\cdot)=2\mathcal{Q}\mathcal{A}_q(t,m)$, соответственно. Очевидно, что $a_q(t,m)$ поточечно сходятся к $a(t,m)=\mathcal{H}\mathcal{A}(t,m)$, а $\tilde{\alpha}_q(t,m)$ поточечно сходятся к $\alpha(t,m)=2\mathcal{Q}\mathcal{A}(t,m)$ при $q\to\infty$, а также и $a(t,m)$, и $\alpha(t,m)$ измеримы по Борелю.

Напомним, что тензорные поля $\tilde{\alpha}_q(t,m)(\cdot,\cdot)$ — симметрические и положительно определенные. Введем другую последовательность

$$\alpha_q(t,m)(\cdot,\cdot)=\tilde{\alpha}_q(t,m)(\cdot,\cdot)+\varepsilon_q g(m)(\cdot,\cdot).$$

Очевидно, что тензоры $\alpha_q(t,m)(\cdot,\cdot)$ непрерывны, положительно определены и являются симметрическими, а также последовательность $\alpha_q(t,m)(\cdot,\cdot)$ поточечно сходится к $\alpha(t,m)(\cdot,\cdot)$ при $q\to\infty$. Так как непрерывные поля можно аппроксимировать гладкими, без потери общности мы можем предположить, что все поля $a_q(t,m)$ и $\alpha_q(t,m)(\cdot,\cdot)$ являются гладкими. Обозначим символом $\mathcal{A}_q(t,m)$ гладкое поле векторов второго порядка, соответствующее паре $(a_q(t,m),\alpha_q(t,m))$. По построению $\mathcal{A}_q(t,m)$ является $2\varepsilon_q$-аппроксимацией $\mathfrak{A}(t,m)$ и последовательность $\mathcal{A}_q(t,m)$ поточечно сходится к $\mathcal{A}(t,m)$.

Отметим, что свойства $a_q(t,m)$ и $\alpha_q(t,m)$ такие же, как в доказательстве теоремы 31.2. Следовательно, так же, как в этом доказательстве, мы можем показать, что существует стохастический процесс $\xi(t)$, заданный для всех $t \in [0,T]$, такой, что $D^{\mathsf{H}}\xi(t) = a(t,\xi(t)) \in (\mathcal{H}\mathfrak{A})(t,\xi(t))$ и $D_2\xi(t) = \alpha(t,\xi(t)) \in 2(\mathcal{Q}\mathfrak{A})(t,\xi(t))$. По построению это искомое решение (32.4). □

Чаще всего включение (32.4) возникает в приложениях в линейных пространствах. Для этого частного случая мы докажем теорему существования решений другого типа, у которой условие сформулировано в терминах оценок типа Ито.

Пусть $\mathfrak{A}(t,m)$ — многозначное поле векторов второго порядка на $\mathbb{R}^n$. Тогда мы можем рассмотреть многозначное векторное поле $\mathbf{a}(t,m)$ — векторную часть $\mathfrak{A}(t,m)$, а также его тензорную часть, многозначное симметрическое $(2,0)$-тензорное поле $\boldsymbol{\alpha}(t,m)$, принимающее значения в неотрицательно определенных тензорах.

Теорема 32.2. *Пусть многозначное векторное поле $\mathbf{a}(t,x)$ полунепрерывно сверху, имеет замкнутые выпуклые значения и удовлетворяет оценке*

$$\|\mathbf{a}(t,x)\| < K(1+\|x\|) \tag{32.5}$$

при некотором $K > 0$.

Пусть многозначное $(2,0)$-тензорное поле $\boldsymbol{\alpha}(t,x)$ полунепрерывно сверху, принимает замкнутые выпуклые значения в симметрических неотрицательно определенных тензорах и такое, для каждого $\alpha(t,x) \in \boldsymbol{\alpha}(t,x)$ выполняется оценка

$$\|\operatorname{tr}\alpha(t,x)\| < K(1+\|x\|)^2 \tag{32.6}$$

при некотором $K > 0$.

Тогда для каждого $x_0 \in \mathbb{R}^n$ существует вероятностное пространство и случайный процесс $\xi(t)$ с начальным условием $\xi(0) = x_0$, существующий при всех $t \in [0,T]$, заданный на указанном вероятностном пространстве и принимающий значения $\mathbb{R}^n$, такой, что для его инфинитезимального генератора п.н. выполняется включение (32.4).

Доказательство. Рассмотрим последовательность положительных чисел $\varepsilon_q \to 0$. Как и в доказательстве теоремы 32.1, мы можем построить последовательность $\mathcal{A}_q(t,x)$ гладких ε_q-аппроксимаций отображения $\mathfrak{A}(t,x)$, которая поточечно сходится к измеримому по Борелю селектору $\mathcal{A}(t,x)$ отображения $\mathfrak{A}(t,x)$ при $q \to \infty$. Так же, как в доказательстве теоремы 32.1, введем последовательность гладких векторных полей $a_q(t,x)$, которая поточечно сходится к измеримому по Борелю селектору $a(t,x)$ отображения $\mathbf{a}(t,x)$, и последовательность $\tilde{\alpha}_q(t,x)(\cdot,\cdot)$ гладких $(2,0)$-тензорных полей, сходящуюся поточечно к измеримому по Борелю селектору $\alpha(t,x)$ отображения $\boldsymbol{\alpha}(t,x)$. Построим последовательность $\alpha_q(t,x)(\cdot,\cdot) = \tilde{\alpha}_q(t,x)(\cdot,\cdot) + \varepsilon_q I(\cdot,\cdot)$, где $I(\cdot,\cdot)$ — $(2,0)$-тензорное поле с единичной матрицей в каждой точке $x \in \mathbb{R}^n$. Каждое $\alpha_q(t,x)(\cdot,\cdot)$ гладко, симметрично и положительно определено, тогда по лемме 5.1 для любого q существует гладкое поле линейных операторов $A_q(t,x) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ такое, что s $\alpha_q(t,x) = A_q(t,x)A_q^*(t,x)$, где $A^*(t,x)$ — транспонированное $A(t,x)$. Отметим, что $\operatorname{tr}\alpha_q(t,x)$ равно сумме квадратов всех элементов матрицы $A_q(t,x)$, т. е. квадрату евклидовой нормы $A_q(t,x)$ в соответствующем пространстве матриц. Так что из (32.6) следует, что

$$\|A_q(t,x)\| \leqslant K(1+\|x\|) \tag{32.7}$$

при всех q. Отметим, что по построению все $a_q(t,x)$ удовлетворяют оценке типа (32.5) для всех q.

Рассмотрим уравнение в форме Ито

$$d\xi_q(t) = a_q(t,\xi_q(t))dt + A_q(t,\xi_q(t))dw(t). \tag{32.8}$$

Применяя теорему III.2.4 из [50] и тот факт, что коэффициенты гладкие, нетрудно вывести из условия теоремы и из приведенных выше рассуждений, что каждое уравнение (32.8) имеет единственное решение $\xi_q(t)$ с начальным условием $\xi_q(0) = x_0$, существующее на всем $[0,T]$. Обозначим через μ_q меру на $(C^0([0,T],\mathbb{R}^n),\tilde{\mathcal{F}})$, соответствующую $\xi_q(\cdot)$, где $\tilde{\mathcal{F}}$ — σ-алгебра, порожденная цилиндрическими множествами. Принимая во внимание (32.5) и (32.7), легко вывести из [10, лемма 6.28], что множество $\{\mu_q\}$ слабо компактно. Так что мы можем выбрать подпоследовательность, которая слабо сходится к некоторой мере μ. Обозначим через $\xi(t)$ координатный процесс на вероятностном пространстве $(C^0([0,T],\mathbb{R}^n),\mathcal{F},\mu)$. Тот факт, что $\xi(t)$ удовлетворяет (5.1) с указанными выше $a(t, m)$ и $\alpha(t, m)$, где D обозначает производную в среднем справа относительно связности Леви-Чивита евклидовой метрики в $\mathbb{R}^n$, доказывается полностью аналогично доказательству теоремы 6.3. Следовательно $\mathcal{A}(t, x)$ — генератор $\xi(\cdot)$. Поскольку по построению $\mathcal{A}(t, \xi(t)) \in \mathfrak{A}(t, \xi(t))$ п.н., это означает, что $\xi(t)$ — искомое решение. □

Глава 7

УРАВНЕНИЕ НЬЮТОНА—НЕЛЬСОНА НА РАССЛОЕННЫХ ПРОСТРАНСТВАХ И КАЛИБРОВОЧНЫЕ ПОЛЯ

Стохастическая механика Нельсона — это математическая теория, основанная на классической физике, но дающая те же предсказания, что и квантовая механика для широкого класса задач, в которых и та, и другая теории применимы. Можно считать, что стохастическая механика является особым способом квантования, отличным от гамильтонова и лагранжева (в терминах интегралов по траекториям) способов. Одной из главных отличительных черт стохастической механики является то, что в ней квантуется второй закон Ньютона, а не уравнения Гамильтона или Лагранжа. Стохастический аналог закона Ньютона известен как уравнение Ньютона—Нельсона.

К настоящему времени на языке стохастической механики исследовано большое число задач квантовой теории. Однако не было осуществлено описание движения квантовой частицы в калибровочном поле, по-видимому, из-за того, что ранее не было известно описание классической частицы в калибровочном поле в терминах второго закона Ньютона. Такое описание было предложено в [59] (см. также [13, 50]), где было построено и изучено специальное уравнение второго порядка на расслоении со связностью, которое интерпретировалось как второй закон Ньютона, описывающий движение классической частицы в классическом калибровочном поле. На основе этого здесь мы изучаем соответствующее уравнение Ньютона—Нельсона на расслоениях со связностями. Рассматриваются два случая: когда база расслоения — риманово многообразие и само расслоение (главное и векторное) вещественно, и когда база расслоения — пространство-время общей теории относительности и расслоение комплексно. Последний случай интерпретируется как описание движения квантовой релятивистской частицы в классическом калибровочном поле. Для частного случая группы симметрий $U(1)$ исследуется связь с квантовой электродинамикой.

33. Дополнительные факты из геометрии многообразий

Напомним, что на каждом расслоении $\mathcal{E} \to M$ над многообразием M, в каждом касательном пространстве $T_{(m,x)}\mathcal{E}$ к пространству расслоения $\mathcal{E}$ имеется специальное подпространство $\mathcal{V}_{(m,x)}$, называемое *вертикальным*, которое состоит из векторов, касательных к слою $\mathcal{E}_m$ в точке (m, x), $m \in M$. Векторы из подпространств $\mathcal{V}_{(m,x)}$ называются *вертикальными. Связность* H на $\mathcal{E}$ — это набор подпространств в касательном пространстве к $\mathcal{E}$ такой, что $T_{(m,x)}\mathcal{E} = \mathsf{H}_{(m,x)} \oplus \mathcal{V}_{(m,x)}$ в каждой точке $(m, x) \in \mathcal{E}$, и этот набор удовлетворяет некоторым дополнительным условиям гладкости и инвариантности: на главных расслоениях распределение H инвариантно относительно правого действия структурной группы расслоения, а на векторных расслоениях — относительно так называемого действия числовой прямой (см. раздел 44, подробности имеются, например, в [13, 50]).

Пусть M — вещественное риманово или псевдориманово многообразие с метрикой $g(\cdot, \cdot)$. Пусть $\Pi : \mathcal{E} \to M$ — главное расслоение над M со структурной группой G. Через $\mathfrak{g}$ мы обозначаем алгебру Ли группы Ли G. Пусть на $\mathcal{E}$ задана связность H с формой связности θ (см. раздел 44) и формой кривизны $\Phi = D\theta$. Здесь D — ковариантный дифференциал: $D\theta(X) = d\theta(\mathsf{H}X, \mathsf{H}X)$ (см. подробности, например, в [4]). Напомним, что 1-форма θ и 2-форма Φ эквивариантны, принимают значения в алгебре $\mathfrak{g}$, и что Φ горизонтальна (принимает нулевые значения на вертикальных векторах). Предполагается, что форма кривизны удовлетворяет уравнениям

$$D\Phi = 0, \qquad D * \Phi = *J, \tag{33.1}$$

(из них первое — классическое тождество Бьянки), где J — некоторая 1-форма на $\mathcal{E}$ со значениями в $\mathfrak{g}$. Здесь $*$ — специальное отображение из теории дифференциальных форм, переводящее k-форму в $(n-k)$-форму, где n — размерность многообразия.

Мы предполагаем, что G является группой $GL(k,\mathbb{R})$ (или $GL(k,\mathbb{C})$) невырожденных матриц размера $k\times k$ с вещественными (комплексными) коэффициентами или какой-нибудь ее подгруппой. Пусть $\mathcal{F}$ — k-мерное вещественное (соответственно, комплексное) векторное пространство, на котором G действует слева, и пусть на $\mathcal{F}$ задано скалярное произведение $h(\cdot,\cdot)$, инвариантное относительно действия G. Мы предполагаем, что задано некоторое отображение $e:\mathcal{F}\to\mathfrak{g}^*$ (где $\mathfrak{g}^*$ — коалгебра, т. е. сопряженное к $\mathfrak{g}$ пространство), которое постоянно на орбитах группы G. Это отображение называется *зарядом.*

Рассмотрим векторное расслоение $\pi: Q\to M$ со стандартным слоем $\mathcal{F}$, ассоциированное с $\mathcal{E}$. Точки пространства расслоения Q мы обозначаем символами (m,q), где $m\in M$, а $q\in Q_m$, Q_m — слой в точке m. Обозначим через $\lambda:\mathcal{E}\times\mathcal{F}\to Q$ факторизацию, которая определяет расслоение Q (см. раздел 44, подробности имеются, например, в [4]). Касательное отображение $T\lambda$ переносит связность H из касательных пространств к $\mathcal{E}$ в касательные пространства к Q. Полученную связность на Q мы обозначаем H^π. Векторы, лежащие в пространствах H^π, называются *горизонтальными.* Напомним, что пространства связности являются ядрами так называемого отображения связности $K^\pi: TQ\to Q$, которое строится следующим образом. Рассмотрим разложение касательного вектора $X\in T_{(m,q)}Q$ в $(m,q)\in Q$ на горизонтальную и вертикальную компоненты: $X=\mathsf{H}X+\mathcal{V}X$, где $\mathsf{H}X\in\mathsf{H}^\pi_{(m,q)}$ и $\mathcal{V}X\in\mathcal{V}_{(m,q)}$. Введем оператор $\mathbf{p}:\mathcal{V}_{(m,q)}\to Q_m$ — естественный изоморфизм линейного касательного пространства $\mathcal{V}_{(m,q)}=T_qQ_m$ к слою Q_m на сам слой (векторное пространство) Q_m. Тогда $K^\pi X=\mathbf{p}\mathcal{V}X$.

На многообразии Q (пространстве расслоения) построим риманову метрику g^Q следующим образом: в горизонтальных подпространствах H^π введем ее как обратный образ $T\pi^*g$, в вертикальных пространствах $\mathcal{V}$ — как h, и положим, что H^π и $\mathcal{V}$ ортогональны друг другу. Отметим, что в комплексном случае построенная метрика может называться римановой в весьма обобщенном смысле.

Обозначим проекцию касательного расслоения TM на M символом $\tau: TM\to M$. Введем связность Леви-Чивита H^τ метрики g на M. Ее отображение связности $K^\tau: T^2M\to TM$ строится аналогично случаю K^π, где Q заменяется на TM и TQ — на $T^2M=TTM$.

Напомним стандартную конструкцию связности на пространстве расслоения Q, основанную на связностях H^π и H^τ (см., например, [13, 18]). Отображение этой связности $K^Q: T^2Q\to TQ$ имеет вид: $K^Q=K^H+K^V$, где $K^H: T^2Q\to\mathsf{H}^\pi$ и $K^V: T^2Q\to\mathcal{V}$, а последние отображения задаются формулами: $K^H=T\pi^{-1}\circ K^\tau\circ T^2\pi$, где $T^2\pi=T(T\pi): T^2Q\to T^2M$, а $T\pi^{-1}$ — линейный изоморфизм касательных пространств к M на пространства связностей H^π; $K^V=\mathbf{p}^{-1}\circ K^\pi\circ TK^\pi$.

Напомним, что λ взаимно однозначно отображает стандартный слой $\mathcal{F}$ на слои расслоения Q, поэтому заряд e корректно определен на всем Q. Поскольку касательное отображение $T\lambda$ является также взаимно однозначным отображением связностей и Φ эквивариантно, можно ввести дифференциальную форму $\tilde\Phi$ на Q со значениями в $\mathfrak{g}$ следующим образом. Рассмотрим $(m,q)=\lambda((m,p),f)$, где $(m,p)\in\mathcal{E}$ и $f\in\mathcal{F}$. Для X, $Y\in T_{(m,q)}Q$ обозначим символами $\mathsf{H}X$ и $\mathsf{H}Y$ их горизонтальные компоненты. Затем определим $\tilde\Phi_{(m,q)}(X,Y)=\Phi_{(m,p)}(T\lambda^{-1}\mathsf{H}X,T\lambda^{-1}\mathsf{H}Y)$.

Обозначим через $\bullet$ спаривание элементов из $\mathfrak{g}$ и из $\mathfrak{g}^*$. Рассмотрим $((m,q),X)$ — вектор, касательный к Q в (m,q). Понятно, что $e((m,q))\bullet\tilde\Phi_{(m,q)}(\cdot,X)$ является обычной 1-формой (т. е. дифференциальной формой со значениями в вещественных числах). Обозначим через $\overline{e((m,q))\bullet\tilde\Phi_{(m,q)}(\cdot,X)}$ касательный вектор к Q, физически эквивалентный 1-форме $e((m,q))\bullet\tilde\Phi_{(m,q)}(\cdot,X)$, т. е. полученный поднятием индексов с использованием римановой метрики g^Q.

Лемма 33.1. *Векторное поле* $\overline{e((m,q))\bullet\tilde\Phi_{(m,q)}(\cdot,X)}$ *горизонтально, т. е. принадлежит пространствам связности* H^π.

Доказательство. По построению форма $\tilde\Phi(\cdot,\cdot)$ горизонтальна, т. е. $\tilde\Phi(Y,\dot q)=0$ для любого вектора $Y\in V$. Тогда для того же Y имеем $e(q)\bullet\tilde\Phi(Y,\dot q)=0$ и по построению $g^Q(\overline{e(q)\bullet\tilde\Phi(\cdot,\dot q)},Y)=0$. ☐

Введем ковариантную производную $\dfrac{D^Q}{dt} = K^Q \dfrac{d}{dt}$ на пространстве расслоения Q. Рассмотрим уравнение

$$\frac{D^Q}{dt}\dot{q} = \overline{e((m,q)) \bullet \tilde{\Phi}_{(m,q)}(\cdot,\dot{q})}, \tag{33.2}$$

которое может быть интерпретировано как уравнение движения классической частицы в классическом калибровочном поле.

Из леммы 33.1 следует, что уравнение (33.2) эквивалентно системе

$$\frac{D^H}{dt}\dot{q} = \overline{e(q) \bullet \tilde{\Phi}(\cdot,\dot{q})}, \tag{33.3}$$

$$\frac{D^V}{dt}\dot{q} = 0. \tag{33.4}$$

Теорема 33.1 (см. [59]). *Пусть $q(t)$ — решение (33.2) с горизонтальным начальным условием $\dot{q}(0) = \dot{q}_0 \in H^\pi$. Тогда $q(t)$ горизонтально (т. е. $\dot{q} \in H^\pi$) при всех t, при которых оно определено, и $e(q(t))$ постоянно.*

Доказательство. В локальных координатах представим $q(t)$ в виде $q(t) = (m(t), c(t))$, где $m(t) \in \mathcal{M}$, $c(t)$ принадлежит слою. Тогда $\dot{q} = (m, c, \dot{m}, \dot{c})$. Отметим, что $K^\pi \dot{q} = (m, \dot{c} + \Gamma^\pi_m(c, \dot{m}))$, где $\Gamma^\pi_m(\cdot,\cdot)$ — локальный коэффициент связности H^π. Так что условие $\dot{q}_0 \in H^\pi$ в локальных координатах записывается в виде $\dot{c}_0 + \Gamma^\pi_m(c_0, \dot{m}_0) = 0$. Далее, $TK^\pi \dfrac{d}{dt}\dot{q} = \dfrac{d}{dt}(m, \dot{c} + \Gamma^\pi_m(c,\dot{m})) = \Big(m, c, \dot{m}, \dfrac{d}{dt}(\dot{c} + \Gamma^\pi_m(c,\dot{m}))\Big)$. По (33.3) $\dfrac{D^V}{dt}\dot{q} = K^V \dfrac{d}{dt}\dot{q} = p^{-1} \circ K^\pi \circ TK^\pi \dfrac{d}{dt}\dot{q} = 0$, откуда следует, что $TK^\pi \dfrac{d}{dt}\dot{q}$ принадлежит связности H^π. Это означает, что

$$\frac{d}{dt}(m, \dot{c} + \Gamma^\pi_m(c,\dot{m})) = (m, c, \dot{m}, -\Gamma^\pi_m(\dot{m}, \dot{c} + \Gamma^\pi_m(c,\dot{m}))).$$

Значит

$$\frac{d}{dt}(\dot{c} + \Gamma^\pi_m(c,\dot{m})) = -\Gamma^\pi_m(\dot{m}, \dot{c} + \Gamma^\pi_m(c,\dot{m})).$$

Последнее равенство представляет из себя линейное дифференциальное уравнение относительно $\dot{c} + \Gamma^\pi_m(c,\dot{m})$ с нулевыми начальными условиями. Поэтому $\dot{c} + \Gamma^\pi_m(c,\dot{m}) = 0$ откуда и вытекает первое утверждение. Поскольку кривая $q(t) = (m(t), c(t))$ горизонтальна, она представима в виде $(m(t), b_t(f))$, где $(m(t), b_t)$ — некоторый горизонтальный подъем кривой $m(t)$ в $\mathcal{E}$, а f — некоторый фиксированный вектор в $\mathcal{F}$. Так что $b_t(f)$ лежит в орбите G в $\mathcal{F}$, т. е. $e(q(t)) = e(b_t(f))$ постоянно. □

Ниже нам потребуются следующие свойства связности H^Q.

Теорема 33.2. *Пусть $(m(t), q(t))$ — гладкая кривая в Q. Пусть $X(t)$ — параллельный перенос вектора $X \in T_{(m(t_0),q(t_0))}Q$ относительно связности H^Q вдоль $(m(t), q(t))$.*

(i) *И горизонтальная $\mathsf{H}X(t)$, и вертикальная $\mathcal{V}X(t)$ компоненты вектора $X(t)$ являются параллельными векторными полями вдоль $(m(t), q(t))$ относительно H^Q, причем параллельный перенос горизонтальных векторов сохраняет нормы и скалярные произведения относительно g^Q.*

(ii) *Векторное поле $T\pi X(t)$ параллельно вдоль $m(t)$ на M относительно связности H^τ.*

Доказательство. Уравнение параллельного векторного поля относительно H^Q записывается в виде $\dfrac{D^Q}{dt}X(t) = 0$. Оно эквивалентно системе $\dfrac{D^H}{dt}X(t) = 0$ и $\dfrac{D^V}{dt}X(t) = 0$. Поскольку $\dfrac{D^H}{dt}X(t) = K^H \dfrac{d}{dt}X(t)$ и $K^H = T\pi^{-1} \circ K^\tau \circ T^2\pi$, нетрудно видеть, что $K^\tau \circ T^2\pi \dfrac{d}{dt}X(t) = 0$. Так как $T^2\pi \dfrac{d}{dt}X(t) = \dfrac{d}{dt}T\pi X(t)$, то $\dfrac{D}{dt}T\pi X(t) = K^\tau \dfrac{d}{dt}T\pi X(t) = 0$. В частности, это означает что векторное поле $T\pi X(t)$ является параллельным вдоль $m(t)$ в M относительно H^τ. Поскольку параллельный перенос относительно связности Леви-Чивита сохраняет нормы и скалярные произведения в метрике g, а g^Q на пространствах H^π является обратным образом g, отсюда следует, что параллельный перенос горизонтальных векторов относительно H^Q сохраняет нормы и скалярные произведения относительно g^Q.

По построению $T\pi X(t) = T\pi \mathsf{H}X(t)$. Поэтому

$$\frac{D^H}{dt}\mathsf{H}X(t) = K^H\frac{d}{dt}\mathsf{H}X(t) = T\pi^{-1}\circ K^\tau \circ T^2\pi\frac{d}{dt}\mathsf{H}X(t) = T\pi^{-1}\circ K^\tau\frac{d}{dt}T\pi\mathsf{H}X(t) = 0.$$

Поскольку $\mathsf{H}X(t)$ горизонтально, $K^\pi\mathsf{H}X(t) = 0$ при всех t из области определения кривой $(m(t), q(t))$. Это означает, что $\frac{d}{dt}K^\pi\mathsf{H}X(t)$ горизонтально (не имеет вертикальной компоненты), т. е. $K^\pi\frac{d}{dt}K^\pi\mathsf{H}X(t) = 0$. Но $\frac{d}{dt}K^\pi\mathsf{H}X(t) = TK^\pi\frac{d}{dt}\mathsf{H}X(t)$. Так что

$$\frac{D^V}{dt}\mathsf{H}X(t) = K^V\frac{d}{dt}\mathsf{H}X(t) = \mathbf{p}^{-1}\circ K^\pi\circ TK^\pi\frac{d}{dt}\mathsf{H}X(t) = \mathbf{p}^{-1}\circ K^\pi\frac{d}{dt}K^\pi\mathsf{H}X(t) = 0.$$

Так как мы показали выше, что $\frac{D^H}{dt}\mathsf{H}X(t) = 0$, это означает, что $\frac{D^Q}{dt}\mathsf{H}X(t) = 0$.

По условию $\frac{D^Q}{dt}X(t) = 0$. С другой стороны, $\frac{D^Q}{dt}X(t) = \frac{D^Q}{dt}\mathsf{H}X(t) + \frac{D^Q}{dt}\mathcal{V}X(t)$ и $\frac{D^Q}{dt}\mathsf{H}X(t) = 0$. Следовательно $\frac{D^Q}{dt}\mathcal{V}X(t) = 0$. □

34. Случай вещественных расслоений над римановыми многообразиями

34.1. Ковариантные производные в среднем на римановом многообразии. В этом разделе мы рассматриваем римановы многообразия. Случай лоренцевых многообразий (т. е. специальный случай псевдоримановых), на которых из-за того, что необходима инвариантность относительно группы Лоренца, производные в среднем вводятся по-другому, будет рассмотрен в дальнейших разделах.

Рассмотрим случайный процесс $\xi(t)$ со значениями в римановом многообразии M, заданный на некотором вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, \mathsf{P})$. Символом $\mathcal{N}_t^\xi$ мы обозначаем минимальную σ-подалгебру σ-алгебры $\mathcal{F}$, порожденную прообразами борелевских множеств в M при отображении $\xi(t) : \Omega \to M$ («настоящее» процесса $\xi(t)$), и символом $E_t^\xi = E(\cdot \mid \mathcal{N}_t^\xi)$ условное математическое ожидание относительно $\mathcal{N}_t^\xi$. Напомним, что условное математическое ожидание случайного элемента ϑ относительно $\mathcal{N}_t^\xi$ может быть представлено как $\Theta(\xi(t))$, где Θ — измеримое по Борелю отображение, так называемая *регрессия*, которая обычно обозначается как $\Theta(m) = E(\vartheta \mid \xi(t) = m)$ (см., например, [26]).

Выберем точку $m \in M$ и рассмотрим нормальную карту U_m в этой точке относительно экспоненциального отображения связности Леви-Чивита на M. Построим в U_m следующие регрессии:

$$Y^{U_m}(t, m') = \lim_{\Delta t\downarrow 0} E_t^\xi\Big(\frac{\xi(t+\Delta t) - \xi(t)}{\Delta t} \mid \xi(t) = m'\Big); \tag{34.1}$$

$$Y_*^{U_m}(t, m') = \lim_{\Delta t\downarrow 0} E_t^\xi\Big(\frac{\xi(t) - \xi(t-\Delta t)}{\Delta t} \mid \xi(t) = m'\Big). \tag{34.2}$$

Введем $X^0(t, m) = Y^{U_m}(t, m)$ и $X_*^0(t, m) = Y_*^{U_m}(t, m)$. Отметим, что $X^0(t, m)$ и $X_*^0(t, m)$ являются векторными полями на M, т. е. при заменах координат они преобразуются как сечения касательного расслоения TM.

Производные в среднем справа и слева процесса $\xi(t)$ определяются, соответственно, формулами

$$D\xi(t) = X^0(t, \xi(t)) \text{ и } D_*\xi(t) = X_*^0(t, \xi(t)). \tag{34.3}$$

Вектор $v^\xi(t) = \frac{1}{2}(D + D_*)\xi(t)$ называется *текущей скоростью* процесса $\xi(t)$. Из свойств условного математического ожидания следует, что существует регрессия, т. е. векторное поле $v^\xi(t, m)$ на M такое, что $v^\xi(t) = v^\xi(t, \xi(t))$.

Введем приращения процесса $\xi(t)$:

$$\Delta\xi(t) = E_t^\xi(\xi(t+\Delta t) - \xi(t))$$

и так называемую квадратичную производную в среднем D_2 формулой

$$D_2\xi(t) = \lim_{\Delta\tau\downarrow 0} E_t^\xi \frac{\Delta\xi(t)\otimes\Delta\xi(t)}{\Delta t}.$$

Если она существует, то принимает значения в симметрических неотрицательно определенных $(2,0)$-тензорах (см. гл. 1 и подробности в [50]).

Всюду далее мы будем иметь дело с процессами, вдоль которых корректно определен параллельный перенос относительно соответствующей связности. Сейчас мы предполагаем, что корректно определен параллельный перенос вдоль $\xi(\cdot)$ относительно H^τ. Это предположение выполнено, например, если $\xi(t)$ является процессом Ито на M, т. е. разверткой Ито (см. определение 44.4, подробное изложение имеется в [13]) некоторого процесса Ито в каком-нибудь касательном пространстве к M и, в частности, семимартингалом. Обозначим через $\Gamma_{t,s}$ оператор указанного параллельного переноса векторов из (случайной) точки $\xi(s)$ процесса в (случайную) точку $\xi(t)$.

Для векторного поля $Z(t,m)$ на M его ковариантные производные в среднем справа $\mathbf{D}Z(t,\xi(t))$ и слева $\mathbf{D}_*Z(t,\xi(t))$ вдоль $\xi(\cdot)$ строятся по формулам

$$\mathbf{D}Z(t,\xi(t)) = \lim_{\Delta t\downarrow 0} E_t^\xi \frac{\Gamma_{t,t+\Delta t}Z(t+\Delta t,\xi(t+\Delta t)) - Z(t,\xi(t))}{\Delta t}; \tag{34.4}$$

$$\mathbf{D}_*Z(t,\xi(t)) = \lim_{\Delta t\downarrow 0} E_t^\xi \frac{Z(t,\xi(t)) - \Gamma_{t,t-\Delta t}Z(t-\Delta t,\xi(t-\Delta t))}{\Delta t}. \tag{34.5}$$

Уравнение Ньютона—Нельсона с силовым полем $\alpha(m,X)$, $X\in T_mM$, на римановом многообразии имеет вид

$$\begin{cases} \dfrac{1}{2}(\mathbf{D}D_* + \mathbf{D}_*D)\xi(t) = \bar\alpha(\xi(t), v^\xi(t)), \\ D_2\xi(t) = \dfrac{\hbar}{\mathrm{m}}I, \end{cases} \tag{34.6}$$

где $\hbar = \dfrac{h}{2\pi}$, h — постоянная Планка, а m — масса частицы. Связь этого уравнения с квантовой механикой описана, например, в [13, 50, 80, 82].

В [13, 50] при достаточно естественных условиях показано существование решений для уравнения (34.6) в случае, когда $\bar\alpha(\xi(t),v^\xi(t)) = \dfrac{1}{\mathrm{m}}(\bar\alpha_0(t,\xi(t)) + \bar\alpha_1(t,\xi(t))\circ v^\xi(t) + \dfrac{1}{2}\sigma^2\,\hat{\mathrm{R}}\mathrm{ic}(\xi(t))\circ u^\xi(t))$, где m — масса частицы, $\bar\alpha_0(t,x)$ — векторное поле на M, зависящее от $t\in[0,l]$, $\bar\alpha_1(t,m)$ — линейный оператор в T_mM, зависящий от параметра $t\in[0,l]$ (т. е. $\bar\alpha_1(t,m)$ — $(1,1)$-тензорное поле на M), а $\hat{\mathrm{R}}\mathrm{ic}$ — кривизна Риччи. Подчеркнем, что примеры указанных $\bar\alpha$ включают, в частности, потенциальные и гироскопические силовые поля (например, магнитное поле или электромагнитное поле на общерелятивистском пространстве-времени), но не только их. В этом случае в уравнение Шредингера, описывающее указанное решение, входит оператор Лапласа—де Рама $d\delta+\delta d$. Если слагаемое $\hat{\mathrm{R}}\mathrm{ic}$ отсутствует, оператор $d\delta+\delta d$ заменяется на оператор Лапласа—Бельтрами $\nabla\nabla^*$, где ∇ — ковариантная производная. Последний случай обычно рассматривается в релятивистской теории (см. ниже).

Существование решений показано для двух типов начальных условий. В первом это детерминированное начальное условие 0, но вместо $\xi(t)$ рассматривается процесс $\xi(t_0(t))$, где функция $t_0(t)$ вводится формулой (23.12) (см. также (34.15) ниже). То есть в этом случае $\xi(t_0(t))$ становится решением, только начиная с заранее заданного сколь угодно малого положительного момента времени t_0. Отметим, что для двух разных значений $t_0^{(1)}$ и $t_0^{(2)}$, при $t>\max(t_0^{(1)},t_0^{(2)})$ значения соответствующих решений п.н. совпадают. Во втором случае начальное значение задается как распределенная случайная величина, у которой плотность распределения нигде не равна нулю. Доказательство этих результатов проводится по схеме доказательства теоремы 34.1 ниже.

34.2. Производные в среднем на вещественном векторном расслоении над римановым многообразием. В этом разделе мы модифицируем аппарат производных в среднем из раздела 34.1 так, что его удается использовать нужным для нас образом для процессов на пространстве вещественного векторного расслоения Q над римановым многообразием M.

Рассмотрим случайный процесс $\eta(t)$ на пространстве вещественного векторного расслоения Q и процесс $\xi(t) = \pi\eta(t)$ на M. Здесь мы обозначаем через $\Gamma^{\pi}_{t,s}$ параллельный перенос случайных векторов из слоя $Q_{\xi(s)}$ в слой $Q_{\xi(t)}$ вдоль $\xi(\cdot)$ относительно связности H^{π}. Для $\eta(t)$ мы вводим ковариантные производные в среднем формулами:

$$\mathbf{D}\eta(t) = \lim_{\Delta t \downarrow 0} E^{\xi}_t \frac{\Gamma^{\pi}_{t,t+\Delta t}\eta(t+\Delta t) - \eta(t)}{\Delta t}; \tag{34.7}$$

$$\mathbf{D}_*\eta(t) = \lim_{\Delta t \downarrow 0} E^{\xi}_t \frac{\eta(t) - \Gamma^{\pi}_{t,t-\Delta t}\eta(t-\Delta t)}{\Delta t}. \tag{34.8}$$

(аналоги (34.4) и (34.5)). Как и выше, $v^{\eta}(t) = \frac{1}{2}(\mathbf{D} + \mathbf{D}_*)\eta(t)$ называется *текущей скоростью* процесса $\eta(t)$. Подчеркнем, что в формулах (34.7) и (34.8) используется условное математическое ожидание относительно «настоящего» процесса $\xi(t)$, а не $\eta(t)$.

Лемма 34.1.

(i) $T\pi\mathbf{D}\eta(t) = D\xi(t)$;
(ii) $T\pi\mathbf{D}_*\eta(t) = D_*\xi(t)$;
(iii) $T\pi v^{\eta} = v^{\xi}$.

Чтобы задать производные в среднем векторного поля вдоль $\eta(t)$ на Q, мы используем оператор параллельного переноса $\Gamma^{Q}_{t,s}$ касательных к Q векторов в точке $\eta(s)$ в векторы, касательные к Q в точке $\eta(t)$, вдоль $\eta(\cdot)$ относительно связности H^{Q}. Аналогично формулам (34.4) и (34.5) для векторного поля $Z(t,(m,q))$ на Q мы вводим ковариантные производные формулами:

$$\mathbf{D}^{Q} Z(t,\eta(t)) = \lim_{\Delta t \downarrow 0} E^{\xi}_t \frac{\Gamma^{Q}_{t,t+\Delta t} Z(t+\Delta t, \eta(t+\Delta t)) - Z(t,\eta(t))}{\Delta t}; \tag{34.9}$$

$$\mathbf{D}^{Q}_* Z(t,\eta(t)) = \lim_{\Delta t \downarrow 0} E^{\xi}_t \frac{Z(t,\eta(t)) - \Gamma^{Q}_{t,t-\Delta t} Z(t-\Delta t, \eta(t-\Delta t))}{\Delta t}. \tag{34.10}$$

Лемма 34.2. $\Gamma^{Q}_{t,s}$ *переводит* $\mathsf{H}^{\pi}_{\eta(s)}$ *на* $\mathsf{H}^{\pi}_{\eta(t)}$, *а* $\mathcal{V}_{\eta(s)}$ — *на* $\mathcal{V}_{\eta(t)}$, *и при этом параллельный перенос горизонтальных компонент сохраняет нормы и скалярные произведения относительно метрики* g^{Q}.

Утверждение леммы 34.2 следует из теоремы 33.2 и того факта (см. [13,18,50]), что параллельный перенос вдоль случайного процесса может быть описан как предел параллельных переносов вдоль процессов, чьи выборочные траектории являются кусочно-геодезическими (т. е., в частности, кусочно гладкими) аппроксимациями выборочных траекторий рассматриваемого процесса.

Символами $\mathbf{D}^{H}$ и $\mathbf{D}^{H}_*$ мы обозначаем производные, введенные формулами (34.9) и (34.10), соответственно, для горизонтальных компонент векторов (т. е. принимающие значения в H^{π}), а символами $\mathbf{D}^{V}$ и $\mathbf{D}^{V}_*$ — для вертикальных компонент (т. е. принимающие значения в $\mathcal{V}$). Таким образом, $\mathbf{D}^{Q} = \mathbf{D}^{H} + \mathbf{D}^{V}$ и $\mathbf{D}^{Q}_* = \mathbf{D}^{H}_* + \mathbf{D}^{V}_*$.

Вектор $\frac{1}{2}(\mathbf{D}^{Q}\mathbf{D}_* + \mathbf{D}^{Q}_*\mathbf{D})\eta$ называется *ускорением* процесса η в пространстве расслоения Q.

34.3. Уравнение Ньютона—Нельсона на пространстве вещественного векторного расслоения над римановым многообразием. В соответствии с общей идеологией стохастической механики, уравнение Ньютона—Нельсона, соответствующее закону Ньютона (33.2), имеет вид

$$\begin{cases} \frac{1}{2}(\mathbf{D}^{Q}\mathbf{D}_* + \mathbf{D}^{Q}_*\mathbf{D})\eta(t) = \overline{e(\eta(t)) \bullet \tilde{\Phi}_{\eta(t)}(\cdot, v^{\eta}(t))}, \\ D_2\xi(t) = \dfrac{\hbar}{\mathrm{m}} I, \end{cases} \tag{34.11}$$

где $\xi(t) = \pi\eta(t)$.

Разложим текущую скорость v^{η} в правой части (34.11) в сумму вертикальной и горизонтальной компонент: $v^{\eta} = v^{H}_{\eta} + v^{V}_{\eta}$, где $v^{H}_{\eta} \in \mathsf{H}^{\pi}$ и $v^{V}_{\eta} \in \mathcal{V}$. Из того, что $\tilde{\Phi}_{\eta(t)}(\cdot,\cdot)$ линейна по обоим аргументам, следует, что $\tilde{\Phi}_{\eta(t)}(\cdot, v^{\eta}) = \tilde{\Phi}_{\eta(t)}(\cdot, v^H_{\eta}) + \tilde{\Phi}_{\eta(t)}(\cdot, v^V_{\eta})$, а из того, что эта форма горизонтальна (см. лемму 33.1) — что $\tilde{\Phi}_{\eta(t)}(\cdot, v^V_{\eta}) = 0$. Таким образом, первое уравнение системы (34.11) эквивалентно следующей системе:

$$\frac{1}{2}(\mathbf{D}^H\mathbf{D}_* + \mathbf{D}^H_*\mathbf{D})\eta(t) = \overline{e(\eta(t)) \bullet \tilde{\Phi}_{\eta(t)}(\cdot, v^H_{\eta}(t))}, \tag{34.12}$$

$$\frac{1}{2}(\mathbf{D}^V\mathbf{D}_* + \mathbf{D}^V_*\mathbf{D})\eta(t) = 0. \tag{34.13}$$

Для удобства изложения обозначим $\overline{e(\eta(t)) \bullet \tilde{\Phi}_{\eta(t)}(\cdot, v^H_{\eta}(t))}$ символом $\alpha_{(t,\eta(t))}v^H_{\eta}$, где по построению $\alpha_{(t,(m',q'))}(\cdot)$ — линейный оператор в $\mathsf{H}^{\pi}_{(m',q')}$ ((1,1)-тензор).

Введем горизонтальное $(1,2)$-тензорное поле $\nabla^H\alpha(\cdot,\cdot) = K^H T\alpha(\cdot)$ на Q. Вектор $\operatorname{tr}\nabla^H\alpha(\alpha\cdot,\cdot)$ также горизонтален по построению.

Теорема 34.1. *Пусть для тензорного поля $\alpha_{(t,(m,q))}(\cdot)$ существует константа $C > 0$ такая, что*

$$\int\limits_0^T (\|\alpha_{(t,x(t))}(\cdot)\|^2 + \|\operatorname{tr}\nabla^H\alpha_{(t,x(t))}(\alpha\cdot,\cdot)\|^2)dt < C \tag{34.14}$$

для некоторого выбранного $T > 0$ и любой непрерывной кривой $x(t)$ в Q, $t \in [0,T]$, где $\|\alpha_{(t,x)}(\cdot)\|$ — операторная норма (все нормы порождены g^Q). Пусть обе связности H^{τ} и H^{π} стохастически полны (см. определение 44.5). Тогда для любой точки (m,q) в Q, любого вектора $\beta_0 \in \mathsf{H}^{\pi}_{(m,q)}$ и любого момента времени $t_0 > 0$ существует случайный процесс $\eta(t)$ в Q такой, что:

- *он корректно определен на $[0,T]$;*
- *$\eta(0) = (m,q)$ и $D\eta(0) = \beta_0$;*
- *для всех $t \in (t_0,T)$ процессы $\eta(t)$ и $\xi(t) = \pi\eta(t)$ удовлетворяют (34.11);*
- *вдоль $\eta(t)$ заряд $e(\eta(t))$ имеет постоянное значение.*

Доказательство. Без потери общности мы для простоты положим $\dfrac{\hbar}{\mathrm{m}} = 1$.

На пространстве непрерывных кривых $C^0([0,T], T_mM)$ рассмотрим фильтрацию $\mathcal{P}_t$, где при каждом $t \in [0,T]$ σ-алгебра $\mathcal{P}_t$ порождена цилиндрическими множествами с основаниями на $[0,t]$. Зададим меру Винера ν на измеримом пространстве $(C^0([0,T], T_mM), \mathcal{P}_T)$ и рассмотрим в T_mM стандартный винеровский процесс $W_m(t)$ — координатный процесс на вероятностном пространстве $(C^0([0,T], T_mM), \mathcal{P}_T, \nu)$. Поскольку H^{τ} стохастически полно, развертка Ито $W^M(t)$ процесса $W_m(t)$ относительно H^{τ} на M корректно определена. Поскольку H^{π} также стохастически полно, горизонтальный подъем $W^Q(t)$ на Q относительно H^{π} с начальным условием (m,q) также корректно определен. Подробное описание конструкции процессов $W^M(t)$ и $W^Q(t)$ имеется в [13].

Так как $T\pi : \mathsf{H}^{\pi}_{(m,q)} \to T_mM$ — линейный изоморфизм, который определяет метрический тензор q^Q в $\mathsf{H}^{\pi}_{(m,q)}$ переносом g из T_mM, перенесем в $\mathsf{H}^{\pi}_{(m,q)}$ меру Винера и винеровский процесс из T_mM в $\mathsf{H}^{\pi}_{(m,q)}$. Обозначим полученный винеровский процесс $W(t)$. Это координатный процесс на пространстве непрерывных кривых в $\mathsf{H}^{\pi}_{(m,q)}$ с σ-алгеброй $\mathcal{P}_T$, заданный мерой Винера.

Для $t \geqslant 0$ введем вещественную функцию

$$t_0(t) = \begin{cases} \dfrac{1}{t_0} & \text{при} \quad t < t_0, \\ \dfrac{1}{t} & \text{при} \quad t \geqslant t_0. \end{cases} \tag{34.15}$$

Ее производная $t_0'(t)$ равна 0 при $t < t_0$ и $-\dfrac{1}{t^2}$ при $t \geqslant t_0$.

Теперь рассмотрим в $\mathsf{H}^{\pi}_{(m,q)}$ следующее уравнение в форме Ито:

$$\beta(t) = \beta_0 + \frac{1}{2}\int\limits_0^t \Gamma^Q_{0,s}\operatorname{tr}\nabla^H\alpha_{(s,W^Q(s))}(\alpha\cdot,\cdot)ds +$$

$$+\int_0^t \Gamma^Q_{0,s}\alpha_{(s,W^Q(s))}dW(s)-\frac{1}{2}\int_0^t t_0(s)\beta(s)ds-\frac{1}{2}\int_0^t t_0'(s)W(s)ds. \quad (34.16)$$

Поскольку уравнение (34.16) линейно по β, оно имеет сильное и сильно единственное решение $\beta(t)$. Так как это решение сильное, оно определено на любом вероятностном пространстве, на котором корректно определен винеровский процесс, в частности, на пространстве непрерывных кривых в $\mathsf{H}^\pi_{(m,q)}$, снабженном мерой Винера. Рассмотрим на этом вероятностном пространстве плотность вида

$$\theta(T)=\exp\left(-\frac{1}{2}\int_0^T \beta(s)^2ds+\int_0^T(\beta(s)\cdot dW(s))\right). \quad (34.17)$$

Из формулы (34.14) и из леммы 34.2 следует, что плотность (34.17) корректно определена. Введем меру, имеющую плотность (34.17) относительно меры Винера. Хорошо известно, что после такой замены меры координатный процесс принимает вид $\zeta(t)=\int\limits_0^t\beta(s)ds+w(t)$, где $w(t)$ — некоторый винеровский процесс, не упреждающий относительно $\mathcal{P}_t$. Обозначим процесс $W^Q(t)$, рассматриваемый относительно новой меры, символом $\eta(t)$ и введем процесс $\xi(t)=\pi\eta(t)$. Процесс $\xi(t)$ получен из $W^M(t)$ заменой меры. Уравнение (34.16) при этом превращается в

$$\beta(t)=\beta_0+\frac{1}{2}\int_0^t\Gamma^Q_{0,s}\,\mathrm{tr}\,\nabla^H\alpha_{(s,\eta(t))}(\alpha\cdot,\cdot)ds+$$
$$+\int_0^t\Gamma^Q_{0,s}\alpha_{(s,\eta(s))}\beta(s)ds+\int_0^t\left(\Gamma^Q_{0,s}\alpha_{(s,\eta(s))}(\cdot)+\frac{1}{2}t_0(s)\right)dw(s)-\frac{1}{2}\int_0^t t_0(s)\beta(s)ds-\frac{1}{2}t_0(t)\zeta(t). \quad (34.18)$$

По построению $\eta(0)=(m,q)$ и $D\eta(t)=\beta_0$. Процесс $\eta(t)$ удовлетворяет равенству (34.13) также по построению. Тот факт, что при $t\in(t_0,T)$ процессы $\eta(t)$ и $\xi(t)=\pi\eta(t)$ удовлетворяют (34.12) и что $D_2\xi(t)=I$ следуют из формул для производных в среднем, найденных в [13, гл. 12, 18].

Очевидным образом $\eta(t)$ является горизонтальным подъемом процесса $\xi(t)$ относительно связности H^π с начальным условием (m,q). Напомним, что горизонтальный подъем $\eta(t)$ процесса $\xi(t)$ является параллельным переносом (m,q) вдоль $\xi(\cdot)$ относительно H^π. Следовательно, он может быть представлен в виде $(\xi(t),b_t(f))$, где b_t — горизонтальный подъем процесса $\xi(t)$ на $\mathcal{E}$ относительно связности H, а f — некоторый вектор стандартного слоя $\mathcal{F}$ (см. раздел 33). Таким образом, выборочные траектории процесса $\eta(t)$ лежат в орбите группы G и, следовательно, заряд e является постоянным вдоль $\eta(t)$. □

35. Случай комплексных расслоений над лоренцевыми многообразиями

35.1. Введение в релятивистскую стохастическую механику на лоренцевых многообразиях. Здесь мы используем релятивистскую версию стохастической механики, предложенную в [43,69,88,89] с небольшими усовершенствованиями из [13,50]. Необходимость специальных конструкций для релятивистского случая вызвана тем, что введенные для случая римановых многообразий и расслоений над ними производные в среднем оказываются нековариантными относительно группы Лоренца.

Из соображений удобства изложения здесь мы изменим обозначения: лоренцево многообразие будет обозначаться символом $\mathcal{M}$ (это позволит читателю не путать случаи риманова и лоренцева многообразий), а также мы не будем использовать сокращенное обозначение для условного математического ожидания относительно σ-алгебры «настоящее» (см. ниже).

Рассмотрим стохастический процесс $\xi(t)$ со значениями в лоренцевом многообразии $\mathcal{M}$, заданный на некотором вероятностном пространстве $(\Omega,\mathcal{F},\mathsf{P})$. Как и выше, через $\mathcal{N}^\xi_t$ мы обозначаем минимальную σ-подалгебру σ-алгебры $\mathcal{F}$, порожденную прообразами борелевских множеств в $\mathcal{M}$ при отображении $\xi(t):\Omega\to\mathcal{M}$ («настоящее» процесса $\xi(t)$). В этом разделе (в отличие от всей остальной работы) нам удобнее обозначать условное математическое ожидание относительно $\mathcal{N}_t^\xi$ символом $E(\cdot \mid \mathcal{N}_t^\xi)$. Здесь t — инвариантный параметр, который может играть роль собственного времени. Напомним (см. выше), что условное математическое ожидание случайного элемента ϑ относительно $\mathcal{N}_t^\xi$ может быть представлено как $\Theta(\xi(t))$ где Θ — это так называемая *регрессия*, которая вводится формулой $\Theta(m) = E(\vartheta \mid \xi(t) = m)$ (см., например, [26]).

Выберем событие (т. е. точку в $\mathcal{M}$) и рассмотрим нормальную карту U_m в этой точке относительно экспоненциального отображения связности Леви-Чивита на $\mathcal{M}$. Эту карту можно считать областью в касательном пространстве $T_m\mathcal{M}$, в которой метрика g задает структуру пространства Минковского. В U_m построим следующие регрессии:

$$Y_+^{U_m}(t, m') = \lim_{\Delta t \downarrow 0} E\left(\frac{\xi(t+\Delta t) - \xi(t)}{\Delta t} \mid \xi(t) = m', (\xi(t+\Delta t) - \xi(t))^2 \leqslant 0\right) + \\ + \lim_{\Delta t \downarrow 0} E\left(\frac{\xi(t) - \xi(t-\Delta t)}{\Delta t} \mid \xi(t) = m', (\xi(t) - \xi(t-\Delta t))^2 \geqslant 0\right), \quad (35.1)$$

$$Y_-^{U_m}(t, m') = \lim_{\Delta t \downarrow 0} E\left(\frac{\xi(t) - \xi(t-\Delta t)}{\Delta t} \mid \xi(t) = m', (\xi(t) - \xi(t-\Delta t))^2 \leqslant 0\right) + \\ + \lim_{\Delta t \downarrow 0} E\left(\frac{\xi(t+\Delta t) - \xi(t)}{\Delta t} \mid \xi(t) = m', (\xi(t+\Delta t) - \xi(t))^2 \geqslant 0\right). \quad (35.2)$$

Введем $X_+^0(t,m) = Y_+^{U_m}(t,m)$ и $X_-^0(t,m) = Y_-^{U_m}(t,m)$. Отметим, что $X_+^0(t,m)$ и $X_-^0(t,m)$ — векторные поля на $\mathcal{M}$, т. е. при заменах координат они преобразуются как сечения касательного расслоения $T\mathcal{M}$.

Релятивистские производные в среднем справа и слева процесса $\xi(t)$ определяются формулами

$$D_+\xi(t) = X_+^0(t, \xi(t)) \ \text{ и } \ D_-\xi(t) = X_-^0(t, \xi(t)). \quad (35.3)$$

Показано, что производные в среднем, введенные формулами (35.3), ковариантны относительно группы Лоренца.

Вектор $v^\xi(t) = \dfrac{1}{2}(D_+ + D_-)\xi(t)$ называется *текущей скоростью* процесса $\xi(t)$. Отметим следующий важный факт, проверяемый простыми вычислениями: $\dfrac{1}{2}(D_+ + D_-)\xi(t) = \dfrac{1}{2}(D + D_*)\xi(t)$, т. е. релятивистская текущая скорость совпадает с нерелятивистской. Из свойств условного математического ожидания следует, что существуют измеримые по Борелю векторные поля (регрессии) $v^\xi(t,m)$ на $\mathcal{M}$ такие, что $v^\xi(t) = v^\xi(t, \xi(t))$.

Введем «релятивистские» приращения процесса $\xi(t)$ следующим образом:

$$\Delta_+\xi(t) = E(\xi(t+\Delta t) - \xi(t) \mid (\xi(t+\Delta t) - \xi(t))^2 \leqslant 0) + E(\xi(t) - \xi(t-\Delta t) \mid (\xi(t) - \xi(t-\Delta t))^2 \geqslant 0),$$
$$\Delta_-\xi(\tau) = (\xi(t) - \xi(t-\Delta t) \mid (\xi(t) - \xi(t-\Delta t))^2 \geqslant 0) + E(\xi(t+\Delta t) - \xi(t) \mid (\xi(t+\Delta t) - \xi(t))^2 \leqslant 0)).$$

Теперь, следуя [13], мы вводим релятивистскую квадратичную производную в среднем D_2 формулой

$$D_2\xi(t) = \lim_{\Delta\tau \downarrow 0} E\Big(\frac{\Delta_+\xi(t) \otimes \Delta_+\xi(t)}{\Delta t} \mid \mathcal{N}_t^\xi\Big) = \lim_{\Delta\tau \downarrow 0} E\Big(\frac{\Delta_-\xi(t) \otimes \Delta_-\xi(t)}{\Delta t} \mid \mathcal{N}_t^\xi\Big).$$

Как и ранее, если она существует, то принимает значения в $(2,0)$-тензорах.

Везде ниже мы имеем дело с процессами, вдоль которых корректно определен параллельный перенос относительно некоторой связности. В данном случае мы работаем с $\xi(\cdot)$ и параллельным переносом относительно связности H^τ, и сформулированное предположение выполняется, если, например, $\xi(t)$ — процесс Ито на, т. е. развертка Ито (см. определение 44.4) процесса Ито в некотором касательном пространстве к $\mathcal{M}$ (см. [13, 50]). Обозначим через $\bar{\Gamma}_{t,s}$ оператор такого параллельного переноса векторов из (случайной) точки $\xi(s)$ процесса в (случайную) точку $\xi(t)$.

Для векторного поля $Z(t,m)$ на $\mathcal{M}$ релятивистские производные в среднем справа и слева $\mathbf{D}_+Z(t,\xi(t))$ и $\mathbf{D}_-Z(t,\xi(t))$ строятся по формулам

$$\mathbf{D}_+Z(t,\xi(t)) = \lim_{\Delta t \downarrow 0} E\left(\frac{\bar{\Gamma}_{t,t+\Delta t}Z(t+\Delta t, \xi(t+\Delta t)) - Z(t,\xi(t))}{\Delta t} \mid \mathcal{N}_t^\xi, (\xi(t+\Delta t) - \xi(t))^2 \leqslant 0\right) +$$

$$+\lim_{\Delta t\downarrow 0} E\left(\frac{Z(t,\xi(t))-\bar{\Gamma}_{t,t-\Delta t}Z(t-\Delta t,\xi(t-\Delta t))}{\Delta t}\mid \mathcal{N}_t^{\xi},(\xi(t)-\xi(t-\Delta t))^2\geqslant 0\right); \quad (35.4)$$

$$\mathbf{D}_{-}Z(t,\xi(t))=\lim_{\Delta t\downarrow 0} E\left(\frac{Z(t,\xi(t))-\bar{\Gamma}_{t,t-\Delta t}Z(t-\Delta t,\xi(t-\Delta t))}{\Delta t}\mid \mathcal{N}_t^{\xi},(\xi(t)-\xi(t-\Delta t))^2\leqslant 0\right)+$$
$$+\lim_{\Delta t\downarrow 0} E\left(\frac{\bar{\Gamma}_{t,t+\Delta t}Z(t+\Delta t,\xi(t+\Delta t))-Z(t,\xi(t))}{\Delta t}\mid \mathcal{N}_t^{\xi},(\xi(t+\Delta t)-\xi(t))^2\geqslant 0\right). \quad (35.5)$$

Релятивистское уравнение Ньютона—Нельсона имеет вид

$$\begin{cases} \frac{1}{2}(\mathbf{D}_{+}D_{-}+\mathbf{D}_{-}D_{+})\xi(t)=\bar{\alpha}(\xi(t),v^{\xi}(t)), \\ D_2\xi(t)=\frac{\hbar}{\mathrm{m}}I, \end{cases} \quad (35.6)$$

где $\hbar=\dfrac{h}{2\pi}$, h — постоянная Планка и m — масса (масса покоя) частицы.

Если связность Леви-Чивита метрики g стохастически полна, в [13, 50] показано, что при некоторых условиях типа ограниченности силового поля уравнение (35.6) имеет решение с подходящими начальными условиями для силового поля вида $\alpha(\xi(t),v^{\xi}(t))=\bar{\alpha}(\xi(t))\circ v^{\xi}$, где $\bar{\alpha}(m):T_m\mathcal{M}\to T_m\mathcal{M}$ — линейный оператор. Слагаемое, являющееся векторным полем, как в нерелятивистском случае, отсутствует, так как в релятивистской теории 4-сила обязательно зависит от 4-скорости. Поскольку собственное время задается отдельно вдоль каждой времениподобной мировой линии и не определено в каждом событии, 4-сила не зависит от времени. Естественные соотношения между (35.6) и уравнением Клейна—Гордона в некоторых случаях описаны в [43, 69, 88, 89].

35.2. Производные в среднем на комплексных векторных расслоениях над лоренцевым многообразием. В этом пункте мы модифицируем аппарат пункта 35.1 так, что его удается использовать на пространстве комплексного векторного расслоения Q над лоренцевым многообразием $\mathcal{M}$.

Рассмотрим стохастический процесс $\eta(t)$ на пространстве расслоения Q и введем процесс $\xi(t)=\pi\eta(t)$ на $\mathcal{M}$. Через $\bar{\Gamma}^{\pi}_{t,s}$ мы обозначаем параллельный перенос случайных векторов из слоя $Q_{\xi(s)}$ в слой $Q_{\xi(t)}$ вдоль $\xi(\cdot)$ относительно связности H^{π} (ср. с разделом 35.1). Для $\eta(t)$ мы вводим ковариантные производные в среднем формулами

$$\mathbf{D}_{+}\eta(t)=\lim_{\Delta t\downarrow 0} E\left(\frac{\bar{\Gamma}^{\pi}_{t,t+\Delta t}\eta(t+\Delta t)-\eta(t)}{\Delta t}\mid \mathcal{N}_t^{\xi},(\xi(t+\Delta t)-\xi(t))^2\leqslant 0\right)+$$
$$+\lim_{\Delta t\downarrow 0} E\left(\frac{\eta(t)-\bar{\Gamma}^{\pi}_{t,t-\Delta t}\eta(t-\Delta t)}{\Delta t}\mid \mathcal{N}_t^{\xi},(\xi(t)-\xi(t-\Delta t))^2\geqslant 0\right); \quad (35.7)$$

$$\mathbf{D}_{-}\eta(t)=\lim_{\Delta t\downarrow 0} E\left(\frac{\eta(t)-\bar{\Gamma}^{\pi}_{t,t-\Delta t}\eta(t-\Delta t)}{\Delta t}\mid \mathcal{N}_t^{\xi},(\xi(t)-\xi(t-\Delta t))^2\leqslant 0\right)+$$
$$+\lim_{\Delta t\downarrow 0} E\left(\frac{\bar{\Gamma}^{\pi}_{t,t+\Delta t}\eta(t+\Delta t)-\eta(t)}{\Delta t}\mid \mathcal{N}_t^{\xi},(\xi(t+\Delta t)-\xi(t))^2\geqslant 0\right) \quad (35.8)$$

(аналоги (35.4) и (35.5)). Как и выше, $v^{\eta}(t)=\dfrac{1}{2}(\mathbf{D}_{+}+\mathbf{D}_{-})\eta(t)$ называется *текущей скоростью* процесса $\eta(t)$.

Лемма 35.1.

(i) $T\pi\mathbf{D}_{+}\eta(t)=D_{+}\xi(t)$;
(ii) $T\pi\mathbf{D}_{-}\eta(t)=D_{-}\xi(t)$;
(iii) $T\pi v^{\eta}=v^{\xi}$.

Утверждение леммы 35.1 следует из формул (35.1), (35.2), (35.7) и (35.8) и из определения текущей скорости.

Для задания производных в среднем векторных полей вдоль $\eta(t)$ на Q мы используем параллельный перенос $\bar{\Gamma}^Q_{t,s}$ векторов, касательных к Q в $\eta(s)$, в векторы, касательные к Q в $\eta(t)$, вдоль $\eta(\cdot)$ относительно связности H^Q. Аналогично формулам (35.4) и (35.5), для векторного поля $Z(t,(m,q))$ на Q введем ковариантные производные в среднем формулами

$$\mathbf{D}^Q_+ Z(t,\eta(t)) = \lim_{\Delta t\downarrow 0} E\left(\frac{\bar{\Gamma}^Q_{t,t+\Delta t} Z(t+\Delta t,\eta(t+\Delta t)) - Z(t,\eta(t))}{\Delta t} \mid \mathcal{N}^\xi_t, (\xi(t+\Delta t)-\xi(t))^2 \leqslant 0\right) + \\ + \lim_{\Delta t\downarrow 0} E\left(\frac{Z(t,\eta(t)) - \bar{\Gamma}^Q_{t,t-\Delta t} Z(t-\Delta t,\eta(t-\Delta t))}{\Delta t} \mid \mathcal{N}^\xi_t, (\xi(t)-\xi(t-\Delta t))^2 \geqslant 0\right); \quad (35.9)$$

$$\mathbf{D}^Q_- Z(t,\eta(t)) = \lim_{\Delta t\downarrow 0} E\left(\frac{Z(t,\eta(t)) - \bar{\Gamma}^Q_{t,t-\Delta t} Z(t-\Delta t,\eta(t-\Delta t))}{\Delta t} \mid \mathcal{N}^\xi_t, (\xi(t)-\xi(t-\Delta t))^2 \leqslant 0\right) + \\ + \lim_{\Delta t\downarrow 0} E\left(\frac{\bar{\Gamma}^Q_{t,t+\Delta t} Z(t+\Delta t,\eta(t+\Delta t)) - Z(t,\eta(t))}{\Delta t} \mid \mathcal{N}^\xi_t, (\xi(t+\Delta t)-\xi(t))^2 \geqslant 0\right). \quad (35.10)$$

Напомним (см., например, [13, 18]) что параллельный перенос вдоль случайного процесса может быть представлен как предел параллельных переносов вдоль процессов, чьи выборочные траектории являются кусочно-геодезическими (т. е. кусочно-гладкими) аппроксимациями выборочных траекторий первоначального процесса. Таким образом, из теоремы 33.2 следует, что параллельный перенос относительно H^Q сохраняет распределения H^π и $\mathcal{V}$ инвариантными, т. е. $\bar{\Gamma}^Q_{t,s}$ переводит $\mathsf{H}^\pi_{\eta(s)}$ на $\mathsf{H}^\pi_{\eta(t)}$ и $\mathcal{V}_{\eta(s)}$ на $\mathcal{V}_{\eta(t)}$, соответственно. Обозначим через $\mathbf{D}^H_+$ и $\mathbf{D}^H_-$ производные, введенные формулами (35.9) и (35.10), соответственно, для горизонтальных компонент векторов (т. е. принимающий значения в H^π), а через $\mathbf{D}^V_+$ и $\mathbf{D}^V_-$ — для вертикальных компонент векторов (т. е. принимающих значения в $\mathcal{V}$). Таким образом, $\mathbf{D}^Q_+ = \mathbf{D}^H_+ + \mathbf{D}^V_+$ и $\mathbf{D}^Q_- = \mathbf{D}^H_- + \mathbf{D}^V_-$.

Вектор $\frac{1}{2}(\mathbf{D}^Q_+\mathbf{D}_- + \mathbf{D}^Q_-\mathbf{D}_+)\eta$ называется 4-*ускорением* процесса η в пространстве расслоения Q.

35.3. Движение квантовой частицы в классическом калибровочном поле. По общей идеологии стохастической механики уравнение Ньютона—Нельсона, соответствующее закону Ньютона (33.2), имеет вид

$$\left\{\begin{array}{l} \frac{1}{2}(\mathbf{D}^Q_+\mathbf{D}_- + \mathbf{D}^Q_-\mathbf{D}_+)\eta(t) = \overline{e(\eta(t)) \bullet \tilde{\Phi}_{\eta(t)}(\cdot, v^\eta(t))}, \\ D_2\xi(t) = \frac{\hbar}{\mathrm{m}} I, \end{array}\right. \quad (35.11)$$

где $\xi(t) = \pi\eta(t)$. Мы интерпретируем (35.11) как уравнение движения квантовой частицы в классическом калибровочном поле.

Текущая скорость v^η в правой части (35.11) раскладывается в сумму ее вертикальной и горизонтальной компонент: $v^\eta = v^H_\eta + v^V_\eta$, где $v^H_\eta \in \mathsf{H}^\pi$ и $v^V_\eta \in \mathcal{V}$. Из того, что $\tilde{\Phi}_{\eta(t)}(\cdot,\cdot)$ линейно по обоим аргументам, следует, что $\tilde{\Phi}_{\eta(t)}(\cdot, v^\eta) = \tilde{\Phi}_{\eta(t)}(\cdot, v^H_\eta) + \tilde{\Phi}_{\eta(t)}(\cdot, v^V_\eta)$, а из того, что эта форма горизонтальна (см. лемму 33.1), вытекает, что $\tilde{\Phi}_{\eta(t)}(\cdot, v^V_\eta) = 0$. Поэтому первое уравнение системы (35.11) эквивалентно следующей системе:

$$\frac{1}{2}(\mathbf{D}^H_+\mathbf{D}_- + \mathbf{D}^H_-\mathbf{D}_+)\eta(t) = \overline{e(\eta(t)) \bullet \tilde{\Phi}_{\eta(t)}(\cdot, v^H_\eta(t))}, \quad (35.12)$$

$$\frac{1}{2}(\mathbf{D}^V_+\mathbf{D}_- + \mathbf{D}^V_-\mathbf{D}_+)\eta(t) = 0. \quad (35.13)$$

Поскольку Φ — 2-форма, имеем $e(\eta(t)) \bullet \tilde{\Phi}_{\eta(t)}(v^H_\eta(t), v^H_\eta(t)) = 0$, т. е. $\overline{e(\eta(t)) \bullet \tilde{\Phi}_{\eta(t)}(\cdot, v^H_\eta(t))}$ ортогонально $v^H_\eta(t)$ относительно g^Q.

Для простоты изложения обозначим $\overline{e(\eta(t)) \bullet \tilde{\Phi}_{\eta(t)}(\cdot, v^H_\eta(t))}$ символом $\alpha_{(t,\eta(t))} v^H_\eta$, где по построению $\alpha_{(t,(m',q'))}(\cdot)$ — линейный оператор в $\mathsf{H}^\pi_{(m',q')}$ ((1, 1)-тензор).

Введем горизонтальное $(1,2)$-тензорное поле $\nabla^H \alpha(\cdot,\cdot) = K^H T\alpha(\cdot)$ на Q. Векторное поле $\operatorname{tr}\nabla^H \alpha(\alpha\cdot,\cdot)$ также горизонтально поп построению.

Предположим, что и H^τ, и H^π стохастически полны (см. определение 44.5, подробное изложение в [13, 50]). Выберем точку $(m,q)\in Q$ и в $T_m\mathcal{M}$ зафиксируем лоренц-ортогональный репер, состоящий из векторов X_0, X_1, X_2, X_3, где X_0 времениподобный, а остальные векторы пространственноподобны. Введем в $T_m\mathcal{M}$ евклидову метрику, изменив знак X_0^2 с минуса на плюс. Тогда $T_m\mathcal{M}$ становится евклидовым пространством.

Зафиксируем $T>0$ и на банаховом пространстве $C^0([0,T],T_m\mathcal{M})$ введем σ-алгебру $\mathcal{P}$, порожденную цилиндрическими множествами, и семейство ее подалгебр $\mathcal{P}_t$, порожденное цилиндрическими множествами с основаниями на $[0,t]$. Поскольку $T_m\mathcal{M}$ теперь имеет структуру евклидова пространства, мы можем определить меру Винера ν на $(C^0([0,T],T_m\mathcal{M}),\mathcal{P})$ и, таким образом, рассмотреть стандартный винеровский процесс $W_m(t)$ в $T_m\mathcal{M}$ — координатный процесс на $(C^0([0,T],T_m\mathcal{M}),\mathcal{P},\nu)$. Мы предполагаем все $\mathcal{P}_t$ полными, т. е. содержащими все множества нулевой меры ν.

Так как связность H^τ стохастически полна, развертка Ито $W^{\mathcal{M}}(t)$ процесса $W_m(t)$ относительно H^τ на $\mathcal{M}$ определена корректно. Поскольку H^π также стохастически полна, горизонтальный подъем процесса $W^Q(t)$ на Q относительно H^π, начинающийся в (m,q), также определен корректно. Более подробно построение процессов $W^{\mathcal{M}}(t)$ и $W^Q(t)$ описано в [13, 50]. Вдоль W^Q рассмотрим элементы $\alpha^i_j(t,x)$ матрицы $\alpha_{t,x}(\cdot)$ и координаты $V^k(t,x)$ вектора $\operatorname{tr}\nabla^H\alpha_{t,x}(\alpha_{t,x}\cdot,\cdot)$ относительно базисов, полученных как горизонтальный подъем параллельного переноса репера $X_0,\dots,X_3$.

Отметим, что условие (34.14) не имеет в данном случае естественного физически осмысленного аналога. Вместо него мы принимаем следующее условие.

Условие 35.1. *Вдоль выборочных траекторий $x(t)$ процесса W^Q для некоторого $C>0$ ν-п.н. выполняется неравенство*

$$\int_0^T (\alpha^i_j(t,x(t))^2 + V^k(t,x(t))^2)dt < C$$

для всех индексов i,j,k.

Теорема 35.1. *Пусть обе связности H^τ и H^π стохастически полны и выполнено условие* 35.1. *Тогда для любого вектора $\beta_0\in\mathsf{H}^\pi_{(m,q)}$ и любого момента времени $t_0>0$ существует процесс $\eta(t)$ в Q такой, что*

- *он корректно определен на $[0,T]$;*
- *$\eta(0)=(m,q)$ и $\mathbf{D}_+\eta(0)=\beta_0$;*
- *для $t\in(t_0,T)$ процессы $\eta(t)$ и $\xi(t)=\pi\eta(t)$ удовлетворяют уравнению* (35.11);
- *вдоль $\eta(t)$ заряд $e(\eta(t))$ имеет постоянное значение.*

Замечание 35.1. Из физических соображений вектор β_0 следует выбирать как горизонтальный подъем времениподобного вектора в $T_m\mathcal{M}$, направленного в будущее.

Доказательство. Для простоты и без потери общности мы полагаем $\dfrac{\hbar}{\mathrm{m}}=1$.

Поскольку $T\pi:\mathsf{H}^\pi_{(m,q)}\to T_m\mathcal{M}$ — линейный изоморфизм, мы можем перенести и евклидову метрику, и винеровский процесс из $T_m\mathcal{M}$ в $\mathsf{H}^\pi_{(m,q)}$. Обозначим последний винеровский процесс символом $W(t)$. Это координатный процесс на вероятностном пространстве $(C^0([0,T],\mathsf{H}^\pi_{(m,q)}),\mathcal{P},\nu)$.

Далее мы будем использовать функцию $t_0(t)$, введенную формулой (34.15), и ее производную.

Теперь рассмотрим в $\mathsf{H}^\pi_{(m,q)}$ следующее стохастическое дифференциальное уравнение в форме Ито:

$$\beta(t)=\beta_0+\frac12\int_0^t \bar\Gamma^Q_{0,s}\operatorname{tr}\nabla^H\alpha_{(s,W^Q(s))}(\alpha\cdot,\cdot)ds + \\ + \int_0^t \bar\Gamma^Q_{0,s}\alpha_{(s,W^Q(s))}dW(s) - \frac12\int_0^t t_0(s)\beta(s)ds - \frac12\int_0^t t_0'(s)W(s)ds. \quad (35.14)$$

Отметим, что несмотря на то, что вид уравнения (35.14) практически совпадает с (34.16), в этих уравнениях задействованы разные связности и разные операторы параллельного переноса. Тем не менее, рассуждения, использованные в доказательстве теоремы 34.1, в основном сохраняются.

Из предположения 35.1 следует, что (35.14) корректно определено. Из линейности уравнения (35.14) следует, что оно имеет сильное и сильно единственное решение $\beta(t)$. После замены меры Винера на меру с плотностью

$$\theta(T) = \exp\left(-\frac{1}{2}\int_0^T \beta(s)^2 ds + \int_0^T (\beta(s)\cdot dW(s))\right) \tag{35.15}$$

относительно[1] ν мы получаем уравнение

$$\beta(t) = \beta_0 + \frac{1}{2}\int_0^t \bar\Gamma^Q_{0,s} \operatorname{tr}\nabla^H \alpha_{(s,\eta(t))}(\alpha\cdot,\cdot)ds + \int_0^t \bar\Gamma^Q_{0,s}\alpha_{(s,\eta(s))}\beta(s)ds + \int_0^t \bar\Gamma^Q_{0,s}\alpha_{(s,\eta(s))}dw(s) - \\ -\frac{1}{2}\int_0^t t_0(s)\beta(s)ds - \frac{1}{2}\int_0^t t_0'(s)\zeta(s)ds. \tag{35.16}$$

По построению, $\eta(0) = (m,q)$ и $\mathbf{D}_+\eta(t) = \beta_0$. Равенство (35.13) выполнено для $\eta(t)$ и $\xi(t) = \pi\eta(t)$ также по построению. То, что при $t \in (t_0, T)$ процессы $\eta(t)$ и $\xi(t)$ удовлетворяют (35.12) и что $D_2\xi(t) = I$, вытекает из формул производных в среднем, выведенных в [13, гл. 12, 18] (см. также [50, гл. 9, 15].)

Тот факт, что заряд e является постоянным вдоль решения, доказывается в точности так же, как в доказательстве теоремы 34.1. □

Частные случаи группы G, равной $U(1)$, $SU(2)$ или $SU(3)$, и $\mathcal{F}$, являющегося комплексным линейным пространством соответствующей размерности, представляют особый интерес. Они описывают калибровочные поля, изучаемые в современной физике. Рассмотрим случай $G = U(1)$ и $\mathcal{F} = \mathbb{C}^1$ с $h(X,Y) = X\bar{Y}$ (черта означает комплексное сопряжение).

Алгебра Ли $\mathfrak{u}(1)$ — это вещественная прямая, следовательно, заряд превращается в вещественнозначную функцию, а θ и Φ — в обычные дифференциальные формы со значениями в $\mathbb{R}$. Из структурных уравнений (33.1) и из того, что $U(1)$ — коммутативная группа, мы выводим, что $\Phi = D\theta = d\theta$. Это означает, что, во-первых, Φ является подъемом некоторой 2-формы Ψ с $\mathcal{M}$ на $\mathcal{E}$, и, во-вторых, что уравнения (33.1) превращаются обычные уравнения Максвелла в геометрически инвариантной форме (см., например, [13, 50]). Если мы (как обычно) предположим, что замкнутая форма Ψ точна, т. е. $\Psi = dA$, где A — 1-форма на $\mathcal{M}$, тогда 1-форму A можно считать 4-потенциалом, а Ψ — электромагнитным полем. Напомним, что на пространстве Минковского все замкнутые формы точны.

Так как значение заряда e вдоль решения, построенного в теореме 34.1, постоянно, легко видеть, что $\overline{e \bullet \tilde\Phi}$ превращается в подъем вектора $e\bar\Psi$ с $\mathcal{M}$ на Q. Таким образом, уравнение (35.11) сводится к уравнению Ньютона—Нельсона на $\mathcal{M}$, которое соответствует классическому уравнению Лоренца движения заряженной частицы в электромагнитном поле. Отметим, что в [43, 69, 88, 89] установлены соотношения между этим уравнением Ньютона—Нельсона и уравнением Клейна—Гордона.

[1] β^2 и $(\beta(s)\cdot dW(s))$ найдены относительно евклидова скалярного произведения в $\mathsf{H}^\pi_{(m,q)}$; из условия 35.1 следует, что плотность (35.15) задана корректно.

Глава 8

ГРУППЫ ДИФФЕОМОРФИЗМОВ И ВЯЗКАЯ ГИДРОДИНАМИКА

36. Группы диффеоморфизмов

Здесь мы опишем некоторые свойства групп соболевских диффеоморфизмов на плоском n-мерном торе (см. подробности в [44], а также развитие для случая плоского тора в [50]).

Пусть $\mathcal{T}^n$— плоский n-мерный тор и $\mathcal{D}^s(\mathcal{T}^n)$ — его группа соболевских диффеоморфизмов класса $H^s (s > n/2 + 1)$. Напомним, что для $s > n/2 + 1$ отображения из H^s имеют гладкость C^1.

$\mathcal{D}^s(\mathcal{T}^n)$ является гильбертовым многообразием и группой относительно суперпозиции с единицей $e = id$. Касательное пространство $T_e\mathcal{D}^s(\mathcal{T}^n)$ — это пространство всех H^s-векторных полей на $\mathcal{T}^n$. Мы обозначаем через β подпространство в $T_e\mathcal{D}^s(\mathcal{T}^n)$, состоящее из бездивергентных H^s-векторных полей на $\mathcal{T}^n$.

Касательное расслоение $T\mathcal{D}^s(\mathcal{T}^n)$ — это множество H^s-отображений из $\mathcal{T}^n$ в $T\mathcal{T}^n$ такое, что проекции на $\mathcal{T}^n$ дают отображения из $\mathcal{D}^s(\mathcal{T}^n)$.

В любом $T_f\mathcal{D}^s(\mathcal{T}^n)$ можно определить L^2-скалярное произведение по формуле

$$(X, Y) = \int\limits_{\mathcal{T}^n} \langle X(m), Y(m)\rangle_{f(m)}\mu(dm). \tag{36.1}$$

Семейство этих скалярных произведений образует так называемую слабую риманову метрику на $\mathcal{D}^s(\mathcal{T}^n)$. В частности, в $T_e\mathcal{D}^s(\mathcal{T}^n)$ (36.1) принимает вид

$$(X, Y)_e = \int\limits_{\mathcal{T}^n} \langle X(m), Y(m)\rangle_m\mu(dm). \tag{36.2}$$

Правый сдвиг $R_f : \mathcal{D}^s(T^n) \to \mathcal{D}^s(T^n)$, где $R_f(\Theta) = \Theta \circ f$ для $\Theta, f \in \mathcal{D}^s(T^n)$ — C^∞-гладкое отображение. Касательное отображение к правому сдвигу имеет вид $TR_f(X) = X \circ f$ при $X \in T\mathcal{D}^s(T^n)$.

С другой стороны, левый сдвиг $L_f : \mathcal{D}^s(T^n) \to \mathcal{D}^s(T^n)$, где $L_f(\Theta) = f \circ \Theta$ при $\Theta, f \in \mathcal{D}^s(T^n)$, только непрерывен. Зафиксируем вектор $x \in \mathbb{R}^n$ и обозначим через $l_x : T^n \to T^n$ отображение $l_x(m) = m + x$ по модулю факторизации по целочисленной решетке пространства $\mathbb{R}^n$. Отметим, что левый сдвиг Ll_x является C^∞-гладким.

Правоинвариантное векторное поле $\bar{X}$ на $\mathcal{D}^s(\mathcal{T}^n)$ порождено единственным вектором $X \in T_e\mathcal{D}^s(\mathcal{T}^n)$ по формуле $\bar{X}_g = TR_gX = X \circ g$. Отметим, что поле $\bar{X}$ является C^k-гладким тогда и только тогда, когда X как векторное поле на $\mathcal{T}^n$ принадлежит соболевскому классу H^{s+k}. В частности, $\bar{X}$ C^∞-гладко тогда и только тогда, когда X C^∞-гладко.

Напомним, что $T\mathcal{T}^n = \mathcal{T}^n \times \mathbb{R}^n$. Введем операторы $B : T\mathcal{T}^n \to \mathbb{R}^n$ — проекция на второй сомножитель в $\mathcal{T}^n \times \mathbb{R}^n$, и $A(m) : \mathbb{R}^n \to \mathcal{T}^n_m,$ — обратный к B линейный изоморфизм $\mathbb{R}^n$ на касательное пространство к $\mathcal{T}^n$ в $m \in \mathcal{T}^n$.

Введем $Q_{g(m)} = A(g(m))\circ B$, где $g \in \mathcal{D}^s(\mathcal{T}^n)$, $m \in \mathcal{T}^n$. Для каждого $Y \in T_f\mathcal{D}^s(\mathcal{T}^n)$ мы получаем, что $Q_gY = A(g(m)) \circ B(Y(m)) \in T_g\mathcal{D}^s(\mathcal{T}^n)$ при всех $f \in \mathcal{D}^s(\mathcal{T}^n)$.

Лемма 36.1. *Имеют место следующие соотношения*:

$$TR_{g^{-1}}(Q_gX) = Q_e(TR_{g^{-1}}X), \qquad TR_g(Q_{g^{-1}}X) = Q_e(TR_gX).$$

Лемма 36.2. *Q_g является параллельным переносом в $\mathcal{D}^s(\mathcal{T}^n)$ относительно связности Леви-Чивита метрики* (36.1).

Доказательства лемм 36.1 и 36.2 можно найти, например, в [50].

Таким образом, для гладкого векторного поля $Y(t)$ вдоль гладкой кривой $g(t)$ в $\mathcal{D}^s(\mathcal{T}^n)$ ковариантная производная в момент времени t^* определяется как

$$\frac{\bar{D}}{dt}Y(t)|_{t=t^*} = \frac{d}{dt}(Q_{g(t^*)}Y(t))|_{t=t^*}.$$

Так же, как в конечномерном случае, геодезическая — это гладкая кривая $g(t)$ в $\mathcal{D}^s(\mathcal{T}^n)$ такая, что

$$\frac{\bar{D}}{dt}\dot{g}(t) = 0. \tag{36.3}$$

Для такой кривой $g(t)$ построим вектор $v(t) \in T_e\mathcal{D}^s(\mathcal{T}^n)$ по формуле $v(t) = \dot{g}(t) \circ g^{-1}(t)$.

Лемма 36.3. *Если $g(t)$ — геодезическая, то кривая $R_f g(t)$ — также геодезическая.*

Лемма 36.4. *Пусть $g(t)$ — геодезическая и $x \in \mathbb{R}^n$ — некоторый вектор. Тогда $l_x g(t)$ — геодезическая.*

Рассмотрим оператор $\bar{A} : \mathcal{D}^s(\mathcal{T}^n) \times \mathbb{R}^n \to T\mathcal{D}^s(\mathcal{T}^n)$ такой, что $\bar{A}_e$ совпадает с введенным выше A и для каждого $g \in \mathcal{D}^s(\mathcal{T}^n)$ отображение $\bar{A}_g : \mathbb{R}^n \to T_g\mathcal{D}^s(\mathcal{T}^n)$ получается из $\bar{A}_e$ правым сдвигом, т. е. для $X \in \mathbb{R}^n$:

$$\bar{A}_g(X) = TR_g \circ A_e(X) = (A \circ g)(X).$$

Каждое правоинвариантное векторное поле $\bar{A}(X)$ является C^∞-гладким на $\mathcal{D}^s(\mathcal{T}^n)$ для каждого $X \in \mathbb{R}^n$.

Для любой точки $m \in T^n$ обозначим через $\exp_m : T_mT^n \to T^n$ отображение, которое переводит вектор $X \in T_mT^n$ в точку $m + X$ по модулю факторизации по целочисленной решетке на T^n. Семейство таких отображений порождает отображение $\overline{\exp} : T_e\mathcal{D}^s(T^n) \to \mathcal{D}^s(T^n)$, которое переводит вектор $X \in T_e\mathcal{D}^s(T^n)$ в $e + X \in \mathcal{D}^s(T^n)$, где $e + X$ — диффеоморфизм T^n вида: $(e + X)(m) = m + X(m)$.

Рассмотрим суперпозицию $\overline{\exp} \circ \bar{A}_e : \mathbb{R}^n \to \mathcal{D}^s(\mathcal{T}^n)$. По построению для произвольного $X \in \mathbb{R}^n$ мы получаем, что $\overline{\exp} \circ \bar{A}_e(X)(m) = m + X$, т. е. тот же самый вектор X добавляется к каждой точке m.

Пусть $\mathcal{D}^s_\mu(\mathcal{T}^n)$ — группа соболевских сохраняющих объем H^s-диффеоморфизмов на $\mathcal{T}^n$ ($s > n/2+1$), подгруппа и гильбертово подмногообразие $\mathcal{D}^s(\mathcal{T}^n)$ (см. [44,50]). Так же как для $\mathcal{D}^s(\mathcal{T}^n)$, можно ввести правый сдвиг и левый сдвиг. Первый — C^∞-гладкий, а второй непрерывен.

Касательное пространство к $\mathcal{D}^s_\mu(\mathcal{T}^n)$ в единице $e = id$ обозначается через $T_e\mathcal{D}^s_\mu(\mathcal{T}^n)$. Это пространство всех бездивергентных H^s-векторных полей на $\mathcal{T}^n$. Касательное пространство в $\eta \in \mathcal{D}^s_\mu(\mathcal{T}^n)$ состоит из суперпозиций $X \circ \eta$, где $X \in T_e\mathcal{D}^s_\mu(\mathcal{T}^n)$. Отметим, что касательное отображение к правому сдвигу имеет ту же форму, как просто для правого сдвига: $TR_gX = X \circ g$, $X \in T_e\mathcal{D}^s_\mu(\mathcal{T}^n)$.

Так же, как и в случае $\mathcal{D}^s(\mathcal{T}^n)$, правоинвариантное векторное поле $\bar{X}$ на $\mathcal{D}^s_\mu(\mathcal{T}^n)$ порождено единственным вектором $X \in T_e\mathcal{D}^s_\mu(\mathcal{T}^n)$ по формуле $\bar{X}_g = TR_gX = X \circ g$. Отметим, что $\bar{X}$ является C^k-гладким тогда и только тогда, когда X как вектор на $\mathcal{T}^n$ принадлежит соболевскому классу H^{s+k}. В частности, $\bar{X}$ C^∞-гладко тогда и только тогда, когда X C^∞-гладко.

Отметим, что поле операторов A можно рассматривать как отображение $A : \mathbb{R}^n \to T_e\mathcal{D}^s_\mu(\mathcal{T}^n)$.

Но $\mathcal{D}^s_\mu(\mathcal{T}^n)$ мы используем слабую риманову метрику, которая является сужением (36.1) на касательное расслоение $\mathcal{D}^s_\mu(\mathcal{T}^n)$. Рассмотрим ортогональную проекцию относительно скалярного произведения (36.2) $P : H^s \to T_e\mathcal{D}^s_\mu(\mathcal{T}^n)$. Из разложения Ходжа (см., например, [44,50]) вытекает, что эта проекция существует и ядро P является пространством всех градиентов. Так что, для произвольного $Y \in H^s$ имеет место представление

$$P(Y) = Y - \operatorname{grad} p, \tag{36.4}$$

где p — некоторая H^{s+1}-функция на $\mathcal{T}^n$ (единственная с точностью до аддитивной константы).

Проектор P правыми сдвигами порождает послойно правоинвариантный проектор $\bar{P}$ по формуле $\bar{P}_g = TR_gPTR_g^{-1}$ в точке g группы диффеоморфизмов.

Лемма 36.5. *$\bar{P}$ является гладким отображением.*

Весьма сложное доказательство этой леммы имеется в [44].

Ковариантная производная на $\mathcal{D}^s_\mu(\mathcal{T}^n)$ вводится формулой $\dfrac{\tilde{D}}{dt} = \bar{P}\dfrac{\bar{D}}{dt}$.

Рассмотрим на $\mathcal{D}^s_\mu(\mathcal{T}^n)$ уравнение

$$\frac{\tilde{D}}{dt}\dot{g}(t) = \bar{F}(t, g(t), \dot{g}(t)). \tag{36.5}$$

Если F достаточно гладко, то для любого начального данного $g(0) = e$ и $\dot{g}(0) = u_0 \in T_e\mathcal{D}^s_\mu(\mathcal{T}^n)$ уравнение (36.5) имеет решение, корректно определенное на некотором интервале $t \in [0,T]$. Это решение описывает поток идеальной несжимаемой жидкости на $\mathcal{T}^n$ под действием внешней силы F. Если $F = 0$, это геодезическая связности Леви-Чивита метрики (36.2) и она описывает поток в отсутствие внешних сил. Ниже, если не сказано противного, мы имеем дело с $g(t)$ в случае $F = 0$.

Замечание 36.1. Используя оператор P и формулу (36.4), мы получаем следующую модификацию формулы (1.15). Как и в замечании 1.4, в случае, когда ξ имеет коэффициент диффузии $\sigma^2 I$, обозначим регрессию $D_*\xi$ символом Y. Тогда

$$PD_*D_*\xi = \left(\frac{-\sigma^2}{2}\Delta + Y\cdot\nabla + \frac{\partial}{\partial t}\right)Y - \operatorname{grad} p, \tag{36.6}$$

где правая часть совпадает с левой частью уравнения Навье—Стокса.

37. Вязкая гидродинамика

Основная идея предлагаемого описания вязкой гидродинамики состоит в использовании на группах диффеоморфизмов стохастических уравнений — аналогов (36.3) и (36.5) — в которых для сжимаемых жидкостей $\dfrac{\bar{D}}{dt}$ заменяется на D_*D_*, а для несжимаемых $\dfrac{\tilde{D}}{dt}$ заменяется на PD_*D_*. Осуществляется переход к эйлерову описанию, т. е. соответствующие объекты правыми сдвигами переносятся в касательные пространства в единицах групп, и при этом условное математическое ожидание превращается в обычное (безусловное) математическое ожидание. Затем показывается, что полученные детерминированные векторные поля на торе удовлетворяют различным вариантам уравнения Бюргерса или Навье—Стокса, соответственно.

Для того, чтобы задать на группах диффеоморфизмов стохастические дифференциальные уравнения, мы опишем конструкцию винеровского процесса. Сначала процесса с числовым коэффициентом σ, а затем с линейным оператором, т. е. появляющегося в стандартном описании уравнений в форме Ито.

Пусть $w(t)$ — винеровский процесс в $\mathbb{R}^n$, заданный на некотором вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, \mathsf{P})$. Построим случайный процесс

$$W^{(\sigma)}(t) = \overline{\exp} \circ \bar{A}_e(\sigma w(t)) \tag{37.1}$$

в $\mathcal{D}^s(\mathcal{T}^n)$. По построению, для $\omega \in \Omega$ соответствующая выборочная траектория $W^{(\sigma)}_\omega(t)$ — это диффеоморфизм вида $W^{(\sigma)}_\omega(t)(m) = m + \sigma w_\omega(t)$. Отметим, что для заданного $\omega \in \Omega$ и заданного $t \in \mathbb{R}$ мы получаем, что $w(t)_\omega$ — постоянный вектор в $\mathbb{R}^n$. Это означает, что для заданного ω и t действие $W^{(\sigma)}_\omega(t)$ совпадает с $l_{w(s)_\omega}$.

В терминах винеровского процесса $W^{(\sigma)}(t)$ можно ввести аналоги обычных стохастических дифференциальных уравнений в форме Ито. Производные в среднем также вводятся в соответствии с обычным определением. Нас интересует оператор второй производной слева D_*D_*. Напомним, (см. конец раздела 1 и замечание 1.4), что это выражение мы понимаем как применение оператора D_* к регрессии производной слева случайного процесса (т. е. к векторному полю).

Здесь и ниже мы предполагаем, что $s > n/2 + 2$. Так что диффеоморфизмы из $\mathcal{D}^s(\mathcal{T}^n)$ имеют гладкость C^2 так же, как и векторные поля из $T_e\mathcal{D}^s(\mathcal{T}^n)$ на торе. Везде ниже мы используем один и тот же стохастический процесс $W^{(\sigma)}(t)$, построенный из выбранного нами винеровского процесса $w(t)$ в $\mathbb{R}^n$ по формуле (37.1).

Рассмотрим H^s-векторное F поле на $\mathcal{T}^n$, т. е. вектор в $T_e\mathcal{D}^s(\mathcal{T}^n)$. Разнесем его правыми сдвигами на всю группу $\mathcal{D}^s(\mathcal{T}^n)$, получим правоинвариантное векторное поле $\bar{F}$. Рассмотрим уравнение

$$D_*D_*\xi(t) = \bar{F}. \tag{37.2}$$

Решение этого уравнения мы интерпретируем как случайный поток, математическое ожидание которого является потоком вязкой жидкости с коэффициентом вязкости $\dfrac{\sigma^2}{2}$. Чтобы убедиться в этом, перейдем к эйлерову описанию, т. е. опишем соответствующее уравнение в $T_e\mathcal{D}^s(\mathcal{T}^n)$.

Перенеся обе части уравнения (37.2) в e, мы получим конечномерное уравнение на торе вида $D_*D_*\xi(t) = F$. Отметим, что в данном случае при определении D_* условное математическое ожидание заменяется на обычное математическое ожидание (ниже мы опишем это более подробно), но тем не менее равенство (1.15) остается верным. Обозначим регрессию $D_*\xi$ через v. Тогда из равенства (1.15) мы получаем в $T_e\mathcal{D}^s(\mathcal{T}^n)$ уравнение Бюргерса

$$\frac{\partial}{\partial t}v + (v\cdot\nabla)v - \frac{\sigma^2}{2}\Delta v = F.$$

Перейдем к вязким несжимаемым жидкостям. Нетрудно видеть из построения процесса $W^{(\sigma)}(t)$, что он принимает значения в $\mathcal{D}^s_\mu(\mathcal{T}^n)$. Так что приведенные выше конструкции можно осуществить и на $\mathcal{D}^s_\mu(\mathcal{T}^n)$. В этом случае мы используем правоинвариантный гладкий проектор $\bar{P}$ и рассмотрим уравнение

$$\bar{P}D_*D_*\xi = \bar{F}, \tag{37.3}$$

где теперь F — это бездивергентное H^s-векторное поле на $\mathcal{T}^n$, а $\bar{F}$ — правоинвариантное векторное поле на $\mathcal{D}^s_\mu(\mathcal{T}^n)$. Решение этого уравнения мы интерпретируем как случайный поток, математическое ожидание которого является потоком вязкой несжимаемой жидкости с коэффициентом вязкости $\dfrac{\sigma^2}{2}$. Чтобы убедиться в этом, перейдем к эйлерову описанию, т. е. опишем соответствующее уравнение в $T_e\mathcal{D}^s_\mu(\mathcal{T}^n)$.

Перенеся обе части уравнения (37.3) в e, мы получим конечномерное уравнение на торе вида $PD_*D_*\xi(t) = F$. Как и выше, отметим, что в данном случае при определении D_* условное математическое ожидание заменяется на обычное математическое ожидание (ниже мы опишем это более подробно), но тем не менее равенство (1.15) остается верным. Обозначим регрессию $D_*\xi$ через u. Тогда из равенства (1.15) и из формулы (36.4), описывающей действие P, мы получаем в $T_e\mathcal{D}^s(\mathcal{T}^n)$ уравнение Навье—Стокса

$$\frac{\partial}{\partial t}u + (u\cdot\nabla)u - \frac{\sigma^2}{2}\Delta u - \operatorname{grad} p = F.$$

Теперь мы покажем, что решения уравнений (37.2) и (37.3) можно построить путем стохастических возмущений потоков пылевидной материи и вязкой несжимаемой жидкости, соответственно. Начнем с уравнения типа (37.2).

Пусть $g(t)$ — решение уравнения (36.3) на $\mathcal{D}^s(\mathcal{T}^n)$ с начальным условием $g(0) = e$ и $\dot{g}(0) = v_0 \in T_e\mathcal{D}^s(\mathcal{T}^n)$. Это решение существует на некотором интервале $t \in [0,T]$. Рассмотрим $v(t) = \dot{g}(t)\circ g^{-1}(t) \in T_e\mathcal{D}^s(\mathcal{T}^n)$. Этот бесконечномерный вектор может быть также описан как векторное поле на $\mathcal{T}^n$, которое мы обозначим $v(t,m)$.

Рассмотрим случайный процесс $\eta(t) = W^{(\sigma)}(t)\circ g(t)$ на $\mathcal{D}^s(\mathcal{T}^n)$. В конечномерном представлении $\eta(t)$ является случайным диффеоморфизмом на $\mathcal{T}^n$ вида $\eta(t,m) = g(t,m) + \sigma w(t)$. Построим дополнительно случайный процесс $\xi(t) = \eta(T-t)$, или, в конечномерном описании, $\xi(t,m) = g(T-t,m)+\sigma w(T-t)$. Поскольку $w(t)$ — мартингал относительно его собственного «прошлого», из свойств условного математического ожидания мы выводим, что $D_*\xi(t) = \dot{g}(T-t,m) = v(T-t, g(T-t,m))$ и поэтому $D_*D_*\xi(t) = \dfrac{\bar{D}}{ds}\dot{g}(s)|_{s=T-t} = 0$ на $\mathcal{D}^s(\mathcal{T}^n)$.

Рассмотрим случайный процесс

$$\xi_t(s) = \xi(s)\circ\xi^{-1}(t) = W^{(\sigma)}(T-s)\circ g(T-s)\circ g^{-1}(T-t)\circ (W^{(\sigma)}(T-t))^{-1}.$$

Отметим, что случайный диффеоморфизм $(W^{(\sigma)}(T-t))^{-1}$ действует по правилу $(W^{(\sigma)}(T-t))^{-1}(m) = m - \sigma w(T-t)$. При $s=t$ мы получаем

$$\xi_t(t) = \xi(t)\circ\xi^{-1}(t) = W^{(\sigma)}(T-t)\circ g(T-t)\circ g^{-1}(T-t)\circ (W^{(\sigma)}(T-t))^{-1} = e$$

По построению $m = \xi(t,\xi^{-1}(t,m)) = g(T-t,\xi^{-1}(t,m)) + \sigma w(T-t)$. Тогда $g(T-t,\xi^{-1}(t,m)) = m - \sigma w(T-t)$, так что $\xi^{-1}(t,m) = g^{-1}(T-t, m-\sigma w(T-t))$. Следовательно,

$$\xi_t(s,m) = \xi(s, g^{-1}(T-t, m-\sigma w(T-t)) = g(T-s, g^{-1}(T-t, m-\sigma w(T-T)) + \sigma w(T-t).$$

Отметим, что $\xi_t(t,m) = m - \sigma w(T-t) + \sigma w(T-t) = m$, т. е. $\xi_t(t) = e \in \mathcal{D}^s(\mathcal{T}^n)$. Тогда σ-алгебра «настоящее» $\mathcal{N}^\xi_t$ тривиальна, и это означает, что условное математическое ожидание относительно этой σ-алгебры совпадает с обычным математическим ожиданием. Таким образом, принимая во внимание соотношения между $v(t)$ и $g(t)$ и определение D_*, мы получаем, что

$$D_*\xi_t(s) = E(v(T-t, m - \sigma w(T-t))) = E(Q_e T\mathbb{R}^{-1}_{W^{(\sigma)}(T-t)} v(T-t)).$$

Введем на $\mathcal{T}^n$ векторное поле $V(t,m) = E(v(t, m - \sigma w(t)))$ (в бесконечномерном описании $V(t) = E(Q_e T\mathbb{R}^{-1}_{W^{(\sigma)}(t)} v(t))$).

Теорема 37.1. *$V(T-t,m)$ удовлетворяет уравнению Бюргерса*

$$\frac{d}{dt}V(T-t,m) + (V(T-t,m)\cdot\nabla)V(T-t,m) - \frac{\sigma^2}{2}\nabla^2 V(T-t,m) = 0, \tag{37.4}$$

где ∇^2 — оператор Лапласа—Бельтрами, который на плоском торе совпадает с обычным лапласианом.

Доказательство. Выберем $t \in [0,T]$ и $\omega \in \Omega$ и рассмотрим кривую $\zeta_{t,\omega}(s)$, $s \in [0,T]$, зависящую от параметра ω, вида

$$\zeta_{t,\omega}(s) = R^{-1}_{W^{(\sigma)}_\omega(T-t)} g(T-s, g^{-1}(T-t)) = g(T-s, g^{-1}(T-t, m - \sigma w(T))). \tag{37.5}$$

Отметим, что $\zeta_{t,\omega}(s)$ задана по аналогии с $\xi_{t,\omega}(s)$, введенном выше, но в формуле для $\xi_{t,\omega}(s)$ имеется дополнительный стохастический член $\sigma w(T-s)$. Таким образом, мы можем рассматривать $\zeta_{t,\omega}(s)$ как гладкую кривую с начальным условием $\zeta_{t,\omega}(t) = \mathbb{R}^{-1}_{W^{(\sigma)}_\omega(T-t)} e = (W^{(\sigma)}_\omega(T-t))^{-1}$. Отметим, что

$$\frac{d}{ds} l_{(\sigma w_\omega(T-t))}\zeta_{t,\omega}(s)|_{s=t} = Q_e \frac{d}{ds}\zeta_{t,\omega}(s)|_{s=t} = -Q_e T R^{-1}_{W^{(\sigma)}_\omega(T-t)} v(T-t).$$

Поскольку $g(T-s)$ — геодезическая, по лемме 36.4 кривая $\zeta_{t,\omega}(s)$ — тоже геодезическая при почти всех $\omega \in \Omega$. Напомним, что действие $W^{(\sigma)}_\omega(t)$ совпадает с действием $l_{\sigma w(t)_\omega}$. Значит, $W^{(\sigma)}_\omega(t)\zeta_{t,\omega}(s) = l_{\sigma w(T-t)_\omega}\zeta_{t,\omega}(s)$ — тоже геодезическая. Итак,

$$\frac{\bar{D}}{ds}\frac{d}{ds} l_{\sigma w(s)_\omega}\zeta_{t,\omega}(s) = 0.$$

Напомним, что $EQ_e T\mathbb{R}^{-1}_{W_\omega(T-t)} v(T-t) = V(T-t)$ и $D_*\xi_t(s) = V(T-t)$. Из этого мы выводим, что

$$D_*D_*\xi_t(s)|_{s=t} = D_*V(T-t, \xi_t(s))|_{s=t} = -E\left(\frac{\bar{D}}{ds}\frac{d}{ds} l_{(\sigma w_\omega(t))}\zeta_{t,\omega}(s)|_{s=t}\right) = 0.$$

Но поскольку $D_*\xi_t(s)|_{s=t} = V(T-t)$, по формуле (1.15), мы получаем, что $D_*D_*\xi_t(s)|_{s=t}$ совпадает с левой частью уравнения (37.4). $\square$

Теперь перейдем к случаю несжимаемых жидкостей.

Пусть $g(t)$ — решение уравнения (36.5) с $F = 0$. Рассмотрим $u(t) = \dot{g}(t) \circ g^{-1}(t) \in T_e\mathcal{D}^s_\mu(\mathcal{T}^n)$. Этот бесконечномерный вектор можно также представить как бездивергентное векторное поле на $\mathcal{T}^n$, которое мы обозначим $u(t,m)$. Напомним (см., например, [44]), что $u(t,m)$ удовлетворяет уравнению Эйлера без внешней силы: $\dfrac{\partial u}{\partial t} = -P((u\cdot\nabla)u)$, которое после применения формулы (36.4) принимает обычный вид: $\dfrac{\partial u}{\partial t} + (u\cdot\nabla)u - \operatorname{grad} p = 0$.

Рассмотрим введенный выше процесс $W^{(\sigma)}(t)$. По построению он принимает значения в $\mathcal{D}^s_\mu(\mathcal{T}^n)$. Таким образом, на $\mathcal{D}^s_\mu(\mathcal{T}^n)$ мы можем повторить приведенную выше конструкцию для $\mathcal{D}^s(\mathcal{T}^n)$, т. е. определить $\eta(t) = W^{(\sigma)}(t)\circ g(t)$, где $t \in [0,T]$ и $\xi(t) = \eta(T-t)$ (т. е. в конечномерных обозначениях $\xi(t,m) = g(T-t,m) + \sigma w(T-t)$). Легко видеть, что $D_*\xi(t) = \dot{g}(T-t,m) = u(T-t, g(T-t,m))$ и, таким образом, $\bar{P}D_*D_*\xi(t) = \dfrac{\widetilde{D}}{ds}\dot{g}(s)|_{s=T-t} = 0$ на $\mathcal{D}^s_\mu(\mathcal{T}^n)$.

Так же, как выше, процесс $\xi_t(s) = \xi(s)\circ\xi^{-1}(t)$ обладает свойством $\xi_t(t) = e$. Его конечномерное описание в точности аналогично случаю $\mathcal{D}^s(\mathcal{T}^n)$.

Введем на $\mathcal{T}^n$ векторное поле $U(t,m) = E\big(u(t, m-\sigma w(t))\big)$ (прямой аналог $V(t,m)$). Мы также обозначим это поле как бесконечномерный вектор $U(t) = E\big(Q_e TR^{-1}_{W^{(\sigma)}(t)} u(t)\big)$.

Лемма 37.1. *Векторное поле $U(t,m)$ бездивергентно.*

Доказательство. По построению, для элементарного события $\omega\in\Omega$ диффеоморфизм $(W(t)_\omega)^{-1}$ представляет собой сдвиг тора целиком на постоянный вектор. Следовательно, Q_e, примененное к $TR^{-1}_{W(t)_\omega}u(t)$, означает параллельный перенос на торе бездивергентного векторного поля $u(t)$ целиком на тот же самый постоянный вектор назад. Так что $Q_e TR^{-1}_{W(t)}u(t)$ — случайное бездивергентное векторное поле на торе. Следовательно, его математическое ожидание бездивергентно. $\square$

Итак, $U(t)\in T_e\mathcal{D}^s_\mu(\mathcal{T}^n)$. Легко показать, что

$$D_*\xi_t(s)|_{s=t} = U(T-t). \tag{37.6}$$

Ведем $\zeta_{t,\omega}(s)$ аналогично формуле (37.5). Отметим, что на $\mathcal{D}^s_\mu(\mathcal{T}^n)$ оператор l_x не переводит геодезические в геодезические. Так что мы имеем

$$PD_*D_*\xi_t(s)|_{s=t} = PD_*U(T-t,\xi_t(s))|_{s=t} = -PE\left(\frac{\bar D}{ds}\frac{d}{ds}l_{(\sigma w_\omega(t))}\zeta_{t,\omega}(s)|_{s=t}\right)\neq 0.$$

Следовательно, нет аналога теоремы 37.1. Принимая во внимание формулу (36.4), мы можем доказать только следующее утверждение.

Теорема 37.2. *Поле $U(T-t)$ удовлетворяет уравнению Навье—Стокса*

$$\frac{d}{dt}U(T-t,m)+(U(T-t,m)\cdot\nabla)U(T-t,m)-\frac{\sigma^2}{2}\nabla^2U(T-t,m)-\operatorname{grad}p = -PE\Big(\frac{\bar D}{ds}\frac{d}{ds}l_{(\sigma w_\omega(t))}\zeta_{t,\omega}(s)|_{s=t}\Big)$$

с внешней силой $-PE\Big(\dfrac{\bar D}{ds}\dfrac{d}{ds}l_{(\sigma w_\omega(t))}\zeta_{t,\omega}(s)|_{s=t}\Big)$.

Отметим, что сила $-PE\left(\dfrac{\bar D}{ds}\dfrac{d}{ds}l_{(\sigma w_\omega(t))}\zeta_{t,\omega}(s)|_{s=t}\right)$ однозначно восстанавливается по каждому потоку $g(t)$ идеальной несжимаемой жидкости с использованием формулы (37.5) и ковариантной производной. Введем правоинвариантное векторное поле $\overline{PE\Big(\dfrac{\bar D}{ds}\dfrac{d}{ds}l_{(\sigma w_\omega(t))}\zeta_{t,\omega}(s)|_{s=t}\Big)}$, порожденное вектором $PE\Big(\dfrac{\bar D}{ds}\dfrac{d}{ds}l_{(\sigma w_\omega(t))}\zeta_{t,\omega}(s)|_{s=t}\Big)\in T_e\mathcal{D}^s_\mu(\mathcal{T}^n)$. Рассмотрим уравнение $\bar PD_*D_*\xi = \overline{PE\Big(\frac{\bar D}{ds}\frac{d}{ds}l_{(\sigma w_\omega(t))}\zeta_{t,\omega}(s)|_{s=t}\Big)}$. После переноса правыми сдвигами обеих частей этого уравнения в $T_e\mathcal{D}^s_\mu(\mathcal{T}^n)$ получим уравнение $PD_*D_*\xi_t(s)|_{s=t} = PE\Big(\dfrac{\bar D}{ds}\dfrac{d}{ds}l_{(\sigma w_\omega(t))}\zeta_{t,\omega}(s)|_{s=t}\Big)$, которое предыдущими рассуждениями преобразуется в уравнение Навье—Стокса с нулевой внешней силой

$$\frac{d}{dt}U(T-t,m)+(U(T-t,m)\cdot\nabla)U(T-t,m)-\frac{\sigma^2}{2}\nabla^2U(T-t,m)-\operatorname{grad}p = 0.$$

Исходя из описанного выше аппарата, можно вывести и уравнение типа уравнения Рейнольдса. Рассмотрим $U(t,m)$, введенное выше. Здесь не потребуется обращать время.

Теорема 37.3. *$U(t,m)$ удовлетворяет следующему уравнению типа Рейнольдса*:

$$\frac{\partial}{\partial t}U + E\Big[\Big((u\cdot\nabla)u\Big)(t,m-\sigma w(t))\Big]-\frac{\sigma^2}{2}\nabla^2U-\operatorname{grad}p=0. \tag{37.7}$$

Доказательство. Из формулы Ито следует, что

$$du(t,m-\sigma w(t)) = \frac{\partial u}{\partial t}(t,m-\sigma w(t))dt + \frac{\sigma^2}{2}\Delta u(t,m-\sigma w(t))dt - \sigma(u')dw(t),$$

где u' — линейный оператор, производная u в $m\in\mathcal{T}^n$.

Напомним, что $u(t,m)$ удовлетворяет уравнению Эйлера $\dfrac{\partial u}{\partial t} = -P((u\cdot\nabla)u)$ без внешней силы. Поскольку

$$E\Big(\frac{d}{dt}u(t,m-\sigma w(t))\Big) = \frac{\partial}{\partial t}Eu(t,m-\sigma w(t)) = \frac{\partial}{\partial t}U(t)$$

и $E\big(\sigma(\nabla u)dw(t)\big)=0$, мы выводим, что

$$\frac{\partial}{\partial t}U = E\left(\frac{d}{dt}u(t,m-\sigma w(t))\right) = E\Big[-P\Big((u\cdot\nabla)u\Big)(t,m-\sigma w(t)) + \frac{\sigma^2}{2}\nabla^2 u(t,m-\sigma w(t))\Big] =$$

$$= -E\Big[\Big((u\cdot\nabla)u\Big)(t,m-\sigma w(t))\Big] + \frac{\sigma^2}{2}\nabla^2 U + \operatorname{grad} p.$$

Так что (37.7) выполняется. □

Можно преобразовать (37.7) к виду, аналогичному стандартной форме уравнения Рейнольдса. Для бездивергентного векторного поля $X(m)$ на $\mathcal{T}^n$ введем случайное бездивергентное векторное поле $\breve{U}_X(t,m) = X(m-\sigma w(t)) - E(X(m-\sigma w(t))$, которое в бесконечномерном описании имеет вид $\breve{U}(t) = Q_eT\mathbb{R}^{-1}_{W(T-t)}X - E(Q_eT\mathbb{R}^{-1}_{W(T-t)}X)$.

Для $X=u(t)$ получаем $\breve{U}_{u(t)}(t,m) = u(t,m-\sigma w(t)) - U(t,m)$ и, таким образом, $u(t,m-\sigma w(t)) = U(t,m) + \breve{U}_{u(t)}(t,m)$ и $E\breve{U}_{u(t)}(t,m)=0$. Тогда легко видеть, что

$$E([(u\cdot\nabla)u](t,m-\sigma w(t))) = (U\cdot\nabla)U + E[(\breve{U}_{u(t)}\cdot\nabla)\breve{U}_{u(t)}].$$

Так что (37.7) преобразуется в

$$\frac{\partial}{\partial t}U + (U\cdot\nabla)U - \frac{\sigma^2}{2}\nabla^2 U - \operatorname{grad} p = -E[(\breve{U}_{u(t)}\cdot\nabla)\breve{U}_{u(t)}]. \tag{37.8}$$

Это стандартная форма уравнения Рейнольдса.

В [49] найдено случайное силовое поле на $\mathcal{D}^s_\mu(\mathcal{T}^n)$, под действием которого $-E[(\breve{U}_{u(t)}\cdot\nabla)\breve{U}_{u(t)}]$ уничтожается.

38. Возможные обобщения на неньютоновские жидкости

Здесь мы рассмотрим жидкости, у которых в уравнениях Бюргерса и Навье—Стокса вязкий член описывается не оператором Лапласа с коэффициентом вязкости, а другим оператором чисто второго порядка $\mathfrak{B}(t)$ с симметрической положительно определенной матрицей, не зависящей от пространственных переменных, но, возможно, зависящей от времени. В этот класс операторов входит, например, случай с оператором Лапласа, но с коэффициентом диффузии, зависящим от времени, а также случай, когда вязкий член описывается суммой оператора Лапласа и еще какого-то оператора.

Из того, что матрица оператора $\mathfrak{B}(t)$ симметрична и положительно определена, нетрудно увидеть, что существует оператор $\mathbf{B}(t)$, также не зависящий от пространственных переменных, но возможно зависящий от времени, такой, что $\mathfrak{B}(t) = \mathbf{B}(t)\mathbf{B}^*(t)$.

Мы заменим винеровский процесс $W^{(\sigma)}$ на винеровский процесс, на который действует линейный оператор $\mathbf{B}(t)$, при этом для задания этого процесса не требуется невырожденность оператора $\mathbf{B}(t)$.

Пусть $w(t)$ — винеровский процесс в $\mathbb{R}^n$, заданный на некотором вероятностном пространстве $(\Omega,\mathcal{F},\mathsf{P})$. Построим случайный процесс

$$W(t) = \overline{\exp}\circ\bar{A}_e\left(\int_0^t \mathbf{B}(s)dw(s)\right) \tag{38.1}$$

в $\mathcal{D}^s(\mathcal{T}^n)$, где $\mathbf{B}(t)$ — (неслучайный) линейный оператор, зависящий от времени. По построению, для $\omega\in\Omega$ соответствующая выборочная траектория $W_\omega(t)$ — это диффеоморфизм вида

$W_\omega(t)(m) = m + \int\limits_0^t \mathbf{B}(s)dw(s)_\omega$. Отметим, что для заданного $\omega \in \Omega$ и заданного $t \in \mathbb{R}$ мы получаем, что $\int\limits_0^t \mathbf{B}(s)dw(s)_\omega$ — постоянный вектор в $\mathbb{R}^n$. Это означает, что для заданного ω и t действие $W_\omega(t)$ совпадает с $l_{\int\limits_0^t \mathbf{B}(s)dw(s)_\omega}$.

Как и в предыдущем разделе, мы предполагаем, что $s > n/2 + 2$. Везде ниже мы используем один и тот же стохастический процесс $W(t)$, построенный из выбранного нами винеровского процесса $w(t)$ в $\mathbb{R}^n$ по формуле (38.1).

Описания уравнений $D_*D_*\xi = \bar{F}$ и $\bar{P}D_*D_*\xi = \bar{F}$ аналогичны приведенным в предыдущем разделе. Поэтому мы сразу приступим к построению решений.

Пусть $g(t)$ — решение уравнения (36.3) на $\mathcal{D}^s(\mathcal{T}^n)$ с начальным условием $g(0) = e$ и $\dot{g}(0) = v_0 \in T_e\mathcal{D}^s(\mathcal{T}^n)$. Это решение существует на некотором интервале $t \in [0, T]$. Рассмотрим $v(t) = \dot{g}(t) \circ g^{-1}(t) \in T_e\mathcal{D}^s(\mathcal{T}^n)$. Этот бесконечномерный вектор может быть также описан как векторное поле на $\mathcal{T}^n$, которое мы обозначим $v(t, m)$.

Рассмотрим случайный процесс $\eta(t) = W(t) \circ g(t)$ на $\mathcal{D}^s(\mathcal{T}^n)$. В конечномерном представлении $\eta(t)$ является случайным диффеоморфизмом на $\mathcal{T}^n$ вида $\eta(t, m) = g(t, m) + \int\limits_0^t \mathbf{B}(s)dw(s)$. Построим дополнительный случайный процесс $\xi(t) = \eta(T - t)$, или, в конечномерном описании, $\xi(t, m) = g(T - t, m) + \int\limits_0^{T-t} \mathbf{B}(s)dw(s)$. Поскольку $\int\limits_0^t \mathbf{B}(s)dw(s)$ — мартингал относительно его собственного «прошлого», из свойств условного математического ожидания мы выводим, что $D_*\xi(t) = \dot{g}(T - t, m) = v(T - t, g(T - t, m))$, и поэтому $D_*D_*\xi(t) = \dfrac{\bar{D}}{ds}\dot{g}(s)|_{s=T-t} = 0$ на $\mathcal{D}^s(\mathcal{T}^n)$.

Рассмотрим случайный процесс

$$\xi_t(s) = \xi(s) \circ \xi^{-1}(t) = W(T - s) \circ g(T - s) \circ g^{-1}(T - t) \circ (W(T - t))^{-1}.$$

Отметим, что случайный диффеоморфизм $(W(T-t))^{-1}$ действует по правилу $(W(T-t))^{-1}(m) = m - \int\limits_0^{T-t} \mathbf{B}(s)dw(s)$. При $s = t$ мы получаем

$$\xi_t(t) = \xi(t) \circ \xi^{-1}(t) = W(T - t) \circ g(T - t) \circ g^{-1}(T - t) \circ (W(T - t))^{-1} = e.$$

По построению

$$m = \xi(t, \xi^{-1}(t, m)) = g(T - t, \xi^{-1}(t, m)) + \int\limits_0^{T-t} \mathbf{B}(s)dw(s).$$

Тогда $g(T - t, \xi^{-1}(t, m)) = m - \int\limits_0^{T-t} \mathbf{B}(s)dw(s)$, так что $\xi^{-1}(t, m) = g^{-1}(T - t, m - \int\limits_0^{T-t} \mathbf{B}(s)dw(s))$. Следовательно,

$$\xi_t(s, m) = \xi(s, g^{-1}(T-t, m - \int\limits_0^{T-t} \mathbf{B}(s)dw(s)) = g(T-s, g^{-1}(T-t, m - \int\limits_0^{T-t} \mathbf{B}(s)dw(s)) + \int\limits_0^{T-t} \mathbf{B}(s)dw(s).$$

Отметим, что $\xi_t(t, m) = m - \int\limits_0^{T-t} \mathbf{B}(s)dw(s) + \int\limits_0^{T-t} \mathbf{B}(s)w(s) = m$, т. е. $\xi_t(t) = e$ в $\mathcal{D}^s(\mathcal{T}^n)$. Тогда σ-алгебра «настоящее» $\mathcal{N}_t^\xi$ тривиальна, и это означает, что условное математическое ожидание относительно этой σ-алгебры совпадает с обычным математическим ожиданием. Таким образом, принимая во внимание соотношения между $v(t)$ и $g(t)$ и определение D_*, мы получаем, что

$$D_*\xi_t(s) = E(v(T - t, m - \int\limits_0^{T-t} \mathbf{B}(s)dw(s))) = E(Q_e T\mathbb{R}^{-1}_{W(T-t)} v(T - t)).$$

Введем на $\mathcal{T}^n$ векторное поле $V(t,m) = E(v(t, m - \int\limits_0^t \mathbf{B}(s)dw(s)))$ (в бесконечномерном описании $V(t) = E(Q_e T\mathbb{R}^{-1}_{W(t)} v(t))$).

Теорема 38.1. *$V(T-t,m)$ удовлетворяет следующему аналогу уравнения Бюргерса:*

$$\frac{\partial}{\partial t}V(T-t,m) + (V(T-t,m)\cdot\nabla)V(T-t,m) - \frac{1}{2}\mathfrak{B}(t)V(T-t,m) = 0, \tag{38.2}$$

где $\mathfrak{B}(t)$ — дифференциальный оператор второго порядка $\mathfrak{B}(t) = \mathfrak{B}^{ij}(t)\dfrac{\partial}{\partial x^i \partial x^j}$ с матрицей $(\mathfrak{B}^{ij})(t) = \mathbf{B}(t)\mathbf{B}^*(t)$.

Доказательство теоремы 38.1 в точности аналогично доказательству теоремы 37.1 с заменой $W^{(\sigma)}$ на W (см. [62]).

Переход к случаю несжимаемых жидкостей также аналогичен тому, что описано в предыдущем разделе, с заменой $W^{(\sigma)}$ на W. Получается аналог уравнения Навье—Стокса с вязким членом вида $-\dfrac{1}{2}\mathfrak{B}(t)U(T-t,m)$:

$$\frac{\partial}{\partial t}U(T-t,m) + (U(T-t,m)\cdot\nabla)U(T-t,m) - \frac{1}{2}\mathfrak{B}(t)U(T-t,m) - \operatorname{grad} p = 0.$$

В [62] также дано описания вывода уравнения типа Рейнольдса для данного случая.

Глава 9

УРАВНЕНИЯ И ВКЛЮЧЕНИЯ С ПРОИЗВОДНЫМИ В СРЕДНЕМ С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ НА РИМАНОВЫХ МНОГООБРАЗИЯХ

В этой главе мы изучаем уравнения и включения с производными в среднем на римановых многообразиях такие, что в правых частях имеются слагаемые с запаздыванием, причем запаздывающий член описывается в терминах риманова параллельного переноса вдоль случайных процессов.

Изучение таких систем мотивируется следующими физическими соображениями, связанными с описанием механического движения на нелинейных конфигурационных пространствах. Для таких систем Радон (см. [73]) показал, что риманов параллельный перенос вдоль кривой на многообразии является естественной заменой глобальной параллельности (например, в системах, связанных с гироскопами) на плоских конфигурационных пространствах. В частности, запаздывающий член с параллельным переносом описывает естественное запаздывание на искривленных конфигурационных пространствах.

Класс корректно определенных стохастических функционально-дифференциальных уравнений на римановых многообразиях, где запаздывающий член задан в терминах риманова параллельного переноса, изучался в [75].

В этой главе всюду используются производные в среднем на многообразиях, описанные в главе 5. Определение стохастически полной связности и стохастически полного многообразия имеется в разделе 44.

39. Простейший случай на стохастически полном многообразии

Пусть M — гладкое n-мерное риманово многообразие, на котором мы фиксируем связность Леви-Чивита.

Следуя [50], обозначим через $\Gamma_{t,s} : T_{\xi(s)}M \to T_{\xi(t)}M$ оператор параллельного переноса вдоль семимартингала $\xi : [0,T]\times\Omega \to M$ относительно связности Леви-Чивита.

Рассмотрим два векторных поля $X, Y : [0,T]\times M \to TM$ на M, и пусть $h > 0$ — заданное фиксированное запаздывание. В этом разделе мы изучим разрешимость следующего *стохастического* *уравнения с производными в среднем с запаздыванием*:

$$\begin{cases} D\xi(t) = X(t, \xi(t)) + \Gamma_{t,t-h} Y(t, \xi(t-h)), \\ D_2\xi(t) = I, \quad t \in [0, T] \\ \xi(t) = \varphi(t), \quad t \in [-h, 0]. \end{cases} \tag{39.1}$$

Здесь I — единичная матрица, а начальное условие $\varphi : [-h, 0] \to M$ — гладкая кривая на M.

Определение 39.1. Говорят, что уравнение (39.1) *имеет решение на интервале* $[-h, T)$, если существует вероятностное пространство $(\Omega, \mathcal{F}, \mathsf{P})$ и заданный на нем семимартингал $\xi : [-h, T) \times \Omega \to M$ такой, что при $t \in [-h, T)$ выполнено уравнение (31.1) (см. замечание 5.1).

Зафиксируем точку $m_0 \in M$ и $T > 0$. Рассмотрим банахово пространство $C^0([0, T],\, T_{m_0}M)$ непрерывных кривых $[0, T] \to T_{m_0}M$ с обычной равномерной нормой. Пусть $\tilde{\mathcal{F}}$ — σ-алгебра, порожденная цилиндрическими множествами $C^0([0, T], T_{m_0}M)$. Для каждого $t \in [0, T]$ обозначим через $\mathcal{P}_t$ σ-подалгебру в $\tilde{\mathcal{F}}$, порожденную цилиндрическими множествами на $[0, t]$.

Рассмотрим $m_0 = \varphi(0)$.

Теорема 39.1. *Предположим, что для выбранного $T > 0$ векторные поля $X, Y : [0, T] \times M \to TM$ измеримы по Борелю по совокупности переменных и равномерно ограничены, а также что риманово многообразие M стохастически полно. Тогда для любой начальной C^1-кривой φ существует решение $\xi : [-h, T] \times \Omega \to M$ уравнения* (31.1).

Доказательство. Мы докажем глобальное существование решения уравнения (31.1) последовательными шагами длины $h > 0$.

Сначала рассмотрим случай, когда $0 < T \leqslant h$. Пусть $\tilde{w}$ — стандартный винеровский процесс на $T_{m_0}M$, т. е. координатный процесс $\tilde{w}\big(t, x(\cdot)\big) = x(t)$ на вероятностном пространстве $\big(C^0\big([0, T], T_{m_0}M\big), \tilde{\mathcal{F}},\ \nu\big)$, где ν — мера Винера. Напомним, что точка пространства $C^0\big([0, T],$ $T_{m_0}M\big)$ — это непрерывная кривая $x(\cdot) \in C^0\big([0, T], T_{m_0}M\big)$. Понятно, что $\tilde{w}$ адаптирован к фильтрации $\{\mathcal{P}_t\}_{0 \leqslant t \leqslant T}$.

Поскольку M стохастически полно, развертка Ито $R_I\tilde{w}(\cdot)$ (см. раздел 44, подробности имеются в [50]) винеровского процесса $\tilde{w}$ корректно определена для всех $t \in [0, \infty)$.

В [50] показано, что $R_I x(t)$ и параллельный перенос вдоль $x(\cdot)$ существуют для ν-почти всех $x(\cdot) \in C^0\big([0, T], T_{m_0}M\big)$. Более того, из свойств параллельного переноса и развертки R_I следует, что стохастический процесс $\Gamma_{0,t} X\big(t, R_I\tilde{w}(t)\big)$, $0 \leqslant t \leqslant T$, в $T_{m_0}M$ равномерно ограничен и подчинен фильтрации $\{\mathcal{P}_t\}_{0 \leqslant t \leqslant T}$. Поскольку $\varphi(\cdot)$ как минимум C^1-гладко, обычный параллельный перенос вдоль $\varphi(\cdot)$ корректно определен и можно построить кривую $\Gamma_{0,t-h} Y(t, \varphi(t-h))$, $t \in [0, T]$, в $T_{m_0}M$. Отметим, что по свойствам параллельного переноса последняя кривая равномерно ограничена. Введем процесс $a(t) := \Gamma_{0,t} X\big(t, R_I\tilde{w}(t)\big) + \Gamma_{0,t-h} Y(t, \varphi(t-h))$, $t \in [0, T]$, в $T_{m_0}M$. Рассмотрим меру μ на $\big(C^0\big([0, T], T_{m_0}M\big), \mathcal{C}\big)$ с плотностью ρ относительно ν вида

$$\rho\,(x(\cdot)) = \exp\left(\int_0^T \langle a(t), d\tilde{w}(t)\rangle - \frac{1}{2}\int_0^T a(t)^2\, dt\right). \tag{39.2}$$

Известно (см. [10]), что в условиях нашей теоремы

$$\int\limits_{C^0\left([0,T], T_{m_0}M\right)} \rho\, d\nu = 1, \tag{39.3}$$

т. е. μ — вероятностная мера, и более того,

$$w\big(t, x(\cdot)\big) = x(t) - \int_0^t a(\tau)\, d\tau$$

является винеровским процессом на $\big(C^0\big([0, T], T_{m_0}M\big), \mathcal{C}, \mu\big)$ относительно $\{\mathcal{P}_t\}_{0 \leqslant t \leqslant T}$ (см. [10]). Легко видеть, что везде $\rho > 0$, т. е. ν абсолютно непрерывно относительно μ и имеет плотность ρ^{-1}. Другими словами, вероятностные меры μ и ν эквивалентны. Координатный процесс

$z\big(t,x(\cdot)\big) = x(t)$, $0 \leqslant t \leqslant T$ на $(C^0\big([0,T],T_{m_0}M\big),\mathcal{C},\mu)$ подчинен фильтрации $\{\mathcal{P}_t\}_{0\leqslant t\leqslant T}$. Более того, $\mathcal{P}_t = \mathcal{P}_t^z$ для всех $t \in [0,T]$. Поскольку меры μ и ν эквивалентны, $R_I(z(t,x(\cdot)) = R_I x(t)$ существует μ-п.н. Таким образом, $z(t)$ и $w(t)$ связаны уравнением

$$dz(t) = a(t)\,dt + dw(t), \quad 0 \leqslant t \leqslant T \tag{39.4}$$

на $T_{m_0}M$. По определению процесс $R_I z(\cdot)$ существует на $(C^0\big([0,T],\ T_{m_0}M\big),\mathcal{C},\ \mu)$. Введем процесс $\xi(t)$, $t \in [-h,T]$, который совпадает с $R_I z(t)$ при $t \in [0,T]$ и с $\varphi(t)$ при $t \in [-h,0]$. В [50] показано, что $D\xi(t) = \Gamma_{t,0}a(t)$. Но по построению $\Gamma_{t,0}a(t) = X(t,\xi(t)) + \Gamma_{t,t-h}Y(t,\xi(t-h))$. Тот факт, что $D_2\xi(t) = I$ при $t \in [0,T]$ вытекает из [50]. Таким образом, $\xi(t)$ при $t \in [0,T]$ является решением (31.1) в случае $0 < T \leqslant h$.

Следующий шаг — это случай, когда $h \leqslant T$. Мы предположим, что $h \leqslant T \leqslant 2h$. Для произвольного $T > h$ результат получается по индукции. Рассуждения здесь похожи приведенным выше, но со следующими модификациями. При $t \in [0,h]$ мы определяем процесс $a(t)$ той же самой формулой $a(t) = \Gamma_{0,t}X\big(t,R_I\tilde{w}(t)\big) + \Gamma_{0,t-h}Y(t,\varphi(t-h))$; но при $t \in [h,T]$ — по формуле $a(t) = \Gamma_{0,t}X\big(t,R_I\tilde{w}(t)\big) + \Gamma_{0,t-h}Y(t,R_I\tilde{w}(t-h))$, где задействован параллельный перенос вдоль стохастической части процесса. $\square$

Теперь обратимся к случаю включений, Здесь мы имеем дело с многозначными векторными полями $\mathbf{X}(t,\cdot)$ и $\mathbf{Y}(t,\cdot)$, т. е. в касательном пространстве T_mM каждой точки $m \in M$ заданы замкнутые множества $\mathbf{X}(t,m)$ и $\mathbf{Y}(t,m)$, зависящие от времени t. Мы предполагаем, что эти многозначные векторы измеримы по Борелю в смысле многозначных отображений. Напомним, в частности, что эти векторные поля имеют измеримые по Борелю селекторы.

Рассмотрим систему

$$\begin{cases} D\xi(t) \in \mathbf{X}(t,\xi(t)) + \Gamma_{t,t-h}\mathbf{Y}(t,\xi(t-h)),\\ D_2\xi(t) = I,\\ \xi(t) = \varphi(t), \quad t \in [-h,0]. \end{cases} \tag{39.5}$$

Понятие решения для (39.5) аналогично понятию решения для (31.1)

Теорема 39.2. *Пусть для некоторого $T > 0$ многозначные векторные поля $\mathbf{X}(t,m)$ и $\mathbf{Y}(t,m)$ измеримы по Борелю и равномерно ограничены при $t \in [0,T]$. Предположим также, что риманово многообразие M стохастически полно. Тогда для любой начальной C^1 кривой φ существует решение $\xi(t)$ включения* (39.5) *при всех $t \in [-h,T]$.*

Теорема 39.2 сводится к теореме 39.1 следующим образом. Как сказано выше, измеримые по Борелю многозначные векторные поля имеют измеримые по Борелю селекторы. Возьмем такие селекторы $X(t,m)$ и $Y(t,m)$ полей $\mathbf{X}(t,m)$ и $\mathbf{Y}(t,m)$, соответственно. Из условия следует, что $X(t,m)$ и $Y(t,m)$ удовлетворяют условиям теоремы 39.1. Тогда по теореме 39.1 уравнение (31.1) с этими $X(t,m)$ и $Y(t,m)$ имеет решение, которое является также и решением (39.5).

40. Постановка общей задачи

Пусть на римановом M заданы два векторных поля $X(t,m)$ и $Y(t,m)$ и два $(2,0)$-тензорных поля $\alpha(t,m)$ и $\beta(t,m)$, $t \geqslant 0$. Как и выше, мы обозначим через $\Gamma_{t,s}$ параллельный перенос вдоль гладкой кривой или случайного процесса векторов или тензоров из момента времени s в момент времени t. Ниже мы также будем иметь дело с многозначными векторными полями $\boldsymbol{X}(t,m)$ и $\boldsymbol{Y}(t,m)$, а также с многозначными $(2,0)$-тензорными полями $\boldsymbol{\alpha}(t,m)$ и $\boldsymbol{\beta}(t,m)$.

Зафиксируем $h > 0$. Рассмотрим систему

$$\begin{aligned} D\xi(t) &= X(t,\xi(t)) + \Gamma_{t,t-h}Y(t-h,\xi(t-h)),\\ D_2\xi(t) &= \alpha(t,\xi(t)) + \Gamma_{t,t-h}\beta(t-h,\xi(t-h)), \end{aligned} \tag{40.1}$$

которая называется *стохастическим дифференциальным уравнением общего виде с производными в среднем с запаздыванием.* Для многозначных векторных и тензорных полей система

$$\begin{aligned} D\xi(t) &\in \boldsymbol{X}(t,\xi(t)) + \Gamma_{t,t-h}\boldsymbol{Y}(t-h,\xi(t-h)),\\ D_2\xi(t) &\in \boldsymbol{\alpha}(t,\xi(t)) + \Gamma_{t,t-h}\boldsymbol{\beta}(t-h,\xi(t-h)) \end{aligned} \tag{40.2}$$

называется *стохастическим дифференциальным включением общего вида с производными в среднем с запаздыванием.*

Зафиксируем C^1-кривую $\varphi\colon [-h, 0] \to M$.

Определение 40.1. Будем говорить, что уравнение (40.1) (включение (40.2), соответственно) *имеет решение на интервале* $[-h, \varepsilon)$ с начальным условием φ, если существует вероятностное пространство $(\Omega, \mathcal{F}, \mathsf{P})$ и случайный процесс $\xi(\cdot)\colon [-h, \varepsilon) \to M$, $\varepsilon > 0$, заданный при $t \in [-h, \varepsilon)$ на $(\Omega, \mathcal{F}, \mathsf{P})$ и принимающий значения в M, такой, что он совпадает с φ на $[-h, 0]$ и удовлетворяет (40.1) (соответственно, (40.2)) на $[0, \varepsilon)$.

Полезно сначала проанализировать упрощенный случай уравнений (40.1) и включений (40.2), когда запаздывающие слагаемые зависят только от времени. Такие системы задаются формулами

$$\begin{aligned} D\xi(t) &= X(t, \xi(t)) + \Gamma_{t,0} Y(t), \\ D_2\xi(t) &= \alpha(t, \xi(t)) + \Gamma_{t,0}\beta(t) \end{aligned} \tag{40.3}$$

и

$$\begin{aligned} D\xi(t) &\in \boldsymbol{X}(t, \xi(t)) + \Gamma_{t,0} \boldsymbol{Y}(t), \\ D_2\xi(t) &\in \boldsymbol{\alpha}(t, \xi(t)) + \Gamma_{t,0}\boldsymbol{\beta}(t). \end{aligned} \tag{40.4}$$

В этом случае $Y(t)$, $\boldsymbol{Y}(t)$, $\beta(t)$ и $\boldsymbol{\beta}(t)$ принимают значения в касательном пространстве к M в начальной точке m_0. Согласно принадлежащей Радону и указанной выше механической интерпретации параллельного переноса (см. [73]) физический смысл (40.3) и (40.4) состоит в том, что вторые слагаемые в правых частях заданы в системах отсчета, которые являются естественной заменой постоянных систем отсчета в линейных конфигурационных пространствах.

Определение 40.2. Будем говорить, что уравнение (40.3) (включение (40.4), соответственно) имеет *решение на интервале* $[0, \varepsilon)$ с начальным условием $m_0 \in M$, если существует вероятностное пространство $(\Omega, \mathcal{F}, \mathsf{P})$ и случайный процесс $\xi(\cdot)\colon [0, \varepsilon) \to M$, $\varepsilon > 0$, заданный на $(\Omega, \mathcal{F}, \mathsf{P})$ и принимающий значения в M, такой, что $\xi(0) = m_0$ и он удовлетворяет (40.3) ((40.4), соответственно) на $[0, \varepsilon)$.

Иногда мы будем рассматривать $Y(t)$ и $\beta(t)$ как случайные процессы.

Важно отметить, что (40.1) может быть сведено к (40.3), а (40.2) — к (40.4). Это будет объяснено ниже в доказательстве теоремы 41.2.

41. Существование решений в общем случае на компактном многообразии

Нам потребуется понятие базисного векторного поля на расслоении базисов BM или на расслоении ортонормальных базисов OM над римановым многообразием (см. определение 44.2).

Теорема 41.1. *Рассмотрим компактное риманово многообразие M и зафиксируем некоторую точку $m_0 \in M$. Пусть для $m \in M$, $t \geqslant 0$ векторы $X(t, m)$ и $Y(t) \subset T_{m_0}M$, а также тензоры $\alpha(t, m)$ и $\beta(t)$ в m_0 являются гладкими и равномерно ограниченными. Тогда уравнение* (40.3) *имеет решение с начальным условием $\xi(0) = m_0$, и это решение существует при всех $t > 0$.*

Доказательство. Перейдем на расслоение ортонормированных базисов OM над M. Пусть H — связность Леви-Чивита на OM. Касательное отображение к естественной проекции $\pi\colon OM \to M$ индуцирует изоморфизм $T\pi\colon \mathsf{H}_b \to T_{\pi b}M$ в каждой точке $b \in OM$. Следовательно, в каждом $b \in OM$ мы получаем вектор $X^T(t, b) = T\pi^{-1} X(t, \pi b) \in \mathsf{H}_b \subset T_bOM$. Векторы $X^T(t, b)$ образуют горизонтальное (т. е. лежащее в H) векторное поле на OM.

Зафиксируем ортонормированный базис $\mathcal{O}$ в $T_{m_0}M$. Базис $\mathcal{O}$ можно рассматривать как изоморфизм $\mathcal{O}\colon \mathbb{R}^n \to T_{m_0}M$, где $n = \dim M$ и $\mathbb{R}^n$ — арифметическое n-мерное пространство столбцов с n компонентами. Так что мы можем построить горизонтальное зависящее от времени базисное векторное поле $Y^T(t, b) = E\big(\mathcal{O}^{-1}Y(t)\big)$ на OM, где $\mathcal{O}^{-1}Y(t)$ обозначает столбец из $\mathbb{R}^n$, состоящий из координат вектора Y относительно базиса $\mathcal{O}$.

Для ортонормированного базиса b в касательном пространстве T_mM обозначим через b^* дуальный базис в кокасательном пространстве T^*_mM (пространство, сопряженное к T_mM). Мы рассматриваем базисы b и b^* как линейные операторы из арифметического пространства $\mathbb{R}^n$ в T_mM и в T^*_mM, соответственно, которые переводят столбец из n вещественных чисел в вектор, имеющий эти координаты относительно b и, соответственно, в 1-форму, имеющую эти координаты относительно b^*. Их обратные операторы b^{-1} и b^{*-1} переводят соответствующие касательное и кокасательное пространство в арифметическое пространство $\mathbb{R}^n$.

Теперь введем на OM $(2,0)$-тензорное поле $\alpha^T(t,b)$ следующим образом. Обратный образ $T^*\pi : T^*_{\pi b}M \to T^*_b OM$ переводит каждую 1-форму $\zeta \in T^*_{\pi b}M$ в множество $Z_b \in T^*_b OM$ такое, что каждое $\theta \in Z_b$ на векторе $V \in T_b OM$ принимает значение $\theta(V) = \zeta(T\pi V)$. Очевидные образом каждая 1-форма θ в $T^*_b OM$ принадлежит обратному образу некоторой 1-формы ζ в $T^*_{\pi b}M$, а обратное отображение $(T\pi^*)^{-1}$ переводит θ в ζ. На каждой паре 1-форм θ_1 и θ_2 в $T^*_b OM$ тензор $\alpha^T(t,b)$ принимает значение

$$\alpha^T(t,b)(\theta_1,\theta_2) = T\pi^{-1}\alpha(t,\pi b)((T\pi^*)^{-1}\theta_1,(T\pi^*)^{-1}\theta_2) \in H_b.$$

Введем также $(2,0)$-тензорное поле $\beta^T(t,b)$ на OM следующим образом:

$$\beta^T(t,b)(\theta_1,\theta_2) = T\pi^{-1}b(\mathcal{O}^{-1}\beta(\mathcal{O}^* {b^*}^{-1} T{\pi^*}^{-1}\theta_1, \mathcal{O}^* {b^*}^{-1} T{\pi^*}^{-1}\theta_2)) \in H_b.$$

Отметим, что все поля X^T, Y^T, α^T и β^T гладки по построению.

Из [46, Corollary 9.2.4] следует, что существует евклидово пространство $\mathbb{R}^K$ с достаточно большим K и хотя бы локально удовлетворяющим условию Липшица полем линейных операторов $A^T(t,b) : \mathbb{R}^K \to H_b$ таких, что $A^T(t,b)A^{T*}(t,b) = \alpha^T(t,b) + \beta^T(t,b)$.

Если поле $\alpha^T(t,b) + \beta^T(t,b)$ не вырождено (т. е. положительно определено) и гладко, поле A единственно, гладко и для его построения можно использовать метод, описанный в лемме 5.1. Здесь мы не гарантируем, что $\alpha^T(t,b) + \beta^T(t,b)$ невырождено.

Продолжим доказательство теоремы 41.1. Пусть $w(t)$ — винеровский процесс в $\mathbb{R}^K$. Рассмотрим уравнение Ито, канонически соответствующее векторному полю Ито на OM вида

$$(X^T + Y^T, A^T) \tag{41.1}$$

(см. раздел 26). Поскольку коэффициенты (41.1) хотя бы локально удовлетворяют условию Липшица и многообразие OM компактно, оно имеет единственное сильное решение $\zeta(t)$ с начальным условием $\zeta(0) = \mathcal{O}$ и это решение существует при всех $t \geqslant 0$. Отметим, что $\zeta(t)$ является горизонтальным подъемом процесса $\xi(t) = \pi\zeta(t)$, т. е. поля Y^T и β^T параллельны вдоль $\xi(t)$. Таким образом, по построению $\xi(t)$ удовлетворяет (40.3) с начальным условием $\xi(0) = m_0$, и это решение существует при всех $t \geqslant 0$, так как многообразие OM компактно. □

Теорема 41.2. *На компактном римановом многообразии M как выше, пусть при всех $m \in M$ и $t \geqslant 0$ векторы $X(t,m)$ и $Y(t,m)$ и тензоры $\alpha(t,m)$ и $\beta(t,m)$ гладки и равномерно ограничены. Тогда уравнение* (40.1) *имеет решение для любого начального значения $\varphi(t)$, как в определении* 40.1, *и это решение существует при $t \in [-h,h]$.*

Доказательство. Здесь мы используем обозначения из доказательства теоремы 41.1. Рассмотрим следующие функции $t \in [0,h]$ со значениями в $T_{\varphi(0)}M$: $Y(t) = \Gamma_{0,t-h}Y\big(t-h,\varphi(t-h)\big)$ и $\beta(t) = \Gamma_{0,t-h}\beta\big(t-h,\varphi(t-h)\big)$. Ясно, что решение $\xi(t)$ уравнения (40.3) с введенными $Y(t)$ и $\beta(t)$, которое существует по теореме 41.1, является искомым решением для (40.1) на $[-h,h]$. □

Отметим, что трудность с продолжением решения на $t \in (h,+\infty)$ связана с тем, что в этом случае надо будет использовать случайные поля $Y(t)$ и $\beta(t)$, полученные параллельным переносом вдоль $\xi(t)$ в $\xi(h)$. Для этого случая нет аналога [46, Corollary 9.2.4]. Однако в двух частных случаях удается все же получить существование решений при всех $t > h$.

Теорема 41.3. *Пусть $X(t,m)$, $Y(t,m)$ и $\alpha(t,m)$ такие же, как в теореме* 41.2. *Тогда для любого начального условия $\varphi(t)$, как в определении* 40.1, *существует решение $\xi(t)$ уравнения*

$$\begin{aligned} D\xi(t) &= X(t,\xi(t)) + \Gamma_{t,t-h}Y(t-h,\xi(t-h)), \\ D_2\xi(t) &= \alpha(t,\xi(t)), \end{aligned} \tag{41.2}$$

корректно определенное при всех $t \in [-h,\infty)$.

Доказательство. Для $t \in [-h,h]$ утверждение теоремы следует из теоремы 41.2. Продолжение на $t \geqslant h$ можно построить следующим образом. Из [46, Corollary 9.2.4] следует, что существует евклидово пространство $\mathbb{R}^K$ с достаточно большим K и локально липшицево непрерывное поле линейных операторов $A(t,m) : \mathbb{R}^K \to T_m M$ такое, что $A(t,m)A^*(t,m) = \alpha(t,m)$. Пусть $w(t)$ — винеровский процесс в $\mathbb{R}^K$. Построим поле линейных операторов $A^T(t,b) : \mathbb{R}^K \to H_b$ как $T\pi^{-1}A(t,\pi b)|_{H_b}$. На OM введем векторное поле $X^T(t,b)$, как в доказательстве теоремы 41.1, и случайное векторное поле $Y^T_{m(\cdot)}(t,b)$ формулой

$$Y^T_{m(\cdot)}(t,b) = E_b\big(\mathcal{O}^{-1}_{m(h)}\Gamma_{h,t-h}Y(t-h, m(t-h))\big), \tag{41.3}$$

где $m(\cdot)$ рассматривается как элементарное событие из $\tilde{\Omega}$, а $\Gamma_{h,t}$ обозначает параллельный перенос вдоль $\xi(t)$.

Затем рассмотрим следующее уравнение Ито, канонически соответствующее векторному полю Ито на OM вида

$$(X^T + Y^T_{m(\cdot)}, A^T). \tag{41.4}$$

Отметим, что по построению $X^T(t,b)$ гладко, $A^T(t,b)$ локально липшицево и $Y^T_{m(\cdot)}(t,b)$ п.н. гладко по совокупности переменных t и b. Тогда существует решение $\zeta(t)$ уравнения, канонически соответствующего (41.4), с начальным условием $\zeta(h) = \mathcal{O}_{m(h)}$ (см. [50]). Поскольку OM компактно, $\zeta(t)$ существует на всем промежутке $t \in [h, 2h]$. Очевидным образом процесс $\xi(t) = \pi\zeta(t)$ является продолжением искомого решения на $[h, 2h]$. Следующие шаги в точности аналогичны. □

Теорема 41.4. *Пусть $X(t,m)$, $Y(t,m)$ и $\beta(t,m)$ — такие же, как в теореме 41.2. Тогда для любого начального условия $\varphi(t)$, как в определении 40.1, существует решение $\xi(t)$ уравнения*

$$\begin{aligned} D\xi(t) &= X(t,\xi(t)) + \Gamma_{t,t-h}Y(t-h, \xi(t-h)),\\ D_2\xi(t) &= \Gamma_{t,t-h}\beta(t,\xi(t)), \end{aligned} \tag{41.5}$$

которое корректно определено для всех $t \in [-h, \infty)$.

Доказательство. Рассуждения здесь аналогичны доказательству теоремы 41.3 со следующей модификацией. Из [46, Corollary 9.2.4] следует, что существует евклидово пространство $\mathbb{R}^K$ с достаточно большим K и локально липшицево непрерывное поле линейных операторов $B(t,m) : \mathbb{R}^K \to T_m M$ такое, что $B(t,m)B^*(t,m) = \beta(t,m)$. Вместо (41.4) мы имеем дело с

$$d\zeta(t) = \mathbf{e}_{\zeta(t)}\big((X^T(t,\zeta(t)) + Y^T_{m(\cdot)}(t,\zeta(t)))dt + B^T_{m(\cdot)}(t,\zeta(t))dw(t)\big), \tag{41.6}$$

где $B^T_{m(\cdot)} = T\pi^{-1}b\big(\mathcal{O}^{-1}_{m(h)}\Gamma_{h,t-h}B(t-h, m(t-h))\big)$. □

42. Обобщение на включения и непрерывные уравнения

Условие 42.1. *Пусть $\mathbf{X}(t,m)$ и $\mathbf{Y}(t,m)$ — многозначные векторные поля на M, а $\boldsymbol{\alpha}(t,m)$ и $\boldsymbol{\beta}(t,m)$ — многозначные $(2,0)$-тензорные поля, принимающие значения в $S_+(n)$ в каждой точке $m \in M$. Мы предполагаем, что при всех $t \in \mathbb{R}$ и $m \in M$ образы всех этих полей являются замкнутыми выпуклыми множествами в соответствующих пространствах и что все эти поля полунепрерывны сверху по совокупности переменных.*

Кроме того, мы будем работать с многозначными отображениями $\mathbf{Y}(t)$ из $[0,\infty)$ в касательное пространство в некоторой точке $m_0 \in M$ и отображениями $\boldsymbol{\beta}(t)$ из $[0,\infty)$ в $S_+(n)$ в пространство симметрических $(2,0)$-тензоров в m_0. Мы также предполагаем, что образы всех точек в $[0,\infty)$ замкнуты и выпуклы, а эти отображения полунепрерывны сверху.

Теорема 42.1. *Пусть M — компактное риманово многообразие, как выше. Выберем некоторую точку $m_0 \in M$. Пусть для $m \in M$, $t \geqslant 0$ многозначные векторы $\mathbf{X}(t,m)$ и $\mathbf{Y}(t) \subset T_{m_0}M$ и многозначные $(2,0)$-тензорные поля $\boldsymbol{\alpha}(t,m)$ и $\boldsymbol{\beta}(t)$ в m_0 удовлетворяют условию 42.1 и являются равномерно ограниченными. Тогда включение (40.4) имеет решение при начальном условии $\xi(0) = m_0$, и это решение существует при всех $t > 0$.*

Доказательство. Выберем последовательность положительных чисел $\varepsilon_q \to 0$ при $q \to \infty$. По теореме 43.7 для полунепрерывных сверху многозначных отображений $\mathbf{X}(t,m)$ и $\mathbf{Y}(t)$ с замкнутыми выпуклыми образами существуют последовательности непрерывных ε_q-аппроксимаций $X_q(t,m)$ и $Y_q(t)$, соответственно, такие, что $X_q(t,m)$ ($Y_q(t)$, соответственно) поточечно сходится к измеримому по Борелю селектору $\mathbf{X}(t,m)$ ($\mathbf{Y}(t)$, соответственно). Аналогичные ε-аппроксимации $\hat{\alpha}_q(t,m)$ и $\hat{\beta}_q(t)$ существуют и для $(2,0)$-тензорных полей $\boldsymbol{\alpha}(t,m)$ и $\boldsymbol{\beta}(t)$, соответственно, с дополнительным условием: так как $S_+(n)$ — выпуклое множество в $S(n)$, эти аппроксимации принимают значения в $S_+(n)$ в соответствующих пространствах тензоров.

Так как непрерывную функцию можно аппроксимировать гладкой с точностью до произвольного $\varepsilon > 0$, без потери общности мы можем считать, что $X_q(t,m)$ и $Y_q(t)$ гладкие.

Введем $\alpha_q(t,m) = \hat{\alpha}_q(t,m) + \dfrac{\varepsilon_q}{4}\tilde{g}(m)$ и $\beta_q(t) = \hat{\beta}_q(t) + \dfrac{\varepsilon_q}{4}\tilde{g}(m)$, где $g(m)$ — $(2,0)$-метрический тензор на M, соответствующий римановой метрике на M (которая является $(0,2)$-метрическим тензором). Очевидным образом $\alpha_q(t,m)$ ($\beta_q(t)$, соответственно) поточечно сходится к измеримому по Борелю селектору $\boldsymbol{\alpha}(t,m)$ ($\boldsymbol{\beta}(t)$, соответственно), и эти аппроксимации принимают значения в $\bar{S}_+(n)$ в соответствующих пространствах. Так что можно аппроксимировать $\dfrac{\varepsilon_q}{4}$ гладкими отображениями и, таким образом, без ограничения общности мы можем рассматривать $\alpha_q(t,m)$ и $\beta_q(t)$ как гладкие.

Рассмотрим уравнения

$$\begin{aligned} D\xi_q(t) &= X_q(t,\xi(t)) + \Gamma_{t,0}Y_q(t), \\ D_2\xi(t) &= \alpha_q(t,\xi(t)) + \Gamma_{t,0}\beta_q(t), \end{aligned} \tag{42.1}$$

которые удовлетворяют условиям теоремы 41.1. Обозначим через μ_q меры на пространстве выборочных траекторий, соответствующих решениям (42.1), которые существуют по теореме 41.1 на произвольном временном интервале $[0,T]$.

Оставшаяся часть доказательства проходит как простая модификация доказательства [36, Theorem 4] (она основана на изометрическом вложении многообразия в евклидово пространство достаточно большой размерности). Показывается, что множество мер $\{\mu_q\}$ слабо компактно, так что можно выбрать слабо сходящуюся подпоследовательность. Далее доказывается, что процесс, соответствующий предельной мере, удовлетворяет (40.4). □

Следствие 42.1. *Утверждение теоремы* 41.1 *справедливо, если* $X(t,m)$, $Y(t)$, $\alpha(t,m)$ *и* $\beta(t)$ *непрерывны.*

Действительно, однозначный непрерывный объект — это частный случай многозначного полунепрерывного сверху объекта.

Очевидным образом модификации построений и рассуждений, использованных выше, позволяют доказать следующее утверждение.

Теорема 42.2. *Пусть для компактного риманова многообразия, как выше, при* $m \in M$, $t \geqslant 0$ *многозначные векторы* $\mathbf{X}(t,m)$ *и* $\mathbf{Y}(t,m)$ *и многозначные тензоры* $\boldsymbol{\alpha}(t,m)$ *и* $\boldsymbol{\beta}(t,m)$ *удовлетворяют условию* 42.1 *и равномерно ограничены. Тогда включение* (40.2) *имеет решение для любого начального значения* $\varphi(t)$, *как в определении* 40.1, *и это решение существует при* $t \in [-h,h]$.

Теорема 42.3. *Пусть* $\mathbf{X}(t,m)$, $\mathbf{Y}(t,m)$ *и* $\boldsymbol{\alpha}(t,m)$ — *такие же, как в теореме* 42.2. *Тогда для любого начального условия* $\varphi(t)$, *как в определении* 40.1, *при всех* $t \in [-h,\infty)$ *существует решение* $\xi(t)$ *включения*

$$\begin{gathered} D\xi(t) \in \mathbf{X}(t,\xi(t)) + \Gamma_{t,t-h}\mathbf{Y}(t-h,\xi(t-h)), \\ D_2\xi(t) \in \boldsymbol{\alpha}(t,\xi(t)). \end{gathered} \tag{42.2}$$

Теорема 42.4. *Пусть* $\mathbf{X}(t,m)$, $\mathbf{Y}(t,m)$ *и* $\boldsymbol{\beta}(t,m)$ — *такие же, как в теореме* 42.2. *Тогда для любого начального условия* $\varphi(t)$, *как в определении* 40.1, *существует решение* $\xi(t)$ *включения*

$$\begin{gathered} D\xi(t) \in \mathbf{X}(t,\xi(t)) + \Gamma_{t,t-h}\mathbf{Y}(t-h,\xi(t-h)), \\ D_2\xi(t) \in \Gamma_{t,t-h}\boldsymbol{\beta}(t,\xi(t)), \end{gathered} \tag{42.3}$$

которое корректно определено для всех $t \in [-h,\infty)$.

Следствие 42.2. *Утверждения теорем* 41.2, 41.3 *и* 41.4 *выполняются, если* $X(t,m)$, $Y(t,m)$, $\alpha(t,m)$ *и* $\beta(t,m)$ *непрерывны.*

Глава 10

ДОПОЛНЕНИЯ

43. Многозначные отображения

Многозначное отображение F из множества X в множество Y — это отображение, которое ставит в соответствие непустое множество $F(x) \subset Y$ каждой точке $x \in X$; тогда $F(x)$ мы называем *значением* x.

Если X и Y — метрические пространства, для многозначных отображений имеется несколько различных аналогов непрерывности, которые для однозначных отображений превращаются в обычное понятие непрерывности (здесь мы не рассматриваем описание указанных понятий в топологических пространствах, см., например, [5]).

Определение 43.1. Многозначное отображение называется *полунепрерывным сверху в точке* $x \in X$, если для любого $\varepsilon > 0$ существует окрестность $U(x)$ точки x такая, что из $x' \in U(x)$ следует, что $F(x')$ лежит в ε-окрестности множества $F(x)$. F называется *полунепрерывным сверху на* X, если оно полунепрерывно сверху в каждой точке.

Определение 43.2. Многозначное отображение F называется *полунепрерывным снизу в точке* $x \in X$, если для каждого $\varepsilon > 0$ существует окрестность $U(x)$ точки x такая, что из того, что $x' \in U(x)$, следует, что $F(x)$ принадлежит ε-окрестности $F(x')$. F называется *полунепрерывным снизу на* X, если это отображение полунепрерывно снизу в каждой точке из X.

Определение 43.3. Если F полунепрерывно одновременно снизу и сверху, то оно называется *непрерывным по Хаусдорфу* (или просто *непрерывным*).

Непрерывные по Хаусдорфу отображения такие, что для каждого x его значение $F(x)$ есть ограниченное замкнутое множество, непрерывны относительно так называемой *метрики Хаусдорфа* в пространстве всех непустых ограниченных замкнутых подмножеств в Y. Именно, введем функцию уклонения множеств $\rho_*(A,B) = \sup\limits_{a\in A}(a,B)$, где ρ — метрика в Y. Тогда метрика Хаусдорфа задается формулой $h(A,B) = \max(\rho_*(A,B), \rho_*(B,A))$.

Важную техническую роль при изучении многозначных отображений играют однозначные отображения, которые в некотором смысле аппроксимируют многозначные. Мы опишем два сорта таких однозначных отображений: селекторы и ε-аппроксимации.

Определение 43.4. Пусть $F : X \to Y$ — многозначное отображение. Однозначное отображение $f : X \to Y$ такое, что при каждом $x \in X$ выполняется включение $f(x) \in F(x)$, называется *селектором* отображения F.

Не каждое многозначное отображение имеет непрерывный селектор. Для полунепрерывных многозначных отображений с выпуклыми замкнутыми значениями их существование показано в классической теореме Майкла.

Теорема 43.1 (теорема Майкла)**.** *Если X — произвольное метрическое пространство, а Y — банахово пространство, то полунепрерывное снизу отображение такое, что значение каждой точки в X является выпуклым замкнутым множеством, имеет непрерывный селектор.*

Если значения полунепрерывного снизу многозначного отображения, вообще говоря, невыпуклы, то оно может не иметь непрерывного селектора. Тогда очень часто оказывается полезным следующая конструкция.

Определение 43.5. Пусть E — сепарабельное банахово пространство. Непустое множество в $Y \subset L^1([0,l],E)$ называется *разложимым*, если $f\cdot\chi(\mathcal{Y}) + g\cdot\chi([0,l]\backslash\mathcal{Y}) \in Y$ для всех $f,g \in Y$ и для каждого измеримого подмножества $\mathcal{Y}$ в $[0,l]$, где χ — характеристическая функция соответствующего множества.

Читатель может найти больше подробностей о разложимых множествах в [42] и [72].

Теорема 43.2. *Пусть (Ξ, d) — сепарабельное метрическое пространство, X — банахово пространство. Рассмотрим пространство $Y = L^1(([0,T], \mathcal{B}, \lambda), X))$ интегрируемых отображений из $[0,T]$ в X (здесь $\mathcal{B}$ — борелевская σ-алгебра, а λ — нормализованная мера Лебега). Если многозначное отображение $G : \Xi \to Y$ полунепрерывно снизу и имеет замкнутые разложимые значения, оно имеет непрерывный селектор.*

Теорема 43.2 — это частный случай теоремы Фрышковской—Брессана—Коломбо, см., например, [42, Lemma 9.2].

В приложениях чаще встречаются полунепрерывные сверху отображения. Они, вообще говоря, не имеют непрерывных селекторов, но имеют измеримые селекторы. Для исследования полунепрерывных сверху многозначных отображений оказываются полезными так называемые ε-аппроксимации.

Определение 43.6. При заданном $\varepsilon > 0$ непрерывное однозначное отображение $f_\varepsilon : X \to Y$ называется *ε-аппроксимацией* многозначного отображения $F : X \to Y$, если график отображения f как множество в $X \times Y$ лежит в ε-окрестности графика отображения F.

Из полунепрерывных сверху многозначных отображений в конечномерных пространствах $\mathbb{R}^n$, для которых доказано существование ε-аппроксимаций при любом $\varepsilon > 0$, мы укажем следующие классы:

- Отображения с выпуклыми замкнутыми значениями.
- Так называемые отображения со значениями, асферичными во всех размерностях от 1 до $n-1$ и слабо асферичными в размерности n (см. [6]). Этот класс многозначных отображений был впервые рассмотрен А. Д. Мышкисом [25] в 1954 году, в [6, 12] для него были построены топологические характеристики типа числа Лефшеца и топологического индекса. Позже (в 80-х годах XX века) этот класс был переоткрыт в школе Л. Гурневича и назван «отображениями, чьи образы в каждой точке имеют uv^k-свойство при $k = 1, \ldots, n$» (см. точное определение, например, в [74]).

Определение 43.7. Многозначное отображение называется *замкнутым*, если его график является замкнутым множеством.

Следующие три утверждения можно найти, например, в [5]. Здесь через $C(Y), K(Y)$ обозначены совокупности, состоящие из всех непустых замкнутых или, соответственно, компактных подмножеств топологического пространства Y.

Теорема 43.3. *Если многозначное отображение $F : X \to C(Y)$ полунепрерывно сверху и пространство Y регулярно, то F замкнуто.*

Теорема 43.4. *Пусть многозначное отображение $F_0 : X \to C(Y)$ замкнуто, многозначное отображение $F_1 : X \to K(Y)$ полунепрерывно сверху и $F_0(x) \cap F_1(x) \neq \varnothing$ $\forall x \in X$. Тогда пересечение $F = F_0 \cap F_1 : X \to K(Y)$ полунепрерывно сверху.*

Теорема 43.5. *Многозначное отображение $F : X \to Y$ замкнуто тогда и только тогда, когда для любых последовательностей $x_k \subset X$, $y_k \subset Y$ таких, что $x_k \to x$, $y_k \in F(x_k)$, $y_k \to y$ выполнено $y \in F(x)$.*

Дадим точное определение многозначных отображений с асферическими образами, следуя [6, 12, 25].

Везде ниже мы рассматриваем многозначное полунепрерывное сверху отображение $F : X \to E$ из n-мерного компактного полиэдра X, лежащего в некотором евклидовом пространстве, в некоторое евклидово пространство E или в сам полиэдр X. Предположение, что X — полиэдр, не ограничивает общности. В частности, $F : X \to X$ и $F : E \to E$ можно рассматривать как такие отображения.

Символом $O(A, r)$ мы обозначаем r-окрестность множества A, символом $d(A)$ — диаметр A.

Нетрудно видеть, что из определения полунепрерывности сверху отображения F следует, что для любых $\varepsilon > 0$ и $\beta > 0$ существует число $\alpha(\varepsilon, \beta)$ такое, что в β-окрестности $O(T, \beta)$ произвольного множества T с диаметром меньшим, чем α, существует точка x_0, называемая *спутником* множества T, такая, что $O(F(x_0), \varepsilon) \supset F(T)$.

Определение 43.8. Отображение $F : X \to X$ называется *асферичным* в размерности k, если в каждой окрестности $O(F(x), \varepsilon)$ каждого значения $F(x)$ существует окрестность $Q(x, \varepsilon, k)$, содержащая δ-окрестность $F(x)$ ($\delta = \delta(\varepsilon)$, не зависит от x) такая, что $\pi_k(Q) = 0$, где $\pi_k(Q)$ — k-я гомотопическая группа Q.

Везде ниже мы предполагаем, что F асферично в размерностях $k = 0, 1, \dots, n-1$. Напомним, что $\pi_0(Q) = 0$ означает, что Q линейно связно. Опишем конструкцию ε-аппроксимаций для таких многозначных отображений F, которые полунепрерывны сверху и имеют замкнутые значения, с помощью модификации подхода [6].

Пусть μ — вещественное число такое, что $O(F(x), \mu)$ лежит в асферичной в размерности $n-1$ окрестности $F(x)$, μ не зависит от x. Построим последовательность

$$\mu > \varepsilon_{2n+1} > \varepsilon_{2n} > \delta(\varepsilon_{2n}) > \varepsilon_{2n-1} > \dots > \varepsilon_2 > \delta(\varepsilon_2) > \varepsilon_1, \tag{43.1}$$

где $\delta(\varepsilon_i)$ — число, определяющее $\delta(\varepsilon_i)$-окрестность значения $F(x)$, содержащуюся в $\bigcap\limits_{k=0}^{n} Q(x, \varepsilon_i, k)$. Затем построим последовательность $\{\beta_i\}_1^{n+1}$ и число α_0 такие, что

$$0 < \beta_k < \frac{1}{4}\beta_{k+1}; \quad \beta_k + \alpha_0 < \alpha(\varepsilon_{2k+1} - \varepsilon_{2k}, \beta_{k+1}), \tag{43.2}$$

где $\alpha(\varepsilon, \beta)$ введено выше в этом разделе. Очевидным образом такую последовательность можно построить, начиная с наибольших индексов.

Теперь зададим триангуляцию X такую, что диаметр каждого симплекса меньше $d < \min(\alpha_0, \alpha(\varepsilon_1, \beta_1))$. Каждому 0-мерному симплексу T_i^0 поставим в соответствие точку $f(T_i^0) \in F(T_i^0)$. Для каждого 1-мерного симплекса T_i^1 получим, что $d(T_i^1) < \alpha(\varepsilon_1, \beta_1)$. Таким образом, для спутника x_i^1 выполняется $x_i^1 \in O(T_i^1, \beta_1)$ и $F(T_i^1) \subset O(F(x_i^1), \varepsilon_1)$. Следовательно, выполняются включения:

$$f(T_{i_1}^0) \cup f(T_{i_2}^0) \subset F(T_i^1) \subset O(F(x_i^1), \varepsilon_1), \tag{43.3}$$

$$O(F(x_i^1), \varepsilon_1) \subset O(F(x_i^1), \delta(\varepsilon_2)) \subset Q(x_i^1, \varepsilon_2, 0) \subset O(F(x_i^1), \varepsilon_2), \tag{43.4}$$

где $T_{i_1}^0$ и $T_{i_2}^0$ — ребра T_i^1. Поскольку Q асферично в размерности 0, f можно продолжить на T_i^1 как непрерывное отображение и

$$f(T_i^1) \subset Q(x_i^1, \varepsilon_2, 0) \subset O(F(x_i^1), \varepsilon_2). \tag{43.5}$$

Пусть T_i^2 — 2-мерный симплекс с 1-мерными ребрами $T_{i_1}^1$, $T_{i_2}^1$ и $T_{i_3}^1$. Пусть $x_{i_1}^1$, $x_{i_2}^1$ и $x_{i_3}^1$ — спутники, соответствующие этим ребрам. Они образуют множество $\tilde{T}_i^1$, для которого

$$d(\tilde{T}_i^1) < 2\beta_1 + \alpha_0 < \alpha(\varepsilon_3 - \varepsilon_2, \beta_2).$$

Существует спутник x_i^2 множества $\tilde{T}_i^1$ такой, что $x_i^2 \in O(\tilde{T}_i^1, \beta_2)$ и $F(\tilde{T}_i^1) \subset O(F(x_i^2), \varepsilon_2)$. Принимая во внимание (43.4) и (43.5), мы выводим

$$\bigcup_{j=1,2,3} f(T_{i_j}^1) \subset O(F(\tilde{T}_i^1), \varepsilon_2) \subset O(F(x_i^2), \varepsilon_2). \tag{43.6}$$

По (43.1) мы имеем включения

$$O(F(x_i^2), \varepsilon_3) \subset O(F(x_i^2), \delta(\varepsilon_4)) \subset Q(x_i^2, \varepsilon_4, 1) \subset O(F(x_i^2, \varepsilon_4). \tag{43.7}$$

Поскольку $\pi_2 Q(x_i^2, \varepsilon_4, 1) = 0$, мы можем продолжить f с границы симплекса T_i^2 на весь симплекс как непрерывное отображение. В дополнение мы получаем, что

$$f(T_i^2) \subset Q(x_i^2, \varepsilon_4, 1) \subset O(F(x_i^2), \varepsilon_4). \tag{43.8}$$

И так далее. На последнем шаге мы продолжаем f с $(n-1)$-остова X на весь X как непрерывное отображение. По построению график f лежит в ε_{2n+1}-окрестности графика F.

Теорема 43.6. *Для F, как выше, существует последовательность $f^{(k)}$ непрерывных ε_{2n+1}^k-аппроксимаций описанного выше типа, $\varepsilon_{2n+1}^k \to 0$ при $k \to \infty$, таких, что для любой точки x некоторого счетного всюду плотного подмножества $\Xi \subset X$ существует целое число K такое, что для любого $k > K$ выполняется включение $f^{(k)}(x) \in F(x)$ и $f^{(k+l)}(x) = f^{(k)}(x)$ для любого целого числа $l > 0$.*

Доказательство. По построению для каждого x из 0-мерного остова X для f, построенного выше, мы задали значение $f(x) \in F(x)$. Теперь рассмотрим последовательность барицентрических разбиений X. Обозначим через X_0^k 0-мерный остов k-го разбиения. На каждом $(k+1)$-м шагу для $x \in X_0^k$ сохраним значения $f^{(k+1)}(x) = f^{(k)}(x)$ и введем произвольное значение $f^{(k+1)}(x) \in F(x)$ для $x \in X_0^{(k+1)} \backslash X_0^{(k)}$. Затем построим непрерывное $f^{(k+1)}$ на всем X тем же способом, что и выше. Предельное множество Ξ в $X_0^{(k)}$ при $k \to \infty$ и есть искомое множество. □

Следующее утверждение, по-видимому, неприменимо в теории обыкновенных дифференциальных включений, но имеет важные приложения в теории стохастических дифференциальных включений. Оно утверждает, что для полунепрерывных сверху многозначных отображений с выпуклыми замкнутыми значениями существуют последовательности ε-аппроксимаций, которые поточечно сходятся к измеримому по Борелю селектору. Для стохастического случая это приводит к важному следствию — указанные аппроксимации сходятся п.н. по любой вероятностной мере.

Теорема 43.7. *Пусть $\Phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ — полунепрерывное сверху многозначное отображение с выпуклыми замкнутыми значениями. Для любой последовательности $\varepsilon_i \to 0$ существует последовательность ε_i-аппроксимаций отображения Φ, которая поточечно сходится к борелевскому селектору Φ. Если Φ принимает значения в выпуклом множестве Ξ в $\mathbb{R}^n$, то эти ε-аппроксимации также принимают значения в Ξ.*

Доказательство. В [8, теорема 2] показано, что в рассматриваемом случае для любого ε_i существует полунепрерывное снизу многозначное отображение $\Psi_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ с замкнутыми выпуклыми значениями такое, что: (i) для любого $x \in \mathbb{R}^n$ выполняется включение $\Phi(x) \subset \Psi_i(x)$; (ii) график Ψ_i принадлежит ε_i-окрестности графика Φ. Из построения следует, что если Φ принимает значения в выпуклом множестве Ξ в $\mathbb{R}^n$, то значения $\Psi_i(x)$ также лежат в Ξ. Отметим, что для полунепрерывного сверху отображения с компактными значениями сумма таких отображений и произведения с непрерывной функцией полунепрерывны сверху. Следовательно из доказательства [8, теорема 2] вытекает, что в рассматриваемом случае все Ψ_i являются непрерывными по Хаусдорфу многозначными отображениями и, в частности, в нашем случае они непрерывны по метрике Хаусдорфа.

Рассмотрим минимальный селектор $\psi_i(\cdot)$ отображения $\Psi_i(\cdot)$, т. е. $\psi_i(x)$ является точкой $\Psi_i(x)$, $x \in \mathbb{R}^n$, ближайшей к началу координат. Мы отсылаем читателя к [34] за полным описанием минимальных селекторов. В частности, показано, что минимальные селекторы непрерывны. Таким образом, ψ_i является ε_i-аппроксимацией отображения Φ.

Зафиксируем произвольную точку $x \in \mathbb{R}^n$. Поскольку $\Phi(x) \subset \Psi_i(x)$ для любого i, для Хаусдорфова уклонения ρ_* получаем $\rho_*(\Phi(x), \Psi_k(x)) = 0$. Следовательно, для метрики Хаусдорфа H выполняется $H(\Psi_i(x), \Phi(x)) = \rho_*(\Psi_i(x), \Phi(x))$ при любом i.

Теперь выберем ε_k. По определению полунепрерывности сверху для любого $x \in \mathbb{R}^n$ существует $\delta_k > 0$ такое, что для любого x' из δ_k-окрестности x значение $\Phi(x')$ принадлежит ε_k-окрестности $\Phi(x)$. Так как $\varepsilon_i \to 0$, то $\varepsilon_{k+l} < \delta_k$ для некоторого $l = l(k, x)$, и без ограничения общности мы можем выбрать $l(k, x) \geqslant 0$. Так что $\rho_*(\Phi(x'), \Phi(x)) < \varepsilon_k$ для каждой точки x' из ε_{k+l}-окрестности точки x.

Так как график Ψ_{k+l} лежит в ε_{k+l}-окрестности графика Φ, существует точка x'' в ε_{k+l}-окрестности x такая, что $\Psi_{k+l}(x)$ принадлежит ε_{k+l}-окрестности $\Phi(x'')$, т. е. $\rho_*(\Psi_{k+l}(x), \Phi(x'')) < \varepsilon_{k+l}$.

Таким образом,

$$H(\Psi_{k+l}(x), \Phi(x)) = \bar{H}(\Psi_{k+l}(x), \Phi(x)) \leqslant \bar{H}(\Psi_{k+l}(x), \Phi(x'')) + \bar{H}(\Phi(x''), \Phi(x)) < \varepsilon_{k+l} + \varepsilon_k < 2\varepsilon_k.$$

Следовательно, для каждого x выпуклое множество $\Psi_i(x)$ стремится к выпуклому множеству $\Phi(x)$ по метрике Хаусдорфа при $i \to \infty$. Тогда $\psi_i(x)$ стремится к точке $\varphi(x) \in \Phi(x)$, ближайшей к началу координат. Хорошо известно, что поточечный предел $\varphi(\cdot)$ последовательности непрерывных отображений $\psi_i(\cdot)$ является измеримым по Борелю отображением. Это завершает доказательство теоремы. □

44. Некоторые факты из теории связностей

Пусть M — гладкое многообразие, TM — его касательное расслоение, $\pi : TM \to M$ — естественная проекция. Обозначим через T_mM касательное пространство к M в $m \in M$, через $T_{(m,X)}TM$ — касательное пространство к TM в точке $(m, X) \in TM$, где $X \in T_mM$ — касательный вектор к M в m.

Напомним, что на многообразии M задана *связность*, если в каждом касательном пространстве $T_{(m,X)}TM$ задано подпространство $\mathsf{H}_{(\mathsf{m},\mathsf{X})}$, дополнительное к вертикальному подпространству $\mathcal{V}_{(m,X)}$ — касательному пространству к слою T_mM расслоения TM, и при этом набор подпространств H является гладким по (m, X) и (при любом $a \in \mathbb{R}$) инвариантным относительно отображения Ta — касательного к отображению $a : TM \to TM$, умножению всех векторов на число a. *Отображением связности*, или *коннектором*, называется послойный линейный оператор $K : TTM \to TM$, который на каждом $\mathcal{V}_{(m,X)}$ является линейным изоморфизмом на T_mM и ядром которого является $\mathsf{H}_{(m,X)}$.

Для гладких векторных полей X, Y на M ковариантная производная Y по X — это векторное поле $\nabla_X Y = K \circ TY(X)$, где Y рассматривается как отображение $Y : M \to TM$, и TY — его касательное отображение. Отметим, что $TY(X) \in TTM$ является естественной инвариантной (т. е. корректно определенной без выбора карт) производной Y по X.

Пусть $X(t)$ — векторное поле вдоль гладкой кривой $m(t)$. Ковариантная производная от $X(t)$ по времени вдоль $m(t)$ определяется формулой $\frac{D}{dt}X(t) = K \circ \frac{d}{dt}X(t)$. Как и выше, $\frac{d}{dt}X(t) \in TTM$ является естественной инвариантной производной $X(t)$ по t вдоль $m(t)$.

Векторное поле $X(t)$ называется *параллельным* вдоль $m(t)$, если $\frac{D}{dt}X(t) = 0$. Кривая $m(t)$ называется *геодезической*, если $\frac{D}{dt}\dot{m}(t) = 0$. Из последнего равенства следует, что

$$\frac{d}{dt}\dot{m}(t) = Z(m(t), \dot{m}(t)) \in T_{(m(t),\dot{m}(t))}TM, \tag{44.1}$$

где Z — векторное поле на TM, вектор которого в $(m, X) \in TM$ лежит в $\mathsf{H}_{(m,X)}$ и выражается по формуле $Z(m, X) = T\pi^{-1}X \in \mathsf{H}_{(m,X)}$. Поле Z называется *геодезической струей* связности H.

Можно показать, что в каждой карте на M разность между $\nabla_X Y$ и обычной производной векторного поля Y по направлению векторного поля X в точке m равна $\mathbf{\Gamma}_m(X, Y)$ (в этой карте — подчеркнем, что «обычная» производная зависит от выбора карты, т. е. не является инвариантной), где $\mathbf{\Gamma}_m(\cdot, \cdot)$ — билинейное отображение $\mathbf{\Gamma}_m : T_mM \times T_mM \to T_mM$, называемое *локальным коэффициентом связности*, или *локальным коннектором*. Его компоненты называются символами Кристоффеля второго рода и обозначаются Γ^k_{ij}. Отметим, что $\mathbf{\Gamma}_m(\cdot, \cdot)$ не является тензором, т. е. при заменах координат преобразуется не по тензорному закону.

Определение 44.1. Будем говорить, что на векторном расслоении Q задана *связность* H, если в каждом касательном пространстве $T_{(m,V)}Q$ задано подпространство $\mathsf{H}_{(m,V)}$, дополнительное до $\mathcal{V}_{(m,V)}$ (т. е. $T_{(m,V)}Q = \mathsf{H}_{(m,V)} \oplus \mathcal{V}_{(m,V)}$ в каждой точке $(m, V) \in Q$), и при этом набор подпространств H удовлетворяет следующим двум условиям:

(i) пространство $\mathsf{H}_{(m,V)}$ гладко зависит от $(m, V) \in Q$;
(ii) набор подпространств H инвариантен относительно действия вещественной прямой на Q, т. е. для всех $(m, V) \in Q$ выполняется равенство $Ta\mathsf{H}_{(m,V)} = \mathsf{H}_{(m,aV)}$ при любом $a \in \mathbb{R}$.

Понятия отображения связности $K : T_{(m,V)}Q \to Q_m$, локального коэффициента связности и ковариантной производной вводятся аналогично случаю связности на многообразии (см. выше).

Если связность H зафиксирована, подпространства $\mathsf{H}_{(m,V)}$ называются *горизонтальными*, как и векторы из $\mathsf{H}_{(m,V)}$.

Напомним, что *главное расслоение* — это расслоение, у которого стандартный слой совпадает со структурной группой. На главном расслоении E в касательном пространстве $T_{(m,\varepsilon)}E$, $\varepsilon \in E_m$ также имеется *вертикальное подпространство* $\mathcal{V}_{(m,\epsilon)}$, состоящее из векторов, касательных к слою E_m. Напомним, что слой изоморфен структурной группе G. Показано, что $\mathcal{V}_{(m,\epsilon)}$ изоморфно алгебре Ли $\mathfrak{g}$ группы G.

В этом случае связности вводятся аналогично определению 44.1, только вместо и инвариантности относительно действия вещественной оси требуется инвариантность относительно правого действия группы G.

Аналогом отображения связности является семейство проекторов касательных пространств $T_{(m,\epsilon)}E$ на вертикальные подпространства $\mathcal{V}_{(m,\epsilon)}$, ядрами которых являются (горизонтальные) пространства связности. Однако, учитывая, что расслоение вертикальных векторов над E представимо в виде $E\times\mathfrak{g}$, его рассматривают как семейство линейных отображений $\theta : T_{(m,\epsilon)}E \to \mathfrak{g}$ и называют *формой связности*, которая принимает значения в алгебре Ли $\mathfrak{g}$ группы G.

Примерами главных расслоений являются расслоение базисов BM в касательных пространствах к M и (в случае римановых многообразий) его подрасслоение ортонормированных базисов OM.

Расслоения $\mathcal{V}$ и H над BM и OM тривиальны (представимы в виде прямого произведения базы на слой): $\mathcal{V}$ тривиализуются так называемыми фундаментальными векторными полями, а H — векторными полями $\mathsf{E}(x)$, где вектор $\mathsf{E}_b(x)\in\mathsf{H}_b$ для $b\in OM$ (или BM), а $x\in\mathbb{R}^n$ задается равенством $\mathsf{E}_b(x) = T\pi^{-1}(bx)|_{\mathsf{H}_b}$. Базис $b = e^1,\dots e^n$ рассматривается как линейный оператор $b:\mathbb{R}^n \to T_{\pi b}M$ из арифметического пространства столбцов $X = (X_1,\dots,X_n)$ в $T_{\pi b}M$, действующий по формуле $bX = e^iX_i$ (см. подробности, например, [4, 50]). Таким образом, касательные расслоения $TBM = \mathsf{H}\oplus\mathcal{V}$ и $TOM = \mathsf{H}\oplus\mathcal{V}$ также тривиальны. Нетрудно видеть, что отображение $\mathsf{E}_b:\mathbb{R}^n\to\mathsf{H}_b$ является линейным изоморфизмом и гладко зависит от $b\in BM$.

Определение 44.2. Векторное поле $\mathsf{E}(X)$ на BM, которое в $b\in BM$ равно $\mathsf{E}_b(X)$, называется *базисным векторным полем.*

Каждое главное расслоение порождает так называемые *ассоциированные* с ним расслоения следующим образом. Пусть E — главное расслоение со структурной группой G, и пусть F — многообразие, на котором задано некоторое действие G слева. Рассмотрим прямое произведение $E\times F$ и определим на нем действие G справа по формуле $(\eta,f)g = (\eta\circ g, g^{-1}f)$ (это действие справа, поскольку $(gh)^{-1} = h^{-1}g^{-1}$). Над каждой картой $\mathcal{U}_\alpha$ на M сужение $E\times F$ имеет вид $\mathcal{U}_\alpha\times G\times F$. Построим фактор-пространство $E\times F$ по указанному действию группы G. Его точками объявляются множества $(m, hg, g^{-1}f)$ для всех $g\in G$, называемые *орбитами* точек $(m,h,f)\in\mathcal{U}_\alpha\times G\times F$. Каждой орбите взаимно однозначно соответствует точка $(m,hf)\in\mathcal{U}_\alpha\times F$. Действительно, так как любая точка орбиты имеет вид $(m,hg,g^{-1}f)$ при некотором фиксированном $g\in G$, мы получаем $(m,(hg)(g^{-1}f)) = (m,hf)$. Таким образом, над $\mathcal{U}_\alpha$ указанное фактор-пространство представимо в виде $\mathcal{U}_\alpha\times F$, т. е. само фактор-пространство является расслоением над M со слоем F и структурной группой G, для которого замены координат в слоях $g_{\alpha\beta}(m)$ — те же самые, что и для E.

Определение 44.3. Построенное фактор-пространство называется *расслоением* со слоем F, ассоциированным с главным расслоением E.

Следует отметить, что любое неглавное расслоение является ассоциированным с некоторым главным.

Замечание 44.1. Обозначим через λ отображение $E\times F$ на пространство ассоциированного расслоения, состоящее в факторизации по указанному выше соотношению эквивалентности.

Пусть Q — некоторое расслоение со слоем F, ассоциированное с главным расслоением $\underline{G}$. Как и на любом другом расслоении, можно рассмотреть вертикальные подпространства в касательных пространствах к Q — это подпространства, состоящие из векторов, касательных к слою. Отображение $\lambda:\underline{G}\times F\to Q$ (см. замечание 44.1) переводит горизонтальные подпространства на главном расслоении $\underline{G}$ в подпространства в касательных пространствах к Q, дополнительные до вертикальных подпространств. Полученный набор подпространств является связностью на Q. Если G — это $GL(k,R)$ или какая-либо ее подгруппа со стандартным действием на R^k, то ассоциированным будет векторное расслоение.

Теорема 44.1. *Любая связность на векторном расслоении является образом некоторой связности на соответствующем главном расслоении при отображении λ.*

И на векторном, и на главном расслоении касательное отображение $T\pi$ к проекции π взаимно однозначно переводит пространство связности $\mathsf{H}_{(m,X)}$ в любой точке (m,X) расслоения на касательное пространство T_mM. Рассмотрим вектор $Y \in T_mM$. Через Y^T обозначается вектор $T\pi^{-1}Y \in \mathsf{H}_{(m,X)}$, который называется горизонтальным подъемом Y в точку (m,X). Пусть $m(t)$ — гладкая кривая на M, ее векторное поле производной вдоль нее самой обозначим $\dot m(t)$. Сузим расслоение на эту кривую и рассмотрим на этом сужении векторное поле $\dot m^T$. Дифференциальное уравнение $\dfrac{d}{dt}X(t) = \dot m^T$ при любом начальном данном $X(0)$ имеет единственное решение $m^T(t)$, которое называется *горизонтальным подъемом кривой* $m(t)$. Для случая векторных расслоений $m^T(t)$ является параллельным переносом вектора X_0 вдоль $m(t)$ в смысле приведенного выше определения в терминах ковариантной производной. На главных расслоениях $m^T(t)$ называется *параллельным переносом* X_0 вдоль $m(t)$.

На римановом многообразии тот факт, что на расслоении TOM касательное отображение $T\pi$ взаимно однозначно переводит пространство связности $\mathsf{H}_{(m,X)}$ в любой точке (m,X) расслоения на касательное пространство T_mM, позволяет поднять риманову метрику с M на пространства расслоения H. Эта риманова метрика порождает связность, соответствующую связности на M. С помощью этой связности осуществляется связь между векторными полями Ито и уравнениями Ито (см. раздел 26).

Пусть на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, \mathsf{P})$ заданы процессы $\alpha(t)$ и $A(t)$, подчиненные некоторой фильтрации, которой также подчинен винеровский процесс $w(t)$. От $A(t)$ потребуем, чтобы при $t \in [0,T]$ был корректно определен интеграл Ито $\int\limits_0^t A(\tau)dw(\tau)$. Построим на расслоении базисов BM или на главном расслоении, у которого структурной группой является подгруппа группы невырожденных матриц (например, на расслоении OM ортонормированных базисов на римановом многообразии), базисное векторное поле Ито со случайными коэффициентами, которое в $b \in BM$ имеет вид $(\mathsf{E}_b(b_0^{-1}\alpha(t)), \mathsf{E}_b(b_0^{-1}A(t)))$. С помощью локальных коннекторов указанной выше связности перейдем от этого векторного поля Ито к соответствующему уравнению Ито.

Определение 44.4. Рассмотрим в $T_{\pi b_0}M$ процесс Ито $y(t) = \int\limits_0^t \alpha(\tau)d\tau + \int\limits_0^t A(\tau)dw(\tau)$. Процесс $\pi\xi_{\,0,b_0}(t)$ на M, где $\xi_{\,0,b_0}(t)$ — решение уравнения указанного уравнения Ито, построенного по $y(t)$, называется *разверткой Ито* процесса $y(t)$ в $T_{\pi b_0}M$ и обозначается $R_I\, y(t)$. Само решение $\xi_{\,0,b_0}(t)$ называется *горизонтальным подъемом процесса* $R_I\, y(t)$ на OM с начальным значением b_0.

Отметим, что горизонтальный подъем процесса $R_I\, y(t)$ на OM с начальным значением b_0 является параллельным переносом b_0 вдоль $R_I\, y(t)$.

Важным примером развертки Ито является развертка винеровского процесса, которая (обычно в случае расслоения OM) называется *винеровским процессом на многообразии.*

Определение 44.5. Если развертка Ито винеровского процесса относительно связности H существует при $t \in [0,+\infty)$, то связность H называется *стохастически полной.*

Для сравнения с понятием полной связности (см. определение 44.7 ниже) отметим, что полная связность не обязательно стохастически полна, и стохастически полная связность не обязательно полна. Однако если связность полна, имеются достаточные условия ее стохастической полноты.

Если стохастически полна связность Леви-Чивита на римановом многообразии, то это многообразие называется *стохастически полным.*

Напомним (см. выше) понятие геодезической.

Определение 44.6. Кривая $m(t)$ такая, что ее векторное поле скорости $\dot m(t)$ параллельно вдоль этой кривой, называется *геодезической.*

На многообразии M со связностью геодезические являются аналогами прямых линий в векторном пространстве. Действительно, так как параллельное вдоль кривой векторное поле является аналогом постоянного векторного поля в линейном пространстве, то свойство кривой иметь параллельное вдоль нее самой векторное поле скорости аналогично свойству кривой в линейном пространстве иметь постоянную скорость. В линейном пространстве прямые с естественной параметризацией и только они обладают последним свойством.

Исходя из определения 44.6 и определения параллельного векторного поля вдоль кривой, получим, что кривая $m(t)$ является геодезической тогда и только тогда, когда в любой ее точке выполняется равенство

$$\frac{D}{dt}\dot{m}(t) = 0. \tag{44.2}$$

Теорема 44.2. *Для любой точки $m \in M$ и любого вектора $X \in T_mM$ существует и единственна геодезическая $m(t)$ с начальными условиями $m(0) = m$, $\dot{m}(0) = X$, которая определена при $t \in [0,\varepsilon)$, где $\varepsilon > 0$ — достаточно малое число.*

Определение 44.7. Если любая геодезическая связности $\mathbf{H}$ существует при $t \in [0,\infty)$, то связность $\mathbf{H}$ на M называется *полной*.

Пусть $X \in T_mM$ — касательный вектор в точке m. Обозначим через $m_X(t)$ геодезическую с начальными условиями $m(0) = m$, $\dot{m}(0) = X$, которая существует при $t \in [0,\varepsilon)$ по теореме 44.2. Зафиксируем положительное число $\lambda < 1$. Нетрудно видеть, что $m(\lambda t)$ — геодезическая с начальным вектором производной λX, которая существует при $t \in \left[0, \dfrac{1}{\lambda}\varepsilon\right)$. Поэтому, если X достаточно близко к нулю, геодезическая $m_X(t)$ существует при $t = 1$.

Определение 44.8. Отображение $\exp : \mathcal{O} \to M$, где $\mathcal{O}$ — некоторая окрестность нуля в T_mM, заданное формулой $\exp(X) = m_X(1)$, называется *экспоненциальным отображением* связности $\mathcal{H}$.

Понятно, что если H — полная связность, то экспоненциальное отображение определено на всем T_mM.

Теорема 44.3. *Существует окрестность $\mathcal{O}$ нуля в T_mM такая, что* $\exp$ *является диффеоморфизмом $\mathcal{O}$ на* $\exp\mathcal{O}$, *гладко зависящим от точки m.*

Отметим, что пара $(\mathcal{O}, \exp)$ удовлетворяет определению карты. Эта карта называется *нормальной картой* (или нормальной окрестностью) связности H в точке m. В нормальной карте точки m в самой точке m выполнено $\mathbf{p}\Gamma_m(\cdot,\cdot) = 0$, т. е. все символы Кристоффеля второго рода $\Gamma^k_{ij}(m)$ связности H в точке m равны нулю.

Пусть M — риманово многообразие с римановой метрикой $\langle\cdot,\cdot\rangle$. В этом случае на M вводится специальный класс связностей, называемых римановыми.

Определение 44.9. Связность на римановом многообразии M называется *римановой*, если для любых трех гладких векторных полей X, Y и Z выполняется равенство $X\langle Y,Z\rangle = \langle\nabla_X Y, Z\rangle + \langle Y, \nabla_X Z\rangle$ (аналог правила Лейбница), где $X\langle Y,Z\rangle$ обозначает производную функции $\langle Y,Z\rangle$ на M по направлению векторного поля X.

Важную роль в геометрии многообразий играют так называемые тензоры кривизны и кручения. Тензор кривизны нам не понадобится. А *тензор кручения* мы определим как тензор, чьи компоненты T^k_{ij} выражаются через символы Кристоффеля второго рода формулой $T^k_{ij} = \Gamma^k_{ij} - \Gamma^k_{ji}$. Отметим, что равенство нулю тензора кручения означает, что символы Кристоффеля второго рода симметричны по нижним индексам.

Теорема 44.4 (основная лемма римановой геометрии). *На любом римановом многообразии существует и единственна риманова связность, у которой тензор кручения везде равен нулю.*

Определение 44.10. Связность, существование и единственность которой доказывается в теореме 44.4, называется *связностью Леви-Чивита.*

Определение 44.11. Если связность Леви-Чивита на римановом многообразии M полна, то M называется *полным римановым многообразием.*

45. Касательные векторы второго порядка и связности

Определение 45.1. *Касательный вектор второго порядка* к многообразию M в точке $m \in M$ — это дифференциальный оператор второго порядка на M в точке m с нулевым постоянным членом и симметрической матрицей коэффициентов при производных второго порядка в локальных координатах. Линейное пространство касательных векторов второго порядка в точке $m \in M$ называются *касательным пространством второго порядка* и обозначается τ_mM.

Обычно тот факт, что постоянный член равен нулю, у дифференциального оператора $\mathcal{A}$ второго порядка выражается условием $\mathcal{A}1 = 0$, где 1 — функция, тождественно равная к единице.

Напомним, что обычный вектор (т. е. вектор первого порядка) рассматривается как дифференциальный оператор первого порядка без постоянного члена (производная по направлению вектора). Аналогично, дифференциальные операторы второго порядка без постоянных членов называются *касательными векторами второго порядка.*

Множество всех касательных векторов второго порядка имеет структуру расслоения со слоем $\tau_m M$, называется *касательным расслоением второго порядка* и обозначается τM.

В локальных координатах каждый касательный вектор второго порядка $\mathcal{A} \in \tau_m M$ однозначно представляется в виде: $\mathcal{A}x = b^i \dfrac{\partial}{\partial q^i} + \beta^{ij} \dfrac{\partial^2}{\partial q^j \partial q^j}$, где матрица (β^{ij}) симметрична, поскольку $\dfrac{\partial^2 f}{\partial q^i \partial q^j} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial q^j \partial q^i}$ для гладкой вещественнозначной f. Таким образом, $\dfrac{\partial}{\partial x^i}$ и $\dfrac{\partial^2}{\partial x^i \partial x^j}$, $i, j = 1, 2, \ldots, n$, образуют базис в $\tau_m M$. Отметим, что преобразование компонент вектора второго порядка при изменении координат описывается формулой (см., например, [7])

$$\beta^{i'j'} = \frac{\partial q^{i'}}{\partial q^i} \frac{\partial q^{j'}}{\partial q^j} \beta^{ij}, \qquad b^{k'} = \frac{\partial q^{k'}}{\partial q^k} b^k + \frac{\partial^2 q^{k'}}{\partial q^i \partial q^j} \beta^{ij}. \tag{45.1}$$

Из (45.1) следует, что при каждом $m \in M$ касательное пространство первого порядка $T_m M$ является подпространством в $\tau_m M$, состоящим из векторов с нулевой матрицей (β^{ij}). Но если эта матрица не нулевая, столбец (b^i) не является касательным вектором первого порядка, так как у него другое правило преобразования при заменах координат. С другой стороны, по (45.1) поле матриц (β^{ij}) является симметричным $(2, 0)$-тензорное полем и симметрично во всех системах координат.

Имеется и аналогичное построение дифференциальных форм второго порядка. Теория векторов второго порядка и дифференциальных форм подробно описаны, например, в [78, 84]. В этих работах также можно найти интересный подход к стохастическим дифференциальным уравнениям на многообразиях.

В каждой точке $m \in M$ существует канонический изоморфизм между пространством $T_m M \odot T_m M$ (где $\odot$ обозначает симметрическое тензорное произведение) и фактор-пространством $\tau_m M / T_m M$, а значит, между $TM \odot TM$ и $\tau M / TM$ (см. [84]). Учитывая эту факторизацию, построим морфизм $\mathcal{Q} : \tau M \to TM \odot TM$, т. е. поле линейных проекторов $\mathcal{Q}_m : \tau_m M \to T_m M \odot T_m M$ таких, что

$$\mathcal{Q}B(t, m) = \mathcal{Q}(b^i \frac{\partial}{\partial q^i} + \beta^{ij} \frac{\partial^2}{\partial q^i \partial q^j}) = \beta^{ij} \frac{\partial}{\partial q^i} \otimes \frac{\partial}{\partial q^j}. \tag{45.2}$$

Каждая связность H на M определяет линейный оператор из $\tau_m M$ в $T_m M$ в каждой точке $m \in M$ следующим образом:

$$\mathcal{H}(b^k \frac{\partial}{\partial q^k} + \beta^{ij} \frac{\partial^2}{\partial q^j \partial q^j}) = (b^k + \Gamma^k_{ij} \beta^{ij}) \frac{\partial}{\partial q^k}, \tag{45.3}$$

где Γ^k_{ij} — это символы Кристоффеля связности H. Таким образом, связности и только они являются гладкими сечениями расслоения $\mathrm{Hom}(\tau M, TM)$ послойно линейных операторов из τM в TM.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Азарина С. В., Гликлих Ю. Е.* О разрешимости неавтономных стохастических дифференциальных уравнений с текущими скоростями// Мат. заметки. — 2016. — *100*, № 1. — С. 3–12.
2. *Асеев С. М.* Существование дифференцируемой однозначной ветви у многозначного отображения// В сб.: «Некоторые вопросы прикладной математики и программного обеспечения ЭВМ». — Москва, 1982. — С. 36–39.
3. *Биллингсли П.* Сходимость вероятностных мер. — М.: Наука, 1977.
4. *Бишоп Р. Л., Криттенден Р. Дж.* Геометрия многообразий. — М.: Мир, 1967.
5. *Борисович Ю. Г., Гельман Б. Д., Мышкис А. Д., Обуховский В. В.* Введение в теорию многозначных отображений и дифференциальных включений. — М.: КомКнига, 2005.

6. *Борисович Ю. Г., Гликлих Ю. Е.* О числе Лефшеца для одного класса многозначных отображений// В сб.: «Седьмая летняя математическая школа». — Киев: Инст. математики АН УССР, 1970. — С. 283–294.
7. *Ватанабэ С., Икэда Н.* Стохастические дифференциальные уравнения и диффузионные процессы. — М.: Наука, 1986.
8. *Гельман Б. Д.* Непрерывные аппроксимации многозначных отображений и неподвижные точки// Мат. заметки. — 2005. — *78*, № 2. — С. 212–222.
9. *Гихман И. И., Скороход А. В.* Теория случайных процессов. Т. 1. — М.: Наука, 1971.
10. *Гихман И. И., Скороход А. В.* Теория случайных процессов. Т. 3. — М.: Наука, 1975.
11. *Гихман И. И., Скороход А. В.* Введение в теорию случайных процессов. — М.: Физматлит, 1977.
12. *Гликлих Ю. Е.* Неподвижные точки многозначных отображений с невыпуклыми образами и вращение многозначных векторных полей// В сб.: «Сборник трудов аспирантов математического факультета». — Воронеж: ВГУ, 1972. — С. 30–38.
13. *Гликлих Ю. Е.* Глобальный и стохастический анализ в задачах математической физики. — М.: Комкнига, 2005.
14. *Гликлих Ю. Е.* Производные в среднем случайных процессов и их применения. — Владикавказ: ЮМИ ВНЦ РАН, 2016.
15. *Гликлих Ю. Е.* О разрешимости стохастических дифференциальных уравнений с осмотическими скоростями// Теор. вер. и ее примен. — 2020. — *65*, № 4. — С. 806–817.
16. *Гликлих Ю. Е., Винокурова Н. В.* Уравнение Ньютона—Нельсона на расслоениях со связностями// Фундам. и прикл. мат. — 2015. — *20*, № 3. — С. 61–81.
17. *Гликлих Ю. Е., Щичко Т. А.* О полноте стохастических потоков, порожденных уравнениями с текущими скоростями// Теор. вер. и ее примен. — 2019. — *64*, № 1. — С. 3–16.
18. *Далецкий Ю. Л., Белопольская Я. И.* Стохастические уравнения и дифференциальная геометрия. — Киев: Выща Школа, 1989.
19. *Желобенко Д. П.* Компактные группы Ли и их представления. — М.: Наука, 1970.
20. *Иосида К.* Функциональный анализ. — М.: Мир, 1967.
21. *Келли Дж. Л.* Общая топология. — М.: Наука, 1968.
22. *Крылов Н. В.* Управляемые процессы диффузионного типа. — М.: Наука, 1977.
23. *Липцер Р. Ш., Ширяев А. Н.* Статистика случайных процессов. — М.: Наука, 1974.
24. *Макарова А. В.* О разрешимости дифференциальных включений с текущими скоростями// Spectral and evolution problems. — 2012. — *22*. — С. 125–128.
25. *Мышкис А. Д.* Обобщение теоремы о стационарной точке динамической системы внутри замкнутой траектории// Мат. сборник. — 1954. — *34*, № 3. — С. 525–540.
26. *Партасарати К.* Введение в теорию вероятностей и теорию меры. — М.: Мир, 1988.
27. *Фарбер М. Ш.* О гладких сечениях пересечения многозначных отображений// Изв. акад. наук Аз. ССР. — 1979. — № 6. — С. 23–28.
28. *Фрейдлин М. И.* О факторизации неотрицательно определенных матриц // Теор. вер. и ее примен. — 1968. — *13*, № 2. — С. 375–378.
29. *Чистяков В. Ф., Щеглова А. А.* Избранные главы теории алгебро-дифференциальных систем. — Новосибирск: Наука, 2003.
30. *Шестаков А. Л., Свиридюк Г. А.* Новый подход к измерению динамически искаженных сигналов// Вестн. Юж.-Урал. гос. ун-та. — 2010. — № 5. — С. 116–120.
31. *Ширяев А. Н.* Вероятность. — М.: Наука, 1989.
32. *Шутц Б.* Геометрические методы математической физики. — М.: Мир, 1984.
33. *Arnol'd V.* Sur la géométrie différentielle des groupes de Lie de dimension infinie et ses applications a l'hydrodynamique des fluides parfaits// Ann. Inst. Fourier. — 1966. — *16*, № 1. — С. 319–361.
34. *Aubin J.-P., Cellina A.* Differential Inclusions. Set-Valued Maps and Viability Theory. — Berlin etc.: Springer, 1984.
35. *Azarina S. V., Gliklikh Yu. E.* Differential inclusions with mean derivatives// Dyn. Syst. Appl. — 2007. — *16*, № 1. — С. 49–71.
36. *Azarina S. V., Gliklikh Yu. E.* On differential equations and inclusions with mean derivatives on a compact manifold// Discuss. Math. Differ. Incl. Control Optim. — 2007. — *27*, № 2. — С. 385–397.
37. *Azarina S. V., Gliklikh Yu. E.* Stochastic differential equations and inclusions with mean derivatives relative to the past// Int. J. Difference Equ. — 2009. — *4*, № 1. — С. 27–41.
38. *Azarina S. V., Gliklikh Yu. E.* On existence of solutions to stochastic differential equations with current velocities// Вестн. ЮУрГУ. Сер. Мат. модел. и прогр. — 2015. — *8*, № 4. — С. 100–106.

39. *Azarina S. V., Gliklikh Yu. E., Obukhovskii A. V.* Solvability of Langevin differential inclusions with set-valued diffusion terms on Riemannian manifolds// Appl. Anal. — 2007. — *86*, № 9. — C. 1105–1116.
40. *Azencott R.* Behavior of diffusion semi-groups at infinity// Bull. Soc. Math. France. — 1974. — *102*. — C. 193–240.
41. *Cresson J., Darses S.* Stochastic embedding of dynamical systems// J. Math. Phys. — 2007. — *48*. — C. 072703-1–072303-54
42. *Deimling K.* Multivalued Differential Equations. — Berlin–New York (NY): Walter de Gruyter, 1992.
43. *Dohrn D., Guerra F., Ruggiero P.* Spinning particles and relativistic particles in framework of Nelson's stochastic mechanics// Lect. Notes Phys. — 1979. — *106*. — C. 121–127
44. *Ebin D. G., Marsden J.* Groups of diffeomorphisms and the motion of an incompressible fluid// Ann. Math. — 1970. — *92*, № 1. — C. 102–163.
45. *Elworthy K. D.* Stochastic Differential Equations on Manifolds. — Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1982.
46. *Elworthy K. D., Le Jan Y., Li X.-M.* The Geometry of Filtering. — Basel: Birkhäuser, 2010.
47. *Gliklikh Yu. E.* Ordinary and Stochastic Differential Geometry as a Tool for Mathematical Physics. — Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1996.
48. *Gliklikh Yu. E.* Global Analysis in Mathematical Physics. Geometric and Stochastic Methods. — New York: Springer, 1997.
49. *Gliklikh Yu. E.* Solutions of Burgers, Reynolds, and Navier–Stokes equations via stochastic perturbations of inviscid flows// J. Nonlinear Math. Phys. — 2010. — *17*, Suppl. 1. — C. 15–29.
50. *Gliklikh Yu. E.* Global and Stochastic Analysis with Applications to Mathematical Physics. — London: Springer, 2011.
51. *Gliklikh Yu.* On time-global solutions of SDE having nowhere vanishing initial densities// В сб.: «Modern Methods in Operator Theory and Harmonic Analysis». — Berlin: Springer Verlag, 2019.
52. *Gliklikh Yu. E.* Differential inclusions with mean derivatives, having aspherical right-hand sides// Чебышевский сб. — 2020. — *21*, № 2. — C. 84–93.
53. *Gliklikh Yu. E., Makarova A. V.* On solvability of stochastic differential inclusions with current velocities// Appl. Anal. — 2012. — *91*, № 9. — C. 1731–1739.
54. *Gliklikh Yu. E., Makarova A. V., Zheltikova O. O.* On existence of optimal solutions for stochastic differential equations and inclusions with current velocities// Appl. Anal. — 2017. — *96*, № 16. — C. 2917–2927.
55. *Gliklikh Yu. E., Mashkov E. Yu.* Stochastic Leontieff type equations and mean derivatives of stochastic processes// Вестн. ЮУрГУ. Сер. Мат. модел. и прогр. — 2013. — *6*, № 2. — C. 25–39.
56. *Gliklikh Yu. E., Mashkov E. Yu.* Stochastic Leontieff type equations with non-constant coefficients// Appl. Anal. — 2015. — *94*, № 8. — C. 1614–1623.
57. *Gliklikh Yu. E., Mohammed S.-E. A.* Stochastic delay equations and inclusions with mean derivatives on Riemannian manifolds// Glob. Stoch. Anal. — 2011. — *1*, № 1. — C. 47–54.
58. *Gliklikh Yu. E., Mohammed S.-E. A.* Stochastic delay equations and inclusions with mean derivatives on Riemannian manifolds. II// Glob. Stoch. Anal. — 2012. — *2*, № 1. — C. 17–27.
59. *Gliklikh Yu. E., Ratiner P. S.* On a certain type of second order differential equations on total spaces of fiber bundles with connections// В сб.: «Nonlinear Analysis in Geometry and Topology». — Palm Harbor: Hadronic Press, 2000. — C. 99–106.
60. *Gliklikh Yu. E., Vinokurova N. V.* On the motion of a quantum particle in the classical gauge field in the language of stochastic mechanics// Commun. Statist. Theory Methods. — 2011. — *40*, № 19-20. — C. 3630–3640.
61. *Gliklikh Yu. E., Vinokurova N. V.* On the Newton–Nelson type equations on vector bundles with connections// Rend. Semin. Mat. Univ. Politec. Torino. — 2013. — *71*, № 2. — C. 219–226.
62. *Gliklikh Yu. E., Zalygaeva M. E.* Non-Newtonian fluids and stochastic analysis on the groups of diffeomorphisms// Appl. Anal. — 2015. — *94*, № 6. — C. 1116–1127.
63. *Gliklikh Yu. E., Zalygaeva M. E.* On derivation of Oskolkov's equations for non-compressible viscous Kelvin–Voight fluid by stochastic analysis on the groups of diffeomorphisms// Glob. Stoch. Anal. — 2019. — *6*, № 2. — C. 69–77.
64. *Gliklikh Yu. E., Zheltikova O. O.* On existence of optimal solutions for stochastic differential inclusions with mean derivatives// Appl. Anal. — 2014. — *93*, № 1. — C. 35–46.
65. *Gliklikh Yu. E., Zheltikova O. O.* Stochastic equations and inclusions with mean derivatives and some applications. Optimal solutions for inclusions of geometric Brownian motion type// Methodol. Comput. Appl. Probab. — 2015. — *17*, № 1. — C. 91–105.
66. *Gliklikh Yu. E., Zheltikova O. O.* On existence of optimal solutions to stochastic differential inclusions of geometric Brownian motion type with current velocities// Glob. Stoch. Anal. — 2018. — *5*, № 2. — C. 101–109.

67. *Gliklikh Yu. E., Zheltikova O. O.* Stochastic differential inclusions with mean derivatives having lower-semicontinuous right-hand sides// Commun. Stoch. Anal. — 2020. — *14*, № 1-2. — С. 49–54.
68. *Gliklikh Yu. E., Zheltikova O. O.* Differential inclusions with mean derivatives having extreme right-hand sides and optimal control// Appl. Anal. — 2021. — *100*, № 9. — С. 2020–2028.
69. *Guerra F., Ruggiero P.* A note on relativistic Markov processes// Lett. Nuovo Cimento. — 1978. — *23*, № 16. — С. 529–534.
70. *Haussmann U. G., Pardoux E.* Time reversal diffusions// Ann. Prob. — 1986. — *14*, № 4. — С. 1188–1206.
71. *Jeulin T., Yor M.* Filtration des ponts Browniens et equations différentielles stochastiques lineares// В сб.: «Séminaire de Probabilités XXIV». — Berlin–Heidelberg: Springer, 1990. — С. 227–265.
72. *Kamenskii M., Obukhovskiĭ V., Zecca P.* Condensing Multivalued Maps and Semilinear Differential Inclusions in Banach Spaces. — Berlin–New York: Walter de Gruyter, 2001.
73. *Klein F.* Vorlesungen Über Höhere Geometrie (dritte Auflage bearbeitet und herausgegaben von W. Blaschke). — Berlin: Julius Springer, 1926.
74. *Kryszewski W.* Homotopy Properties of Set-Valued Mappings. — Torun: Torun University, 1997.
75. *Leandre R., Mohammed S. E. A.* Stochastic functional differential equations on manifolds// Probab. Theory Related Fields. — 2001. — *121*, № 1. — С. 117–135.
76. *Li X.-M.* Properties at infinity of diffusion semigroups and stochastic flows via weak uniform covers// Potential Anal. — 1994. — *3*, № 4. — С. 339–357.
77. *Makarova A. V.* On solvability of stochastic differential inclusions with current velocities. II// Glob. Stoch. Anal. — 2012. — *2*, № 1. — С. 101–112.
78. *Meyer P. A.* A differential geometric formalism for the Itô calculus // Lecture Notes in Math. — 1981. — *851*. — С. 256–270.
79. *Nash J.* The imbedding problem for Riemannian manifolds// Ann. Math. — 1956. — *63*, № 1. — С. 20–63.
80. *Nelson E.* Derivation of the Schrödinger equation from Newtonian mechanics// Phys. Rev. — 1966. — *150*, № 4. — С. 1079–1085.
81. *Nelson E.* Dynamical Theory of Brownian Motion. — Princeton: Princeton Univ. Press, 1967.
82. *Nelson E.* Quantum Fluctuations. — Princeton: Princeton Univ. Press, 1985.
83. *Schwartz L.* Processus de Markov et desingration regulieres// Ann. Inst. Fourier (Grenoble). — 1977. — *27*. — С. 211–277.
84. *Schwartz L.* Semimartingales and Their Stochastic Calculus on Manifolds. — Montreal: Montreal Univ. Press, 1984.
85. *Schwartz L.* Le semi-groupe d'une diffusion en liaison avec les trajectories// В сб.: «Séminaire de Probabilités XXIII». — Berlin etc.: Springer, 1989. — С. 326–342.
86. *Shestakov A. L., Sviridyuk G. A.* Optimal measurement of dynamically distorted signals// Вестн. ЮУрГУ. Сер. Мат. модел. и прогр. — 2011. — № 17. — С. 70–75.
87. *Shestakov A. L., Sviridyuk G. A.* On the measurement of the «white noise»// Вестн. ЮУрГУ. Сер. Мат. модел. и прогр. — 2012. — № 27. — С. 99–108.
88. *Zastawniak T.* A relativistic version of Nelson's stochastic mechanics// Europhys. Lett. — 1990. — *13*. — С. 13–17.
89. *Zastawniak T.* Markov diffusion in relativistic stochastic mechanics// В сб.: «Proceedings of Swansea Conference on Stochastic Mechanics». — Singapore: World Scientific, 1992. — С. 280–297.

Ю. Е. Гликлих
Воронежский государственный университет, Воронеж, Россия;
Елецкий государственный университет им. И. А. Бунина, Елец, Россия
E-mail: `yeg@math.vsu.ru`

DOI: 10.22363/2413-3639-2022-68-2-191-337 UDC 519.216

Stochastic Equations and Inclusions with Mean Derivatives and Their Applications

© 2022 **Yu. E. Gliklikh**

Abstract. This work is a detailed presentation of the results, mainly obtained in recent years by the author and his school of the research of mean derivatives of random processes, stochastic equations and inclusions with mean derivatives, as well as their applications in various mathematical disciplines, mainly in mathematical physics. In addition, the work contains introductory material on mean derivatives by E. Nelson, who introduced this concept in the 60s of the XXs century, the results of other researchers on this topic, and preliminary concepts from various areas of mathematics used in this work.

REFERENCES

1. S. V. Azarina and Yu. E. Gliklikh, "O razreshimosti neavtonomnykh stokhasticheskikh differentsial'nykh uravneniy s tekushchimi skorostyami" [On solvability of nonautonomous stochastic differential equations with current velocities], *Mat. zametki* [Math. Notes], 2016, **100**, No. 1, 3–12 (in Russian).
2. S. M. Aseev, "Sushchestvovanie differentsiruemoy odnoznachnoy vetvi u mnogoznachnogo otobrazheniya" [Existence of a differentiable single-valued branch for a multi-valued mapping], In: *Nekotorye voprosy prikladnoy matematiki i programmnogo obespecheniya EVM* [Some Questions of Applied Mathematics and PC Software], Moscow, 1982, pp. 36–39 (in Russian).
3. P. Billingsley, *Skhodimost' veroyatnostnykh mer* [Convergence of Probability Measures], Nauka, Moscow, 1977 (Russian translation).
4. R. L. Bishop and R. J. Crittenden, *Geometriya mnogoobraziy* [Geometry of Manifolds], Mir, Moscow, 1967 (Russian translation).
5. Yu. G. Borisovich, B. D. Gel'man, A. D. Myshkis, and V. V. Obukhovskii, *Vvedenie v teoriyu mnogoznachnykh otobrazheniy i differentsial'nykh vklyucheniy* [Introduction to the Theory of Multivalued Mappings and Differential Inclusions], KomKniga, Moscow, 2005 (in Russian).
6. Yu. G. Borisovich and Yu. E. Gliklikh, "O chisle Lefshetsa dlya odnogo klassa mnogoznachnykh otobrazheniy" [On the Lefschetz number for a class of multivalued mappings], In: *Sed'maya letnyaya matematicheskaya shkola* [Seventh Summer Mathematical School], Inst. Math. Acad. Sci. UkrSSR, Kiev, 1970, pp. 283–294 (in Russian).
7. S. Watanabe and N. Ikeda, *Stokhasticheskie differentsial'nye uravneniya i diffuzionnye protsessy* [Stochastic Differential Equations and Diffusion Processes], Nauka, Moscow, 1986 (Russian translation).
8. B. D. Gel'man, "Nepreryvnye approksimatsii mnogoznachnykh otobrazheniy i nepodvizhnye tochki" [Continuous approximations of multivalued mappings and fixed points], *Mat. zametki* [Math. Notes], 2005, **78**, No. 2, 212–222 (in Russian).
9. I. I. Gikhman and A. V. Skorokhod, *Teoriya sluchaynykh protsessov. T. 1* [Theory of Random Processes. Vol. 1], Nauka, Moscow, 1971 (in Russian).
10. I. I. Gikhman and A. V. Skorokhod, *Teoriya sluchaynykh protsessov. T. 3* [Theory of Random Processes. Vol. 3], Nauka, Moscow, 1975 (in Russian).
11. I. I. Gikhman and A. V. Skorokhod, *Vvedenie v teoriyu sluchaynykh protsessov* [Introduction to the Theory of Random Processes], Fizmatlit, Moscow, 1977 (in Russian).
12. Yu. E. Gliklikh, "Nepodvizhnye tochki mnogoznachnykh otobrazheniy s nevypuklymi obrazami i vrashchenie mnogoznachnykh vektornykh poley" [Fixed points of multivalued mappings with nonconvex images and

rotation of multivalued vector fields], In: *Sbornik trudov aspirantov matematicheskogo fakul'teta* [Collection of Works of PhD Students of the Faculty of Mathematics], VSU, Voronezh, 1972, pp. 30–38 (in Russian).
13. Yu. E. Gliklikh, *Global'nyy i stokhasticheskiy analiz v zadachakh matematicheskoy fiziki* [Global and Stochastic Analysis in Problems of Mathematical Physics], Komkniga, Moscow, 2005 (in Russian).
14. Yu. E. Gliklikh, *Proizvodnye v srednem sluchaynykh protsessov i ikh primeneniya* [Mean Derivatives of Random Processes and Their Applications], YuMI VNTs RAN, Vladikavkaz, 2016 (in Russian).
15. Yu. E. Gliklikh, "O razreshimosti stokhasticheskikh differentsial'nykh uravneniy s osmoticheskimi skorostyami" [On the solvability of stochastic differential equations with osmotic velocities], *Teor. ver. i ee primen.* [Theor. Probab. Appl.], 2020, **65**, No. 4, 806–817 (in Russian).
16. Yu. E. Gliklikh and N. V. Vinokurova, "Uravnenie N'yutona—Nel'sona na rassloeniyakh so svyaznostyami" [Newton–Nelson equation on stratifications with connectivities], *Fundam. i prikl. mat.* [Fundam. Appl. Math.], 2015, **20**, No. 3, 61–81 (in Russian).
17. Yu. E. Gliklikh and T. A. Shchichko, "O polnote stokhasticheskikh potokov, porozhdennykh uravneniyami s tekushchimi skorostyami" [On the completeness of stochastic flows generated by equations with current velocities], *Teor. ver. i ee primen.* [Theor. Probab. Appl.], 2019, **64**, No. 1, 3–16 (in Russian).
18. Yu. L. Daletskiy and Ya. I. Belopol'skaya, *Stokhasticheskie uravneniya i differentsial'naya geometriya* [Stochastic Equations and Differential Geometry], Vyshcha Shkola, Kiev, 1989 (in Russian).
19. D. P. Zhelobenko, *Kompaktnye gruppy Li i ikh predstavleniya* [Compact Lie Groups and Their Representations], Nauka, Moscow, 1970 (in Russian).
20. K. Yosida, *Funktsional'nyy analiz* [Functional Analysis], Mir, Moscow, 1967 (Russian translation).
21. J. L. Kelley, *Obshchaya topologiya* [General Topology], Nauka, Moscow, 1968 (Russian translation).
22. N. V. Krylov, *Upravlyaemye protsessy diffuzionnogo tipa* [Controlled Processes of Diffusion Type], Nauka, Moscow, 1977 (in Russian).
23. R. Sh. Liptser and A. N. Shiryaev, *Statistika sluchaynykh protsessov* [Random Process Statistics], Nauka, Moscow, 1974 (in Russian).
24. A. V. Makarova, "O razreshimosti differentsial'nykh vklyucheniy s tekushchimi skorostyami" [On the solvability of differential inclusions with current velocities], *Spectral and Evolution Problems*, 2012, **22**, 125–128 (in Russian).
25. A. D. Myshkis, "Obobshchenie teoremy o statsionarnoy tochke dinamicheskoy sistemy vnutri zamknutoy traektorii" [Generalization of the fixed point theorem of a dynamical system inside a closed trajectory], *Mat. sbornik* [Math. Digest], 1954, **34**, No. 3, 525–540 (in Russian).
26. K. Parthasarathy, *Vvedenie v teoriyu veroyatnostey i teoriyu mery* [Introduction to Probability and Measure], Mir, M., 1988 (in Russian).
27. M. Sh. Farber, "O gladkikh secheniyakh peresecheniya mnogoznachnykh otobrazheniy" [On smooth sections of multivalued mappings], *Izv. akad. nauk Az. SSR* [Bull. Acad. Sci. Az. SSR], 1979, No. 6, 23–28 (in Russian).
28. M. I. Freydlin, "O faktorizatsii neotritsatel'no opredelennykh matrits" [On factorization of nonnegative definite matrices], *Teor. ver. i ee primen.* [Theor. Probab. Appl.], 1968, **13**, No. 2, 375–378 (in Russian).
29. V. F. Chistyakov and A. A. Shcheglova, *Izbrannye glavy teorii algebro-differentsial'nykh sistem* [Selected Chapters of the Theory of Algebraic-Differential Systems], Nauka, Novosibirsk, 2003 (in Russian).
30. A. L. Shestakov and G. A. Sviridyuk, "Novyy podkhod k izmereniyu dinamicheski iskazhennykh signalov" [New approach to measuring dynamically distorted signals], *Vestn. Yuzh.-Ural. gos. un-ta* [Bull. South Ural St. Univ.], 2010, No. 5, 116–120 (in Russian).
31. A. N. Shiryaev, *Veroyatnost'* [Probability], Nauka, Moscow, 1989 (in Russian).
32. B. Schutz, *Geometricheskie metody matematicheskoy fiziki* [Geometrical Methods of Mathematical Physics], Mir, Moscow, 1984 (in Russian).
33. V. Arnol'd, "Sur la géométrie différentielle des groupes de Lie de dimension infinie et ses applications a l'hydrodynamique des fluides parfaits," *Ann. Inst. Fourier*, 1966, **16**, No. 1, 319–361.
34. J.-P. Aubin and A. Cellina, *Differential Inclusions. Set-Valued Maps and Viability Theory*, Springer, Berlin etc., 1984.
35. S. V. Azarina and Yu. E. Gliklikh, "Differential inclusions with mean derivatives," *Dyn. Syst. Appl.*, 2007, **16**, No. 1, 49–71.
36. S. V. Azarina and Yu. E. Gliklikh, "On differential equations and inclusions with mean derivatives on a compact manifold," *Discuss. Math. Differ. Incl. Control Optim.*, 2007, **27**, No. 2, 385–397.
37. S. V. Azarina and Yu. E. Gliklikh, "Stochastic differential equations and inclusions with mean derivatives relative to the past," *Int. J. Difference Equ.*, 2009, **4**, No. 1, 27–41.

38. S. V. Azarina and Yu. E. Gliklikh, "On existence of solutions to stochastic differential equations with current velocities," *Vestn. YuUrGU. Ser. Mat. model. i progr.* [Bull. South Ural St. Univ. Ser. Math. Model. Progr.], 2015, **8**, No. 4, 100–106.
39. S. V. Azarina, Yu. E. Gliklikh, and A. V. Obukhovskii, "Solvability of Langevin differential inclusions with set-valued diffusion terms on Riemannian manifolds," *Appl. Anal.*, 2007, **86**, No. 9, 1105–1116.
40. R. Azencott, "Behavior of diffusion semi-groups at infinity," *Bull. Soc. Math. France*, 1974, **102**, 193–240.
41. J. Cresson and S. Darses, "Stochastic embedding of dynamical systems," *J. Math. Phys.*, 2007, **48**, 072703-1–072303-54
42. K. Deimling, *Multivalued Differential Equations*, Walter de Gruyter, Berlin–New York (NY), 1992.
43. D. Dohrn, F. Guerra, and P. Ruggiero, "Spinning particles and relativistic particles in framework of Nelson's stochastic mechanics," *Lect. Notes Phys.*, 1979, **106**, 121–127
44. D. G. Ebin and J. Marsden, "Groups of diffeomorphisms and the motion of an incompressible fluid," *Ann. Math.*, 1970, **92**, No. 1, 102–163.
45. K. D. Elworthy, *Stochastic Differential Equations on Manifolds*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1982.
46. K. D. Elworthy, Y. Le Jan, and X.-M. Li, *The Geometry of Filtering*, Birkhäuser, Basel, 2010.
47. Yu. E. Gliklikh, *Ordinary and Stochastic Differential Geometry as a Tool for Mathematical Physics*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1996.
48. Yu. E. Gliklikh, *Global Analysis in Mathematical Physics. Geometric and Stochastic Methods*, Springer, New York, 1997.
49. Yu. E. Gliklikh, "Solutions of Burgers, Reynolds, and Navier–Stokes equations via stochastic perturbations of inviscid flows," *J. Nonlinear Math. Phys.*, 2010, **17**, Suppl. 1, 15–29.
50. Yu. E. Gliklikh, *Global and Stochastic Analysis with Applications to Mathematical Physics*, Springer, London, 2011.
51. Yu. Gliklikh, "On time-global solutions of SDE having nowhere vanishing initial densities," In: *Modern Methods in Operator Theory and Harmonic Analysis*, Springer Verlag, Berlin, 2019, pp. 363–370.
52. Yu. E. Gliklikh, "Differential inclusions with mean derivatives, having aspherical right-hand sides," *Chebyshevskiy sb.* [Chebyshev Digest], 2020, **21**, No. 2, 84–93.
53. Yu. E. Gliklikh and A. V. Makarova, "On solvability of stochastic differential inclusions with current velocities," *Appl. Anal.*, 2012, **91**, No. 9, 1731–1739.
54. Yu. E. Gliklikh, A. V. Makarova, and O. O. Zheltikova, "On existence of optimal solutions for stochastic differential equations and inclusions with current velocities," *Appl. Anal.*, 2017, **96**, No. 16, 2917–2927.
55. Yu. E. Gliklikh and E. Yu. Mashkov, "Stochastic Leontieff type equations and mean derivatives of stochastic processes," *Vestn. YuUrGU. Ser. Mat. model. i progr.* [Bull. South Ural St. Univ. Ser. Math. Model. Progr.], 2013, **6**, No. 2, 25–39.
56. Yu. E. Gliklikh and E. Yu. Mashkov, "Stochastic Leontieff type equations with non-constant coefficients," *Appl. Anal.*, 2015, **94**, No. 8, 1614–1623.
57. Yu. E. Gliklikh and S.-E. A. Mohammed, "Stochastic delay equations and inclusions with mean derivatives on Riemannian manifolds," *Glob. Stoch. Anal.*, 2011, **1**, No. 1, 47–54.
58. Yu. E. Gliklikh and S.-E. A. Mohammed, "Stochastic delay equations and inclusions with mean derivatives on Riemannian manifolds. II," *Glob. Stoch. Anal.*, 2012, **2**, No. 1, 17–27.
59. Yu. E. Gliklikh and P. S. Ratiner, "On a certain type of second order differential equations on total spaces of fiber bundles with connections," In: *Nonlinear Analysis in Geometry and Topology*, Hadronic Press, Palm Harbor, 2000, pp. 99–106.
60. Yu. E. Gliklikh and N. V. Vinokurova, "On the motion of a quantum particle in the classical gauge field in the language of stochastic mechanics," *Commun. Statist. Theory Methods*, 2011, **40**, No. 19-20, 3630–3640.
61. Yu. E. Gliklikh and N. V. Vinokurova, "On the Newton–Nelson type equations on vector bundles with connections," *Rend. Semin. Mat. Univ. Politec. Torino*, 2013, **71**, No. 2, 219–226.
62. Yu. E. Gliklikh and M. E. Zalygaeva, "Non-Newtonian fluids and stochastic analysis on the groups of diffeomorphisms," *Appl. Anal.*, 2015, **94**, No. 6, 1116–1127.
63. Yu. E. Gliklikh and M. E. Zalygaeva, "On derivation of Oskolkov's equations for non-compressible viscous Kelvin–Voight fluid by stochastic analysis on the groups of diffeomorphisms," *Glob. Stoch. Anal.*, 2019, **6**, No. 2, 69–77.
64. Yu. E. Gliklikh and O. O. Zheltikova, "On existence of optimal solutions for stochastic differential inclusions with mean derivatives," *Appl. Anal.*, 2014, **93**, No. 1, 35–46.
65. Yu. E. Gliklikh and O. O. Zheltikova, "Stochastic equations and inclusions with mean derivatives and some applications. Optimal solutions for inclusions of geometric Brownian motion type," *Methodol. Comput. Appl. Probab.*, 2015, **17**, No. 1, 91–105.

66. Yu. E. Gliklikh and O. O. Zheltikova, "On existence of optimal solutions to stochastic differential inclusions of geometric Brownian motion type with current velocities," *Glob. Stoch. Anal.*, 2018, **5**, No. 2, 101–109.
67. Yu. E. Gliklikh and O. O. Zheltikova, "Stochastic differential inclusions with mean derivatives having lower-semicontinuous right-hand sides," *Commun. Stoch. Anal.*, 2020, **14**, No. 1-2, 49–54.
68. Yu. E. Gliklikh and O. O. Zheltikova, "Differential inclusions with mean derivatives having extreme right-hand sides and optimal control," *Appl. Anal.*, 2021, **100**, No. 9, 2020–2028.
69. F. Guerra and P. Ruggiero, "A note on relativistic Markov processes," *Lett. Nuovo Cimento*, 1978, **23**, No. 16, 529–534.
70. U. G. Haussmann and E. Pardoux, "Time reversal diffusions," *Ann. Prob.*, 1986, **14**, No. 4, 1188–1206.
71. T. Jeulin and M. Yor, "Filtration des ponts Browniens et equations différentielles stochastiques lineares," In: *Séminaire de Probabilités XXIV*, Springer, Berlin–Heidelberg, 1990, pp. 227–265.
72. M. Kamenskii and V. Obukhovskiĭ, P. Zecca, *Condensing Multivalued Maps and Semilinear Differential Inclusions in Banach Spaces*, Walter de Gruyter, Berlin–New York, 2001.
73. F. Klein, *Vorlesungen Über Höhere Geometrie (dritte Auflage bearbeitet und herausgegaben von W. Blaschke)*, Julius Springer, Berlin, 1926.
74. W. Kryszewski, *Homotopy Properties of Set-Valued Mappings*, Torun University, Torun, 1997.
75. R. Leandre and S. E. A. Mohammed, "Stochastic functional differential equations on manifolds," *Probab. Theory Related Fields*, 2001, **121**, No. 1, 117–135.
76. X.-M. Li, "Properties at infinity of diffusion semigroups and stochastic flows via weak uniform covers," *Potential Anal.*, 1994, **3**, No. 4, 339–357.
77. A. V. Makarova, "On solvability of stochastic differential inclusions with current velocities. II," *Glob. Stoch. Anal.*, 2012, **2**, No. 1, 101–112.
78. P. A. Meyer, "A differential geometric formalism for the Itô calculus," *Lecture Notes in Math.*, 1981, **851**, 256–270.
79. J. Nash, "The imbedding problem for Riemannian manifolds," *Ann. Math.*, 1956, **63**, No. 1, 20–63.
80. E. Nelson, "Derivation of the Schrödinger equation from Newtonian mechanics," *Phys. Rev.*, 1966, **150**, No. 4, 1079–1085.
81. E. Nelson, *Dynamical Theory of Brownian Motion*, Princeton Univ. Press, Princeton, 1967.
82. E. Nelson, *Quantum Fluctuations*, Princeton Univ. Press, Princeton, 1985.
83. L. Schwartz, "Processus de Markov et desingration regulieres," *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)*, 1977, **27**, 211–277.
84. L. Schwartz, *Semimartingales and Their Stochastic Calculus on Manifolds*, Montreal Univ. Press, Montreal, 1984.
85. L. Schwartz, "Le semi-groupe d'une diffusion en liaison avec les trajectories," In: *Séminaire de Probabilités XXIII*, Springer, Berlin etc., 1989, pp. 326–342.
86. A. L. Shestakov and G. A. Sviridyuk, "Optimal measurement of dynamically distorted signals," *Vestn. YuUrGU. Ser. Mat. model. i progr.* [Bull. South Ural St. Univ. Ser. Math. Model. Progr.], 2011, No. 17, 70–75.
87. A. L. Shestakov and G. A. Sviridyuk, "On the measurement of the «white noise»," *Vestn. YuUrGU. Ser. Mat. model. i progr.* [Bull. South Ural St. Univ. Ser. Math. Model. Progr.], 2012, No. 27, 99–108.
88. T. Zastawniak, "A relativistic version of Nelson's stochastic mechanics," *Europhys. Lett.*, 1990, **13**, 13–17.
89. T. Zastawniak, "Markov diffusion in relativistic stochastic mechanics," In: *Proceedings of Swansea Conference on Stochastic Mechanics*, World Scientific, Singapore, 1992, pp. 280–297.

Yu. E. Gliklikh
Voronezh State University, Voronezh, Russia;
I. A. Bunin Elets State University, Elets, Russia
E-mail: yeg@math.vsu.ru