Современная математика. Фундаментальные направления. Том 68, № 1 (2022). С. 178–189
Contemporary Mathematics. Fundamental Directions. ISSN 2413-3639 (Print)

DOI: 10.22363/2413-3639-2022-68-1-178-189 УДК 517.983

# ОБ ОГРАНИЧЕННОСТИ ДРОБНОГО ИНТЕГРИРОВАНИЯ ПО АДАМАРУ И ТИПА АДАМАРА В ПРОСТРАНСТВАХ ЛЕБЕГА СО СМЕШАННОЙ НОРМОЙ

© 2022 г. **М. У. ЯХШИБОЕВ**

Аннотация. В статье рассматривается ограниченность интегралов дробного интегрирования по Адамару и типа Адамара (смешанного и по направлению) в пространствах Лебега со смешанной нормой. Доказаны теоремы типа Соболева об ограниченности одномерного и многомерного дробного интегрирования типа Адамара в весовых пространствах Лебега со смешанной нормой.

## ОГЛАВЛЕНИЕ



## 1. Введение

В 1961 году были введены пространства Лебега со смешанной нормой $L^{\overline{p}}(\mathbb{R}^n)$ как естественное обобщение классического пространства Лебега $L^p(\mathbb{R}^n)$ путем замены постоянной экспоненты $p$ вектором экспоненты $\overline{p}$. Пространства Лебега со смешанной нормой были введены и изучены в работе [9]. Изучению ограниченности операторов в пространствах Лебега со смешанной нормой посвящены работы [4,7,8,20]. Ряд свойств пространств Лебега со смешанной нормой можно найти в книге [2].

Будем называть пространства $L^{\overline{p}}(\mathbb{R}^n)$ *анизотропными*, а $L^{\overline{p}}_{\overline{\gamma}}(\mathbb{R}^n)$ — *весовыми анизотропными* пространствами.

Поскольку функциональные пространства со смешанными нормами имеют более тонкие структуры, чем соответствующие классические функциональные пространства, они естественным образом возникают в исследованиях решений уравнений в частных производных, используемых для моделирования физических процессов, включающих как пространственные, так и временные переменные такие, как тепловые или волновые уравнения [13,15,18].

Известно, что дробное интегродифференцирование Римана—Лиувилля является формально дробной степенью $\left(\dfrac{d}{dx}\right)^{\alpha}$ и инвариантно относительно сдвига [5,6]. Ж. Адамар [14] предложил конструкцию дробного интегродифференцирования, являющуюся дробной степенью $\left(x\dfrac{d}{dx}\right)^{\alpha}$, приспособленную к полуоси и инвариантную относительно растяжения. Именно, он ввел дробные интегралы вида:

$$(J_{\pm}^{\alpha}\varphi)(x)=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int\limits_0^{\infty}\left(\ln\frac{1}{t}\right)_{\pm}^{\alpha-1}\varphi(x\cdot t)\,\frac{dt}{t},\quad x>0,\quad \alpha>0.$$

При $0<\alpha<1$ дробная производная по Адамару имеет вид

$$(D_{\pm}^{\alpha}f)(x)=\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\left(\pm x\frac{d}{dx}\right)\int\limits_0^{\infty}\left(\ln\frac{1}{t}\right)_{\pm}^{-\alpha}f(x\cdot t)\,\frac{dt}{t},\quad x>0.$$

В работе [1] рассматриваются свойства некоторых интегродифференциальных операторов, обобщающих операторы дробного дифференцирования в смысле Адамара и Адамара—Маршо в классе гармонических функций. В качестве применения полученных свойств изучаются вопросы разрешимости нелокальных задач для уравнения Лапласа в шаре.

В статьях [3, 10–12, 16, 17, 19, 21] рассмотрены операторы одномерного дробного интегродифференцирования Адамара и типа Адамара. Ряд свойств дробного интегрирования по Адамару можно найти в книге [6]. В настоящей работе дается распространение теории такого дробного интегрирования на случай функций многих переменных в рамках пространств $\mathfrak{L}_{\overline{\gamma}}^{\overline{p}}$ со смещенной нормой.

В работе [21] доказана теорема об ограниченности одномерного дробного интегрирования по Адамару и типа Адамара в кусочно-степенных весовых пространствах суммируемых функций.

В настоящей работе доказана ограниченность дробного интегрирования по Адамару и типа Адамара (смешанного и по направлению) в весовых пространствах Лебега со смешанной нормой. Кроме того, доказаны теоремы типа Соболева ограниченности дробного интегрирования типа Адамара в весовых пространствах Лебега. Полученные результаты являются новыми и дополняют статью [21].

Рассмотрение ведется в рамках пространств со смешанной нормой

$$\mathfrak{L}_{\overline{\gamma}}^{\overline{p}}\left(\mathbb{R}_{+}^{n},\,\frac{dx}{x}\right)=\left\{f:\left\|f;\ \mathfrak{L}_{\overline{\gamma}}^{\overline{p}}\right\|=\left\{\int\limits_0^{\infty}\left[\ldots\left(\int\limits_0^{\infty}|f(x)|^{p_1}\,x_1^{-\gamma_1}\frac{dx_1}{x_1}\right)^{\frac{p_2}{p_1}}\ldots\right]^{\frac{p_n}{p_{n-1}}}x_n^{-\gamma_n}\frac{dx_n}{x_n}\right\}^{\frac{1}{p_n}}<\infty\right\},$$

$$C_{\overline{\gamma}}\left(\mathbb{R}_{+}^{n}\right)=\left\{f:\|f;\ C_{\overline{\gamma}}\|=\max_{x\in\mathbb{R}_{+}^{n}}\left|x^{-\overline{\gamma}}f(x)\right|<\infty,\ \lim_{|x|\to 0}x^{-\overline{\gamma}}f(x)=\lim_{|x|\to\infty}x^{-\overline{\gamma}}f(x)\right\},$$

$\gamma_i\geqslant 0$, $i=\overline{1,n}$. Норма в $\mathfrak{L}_{\overline{\gamma}}^{\overline{p}}$ также определяется формулой

$$\|f\|_{\mathfrak{L}_{\overline{\gamma}}^{\overline{p}}}=\left\|f;\ \mathfrak{L}_{\overline{\gamma}}^{\overline{p}}\right\|=\left\|x^{-\overline{\gamma}^{*}}f;\ \mathfrak{L}^{\overline{p}}\right\|,\quad 1\leqslant\overline{p}\leqslant\infty, \tag{1.1}$$

где $x^{-\overline{\gamma}^{*}}=x_1^{-\gamma_1^{*}}\cdot x_2^{-\gamma_2^{*}}\cdot\ldots\cdot x_n^{-\gamma_n^{*}}$,

$$\gamma_i^{*}=\begin{cases}\dfrac{\gamma_i}{p_i}, & 1\leqslant p_i<\infty,\\ \gamma_i, & p_i=\infty,\end{cases}\qquad i=\overline{1,n}. \tag{1.2}$$

Работа имеет следующую структуру. В разделе 2 приведены необходимые сведения о дробном интегрировании Адамара и типа Адамара (смешанном и по направлению), в разделе 3 доказывается ограниченность дробного интегрирования Адамара и типа Адамара (смешанного и по направлению) в пространствах Лебега со смешанной нормой.

**1.1. Обозначения.** $\mathbb{N}$ — множество натуральных чисел, $\mathbb{R}=\mathbb{R}^1$ — множество вещественных чисел, $\mathbb{C}$ — множество комплексных чисел, $\mathbb{R}_{+}=(0;+\infty)$ — полуось; $\mathbb{R}^n$ — $n$-мерное евклидово пространство точек $x=(x_1,\ldots,x_n)$; $\dot{\mathbb{R}}^n$ — компактификация $\mathbb{R}^n$ одной бесконечно удаленной точкой, $\mathbb{R}_{+}^{n}=\{x\in\mathbb{R}^n;\ x_1>0,\ \ldots,x_n>0\}$, $\dot{\mathbb{R}}_{+}^{n}=\mathbb{R}_{+}^{n}\cup\{\infty\}$. Всюду ниже: $E$ — единичный оператор;

$(\Pi_\delta f)(x) = f(x\cdot\delta)$, $x,\delta \in \mathbb{R}^n_+$, — оператор растяжения. Введем конечную разность с использованием оператора растяжения:

$$(\tilde{\Delta}^s_\tau f)(x) = \sum_{k=0}^{s} (-1)^k \tbinom{s}{k} f\left(x\cdot\tau^k\right) = (E-\Pi_\tau)^s f, \quad s\in\mathbb{N}, \quad \tau\in\mathbb{R}_+, \tag{1.3}$$

и смешанную конечную разность функции $f$ векторного порядка $l = (l_1, l_2, \ldots, l_n)$, $l_k \in \mathbb{N}$, с «мультипликативным» векторным шагом $t\in\mathbb{R}^n_+$:

$$(\tilde{\Delta}^l_t f)(x) = \tilde{\Delta}^{l_1}_{\xi_1}[\tilde{\Delta}^{l_2}_{\xi_2}\ldots(\tilde{\Delta}^{l_n}_{\xi_n} f)](x) = \sum_{0\leqslant|k|\leqslant l} (-1)^{|k|}\binom{l}{k} f\left(x\cdot t^k\right), \tag{1.4}$$

где $x\cdot t^k = \left(x_i\cdot t_1^{k_1}, \ldots, x_n\cdot t_n^{k_n}\right)$, $\binom{l}{k} = \prod\limits_{i=1}^{n}\binom{l_i}{k_i}$, $\binom{l_i}{k_i}$ — биномиальные коэффициенты, $k$ — мультииндекс. Условимся, что запись $1\leqslant\overline{p}<\infty$ и $\overline{p}=\overline{\infty}$, где $\overline{p}=(p_1,\ldots,p_n)$, $\overline{\infty}=(\infty,\ldots,\infty)$, означает, что $1\leqslant p_i<\infty$, $p_i=\infty$, $i=\overline{1,n}$. Обозначим $\mathfrak{L}^{\overline{p}}_{\overline{\gamma}} = \mathfrak{L}^{\overline{p}}_{\overline{\gamma}}\left(\mathbb{R}^n_+, \frac{dx}{x}\right)$, $1\leqslant\overline{p}<\infty$ и $C\left(\dot{\mathbb{R}}^n_+\right) = \{\, f: \ f\in C\left(\mathbb{R}^n_+\right), \ f(0) = f(\infty)\,\}$. Пусть $\omega = (\omega_1,\ldots,\omega_n)$, тогда $\rho^\omega = (\rho_1^{\omega_1},\ldots,\rho_n^{\omega_n})$, $x\cdot\rho^\omega = (x_1\cdot\rho_1^{\omega_1},\ldots,x_n\cdot\rho_n^{\omega_n})$, $(x:\rho^\omega) = (x\cdot\rho^{-\omega}) = \left(\frac{x_1}{\rho_1^{\omega_1}},\ldots,\frac{x_n}{\rho_n^{\omega_n}}\right)$. Если $u=(u_1,\ldots,u_n)$, $\alpha=(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)$, то

$$u^\alpha_+ = \prod_{i=1}^{n}(u_i)^{\alpha_i}_+, \quad (u_i)^{\alpha_i}_+ = \begin{cases} u_i^{\alpha_i}, & u_i>0,\\ 0, & u_i<0,\end{cases} \qquad \gamma^* = \begin{cases} \dfrac{\gamma}{p}, & 1\leqslant p<\infty,\\ \gamma, & p=\infty.\end{cases}$$

## 2. Дробное интегрирование Адамара и типа Адамара (смешанное и по направлению)

Определим интегралы дробного порядка по Адамару и типа Адамара.

**Определение 2.1.** Для функции $\varphi(x)$, заданной во всем октанте $\mathbb{R}^n_+$, интегралы

$$(J^\alpha_{+\ldots+}\varphi)(x) = \int\limits_0^{x_1}\cdots\int\limits_0^{x_n}\varphi(t)\prod_{i=1}^{n}\frac{1}{\Gamma(\alpha_i)}\left(\ln\frac{x_i}{t_i}\right)^{\alpha_i-1}\frac{dt_1}{t_1}\cdots\frac{dt_1}{t_1}, \tag{2.1}$$

$$(J^\alpha_{-\ldots-}\varphi)(x) = \int\limits_{x_1}^{\infty}\cdots\int\limits_{x_n}^{\infty}\varphi(t)\prod_{i=1}^{n}\frac{1}{\Gamma(\alpha_i)}\left(\ln\frac{t_i}{x_i}\right)^{\alpha_i-1}\frac{dt_1}{t_1}\cdots\frac{dt_1}{t_1} \tag{2.2}$$

назовем *смешанными интегралами дробного порядка* $\alpha$ $(\alpha_i>0,\ i=\overline{1,n})$ *по Адамару* (соответственно, левосторонним и правосторонним).

**Определение 2.2.** Для функции $\varphi(x)$, заданной во всем октанте $\mathbb{R}^n_+$, интегралы

$$(J^\alpha_{+\ldots+,\mu}\varphi)(x) = \int\limits_0^{x_1}\cdots\int\limits_0^{x_n}\varphi(t)\prod_{i=1}^{n}\frac{1}{\Gamma(\alpha_i)}\left(\frac{t_i}{x_i}\right)^{\mu_i}\left(\ln\frac{x_i}{t_i}\right)^{\alpha_i-1}\frac{dt_1}{t_1}\cdots\frac{dt_n}{t_n}, \tag{2.3}$$

$$(J^\alpha_{-\ldots-,\mu}\varphi)(x) = \int\limits_{x_1}^{\infty}\cdots\int\limits_{x_n}^{\infty}\varphi(t)\prod_{i=1}^{n}\frac{1}{(\Gamma\alpha_i)}\left(\frac{x_i}{t_i}\right)^{\mu_i}\left(\ln\frac{t_i}{x_i}\right)^{\alpha_i-1}\frac{dt_1}{t_1}\cdots\frac{dt_n}{t_n}, \tag{2.4}$$

$$(\Im^\alpha_{+\ldots+,\mu}\varphi)(x) = \int\limits_0^{x_1}\cdots\int\limits_0^{x_n}\varphi(t)\prod_{i=1}^{n}\frac{1}{\Gamma(\alpha_i)}\left(\frac{t_i}{x_i}\right)^{\mu_i}\left(\ln\frac{x_i}{t_i}\right)^{\alpha_i-1}\frac{dt_1}{x_1}\cdots\frac{dt_n}{x_n}, \tag{2.5}$$

$$(\Im^\alpha_{-\ldots-,\mu}\varphi)(x) = \int\limits_{x_1}^{\infty}\cdots\int\limits_{x_n}^{\infty}\varphi(t)\prod_{i=1}^{n}\frac{1}{\Gamma(\alpha_i)}\left(\frac{x_i}{t_i}\right)^{\mu_i}\left(\ln\frac{t_i}{x_i}\right)^{\alpha_i-1}\frac{dt_1}{x_1}\cdots\frac{dt_n}{x_n} \tag{2.6}$$

назовем *смешанными интегралами дробного порядка* $\alpha$ $(\alpha_i>0,\ i=\overline{1,n})$ *типа Адамара* (соответственно левосторонними и правосторонними).

Операторы (2.1)–(2.4) коммутируют с оператором растяжения $\Pi_\rho J^\alpha_{\pm\cdots\pm} = J^\alpha_{\pm\ldots\pm}\Pi_\rho$, $\Pi_\rho J^\alpha_{\pm\cdots\pm,\mu} = J^\alpha_{\pm\cdots\pm,\mu}\Pi_\rho$. Операторы $J^\alpha_{\pm\ldots\pm}$, $J^\alpha_{\pm\ldots\pm,\mu}$ связаны с оператором Римана—Лиувилля $I^\alpha_{\pm\cdots\pm}$ (см. [6, с. 251]) равенствами

$$J^\alpha_{\pm\ldots\pm}\varphi = Q^{-1}I^\alpha_{\pm\ldots\pm}Q\varphi,$$
$$J^\alpha_{\pm\ldots\pm,\mu}\varphi = M_{\mp\mu}Q^{-1}I^\alpha_{\pm\ldots\pm}QM_{\pm\mu}\varphi,$$

где $(Q\varphi)(x) = \varphi(e^x) = \varphi(e^{x_1},\ldots,e^{x_n})$, $\left(Q^{-1}\varphi\right)(x) = \varphi(\ln x) = \varphi(\ln x_1,\ldots,\ln x_n)$, $(M_{\pm\mu}\varphi)(x) = x_1^{\pm\mu_1}\cdots x_n^{\pm\mu_n}\varphi(x_1,\ldots,x_n)$.

Если $\mu = 0$, тогда из (2.3), (2.4) следуют (2.1), (2.2). С помощью замены $t_i = x_i\cdot y_i$, $t_i = x_i\cdot y_i^{-1}$, $i=\overline{1,n}$, интегралы (2.3), (2.4) можно записать в следующем виде:

$$(J^\alpha_{+\ldots+,\mu}\varphi)(x) = \int\limits_0^\infty\cdots\int\limits_0^\infty \varphi(x\cdot y)\prod_{i=1}^n k^+_{\mu_i,\alpha_i}(y_i)\,\frac{dy_1}{y_1}\cdots\frac{dy_n}{y_n},$$

$$(J^\alpha_{-\ldots-,\mu}\varphi)(x) = \int\limits_0^\infty\cdots\int\limits_0^\infty \varphi\left(x\cdot y^{-1}\right)\prod_{i=1}^n k^+_{\mu_i,\alpha_i}(y_i)\,\frac{dy_1}{y_1}\cdots\frac{dy_n}{y_n},$$

где $x\cdot y = (x_1\cdot y_1,\ldots,x_n\cdot y_n)$, $x\cdot y^{-1} = \left(\frac{x_1}{y_1},\cdots,\frac{x_n}{y_n}\right)$,

$$k^+_{\mu_i,\alpha_i}(y_i) = \begin{cases} \dfrac{1}{\Gamma(\alpha_i)}y_i^\mu\left(\ln\dfrac{1}{y_i}\right)^{\alpha_i-1}, & 0<y_i<1,\\ 0, & y_i>1,\end{cases} \qquad i=\overline{1,n}.$$

*Дробным интегралом* порядка $\alpha$, $\alpha\in\mathbb{R}_+$, по направлению $\omega$, $\omega\in\mathbb{R}^n_+$, назовем конструкцию

$$(J^\alpha_{\omega,\mu}\varphi)(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int\limits_0^1 \xi^\mu\,|\ln\xi|^{\alpha-1}\,\varphi\left(x\cdot\xi^{\ln\omega}\right)\frac{d\xi}{\xi},$$

где $x\cdot\xi^{\ln\omega} = \left(x_1\cdot\xi^{\ln\omega_1},\ldots,x_n\cdot\xi^{\ln\omega_n}\right)$ и вектор $\omega=(\omega_1,\ldots,\omega_n)$ подчинен условию $(\ln\omega_1)^2+\ldots+(\ln\omega_n)^2=1$.

Введем модификацию смешанных дробных интегралов с ядром, «улучшенным» на бесконечности:

$$(J^{\alpha,l}_{+\ldots+,\mu;\tau}\varphi)(x) = \int\limits_0^\infty\cdots\int\limits_0^\infty\left(\tilde\Delta^l_{\tau^{-1}}k^+_{\mu,\alpha}\right)(y)\,\varphi(x\cdot y)\,\frac{dy_1}{y_1}\cdots\frac{dy_n}{y_n}, \tag{2.7}$$

$$(J^{\alpha,l}_{-\ldots-,\mu;\tau}\varphi)(x) = \int\limits_0^\infty\cdots\int\limits_0^\infty\left(\tilde\Delta^l_{\tau^{-1}}k^+_{\mu,\alpha}\right)(y)\,\varphi\left(x\cdot y^{-1}\right)\frac{dy_1}{y_1}\cdots\frac{dy_n}{y_n}, \tag{2.8}$$

где $\tau\in\mathbb{R}^n_+$, $\mu_i\geqslant 0$, $l_i>\alpha_i>0$, $i=1,2,\ldots,n$,

$$\left(\tilde\Delta^l_{\tau^{-1}}k^+_{\mu,\alpha}\right)(y) = \tilde\Delta^{l_1}_{\tau_1^{-1}}\tilde\Delta^{l_2}_{\tau_2^{-1}}\ldots(\tilde\Delta^{l_n}_{\tau_n^{-1}}k^+_{\mu,\alpha})(y),\ k^+_{\mu,\alpha}(y) = \prod_{i=1}^n\frac{1}{\Gamma(\alpha_i)}y_i^{\mu_i}\left(\ln\frac{1}{y_i}\right)_+^{\alpha_i-1}.$$

Аналогичная модификация дробного интеграла по направлению $\omega$, $\omega\in\mathbb{R}^n_+$, имеет вид

$$(J^{\alpha,s}_{\omega,\mu;\tau}\varphi)(x) = \int\limits_0^\infty(\tilde\Delta^s_{\tau^{-1}}k^+_{\mu,\alpha})(t)\,\varphi\left(x\cdot t^{\ln\omega}\right)\frac{dt}{t}, \tag{2.9}$$

где $\tau\in\mathbb{R}_+,\mu\geqslant 0$,

$$(\tilde\Delta^s_{\tau^{-1}}k^+_{\mu,\alpha})(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\sum_{k=0}^s(-1)^k\begin{pmatrix} s\\ k\end{pmatrix}\left(\frac{t}{\tau^k}\right)^\mu\left(\ln\frac{\tau^k}{t}\right)_+^{\alpha-1},\quad (\tilde\Delta^s_{\tau^{-1}}k^+_{\mu,\alpha})(t)\in L_1(\mathbb{R}_+).$$

Очевидно, что $J^{\alpha,l}_{\pm\ldots\pm,\mu;\tau}\varphi = \tilde\Delta^l_\tau J^\alpha_{\pm\ldots\pm,\mu}\varphi$, $J^{\alpha,s}_{\omega,\mu;\tau}\varphi = \tilde\Delta^s_\tau J^\alpha_{\omega,\mu}\varphi$ на достаточно хороших функциях $\varphi(x)$, т. е. операторы (2.7)–(2.9) получаются применением определений (1.3)-(1.4) разностных операторов $\tilde{\Delta}^{(l_1,\ldots,l_n)}_{(\tau_1,\ldots,\tau_n)}$, $\tilde{\Delta}^{s}_{\tau}$ с «мультипликативным» шагом к операторам $J^{\alpha}_{\pm\ldots\pm,\mu}\varphi$ и $J^{\alpha}_{\omega,\mu}\varphi$. Они имеют то преимущество по сравнению с $J^{\alpha}_{\pm\ldots\pm,\mu}\varphi$ и $J^{\alpha}_{\omega,\mu}\varphi$, что при $l_i > \alpha_i > 0$, $i = 1,2,\ldots,n$, $s > \alpha > 0$, они ограничены в пространстве $\mathfrak{L}^{\overline{p}}_{\overline{\gamma}}\Big(\mathbb{R}^n_+, \dfrac{dx}{x}\Big)$ при всех $1 \leqslant p_i < \infty$, $\gamma_i > 0$, $i = 1,2,\ldots,n$ (т. е. включая случай $\gamma_i = 0$, $i = 1,2,\ldots,n$).

## 3. Об ограниченности дробного интегрирования по Адамару и типа Адамара в пространстве $\mathfrak{L}^{\overline{p}}_{\overline{\gamma}}$

**Теорема 3.1.** *Пусть* $\gamma_i \in \mathbb{R}$, $1 \leqslant p_i \leqslant \infty$, $\alpha_i > 0$ *и* $\mu_i \in \mathbb{C}$, $i = \overline{1,n}$.

$(i)$ *Если* $\operatorname{Re}\mu_i > -\gamma_i^*$, $i = \overline{1,n}$, *где* $\gamma_i^*, i = \overline{1,n}$ — *постоянные из* (1.2), *то оператор* $J^{\alpha}_{+\ldots+,\mu}$ *ограничен в* $\mathfrak{L}^{\overline{p}}_{\overline{\gamma}}$, *и*

$$\left\| J^{\alpha}_{+\ldots+,\mu}\varphi;\, \mathfrak{L}^{\overline{p}}_{\overline{\gamma}} \right\| \leqslant \prod_{i=1}^{n} C^{+}\left(\mu_i, \gamma_i^*\right) \left\| \varphi; \mathfrak{L}^{\overline{p}}_{\overline{\gamma}} \right\|, \tag{3.1}$$

*где* $C^{+}\left(\mu_i, \gamma_i^*\right) = \left(\operatorname{Re}\mu_i + \gamma_i^*\right)^{-\alpha_i}$.

$(ii)$ *Если* $\operatorname{Re}\mu_i > \gamma_i^*$, $i = \overline{1,n}$, *где* $\gamma_i^*, i = \overline{1,n}$ — *постоянные из* (1.2), *то оператор* $J^{\alpha}_{-\ldots-,\mu}$ *ограничен в* $\mathfrak{L}^{\overline{p}}_{\overline{\gamma}}$, *и*

$$\left\| J^{\alpha}_{-\ldots-,\mu}\varphi;\, \mathfrak{L}^{\overline{p}}_{\overline{\gamma}} \right\| \leqslant \prod_{i=1}^{n} C^{-}\left(\mu_i, \gamma_i^*\right) \left\| \varphi; \mathfrak{L}^{\overline{p}}_{\overline{\gamma}} \right\|,$$

*где* $C^{-}\left(\mu_i, \gamma_i^*\right) = \left(\operatorname{Re}\mu_i - \gamma_i^*\right)^{-\alpha_i}$.

$(iii)$ *Если* $\operatorname{Re}\mu > -\sum\limits_{i=1}^{n} \gamma_i^* \ln\omega_i$, *где* $\gamma_i^*, i = \overline{1,n}$ — *постоянные из* (1.2), *то оператор* $J^{\alpha}_{\omega,\mu}$ *ограничен в* $\mathfrak{L}^{\overline{p}}_{\overline{\gamma}}$, *и*

$$\left\| J^{\alpha}_{\omega,\mu}\varphi;\, \mathfrak{L}^{\overline{p}}_{\overline{\gamma}} \right\| \leqslant C\left(\mu, \overline{\gamma^*}\ln\omega\right) \left\| \varphi; \mathfrak{L}^{\overline{p}}_{\overline{\gamma}} \right\|, \tag{3.2}$$

*где* $C\left(\mu, \overline{\gamma^*}\ln\omega\right) = \left(\operatorname{Re}\mu + \sum\limits_{i=1}^{n} \gamma_i^* \ln\omega_i\right)^{-\alpha}$.

*Доказательство.* Докажем утверждение $(i)$. Сначала рассмотрим случай $1 \leqslant \overline{p} < \overline{\infty}$. С помощью обобщенного неравенства Минковского имеем

$$\left\| J^{\alpha}_{+\ldots+,\mu}\varphi;\, \mathfrak{L}^{\overline{p}}_{\overline{\gamma}} \right\| \leqslant \int\limits_0^\infty \cdots \int\limits_0^\infty \left\| \varphi\left(x \cdot y\right); \mathfrak{L}^{\overline{p}}_{\overline{\gamma}} \right\| \prod_{i=1}^{n} \left| k^{+}_{\mu_i,\alpha_i}\left(y_i\right) \right| \frac{dy_1}{y_1} \cdots \frac{dy_n}{y_n}.$$

После подстановки $\tau_i = x_i \cdot y_i$, $i = \overline{1,n}$, получаем

$$\left\| J^{\alpha}_{+\ldots+,\mu}\varphi;\, \mathfrak{L}^{\overline{p}}_{\overline{\gamma}} \right\| \leqslant \int\limits_0^\infty \cdots \int\limits_0^\infty \prod_{i=1}^{n} \left| k^{+}_{\mu_i,\alpha_i}\left(y_i\right) \right| y_i^{\frac{\gamma_i}{p_i}} \frac{dy_1}{y_1} \cdots \frac{dy_n}{y_n} \left\| \varphi; \mathfrak{L}^{\overline{p}}_{\overline{\gamma}} \right\|.$$

Следовательно,

$$\left\| J^{\alpha}_{+\ldots+,\mu}\varphi;\, \mathfrak{L}^{\overline{p}}_{\overline{\gamma}} \right\| \leqslant \int\limits_0^1 \cdots \int\limits_0^1 \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{\Gamma\left(\alpha_i\right)} y_i^{\mu_i + \frac{\gamma_i}{p_i}} \left(\ln\frac{1}{y_i}\right)^{\alpha_i - 1} \frac{dy_1}{y_1} \cdots \frac{dy_n}{y_n} \left\| \varphi; \mathfrak{L}^{\overline{p}}_{\overline{\gamma}} \right\| \leqslant$$

$$\leqslant \int\limits_0^\infty \cdots \int\limits_0^\infty \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{\Gamma\left(\alpha_i\right)} e^{-\left(\mu_i + \frac{\gamma_i}{p_i}\right)\xi_i} \left(\xi_i\right)^{\alpha_i - 1} d\xi_1 \cdots d\xi_n \left\| \varphi; \mathfrak{L}^{\overline{p}}_{\overline{\gamma}} \right\| \leqslant \prod_{i=1}^{n} \left(\frac{p_i}{\mu_i\, p_i + \gamma_i}\right)^{\alpha_i} \left\| \varphi; \mathfrak{L}^{\overline{p}}_{\overline{\gamma}} \right\|. \tag{3.3}$$

В случае $\overline{p} = \overline{\infty}$ в (3.3) заменим $p_i$, $i = \overline{1,n}$, на 1. Тогда получим (3.1).

Аналогично доказывается утверждение $(ii)$.

Докажем теперь утверждение $(iii)$. С помощью обобщенного неравенства Минковского получаем

$$\left\| J^{\alpha}_{\omega,\mu}\varphi;\ \mathfrak{L}^{\overline{p}}_{\overline{\gamma}} \right\| \leqslant \int\limits_{0}^{\infty} \left| k^{+}_{\mu,\alpha}(y) \right| \left\| \varphi\left(x \cdot y^{\ln\omega}\right); \mathfrak{L}^{\overline{p}}_{\overline{\gamma}} \right\| \frac{dy}{y}.$$

После подстановки $\tau_i = x_i y^{\ln\omega_i}$, $i = \overline{1,n}$, имеем

$$\left\| J^{\alpha}_{\omega,\mu}\varphi;\ \mathfrak{L}^{\overline{p}}_{\overline{\gamma}} \right\| \leqslant \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int\limits_{0}^{1} y^{\mu + \sum\limits_{i=1}^{n} \frac{\gamma_i}{p_i}\ln\omega_i} |\ln y|^{\ \alpha-1} \left\| \varphi; \mathfrak{L}^{\overline{p}}_{\overline{\gamma}} \right\| \frac{dy}{y} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int\limits_{0}^{\infty} e^{-(\mu + \sum\limits_{i=1}^{n} \frac{\gamma_i}{p_i}\ln\omega_i)\xi} \xi^{\alpha-1} d\xi \left\| \varphi; \mathfrak{L}^{\overline{p}}_{\overline{\gamma}} \right\| \leqslant \left( \mu + \sum_{i=1}^{n} \frac{\gamma_i}{p_i} \ln\omega_i \right)^{-\alpha} \left\| \varphi; \mathfrak{L}^{\overline{p}}_{\overline{\gamma}} \right\|. \tag{3.4}$$

В случае $\overline{p} = \overline{\infty}$ в (3.4) заменим $p_i$, $i = \overline{1,n}$, на 1. Тогда получим (3.2). □

Принимая во внимание очевидные соотношения

$$\Im^{\alpha}_{+\ldots+,\mu}\varphi = J^{\alpha}_{+\ldots+,\mu+1}\varphi, \quad \Im^{\alpha}_{-\ldots-,\mu}\varphi = J^{\alpha}_{-\ldots-,\mu-1}\varphi$$

между дробными интегралами типа Адамара (2.3), (2.4) и (2.5), (2.6) и применяя теорему 3.1 с $\mu_i$, замененным на $\mu_i + 1$ и $\mu_i - 1$, мы получаем свойства $\mathfrak{L}^{\overline{p}}_{\overline{\gamma}}$ ограниченности дробных интегральных операторов $\Im^{\alpha}_{+\cdots+,\mu}\varphi$ и $\Im^{\alpha}_{-\ldots-,\mu}\varphi$.

**Теорема 3.2.** *Пусть* $\gamma_i \in \mathbb{R}$, $1 \leqslant p_i \leqslant \infty$, $\alpha_i > 0$ *и* $\mu_i \in \mathbb{C}$, $i = \overline{1,n}$.

$(i)$ *Если* $\operatorname{Re}\mu_i > -\gamma_i^* - 1$, $i = \overline{1,n}$, *где* $\gamma_i^*, i = \overline{1,n}$ *— постоянные из* (1.2), *то оператор* $\Im^{\alpha}_{+\ldots+,\mu}$ *ограничен в* $\mathfrak{L}^{\overline{p}}_{\overline{\gamma}}$, *и*

$$\left\| \Im^{\alpha}_{+\ldots+,\mu}\varphi;\ \mathfrak{L}^{\overline{p}}_{\overline{\gamma}} \right\| \leqslant \prod_{i=1}^{n} C^{+}\left(\operatorname{Re}\mu_i + 1, \gamma_i^*\right) \left\| \varphi; \mathfrak{L}^{\overline{p}}_{\overline{\gamma}} \right\|,$$

*где* $C^{+}\left(\operatorname{Re}\mu_i + 1, \gamma_i^*\right) = \left(\operatorname{Re}\mu_i + 1 + \gamma_i^*\right)^{-\alpha_i}$.

$(ii)$ *Если* $\operatorname{Re}\mu_i > \gamma_i^* + 1$, $i = \overline{1,n}$, *где* $\gamma_i^*, i = \overline{1,n}$ *— постоянные из* (1.2), *то оператор* $\Im^{\alpha}_{-\ldots-,\mu}$ *ограничен в* $\mathfrak{L}^{\overline{p}}_{\overline{\gamma}}$, *и*

$$\left\| \Im^{\alpha}_{-\ldots-,\mu}\varphi;\ \mathfrak{L}^{\overline{p}}_{\overline{\gamma}} \right\| \leqslant \prod_{i=1}^{n} C^{-}\left(\operatorname{Re}\mu_i - 1, \gamma_i^*\right) \left\| \varphi; \mathfrak{L}^{\overline{p}}_{\overline{\gamma}} \right\|,$$

*где* $C^{-}\left(\operatorname{Re}\mu_i - 1, \gamma_i^*\right) = \left(\operatorname{Re}\mu_i - 1 - \gamma_i^*\right)^{-\alpha_i}$.

Доказательство теоремы 3.2 аналогично доказательству теоремы 3.1.

**Теорема 3.3.**

1. *Пусть* $\gamma_i \in \mathbb{R}$, $1 \leqslant p_i \leqslant \infty$, $\alpha_i > 0$, $i = \overline{1,n}$.

$(i)$ *Если* $\gamma_i > 0$, $i = \overline{1,n}$, *то оператор* $J^{\alpha}_{+\ldots+}$ *ограничен в* $\mathfrak{L}^{\overline{p}}_{\overline{\gamma}}$, *и*

$$\left\| J^{\alpha}_{+\ldots+}\varphi;\ \mathfrak{L}^{\overline{p}}_{\overline{\gamma}} \right\| \leqslant \prod_{i=1}^{n} C^{+}\left(\gamma_i^*\right) \left\| \varphi; \mathfrak{L}^{\overline{p}}_{\overline{\gamma}} \right\|,$$

*где* $C^{+}\left(\gamma_i^*\right) = \left(\gamma_i^*\right)^{-\alpha_i}$, $\gamma_i^*, i = \overline{1,n}$ *— постоянные из* (1.2).

$(ii)$ *Если* $\gamma_i < 0, i = \overline{1,n}$, *то оператор* $J^{\alpha}_{-\ldots-}$ *ограничен в* $\mathfrak{L}^{\overline{p}}_{\overline{\gamma}}$, *и*

$$\left\| J^{\alpha}_{-\ldots-}\varphi;\ \mathfrak{L}^{\overline{p}}_{\overline{\gamma}} \right\| \leqslant \prod_{i=1}^{n} C^{-}\left(\gamma_i^*\right) \left\| \varphi; \mathfrak{L}^{\overline{p}}_{\overline{\gamma}} \right\|,$$

*где* $C^{-}\left(\gamma_i^*\right) = \left(-\gamma_i^*\right)^{-\alpha_i}$, $\gamma_i^*, i = \overline{1,n}$ *— постоянные из* (1.2).

$(iii)$ *Если* $\sum\limits_{i=1}^{n}\gamma_i^*\ln\omega_i>0$, $\gamma_i>0$, $i=\overline{1,n}$, *где* $\gamma_i^*, i=\overline{1,n}$ — *постоянные из* (1.2), *то оператор* $J_\omega^\alpha$ *ограничен в* $\mathfrak{L}_{\overline{\gamma}}^{\overline{p}}$ *и*

$$\left\|J_\omega^\alpha\varphi;\,\mathfrak{L}_{\overline{\gamma}}^{\overline{p}}\right\|\leqslant C\left(\overline{\gamma}^*\ln\omega\right)\left\|\varphi;\mathfrak{L}_{\overline{\gamma}}^{\overline{p}}\right\|,$$

*где* $C\left(\overline{\gamma}^*\ln\omega\right)=\left(\sum\limits_{i=1}^{n}\gamma_i^*\ln\omega_i\right)^{-\alpha}$.

2. *Пусть* $1\leqslant p_i\leqslant\infty$, $1\leqslant q_i\leqslant\infty$, $0<\alpha_i<1$, $i=\overline{1,n}$. *Операторы дробного интегрирования* $J_{\pm\ldots\pm}^\alpha\varphi$ *и* $J_\omega^\alpha\varphi$ *ограничены из* $\mathfrak{L}^{\overline{p}}\Big(\mathbb{R}_+^n,\dfrac{dx}{x}\Big)$ *в* $\mathfrak{L}^{\overline{q}}\Big(\mathbb{R}_+^n,\dfrac{dx}{x}\Big)$ *тогда и только тогда, когда* $1<p_i<\dfrac{1}{\alpha_i}$, $q_i=\dfrac{p_i}{1-\alpha_i p_i}$, $i=\overline{1,n}$.

*Доказательство.* Первое утверждение вытекает из теоремы 3.1. Далее, операторы $J_{\pm\ldots\pm}^\alpha\varphi$ и $J_\omega^\alpha\varphi$ связаны с операторами Римана—Лиувилля $I_{\pm\ldots\pm}^\alpha\varphi$ и $I_v^\alpha\varphi$ равенствами

$$J_{\pm\ldots\pm}^\alpha\varphi=Q^{-1}I_{\pm\ldots\pm}^\alpha Q\varphi,\quad J_\omega^\alpha\varphi=Q^{-1}I_v^\alpha Q\varphi,\tag{3.5}$$

где $(Q\varphi)(x)=\varphi\left(e^x\right)=\varphi\left(e^{x_1},\ldots,e^{x_n}\right)$, $v=\ln\omega$. В силу связи (3.5) второе утверждение теоремы следует из известной теоремы Харди—Литтлвуда для обычного дробного интегрирования по $\mathbb{R}^n$ (см. [6, с. 345]). □

**Теорема 3.4.** *Пусть* $\gamma_i\in\mathbb{R}$, $1\leqslant p_i\leqslant\infty$, *и* $\mu_i\in\mathbb{C}$, $i=\overline{1,n}$.

$(i)$ *Если* $\operatorname{Re}\mu_i\geqslant-\gamma_i^*$, $0<\tau_i\leqslant1$, $l_i>\alpha_i>0$, $i=\overline{1,n}$, *где* $\gamma_i^*, i=\overline{1,n}$ — *постоянные из* (1.2), *то оператор* $J_{\pm\ldots\pm,\mu;\tau}^{\alpha,l}$ *ограничен в* $\mathfrak{L}_{\overline{\gamma}}^{\overline{p}}$, *и*

$$\left\|J_{\pm\ldots\pm,\mu;\tau}^{\alpha,l}\varphi;\mathfrak{L}_{\overline{\gamma}}^{\overline{p}}\right\|\leqslant\prod_{i=1}^{n}c_i\left(\tau_i,\mu_i\right)\left\|\varphi;\mathfrak{L}_{\overline{\gamma}}^{\overline{p}}\right\|,$$

*где* $0<c_i\left(\tau_i,\mu_i\right)<1$, $i=\overline{1,n}$.

$(ii)$ *Если* $\operatorname{Re}\mu\geqslant-\sum\limits_{i=1}^{n}\gamma_i^*\ln\omega_i$, $0<\tau\leqslant1$, $s>\alpha>0$, *где* $\gamma_i^*, i=\overline{1,n}$ — *постоянные из* (1.2), *то оператор* $J_{\omega,\mu;\tau}^{\alpha,s}$ *ограничен в* $\mathfrak{L}_{\overline{\gamma}}^{\overline{p}}$, *и*

$$\left\|J_{\omega,\mu;\tau}^{\alpha,s}\varphi;\mathfrak{L}_{\overline{\gamma}}^{\overline{p}}\right\|\leqslant c_1\left(\tau,\mu\right)\left\|\varphi;\mathfrak{L}_{\overline{\gamma}}^{\overline{p}}\right\|,$$

*где* $0<c_1\left(\tau,\mu\right)<1$.

Доказательство теоремы 3.4 аналогично доказательству теорем для одномерного случая из [21].

**Теорема 3.5.** *Операторы* $J_{\pm\ldots\pm,\tau}^{\alpha,l}, J_{\omega,\tau}^{\alpha,s}$ *ограничены в пространстве* $\mathfrak{L}_{\overline{\gamma}}^{\overline{p}}$ *при* $1\leqslant p_i\leqslant\infty$, $\gamma_i\geqslant0$, $i=\overline{1,n}$,

$$\left\|J_{\pm\ldots\pm,\tau}^{\alpha,l}\varphi;\mathfrak{L}_{\overline{\gamma}}^{\overline{p}}\right\|\leqslant\prod_{i=1}^{n}c_i\left(\tau_i\right)\left\|\varphi;\mathfrak{L}_{\overline{\gamma}}^{\overline{p}}\right\|,$$

*где* $0<c_i\left(\tau_i\right)<1$ *при* $0<\tau_i\leqslant1$, $l_i>\alpha_i>0$, $i=\overline{1,n}$,

$$\left\|J_{\omega,\tau}^{\alpha,s}\varphi;\mathfrak{L}_{\overline{\gamma}}^{\overline{p}}\right\|\leqslant c_1\left(\tau\right)\left\|\varphi;\mathfrak{L}_{\overline{\gamma}}^{\overline{p}}\right\|,$$

*где* $0<c_1\left(\tau\right)<1$ *при* $0<\tau\leqslant1$, $s>\alpha>0$.

Доказательство этой теоремы аналогично доказательству теорем для одномерного случая из [21].

Рассмотрим одномерные левосторонние и правосторонние дробные интегралы типа Адамара

$$\left(J_{+,\mu}^\alpha\varphi\right)(x)=\frac{1}{\Gamma\left(\alpha\right)}\int\limits_0^x\left(\frac{y}{x}\right)^\mu\left(\ln\frac{x}{y}\right)^{\alpha-1}\varphi\left(y\right)\frac{dy}{y}=\int\limits_0^\infty\varphi\left(y\right)k_{\mu,\alpha}^+\left(\frac{x}{y}\right)\frac{dy}{y},\tag{3.6}$$

$$\left(J^{\alpha}_{-,\mu}\varphi\right)(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int\limits_{x}^{\infty}\left(\frac{x}{y}\right)^{\mu}\left(\ln\frac{y}{x}\right)^{\alpha-1}\varphi(y)\,\frac{dy}{y} = \int\limits_{0}^{\infty}\varphi(y)\,k^{+}_{\mu,\alpha}\left(\frac{y}{x}\right)\frac{dy}{y},$$

где

$$k^{+}_{\mu,\alpha}(u) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}u^{-\mu}(\ln u)^{\alpha-1}_{+} = \begin{cases} 0, & 0 < u < 1, \\ \dfrac{1}{\Gamma(\alpha)}u^{-\mu}(\ln u)^{\alpha-1}, & u > 1, \end{cases} \tag{3.7}$$

$$k^{+}_{\mu,\alpha}\left(\frac{1}{u}\right) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\left(\frac{1}{u}\right)^{-\mu}\left(\ln\frac{1}{u}\right)^{\alpha-1}_{+} = \begin{cases} \dfrac{1}{\Gamma(\alpha)}\left(\frac{1}{u}\right)^{-\mu}\left(\ln\frac{1}{u}\right)^{\alpha-1}, & 0 < u < 1, \\ 0, & u > 1. \end{cases}$$

**Теорема 3.6.** *Пусть* $\gamma\in\mathbb{R}$, $\alpha>0$, $\mu\in\mathbb{C}$ *и* $1\leqslant p, r\leqslant q\leqslant\infty$, $\dfrac{1}{r}=\dfrac{1}{q}-\dfrac{1}{p}+1$, $\alpha>\dfrac{1}{p}-\dfrac{1}{q}$.

$(i)$ *Если* $\operatorname{Re}\mu>-\gamma^*$, *то оператор* $J^{\alpha}_{+,\mu}$ *ограничен из* $\mathfrak{L}^p_\gamma$ *в* $\mathfrak{L}^q_{\frac{q\gamma}{p}}$ *и*

$$\left\|J^{\alpha}_{+,\mu}\varphi;\,\mathfrak{L}^q_{\frac{q\gamma}{p}}\right\| \leqslant C^{+}_{r}(\mu,\gamma^*)\left\|\varphi;\mathfrak{L}^p_\gamma\right\|, \tag{3.8}$$

*где* $C^{+}_{r}(\mu,\gamma^*)=((\operatorname{Re}\mu+\gamma^*)r)^{1-\alpha-\frac{1}{r}}\frac{[\Gamma(1+(\alpha-1)r)]^{\frac{1}{r}}}{\Gamma(\alpha)}$ *при* $1<p<q$, $r<q$ *или* $q=\infty$, $r=p'$, $C^{+}_{r}(\mu,\gamma)=((\operatorname{Re}\mu+\gamma)r)^{1-\alpha-\frac{1}{r}}\frac{[\Gamma(1+(\alpha-1)r)]^{\frac{1}{r}}}{\Gamma(\alpha)}$ *при* $1=p<q$, $r=q$, $C^{+}_{1}(\mu,\gamma^*)=(\operatorname{Re}\mu+\gamma^*)^{-\alpha}$ *при* $p=q$, $r=1$.

$(ii)$ *Если* $\operatorname{Re}\mu>\gamma^*$, *то оператор* $J^{\alpha}_{-,\mu}$ *ограничен из* $\mathfrak{L}^p_\gamma$ *в* $\mathfrak{L}^q_{\frac{q\gamma}{p}}$ *и*

$$\left\|J^{\alpha}_{-,\mu}\varphi;\,\mathfrak{L}^q_{\frac{q\gamma}{p}}\right\| \leqslant C^{-}_{r}(\mu,\gamma^*)\left\|\varphi;\mathfrak{L}^p_\gamma\right\|,$$

*где* $C^{-}_{r}(\mu,\gamma^*)=((\operatorname{Re}\mu-\gamma^*)r)^{1-\alpha-\frac{1}{r}}\frac{[\Gamma(1+(\alpha-1)r)]^{\frac{1}{r}}}{\Gamma(\alpha)}$ *при* $1<p<q$, $r<q$ *или* $q=\infty$, $r=p'$, $C^{-}_{r}(\mu,\gamma)=((\operatorname{Re}\mu-\gamma)r)^{1-\alpha-\frac{1}{r}}\frac{[\Gamma(1+(\alpha-1)r)]^{\frac{1}{r}}}{\Gamma(\alpha)}$ *при* $1=p<q$, $r=q$, $C^{-}_{1}(\mu,\gamma^*)=(\operatorname{Re}\mu-\gamma^*)^{-\alpha}$ *при* $p=q$, $r=1$.

*Доказательство.* Прежде всего заметим, что если $q=\infty$, то $r=p'$ и из неравенства Гельдера следует, что для всех $x\in\mathbb{R}_+$ справедливо неравенство

$$\left\|J^{\alpha}_{+,\mu}\varphi;\,\mathfrak{L}^\infty_{\gamma/p}\right\| \leqslant \left\|k^{+}_{\mu,\alpha};\,\mathfrak{L}^{p'}_{\gamma/p}\right\|\,\left\|\varphi;\,\mathfrak{L}^p_\gamma\right\|.$$

Поэтому в дальнейшем будем считать, что $q<\infty$.

Пусть $1<p<q$, $r<q$, тогда представим дробные интеграла типа Адамара (3.6) в виде

$$\left|\left(J^{\alpha}_{+,\mu}\varphi\right)(x)\right| \leqslant \int\limits_{0}^{\infty}\left(|\varphi(y)|^p\left|k^{+}_{\mu,\alpha}\left(\frac{x}{y}\right)\right|^r y^{-\gamma\left(1-\frac{r}{p}\right)}\right)^{\frac{1}{q}}\left(\left|k^{+}_{\mu,\alpha}\left(\frac{x}{y}\right)\right|^r y^{\frac{\gamma}{p}r}\right)^{\frac{1}{r}-\frac{1}{q}}\left(|\varphi(y)|^p y^{-\gamma}\right)^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}\frac{dy}{y}.$$

Применяя к последнему интегралу обобщенное неравенство Гельдера, записанное в виде

$$\int\limits_{0}^{\infty}|f_1|^{\alpha_1}|f_2|^{\alpha_2}|f_3|^{\alpha_3}\,du \leqslant \left(\int\limits_{0}^{\infty}|f_1|\,du\right)^{\alpha_1}\left(\int\limits_{0}^{\infty}|f_2|\,du\right)^{\alpha_2}\left(\int\limits_{0}^{\infty}|f_3|\,du\right)^{\alpha_3},$$

где $0\leqslant\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\leqslant1$, $\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3=1$, $\alpha_1:=\dfrac{1}{q}$, $\alpha_2:=\dfrac{1}{r}-\dfrac{1}{q}$, $\alpha_3:=\dfrac{1}{p}-\dfrac{1}{q}$, а равенство $\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3=1$ следует из $\dfrac{1}{r}=\dfrac{1}{q}-\dfrac{1}{p}+1$, получим

$$\left|\left(J^{\alpha}_{+,\mu}\varphi\right)(x)\right| \leqslant$$

$$\leqslant \left[\int\limits_0^\infty |\varphi(y)|^p \left|k^+_{\mu,\alpha}\left(\frac{x}{y}\right)\right|^r y^{-\gamma\left(1-\frac{r}{p}\right)}\frac{dy}{y}\right]^{\frac{1}{q}} \left[\int\limits_0^\infty \left|k^+_{\mu,\alpha}\left(\frac{x}{y}\right)\right|^r y^{\frac{\gamma}{p}r}\frac{dy}{y}\right]^{\frac{1-\frac{r}{q}}{r}} \left[\int\limits_0^\infty |\varphi(y)|^p y^{-\gamma}\frac{dy}{y}\right]^{\frac{1-\frac{p}{q}}{p}} =$$

$$= \left[\int\limits_0^\infty |\varphi(y)|^p \left|k^+_{\mu,\alpha}\left(\frac{x}{y}\right)\right|^r y^{-\gamma\left(1-\frac{r}{p}\right)}\frac{dy}{y}\right]^{\frac{1}{q}} x^{\frac{\gamma}{p}\left(1-\frac{r}{q}\right)} \left\|k^+_{\mu,\alpha};\, \mathfrak{L}^r_{\gamma/p}\right\|^{1-\frac{r}{q}} \left\|\varphi;\, \mathfrak{L}^p_\gamma\right\|^{1-\frac{p}{q}}.$$

В силу теоремы Фубини для почти всех $x \in \mathbb{R}_+$ функция

$$\int\limits_0^\infty |\varphi(y)|^p \left|k^+_{\mu,\alpha}\left(\frac{x}{y}\right)\right|^r y^{-\gamma\left(1-\frac{r}{p}\right)}\frac{dy}{y}$$

конечна и интегрируема на $\mathbb{R}_+$, причем

$$\left\|J^\alpha_{+,\mu}\varphi;\, \mathfrak{L}^q_{q\gamma/p}\right\| \leqslant$$

$$\leqslant \left[\int\limits_0^\infty\left[\int\limits_0^\infty |\varphi(y)|^p \left|k^+_{\mu,\alpha}\left(\frac{x}{y}\right)\right|^r y^{-\gamma\left(1-\frac{r}{p}\right)}\frac{dy}{y}\right] x^{\frac{\gamma}{p}\left(1-\frac{r}{q}\right)q} x^{-\frac{\gamma}{p}q}\frac{dx}{x}\right]^{\frac{1}{q}} \left\|k^+_{\mu,\alpha};\, \mathfrak{L}^r_{\gamma/p}\right\|^{1-\frac{r}{q}} \left\|\varphi;\, \mathfrak{L}^p_\gamma\right\|^{1-\frac{p}{q}} =$$

$$= \left[\int\limits_0^\infty |\varphi(y)|^p y^{-\gamma}\frac{dy}{y}\right]^{\frac{1}{q}\cdot} \left[\int\limits_0^\infty \left|k^+_{\mu,\alpha}(t)\right|^r t^{-\frac{r\gamma}{p}}\frac{dt}{t}\right]^{\frac{1}{q}\cdot} \left\|k^+_{\mu,\alpha};\, \mathfrak{L}^r_{\gamma/p}\right\|^{1-\frac{r}{q}} \left\|\varphi;\, \mathfrak{L}^p_\gamma\right\|^{1-\frac{p}{q}} =$$

$$= \left\|k^+_{\mu,\alpha};\, \mathfrak{L}^r_{\gamma/p}\right\| \left\|\varphi;\, \mathfrak{L}^p_\gamma\right\|. \tag{3.9}$$

Далее с учетом свойства (3.7) вычислим

$$\left\|k^+_{\mu,\alpha};\, \mathfrak{L}^r_{\gamma/p}\right\| = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\left[\int\limits_1^\infty (\ln t)^{(\alpha-1)r} t^{-\left(\mu+\frac{\gamma}{p}\right)r}\frac{dt}{t}\right]^{\frac{1}{r}} = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\left[\int\limits_0^\infty u^{(\alpha-1)r} e^{-\left(\mu+\frac{\gamma}{p}\right)r\,u}du\right]^{\frac{1}{r}} =$$

$$= \frac{\left[\Gamma\left((\alpha-1)r+1\right)\right]^{\frac{1}{r}}}{\Gamma(\alpha)}\left(\left(\mu+\frac{\gamma}{p}\right)r\right)^{1-\alpha-\frac{1}{r}}. \tag{3.10}$$

Подставляя (3.10) в (3.9), получим (3.8).

В случаях $p = q$, $r = 1$ и $1 = p < q$, $r = q$ доказательство аналогично. Оценка интеграла $J^\alpha_{+,\mu}$ осуществляется с помощью неравенства Гельдера для двух функций.

Аналогично доказывается утверждение $(ii)$. $\square$

**Теорема 3.7.** *Пусть* $\gamma_i \in \mathbb{R}$, $\alpha_i > 0$, $\mu_i \in \mathbb{C}$, $i = \overline{1,n}$ *и* $1 \leqslant p_i, r_i \leqslant q_i \leqslant \infty$, $\dfrac{1}{r_i} = \dfrac{1}{q_i} - \dfrac{1}{p_i} + 1$, $i = \overline{1,n}$, $\alpha_i > \dfrac{1}{p_i} - \dfrac{1}{q_i}$, $i = \overline{1,n}$.

$(i)$ *Если* $\mathrm{Re}\,\mu_i > -\gamma_i^*$, $i = \overline{1,n}$, *где* $\gamma_i^*, i = \overline{1,n}$ *— постоянные из* (1.2), *то оператор* $J^\alpha_{+\ldots+,\mu}$ *ограничен из* $\mathfrak{L}^{\overline{p}}_{\overline{\gamma}}$ *в* $\mathfrak{L}^{\overline{q}}_{\overline{\nu}}$, *и*

$$\left\|J^\alpha_{+\ldots+,\mu}\varphi;\, \mathfrak{L}^{\overline{q}}_{\overline{\nu}}\right\| \leqslant \prod_{i=1}^n C^+_{r_i}(\mu_i,\gamma_i^*)\left\|\varphi;\mathfrak{L}^{\overline{p}}_{\overline{\gamma}}\right\|,$$

*где* $\overline{\nu} := (\gamma_1^* q_1, \ldots, \gamma_n^* q_n)$, $C^+_{r_i}(\mu_i,\gamma_i^*) = ((\mathrm{Re}\,\mu_i + \gamma_i^*)r_i)^{1-\alpha_i-\frac{1}{r_i}}\frac{[\Gamma(1+(\alpha_i-1)r_i)]^{\frac{1}{r_i}}}{\Gamma(\alpha_i)}$ *при* $1 < p_i < q_i$, $r_i < q_i$ *или* $q_i = \infty$, $r_i = p_i'$, $i = \overline{1,n}$, $C^+_{r_i}(\mu_i,\gamma_i) = ((\mathrm{Re}\,\mu_i + \gamma_i)r_i)^{1-\alpha_i-\frac{1}{r_i}}\frac{[\Gamma(1+(\alpha_i-1)r_i)]^{\frac{1}{r_i}}}{\Gamma(\alpha_i)}$ *при* $1 = p_i < q_i$, $r_i = q_i$, $i = \overline{1,n}$, $C^+_1(\mu_i,\gamma_i^*) = (\mathrm{Re}\,\mu_i + \gamma_i^*)^{-\alpha_i}$ *при* $p_i = q_i$, $r_i = 1$, $i = \overline{1,n}$.

(*ii*) *Если* $\operatorname{Re}\mu_i > \gamma_i^*$, $i = \overline{1,n}$, *где* $\gamma_i^*, i = \overline{1,n}$ — *постоянные из* (1.2), *то оператор* $J^{\alpha}_{-\dots-,\mu}$ *ограничен из* $\mathfrak{L}^{\overline{p}}_{\overline{\gamma}}$ *в* $\mathfrak{L}^{\overline{q}}_{\overline{\nu}}$ *и*

$$\left\| J^{\alpha}_{-\dots-,\mu}\varphi;\, \mathfrak{L}^{\overline{q}}_{\overline{\nu}} \right\| \leqslant \prod_{i=1}^{n} C^{-}_{r_i}(\mu_i,\gamma_i^*) \left\| \varphi; \mathfrak{L}^{\overline{p}}_{\overline{\gamma}} \right\|,$$

*где* $\overline{\nu} := (\gamma_1^* q_1, \dots, \gamma_n^* q_n)$, $C^{-}_{r_i}(\mu_i,\gamma_i^*) = ((\operatorname{Re}\mu_i - \gamma_i^*)r_i)^{1-\alpha_i-\frac{1}{r_i}} \frac{[\Gamma(1+(\alpha_i-1)r_i)]^{\frac{1}{r_i}}}{\Gamma(\alpha_i)}$ *при* $1 < p_i < q_i$, $r_i < q_i$ *или* $q_i = \infty$, $r_i = p_i'$, $i = \overline{1,n}$, $C^{-}_{r_i}(\mu_i,\gamma_i) = ((\operatorname{Re}\mu_i - \gamma_i)r_i)^{1-\alpha_i-\frac{1}{r_i}} \frac{[\Gamma(1+(\alpha_i-1)r_i)]^{\frac{1}{r_i}}}{\Gamma(\alpha_i)}$ *при* $1 = p_i < q_i$, $r_i = q_i$, $i = \overline{1,n}$, $C^{-}_{1}(\mu_i,\gamma_i^*) = (\operatorname{Re}\mu_i - \gamma_i^*)^{-\alpha_i}$ *при* $p_i = q_i$, $r_i = 1$, $i = \overline{1,n}$.

*Доказательство.* После последовательного применения обобщенного неравенства Минковского (см. [2, с. 23, формула (13)]) и $n$-кратного применения неравенства (3.8), получим обобщение неравенства (3.8) на многомерный случай. □

**Теорема 3.8.** *Пусть* $\gamma_i \in \mathbb{R}$, $\alpha_i > 0$, $\mu_i \in \mathbb{C}$, $i = \overline{1,n}$ *и* $1 \leqslant p_i, r_i \leqslant q_i \leqslant \infty$, $\dfrac{1}{r_i} = \dfrac{1}{q_i} - \dfrac{1}{p_i} + 1$, $i = \overline{1,n}$, $\alpha_i > \dfrac{1}{p_i} - \dfrac{1}{q_i}$, $i = \overline{1,n}$.

(*i*) *Если* $\operatorname{Re}\mu_i > -1 - \gamma_i^*$, $i = \overline{1,n}$, *где* $\gamma_i^*, i = \overline{1,n}$ — *постоянные из* (1.2), *то оператор* $\Im^{\alpha}_{+\dots+,\mu}$ *ограничен из* $\mathfrak{L}^{\overline{p}}_{\overline{\gamma}}$ *в* $\mathfrak{L}^{\overline{q}}_{\overline{\nu}}$, *и*

$$\left\| \Im^{\alpha}_{+\dots+,\mu}\varphi;\, \mathfrak{L}^{\overline{q}}_{\overline{\nu}} \right\| \leqslant \prod_{i=1}^{n} C^{+}_{r_i}(\mu_i,\gamma_i^*) \left\| \varphi; \mathfrak{L}^{\overline{p}}_{\overline{\gamma}} \right\|,$$

*где* $\overline{\nu} := (\gamma_1^* q_1, \dots, \gamma_n^* q_n)$, $C^{+}_{r_i}(\mu_i,\gamma_i^*) = ((\operatorname{Re}\mu_i + 1 + \gamma_i^*)r_i)^{1-\alpha_i-\frac{1}{r_i}} \frac{[\Gamma(1+(\alpha_i-1)r_i)]^{\frac{1}{r_i}}}{\Gamma(\alpha_i)}$ *при* $1 < p_i < q_i$, $r_i < q_i$, $i = \overline{1,n}$, $C^{+}_{r_i}(\mu_i,\gamma_i) = ((\operatorname{Re}\mu_i + 1 + \gamma_i)r_i)^{1-\alpha_i-\frac{1}{r_i}} \frac{[\Gamma(1+(\alpha_i-1)r_i)]^{\frac{1}{r_i}}}{\Gamma(\alpha_i)}$ *при* $1 < p_i < q_i$, $r_i < q_i$ *или* $q_i = \infty$, $r_i = p_i'$, $i = \overline{1,n}$, $C^{+}_{1}(\mu_i,\gamma_i^*) = (\operatorname{Re}\mu_i + 1 + \gamma_i^*)^{-\alpha_i}$ *при* $p_i = q_i$, $r_i = 1$, $i = \overline{1,n}$.

(*ii*) *Если* $\operatorname{Re}\mu_i > 1 + \gamma_i^*$, $i = \overline{1,n}$, *где* $\gamma_i^*, i = \overline{1,n}$ — *постоянные из* (1.2), *то оператор* $\Im^{\alpha}_{-\dots-,\mu}$ *ограничен из* $\mathfrak{L}^{\overline{p}}_{\overline{\gamma}}$ *в* $\mathfrak{L}^{\overline{q}}_{\overline{\nu}}$, *и*

$$\left\| \Im^{\alpha}_{-\dots-,\mu}\varphi;\, \mathfrak{L}^{\overline{q}}_{\overline{\nu}} \right\| \leqslant \prod_{i=1}^{n} C^{-}_{r_i}(\mu_i,\gamma_i^*) \left\| \varphi; \mathfrak{L}^{\overline{p}}_{\overline{\gamma}} \right\|,$$

*где* $\overline{\nu} := (\gamma_1^* q_1, \dots, \gamma_n^* q_n)$, $C^{-}_{r_i}(\mu_i,\gamma_i^*) = ((\operatorname{Re}\mu_i - 1 - \gamma_i^*)r_i)^{1-\alpha_i-\frac{1}{r_i}} \frac{[\Gamma(1+(\alpha_i-1)r_i)]^{\frac{1}{r_i}}}{\Gamma(\alpha_i)}$ *при* $1 < p_i < q_i$, $r_i < q_i$ *или* $q_i = \infty$, $r_i = p_i'$, $i = \overline{1,n}$, $C^{-}_{r_i}(\mu_i,\gamma_i) = ((\operatorname{Re}\mu_i - 1 - \gamma_i)r_i)^{1-\alpha_i-\frac{1}{r_i}} \frac{[\Gamma(1+(\alpha_i-1)r_i)]^{\frac{1}{r_i}}}{\Gamma(\alpha_i)}$ *при* $1 = p_i < q_i$, $r_i = q_i$, $i = \overline{1,n}$, $C^{-}_{1}(\mu_i,\gamma_i^*) = (\operatorname{Re}\mu_i - 1 - \gamma_i^*)^{-\alpha_i}$ *при* $p_i = q_i$, $r_i = 1$, $i = \overline{1,n}$.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ


1. *Бердышев А. С., Турметов Б. Х., Кадиркулов Б. Й.* Некоторые свойства и применения интегродифференциальных операторов типа Адамара—Маршо классе гармонических функций// Сиб. мат. ж. — 2012. — *53*, № 4. — С. 752–764.
2. *Бесов О. В., Ильин В. П., Никольский С. М.* Интегральные представления функций и теоремы вложения. — М.: Наука, 1975.
3. *Килбас А. А., Титюра А. А.* Дробные интегралы и производные типа Адамара// Тр. ин-та мат. — 2002. — *11*. — С. 79–87.
4. *Лизоркин П. И.* Мультипликаторы интегралов Фурье и оценки сверток в пространствах со смешанной нормой. Приложения// Изв. АН СССР. Сер. мат. — 1970. — *34*, № 1. — С. 218–247.
5. *Самко С. Г.* Гиперсингулярные интегралы и их приложения. — Ростов-на-Дону: Ростовский ун-т, 1984.
6. *Самко С. Г., Килбас А. А., Маричев О. И.* Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения. — Минск: Наука и техника, 1987.

7. *Antonic N., Ivec I.* On the Hormander—Mihlin theorem for mixed-norm Lebesgue spaces// J. Math. Anal. Appl. — 2016. — *433*. — С. 176–199.
8. *Benedek A., Calderon A. P., Panzone R.* Convolution operators on Banach space valued functions// Proc. Natl. Acad. Sci. USA. — 1962. — *48*. — С. 356–365.
9. *Benedek A., Panzone R.* The space $L^p$ with mixed norm// Duke Math. J. — 1961. — *28*. — С. 301–324.
10. *Butzer P. L., Kilbas A. A., Trujillo J. J.* Fractional calculus in the Mellin setting and Hadamard-type fractional integrals// J. Math. Anal. Appl. — 2002. — *269*, № 1. — С. 1–27.
11. *Butzer P. L., Kilbas A. A., Trujillo J. J.* Compositions of Hadamard-type fractional integration operators and the semigroup property// J. Math. Anal. Appl. — 2002. — *269*, № 2. — С. 387–400.
12. *Butzer P. L., Kilbas A. A., Trujillo J. J.* Mellin transform analysis and integration by parts for Hadamard-type fractional integrals// J. Math. Anal. Appl. — 2002. — *270*, № 1. — С. 1–15.
13. *Fernandez D. L.* Vector-valued singular integral operators on $L^p$-spaces with mixed norms and applications// Pacific J. Math. — 1987. — *129*, № 2. — С. 257–275.
14. *Hadamard J.* Essai sur l'etude des functions données par leur développment de Taylor// J. Math. Pures Appl. — 1892. — *8*, № 4. — С. 101–186.
15. *Kenig C. E., Ponce G., Vega L.* Well-posedness and scattering results for the generalized Korteweg—de Vries equation via the contraction principle// Commun. Pure Appl. Math. — 1993. — *46*. — С. 527–620.
16. *Kilbas A.* Hadamard-type fractional calculus// J. Korean Math. Soc. — 2001. — *38*, № 6. — С. 1191–1204.
17. *Kilbas A.* Hadamard-type integral equations and fractional calculus operators. In Singular integral operators, factorization and applications // Oper. Theory Adv. Appl. — 2003. — *142*. — С. 175–188.
18. *Kim D.* Elliptic and parabolic equations with measurable coefficients in Lp-spaces with mixed norms// Methods Appl. Anal. — 2008. — *15*. — С. 437–468.
19. *Samko S. G., Yakhshiboyev M. U.* A Chen-type modification of Hadamard fractional integro-dfferentiation// Oper. Theory Adv. Appl. — 2014. — *242*. — С. 325–339.
20. *Stefanov A., Torres R. H.* Calderon—Zygmund operators on mixed Lebesgue spaces and applications to null forms// J. London Math. Soc. — 2004. — *2*, № 70. — С. 447–462.
21. *Yakhshiboev M. U.* Hadamard-type fractional integrals and Marchaud—Hadamard-type fractional derivatives in the spaces with power weight// Uzbek Math. J. — 2019. — № 3. — С. 155–174.

М. У. Яхшибоев
Национальный университет Узбекистана им. М. Улугбека, Ташкент, Узбекистан
E-mail: m.yakhshiboev@gmail.com

DOI: 10.22363/2413-3639-2022-68-1-178-189 UDC 517.983

## On Boundedness of Fractional Hadamard Integration and Hadamard-Type Integration in Lebesgue Spaces with Mixed Norm

© 2022 **M. U. Yakhshiboyev**

**Abstract**. In this paper, we consider the boundedness of integrals of fractional Hadamard integration and Hadamard-type integration (mixed and directional) in Lebesgue spaces with mixed norm. We prove Sobolev-type theorems of boundedness of one-dimensional and multidimensional Hadamard-type fractional integration in weighted Lebesgue spaces with mixed norm.

## REFERENCES


1. A. S. Berdyshev, B. Kh. Turmetov, and B. Y. Kadirkulov, “Nekotorye svoystva i primeneniya integrodifferentsial’nykh operatorov tipa Adamara—Marsho klasse garmonicheskikh funktsiy” [Some properties and applications of integro-differential operators of the Hadamard–Marchaud type in the class of harmonic functions], *Sib. mat. zh.* [Siberian Math. J.], 2012, **53**, No. 4, 752–764 (in Russian).
2. O. V. Besov, V. P. Il’in, and S. M. Nikol’skii, *Integral’nye predstavleniya funktsiy i teoremy vlozheniya* [Integral Representations of Functions and Embedding Theorems], Nauka, Moscow, 1975 (in Russian).
3. A. A. Kilbas and A. A. Tityura, “Drobnye integraly i proizvodnye tipa Adamara” [Fractional integrals and Hadamard-type derivatives], *Tr. in-ta mat.* [Proc. Inst. Math.], 2002, **11**, 79–87 (in Russian).
4. P. I. Lizorkin, “Mul’tiplikatory integralov Fur’e i otsenki svertok v prostranstvakh so smeshannoy normoy. Prilozheniya” [Fourier integral multipliers and estimates of convolutions in spaces with mixed norm. Applications], *Izv. AN SSSR. Ser. mat.* [Bull. Acad. Sci. USSR. Ser. Math.], 1970, **34**, No. 1, 218–247 (in Russian).
5. S. G. Samko, *Gipersingulyarnye integraly i ikh prilozheniya* [Hypersingular Integrals and Their Applications], Rostov Univ., Rostov-na-Donu, 1984 (in Russian).
6. S. G. Samko, A. A. Kilbas, and O. I. Marichev, *Integraly i proizvodnye drobnogo poryadka i nekotorye ikh prilozheniya* [Fractional Integrals and Derivatives and Some of Their Applications], Nauka i tekhnika, Minsk, 1987 (in Russian).
7. N. Antonic and I. Ivec, “On the Hormander—Mihlin theorem for mixed-norm Lebesgue spaces,” *J. Math. Anal. Appl.*, 2016, **433**, 176–199.
8. A. Benedek, A. P. Calderon, and R. Panzone, “Convolution operators on Banach space valued functions,” *Proc. Natl. Acad. Sci. USA*, 1962, **48**, 356–365.
9. A. Benedek and R. Panzone, “The space $L^p$ with mixed norm,” *Duke Math. J.*, 1961, **28**, 301–324.
10. P. L. Butzer, A. A. Kilbas, and J. J. Trujillo, “Fractional calculus in the Mellin setting and Hadamard-type fractional integrals,” *J. Math. Anal. Appl.*, 2002, **269**, No. 1, 1–27.
11. P. L. Butzer, A. A. Kilbas, and J. J. Trujillo, “Compositions of Hadamard-type fractional integration operators and the semigroup property,” *J. Math. Anal. Appl.*, 2002, **269**, No. 2, 387–400.
12. P. L. Butzer, A. A. Kilbas, and J. J. Trujillo, “Mellin transform analysis and integration by parts for Hadamard-type fractional integrals,” *J. Math. Anal. Appl.*, 2002, **270**, No. 1, 1–15.
13. D. L. Fernandez, “Vector-valued singular integral operators on $L^p$-spaces with mixed norms and applications,” *Pacific J. Math.*, 1987, **129**, No. 2, 257–275.
14. J. Hadamard, “Essai sur l‘etude des functions données par leur développment de Taylor,” *J. Math. Pures Appl.*, 1892, **8**, No. 4, 101–186.
15. C. E. Kenig, G. Ponce, and L. Vega, “Well-posedness and scattering results for the generalized Korteweg—de Vries equation via the contraction principle,” *Commun. Pure Appl. Math.*, 1993, **46**, 527–620.
16. A. Kilbas, “Hadamard-type fractional calculus,” *J. Korean Math. Soc.*, 2001, **38**, No. 6, 1191–1204.
17. A. Kilbas, “Hadamard-type integral equations and fractional calculus operators. In Singular integral operators, factorization and applications,” *Oper. Theory Adv. Appl.*, 2003, **142**, 175–188.
18. D. Kim, “Elliptic and parabolic equations with measurable coefficients in Lp-spaces with mixed norms,” *Methods Appl. Anal.*, 2008, **15**, 437–468.
19. S. G. Samko and M. U. Yakhshiboyev, “A Chen-type modification of Hadamard fractional integro-dfferentiation,” *Oper. Theory Adv. Appl.*, 2014, **242**, 325–339.
20. A. Stefanov and R. H. Torres, “Calderon—Zygmund operators on mixed Lebesgue spaces and applications to null forms,” *J. London Math. Soc.*, 2004, **2**, No. 70, 447–462.
21. M. U. Yakhshiboev, “Hadamard-type fractional integrals and Marchaud—Hadamard-type fractional derivatives in the spaces with power weight,” *Uzbek Math. J.*, 2019, No. 3, 155–174.


M. U. Yakhshiboyev
National University of Uzbekistan, Tashkent, Uzbekistan
E-mail: `m.yakhshiboev@gmail.com`