Современная математика. Фундаментальные направления. Том 68, № 1 (2022). С. 167–177
Contemporary Mathematics. Fundamental Directions. ISSN 2413-3639 (Print)

DOI: 10.22363/2413-3639-2022-68-1-167-177 УДК 517.962

ОПТИМАЛЬНЫЕ РАЗНОСТНЫЕ ФОРМУЛЫ В ПРОСТРАНСТВЕ СОБОЛЕВА

© 2022 г. **Х. М. ШАДИМЕТОВ, Р. Н. МИРЗАКАБИЛОВ**

Аннотация. Оптимизация вычислительных методов в функциональных пространствах является одной из основных проблем вычислительной математики. В настоящей работе рассматриваются алгебраические и функциональные утверждения для задачи разностных формул. В оптимизации разностных формул, т. е. при построении оптимальных разностных формул в функциональных пространствах, важную роль играет экстремальная функция данной разностной формулы. В данной работе в пространствах Соболева в явном виде находится экстремальная функция разностной формулы и вычисляется норма функционала погрешности разностной формулы. Более того, доказываются существование и единственность оптимальной разностной формулы.

ОГЛАВЛЕНИЕ

1. Введение

Пусть требуется найти решение дифференциального уравнения

$$y' = f(x, y) \tag{1.1}$$

с начальным условием $y(0) = y_0$ на отрезке $[0, 1]$. Разделим его на N частей длины $h = \dfrac{1}{N}$ и найдем приближенные значения y_n решения $y(x)$ в узлах $x_n = nh$, $n = 0, 1, \ldots, N$. Классическим примером методов такого типа является метод Эйлера, который состоит в следующем: приближенное значение y_{n+1} решения в точке x_{n+1} получается из приближенного значения y_n решения в точке x_n с помощью формулы

$$y_{n+1} = y_n + hy'_n, \tag{1.2}$$

где $y'_n = f(x_n, y_n)$. Следовательно, y_{n+1} — линейная комбинация значений функции и ее производных в точке x_n. Мы будем рассматривать только дискретные методы, т. е. методы, которые определяют решение для дискретных значений независимой переменной. Характеристической чертой дискретных методов для решения уравнения (1.1) является процесс решения, состоящий из повтора алгоритма получения неизвестного решения y_n использованием ранее вычисленных значений y_{n-j} и $f(x_j, y_j)$, $j = 1, 2, \ldots, s$.

Задача построения численного алгоритма может быть разделена на три группы:

1. Локальные свойства алгоритма. Задача состоит в выборе такого алгоритма для вычисления y_n, что разность $y_n - y(x_n)$ будет минимальной. Здесь y_n — приближенное значение точного решения $y(x)$, а значения $y(x_{n-j}), j = 1, 2, \ldots, m$ известны. Асимптотическая оценка точности алгоритма при

$$|x_{n-j} - x_{n-j-1}| = h \to 0$$

определяется двумя числами α и C:

$$|y_n - y(x_n)| = Ch^\alpha + o(h^\alpha).$$

Предполагается, что решение является достаточно гладким, а параметр α обозначает *алгебраическую степень точности*. Примером такого алгоритма являются методы Эйлера (1.2), для которых $\alpha = 2$ и $C = \dfrac{1}{2}y''(x_n)$.

2. Глобальные свойства алгоритма. Основная проблема состоит в выборе такого алгоритма, который не приводит к накоплению ошибок, т. е.

$$y_n \to y(\widetilde{x})$$

при

$$|x_n - x_{n-1}| \to 0 \quad \text{и} \quad x_n \to \widetilde{x}.$$

3. Устойчивость алгоритма как численного процесса. Некоторые сходящиеся алгоритмы могут сопровождаться численной неустойчивостью. Следовательно, мы будем рассматривать условия, которые обеспечивают устойчивость алгоритмов.

2. Задача построения разностных формул

Рассмотрим сначала задачу построения разностных формул, точных для многочленов степени не выше $m-1$, в алгебраической постановке. Далее под разностной формулой будем подразумевать следующее приближающее равенство:

$$\sum_{\beta=0}^{k} C\,[\beta]\,\varphi\,[\beta] - h\sum_{\beta=0}^{k} C^{(1)}\,[\beta]\,\varphi'\,[\beta] \cong 0. \tag{2.1}$$

Здесь $[\beta] = h\beta$, $\beta = 0, 1, \ldots, k$, $C\,[k] \neq 0$, $C\,[\beta]$ и $C^{(1)}\,[\beta]$ — коэффициенты разностной формулы.

Разностная формула порядка k называется *неявной*, если $C[k] \neq 0$, и *явной*, если $C[k] = 0$. Следующая разность называется *погрешностью* формулы

$$(\ell, \varphi) = \sum_{\beta=0}^{k} C\,[\beta]\,\varphi\,[\beta] - h\sum_{\beta=0}^{k} C^{(1)}\,[\beta]\,\varphi'\,[\beta]. \tag{2.2}$$

В классе дифференцируемых функций, определенных на отрезке $[0, 1]$, равенство (2.2) определяет аддитивный и однородный функционал ℓ, который называется *функционалом погрешности* дифференциальной формулы (2.1). Говорят, что разностная формула для функции φ является *точной*, если разность (2.2) равна нулю. Другими словами, функции, для которых разностная формула является точной, образуют ядро функционала погрешности ℓ. Задача построения разностных формул в алгебраической постановке на отрезке $[0, 1]$ выглядит следующим образом:

Найти коэффициенты $C[\beta]$ и $C^{(1)}[\beta]$ разностной формулы такие, что формула становится точной для всех многочленов из пространства $\mathbf{P}_{m-1}$ при достаточно больших m, где $\mathbf{P}_{m-1}$ — пространство многочленов степени $m-1$.

Следовательно, качество разностной формулы будет выше, когда размерность пространства многочленов $\mathbf{P}_{m-1}$ будет выше.

Подставляя многочлен

$$P_{m-1}\,(x) = a_0x^{m-1} + a_1x^{m-2} + \ldots + a_{m-1}$$

вместо $\varphi(x)$ в (2.2), получаем

$$(\ell, P_{m-1}) = \sum_{\beta=0}^{k} C[\beta] P_{m-1}[\beta] - h \sum_{\beta=0}^{k} C^{(1)}[\beta] P'_{m-1}[\beta].$$

Следовательно, наше требование $(\ell, P_{m-1}) = 0$ для $P_{m-1}(x) \in \mathbf{P}_{m-1}$, которое эквивалентно системе условий

$$(\ell, x^{\alpha}) = 0, \quad \alpha = 0, 1, \ldots, m-1, \tag{2.3}$$

выполнено в случае, когда векторы

$$C = (C[0], C[1], \ldots, C[k]) \quad \text{и} \quad C^{(1)} = \left(C^{(1)}[0], C^{(1)}[1], \ldots, C^{(1)}[k]\right)$$

являются решением системы

$$\sum_{\beta=0}^{k} C[\beta] = 0, \quad C[k] = 1,$$

$$(hk)^s + \sum_{\beta=0}^{k-1} C[\beta] (h\beta)^s = \sum_{\beta=0}^{k} sC^{(1)}[\beta] (h\beta)^{s-1}, \quad s = 1, 2, \ldots, m-1.$$

Система (2.3) имеет решение, если $k \geqslant m-1$.

Теперь дадим известные разностные формулы, построенные алгебраическим способом.

Обозначим через $\nabla y_n = y_n - y_{n-1}$, тогда формула Адамса—Башфорта имеет вид

$$y_{n+1} = y_n + h\left(y'_n + \frac{1}{2}\nabla y'_n + \frac{5}{12}\nabla^2 y'_n + \frac{3}{8}\nabla^3 y'_n + \ldots\right),$$

а формула Адамса—Мультона имеет вид

$$y_n = y_{n-1} + h\left(y'_n - \frac{1}{2}\nabla y'_n - \frac{1}{12}\nabla^2 y'_n - \frac{1}{24}\nabla^3 y'_n \ldots\right).$$

Существуют иные известные формулы, например, формулы Нистрома и Мали—Симпсона, а также другие формулы.

3. Функциональная постановка задачи. Экстремальная функция разностных формул

Теперь перейдем к функциональной постановке нашей задачи. Рассмотрим функции φ из пространства Соболева $L_2^{(m)}(0,1)$. Пространство $L_2^{(m)}$ является гильбертовым пространством вещественных функций φ, которые являются различными для многочленов степени $m-1$ и квадратично интегрируемыми с производной порядка m на отрезке $[0,1]$. Скалярное произведение функций f и φ в этом пространстве задается через

$$\{f, \varphi\} = \int_0^1 f^{(m)}(x)\varphi^{(m)}(x)dx. \tag{3.1}$$

Поскольку пространство $L_2^{(m)}(0,1)$ вложено в пространство $C(0,1)$ непрерывных функций, функционал погрешности разностной формулы является линейным функционалом, и выполнено следующее:

$$(\ell, \varphi) = \sum_{\beta=0}^{k} C[\beta] \varphi[\beta] - h \sum_{\beta=0}^{k} C^{(1)}[\beta] \varphi'[\beta] =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \left[\sum_{\beta=0}^{k} C[\beta] \delta(x - h\beta) + h \sum_{\beta=0}^{k} C^{(1)}[\beta] \delta'(x - h\beta)\right] \varphi(x)\, dx. \tag{3.2}$$

Задача построения разностной формулы

$$\sum_{\beta=0}^{k} C[\beta] \varphi[\beta] - h \sum_{\beta=0}^{k} C^{(1)}[\beta] \varphi'[\beta] \cong 0$$

в функциональной постановке состоит в том, чтобы найти такой функционал (3.2), который имеет минимальную норму в пространстве $L_2^{(m)*}(0,1)$, где $L_2^{(m)*}(0,1)$ — сопряженное пространство к пространству Соболева $L_2^{(m)}(0,1)$. Для нахождения явного вида нормы функционала погрешности ℓ используем экстремальную функцию данного функционала, т. е. используем функцию ψ_ℓ, удовлетворяющую равенству

$$(\ell,\psi_\ell)=\left\|\ell|L_2^{(m)*}\right\|\cdot\left\|\psi_\ell|L_2^{(m)}\right\|.$$

Известно, что в работе И. Бабушки и др. [1] нахождение экстремальной функции ψ_ℓ было сведено к дифференциальному уравнению порядка $2m$. Однако, там не было дано решение дифференциального уравнения. Наш метод нахождения ψ_ℓ отличается от метода И. Бабушки и позволяет найти экстремальную функцию в явном виде.

Отметим, что задачи построения кубатуры и разностных формул в функциональной постановке были рассмотрены, например, в работах [2–9, 13–15].

Норма функции в пространстве $L_2^{(m)}(0,1)$ определяется как

$$\left\|\varphi|L_2^{(m)}(0,1)\right\|=\left(\int_0^1\left(\varphi^{(m)}(x)\right)^2dx\right)^{\frac{1}{2}}. \tag{3.3}$$

Поскольку функционал вида

$$\ell(x)=\sum_{\beta=0}^{k}C[\beta]\,\delta(x-h\beta)+h\sum_{\beta=0}^{k}C^{(1)}[\beta]\,\delta'(x-h\beta)$$

лежит в пространстве $L_2^{(m)*}(0,1)$, то мы имеем

$$(\ell,x^\alpha)=0,\quad \alpha=0,1,\ldots,m-1. \tag{3.4}$$

Так как пространство $L_2^{(m)}(0,1)$ — гильбертово пространство, наделенное скалярным произведением (3.1) и соответствующей нормой (3.3), то, применяя теорему Рисса к любому линейному функционалу, а в частности, к функционалу погрешности ℓ, находим явный вид нормы функционала, используя функцию ψ_ℓ, которая является элементом Рисса. По теореме Рисса для любого элемента $\varphi\in L_2^{(m)}$ выполнены следующие равенства:

$$(\ell,\varphi)=\{\psi_\ell,\varphi\}, \tag{3.5}$$

$$\left\|\ell|L_2^{(m)*}(0,1)\right\|=\left\|\psi_\ell|L_2^{(m)}(0,1)\right\|.$$

Согласно (3.1) и (3.5), получаем следующее тождество, которое справедливо для любой функции $\varphi\in\mathring{C}^{(\infty)}(0,1)$ из пространства бесконечно дифференцируемых финитных функций

$$\int_0^1\frac{d^m\psi_\ell(x)}{dx^m}\frac{d^m\varphi(x)}{dx^m}dx=(\ell,\varphi). \tag{3.6}$$

Интегрируя по частям левую часть уравнения (3.6) m раз, получаем

$$(\ell,\varphi)=\int_0^1\left(\frac{d^m}{dx^m}\psi_\ell(x)\right)\left(\frac{d^m}{dx^m}\varphi(x)\right)=(-1)^m\left(\frac{d^{2m}}{dx^{2m}}\left(\varepsilon_{[0,1]}(x)\,\psi_\ell(x)\right),\varphi(x)\right)+$$

$$+\sum_{j=1}^{m}(-1)^{j-1}\frac{d^{m+j-1}}{dx^{m+j-1}}\psi_\ell(x)\frac{d^{m-j}}{dx^{m-j}}\varphi(y)\Bigg|\begin{matrix}y=1\\y=0\end{matrix}=\left(\frac{d^{2m}}{dx^{2m}}\left((-1)^m\varepsilon_{[0,1]}(x)\,\psi_\ell(x)\right),\varphi(x)\right)+$$

$$+\left(\sum_{j=1}^{m}(-1)^{j-1}\frac{d^{m+j-1}}{dx^{m+j-1}}\psi_\ell(y)\,\delta^{(m-j)}(x-y),\varphi(x)\right)\Bigg|\begin{matrix}y=1\\y=0\end{matrix},$$

где $\varepsilon_{[0,1]}(x)$ — характеристическая функция отрезка $[0,1]$.

Следовательно, в пространстве обобщенных функций имеем следующее уравнение:

$$\frac{d^{2m}}{dx^{2m}}\left(\varepsilon_{[0,1]}(x)\,\psi_\ell(x)\right)=(-1)^m\ell(x)+\sum_{j=1}^{m}(-1)^{m+j}\frac{d^{m+j-1}}{dx^{m+j-1}}\psi_\ell(y)\delta^{(m-j)}(x-y)\Bigg|\begin{matrix}y=1\\y=0\end{matrix}. \tag{3.7}$$

Общее решение уравнения (3.7) записывается в виде

$$\varepsilon_{[0,1]}(x)\,\psi_\ell(x)=(-1)^m\ell(x)*G_m(x)+\sum_{j=1}^{m}a_j|x-y|^{2m-j}\Bigg|\begin{matrix}y=1\\y=0\end{matrix}+P_{2m-1}(x). \tag{3.8}$$

В формуле (3.8) сумма

$$\sum_{j=1}^{m}a_j|x-y|^{2m-j}\Bigg|\begin{matrix}y=1\\y=0\end{matrix}$$

является многочленом степени $2m-1$ с переопределенными коэффициентами a_j, соответствующими следующему члену:

$$\sum_{j=1}^{m}\frac{d^{m+j-1}}{dx^{m+j-1}}\psi_\ell(y)\,\delta^{(m-j)}(x-y)\Bigg|\begin{matrix}y=1\\y=0\end{matrix}.$$

Функция $G_m(x)$ является фундаментальным решением уравнения

$$\frac{d^{2m}}{dx^{2m}}G_m(x)=\delta(x)$$

и имеет вид

$$G_m(x)=\frac{|x|^{2m-1}}{2(2m-1)!}.$$

Рассмотрим уравнение (3.8) вне отрезка $[0,1]$. Согласно (2.3), вне отрезка $[0,1]$ выражение $(-1)^m\ell(x)*G_m(x)$ является многочленом степени $m-1$, и поскольку эта функция из пространства $C^\infty(R\setminus[0,1])$, то после дифференцирования m раз она обращается в нуль. Для того, чтобы условие $\varepsilon_{[0,1]}\psi_\ell(x)=0$ было выполнено при $x\overline{\in}[0,1]$, должно быть справедливо

$$\sum_{j=1}^{m-1}a_j|x-y|^{2m-j}\Bigg|\begin{matrix}y=1\\y=0\end{matrix}+P_{2m-1}(x)=R_{m-1}(x),$$

где $R_{m-1}(x)$ — многочлен степени $m-1$.

Поэтому для любой разностной формулы вида (2.1) в пространстве $L_2^{(m)}(0,1)$ ее экстремальная функция, т. е. ее элемент Рисса, дается формулой

$$\psi_\ell(x)=(-1)^m\ell(x)*G_m(x)+P_{m-1}(x),$$

где $P_{m-1}(x)$ — многочлен степени $m-1$. Так, мы доказали следующую теорему.

Теорема 3.1. *Экстремальная функция разностной формулы* (2.1) *в пространстве* $L_2^{(m)}(0,1)$ *определяется формулой*

$$\psi_\ell(x)=(-1)^m\ell(x)*G_m(x)+P_{m-1}(x). \tag{3.9}$$

4. Квадрат нормы функционала погрешности

Известно, что из теоремы Рисса и из определения экстремальной функции следует, что

$$(\ell,\psi_\ell)=\left\|\ell|L_2^{(m)*}\right\|\cdot\left\|\psi_\ell|L_2^{(m)}\right\|=\left\|\ell|L_2^{(m)*}\right\|^2.$$

Следовательно, получаем теорему.

Теорема 4.1. *Квадрат нормы функционала погрешности разностной формулы* (2.1) *определяется формулой*

$$\left\|\ell|L_2^{(m)*}\right\|^2=(\ell,\psi_\ell).$$

В силу теоремы 4.1, применяя экстремальную функцию и условия ортогональности (3.4) функционала погрешности $\ell(x)$ к многочленам степени $m-1$, после некоторых вычислений получаем

$$\left\|\ell|L_2^{(m)*}\right\|^2 = (-1)^m \left[\sum_{\gamma=0}^{k} C[\gamma] \sum_{\beta=0}^{k} C[\beta]\, G_m(h\gamma - h\beta) - 2h \sum_{\gamma=0}^{k} C^{(1)}[\gamma] \sum_{\beta=0}^{k} C[\beta]\, G'_m(h\gamma - h\beta) - \right.$$

$$\left. - h^2 \sum_{\gamma=0}^{k} C^{(1)}[\gamma] \sum_{\beta=0}^{k} C^{(1)}[\beta]\, G''_m(h\gamma - h\beta)\right],$$

где

$$G'_m(x) = \frac{x^{2m-2}\operatorname{sign} x}{2(2m-2)!}, \qquad G''_m(x) = \frac{x^{2m-3}\operatorname{sign} x}{2(2m-3)!}.$$

Известно, что устойчивость разностной формулы в смысле Далквиста (как сильной устойчивости) определяется только коэффициентами $C[\beta]$, $\beta = 0, 1, \ldots, k$.

По этой причине поиск оптимальной формулы связан только с вариацией коэффициентов

$$C^{(1)}[\beta], \ \ \beta = 0, 1, \ldots, k.$$

Разностная формула с функционалом погрешности ℓ в пространстве $L_2^{(m)}(0,1)$ может быть охарактеризована двумя методами. С одной стороны, она определена коэффициентами $C[\beta], C^{(1)}[\beta]$, $\beta = 0, 1, \ldots, k$ с условиями (3.4), с другой стороны — экстремальной функцией ψ_ℓ.

Теперь перейдем к минимизации квадрата нормы функционала погрешности ℓ разностной формулы для $C[\beta]$, заданного коэффициентами $C^{(1)}[\beta]$ с условиями (3.4).

Применим метод Лагранжа неопределенных множителей. Для этого рассмотрим функцию

$$\Psi\left(C, C^{(1)}, \lambda\right) = \left\|\ell|L_2^{(m)*}\right\|^2 - (-1)^m 2 \sum_{\alpha=0}^{m-1} \lambda_\alpha (\ell, x^\alpha).$$

Частные производные функции $\Psi\left(C, C^{(1)}, \lambda\right)$ по $C^{(1)}[\beta]$ и λ_α обращаются в нуль:

$$\frac{\partial \Psi}{\partial C^{(1)}[\beta]} = 0, \quad \beta = 0, 1, \ldots, k,$$

$$\frac{\partial \Psi}{\partial \lambda_\alpha} = 0, \quad \alpha = 0, 1, \ldots, m-1.$$

Это дает следующую систему уравнений

$$h \sum_{\gamma=0}^{k} C^{(1)}[\beta]\, G''_m(h\beta - h\gamma) + P_{m-2}[\beta] = -\sum_{\gamma=0}^{k} G'_m(h\beta - h\gamma), \ \beta = 0, 1, \ldots, k, \tag{4.1}$$

$$h\alpha \sum_{\gamma=0}^{k} C^{(1)}[\gamma]\, [\gamma]^{\alpha-1} = \sum_{\gamma=0}^{k} C[\gamma]\, [\gamma]^\alpha, \quad \alpha = 0, 1, \ldots, m-1, \tag{4.2}$$

где

$$G_m(x) = \frac{x^{2m-1}\operatorname{sign} x}{2(2m-1)!}, \qquad G'_m(x) = \frac{x^{2m-2}\operatorname{sign} x}{2(2m-2)!}, \qquad G''_m(x) = \frac{x^{2m-3}\operatorname{sign} x}{2(2m-3)!}.$$

Решение системы (4.1), (4.2), обозначенное через $\mathring{C}^{(1)}[\beta]$, $\mathring{\lambda}_\alpha$, является критической точкой функции $\Psi\left(C, C^{(1)}, \lambda\right)$. Из метода Лагранжа следует, что $\mathring{C}^{(1)}[\beta]$ — искомые значения коэффициентов оптимальной разностной формулы. Они дают условный минимум нормы $\left\|\ell|L_2^{(m)*}\right\|^2$ при условиях (3.4).

Теперь рассмотрим формулу (3.9). Учитывая произвольность коэффициентов многочленов $P_{m-1}(x)$, мы выбираем их такими, что производная $(-1)^m P'_{m-1}(x)$ совпадает с многочленом $P_{m-2}(x)$ из (4.1). При таком выборе значений производной экстремальной функции ψ_ℓ в точках $h\beta$ получаем $\psi'_\ell[\beta] = 0$, что следует из формулы (4.1). Следовательно, мы доказали теорему Бабушки алгебраическим способом.

Теорема 4.2. *Разностные формулы*

$$\sum_{\beta=0}^{k} C[\beta]\,\varphi[\beta] \cong h\sum_{\beta=0}^{k} \mathring{C}^{(1)}[\beta]\varphi'[\beta],$$

$$\sum_{\beta=0}^{k} C[\beta]\,\varphi[\beta] \cong h\sum_{\beta=0}^{k-1} \mathring{C}^{(1)}[\beta]\varphi'[\beta]$$

являются оптимальными тогда и только тогда, когда функция ψ_ℓ, *определенная формулой* (3.9), *может быть выбрана так, что*

$$\psi_\ell'[\beta]=0 \quad \textit{при} \quad \beta=0,1,\ldots,k$$

и

$$\psi_\ell'[\beta]=0 \quad \textit{при} \quad \beta=0,1,\ldots,k-1$$

для неявной и явной формул, соответственно.

Как результат, для построения неявных оптимальных разностных формул необходимо решить следующую систему линейных уравнений:

$$\begin{cases} h\sum\limits_{\gamma=0}^{k} C^{(1)}[\gamma]\,G_m''(h\beta-h\gamma)+P_{m-2}[\beta]=-\sum\limits_{\gamma=0}^{k} C[\gamma]\,G_m'(h\beta-h\gamma), & \beta=0,1,\ldots,k,\\ h\alpha\sum\limits_{\gamma=0}^{k} C^{(1)}[\gamma]\,[\gamma]^{\alpha-1}=\sum\limits_{\gamma=0}^{k} C[\gamma]\,[\gamma]^{\alpha}, & \alpha=1,\ldots,m-1,\end{cases}$$

где $C[\beta]$ определены из условий устойчивости разностной формулы в смысле Далквиста и $\sum\limits_{\gamma=0}^{k} C[\gamma]=0$.

Определение 4.1. Разностная формула (2.1) *устойчива в смысле Далквиста*, если все корни ζ_i характеристического многочлена $P(\zeta)=\sum\limits_{\beta=0}^{k} C[\beta]\,\zeta^\beta$ удовлетворяют неравенству $|\zeta_i|\leqslant 1$, а корни, для которых $|\zeta_i|=1$, являются простыми [10–12].

Например,

$$C[k]=1, \quad C[k-1]=-1, \quad C[k-i]=0$$

при $i=2,3,\ldots,k$.

Аналогично, для явной разностной формулы имеем

$$\begin{cases} \sum\limits_{\gamma=0}^{k-1} d^{(1)}[\beta]\,G''(h\beta-h\gamma)+P_{m-2}[\beta]=-\sum\limits_{\gamma=0}^{k} d[\beta]\,G_m'(h\beta-h\gamma), & \beta=0,1,\ldots,\\ \alpha h\sum\limits_{\gamma=0}^{k-1} d^{(1)}[\gamma]\,[\gamma]^{\alpha-1}=\sum\limits_{\gamma=0}^{k} d[\gamma]\,[\gamma]^{\alpha}, & \alpha=1,2,\ldots,m-1,\end{cases}$$

где $d[\gamma]$ определены из устойчивости разностной формулы и из равенства $\sum\limits_{\gamma=0}^{k} d[\gamma]=0$.

Здесь мы полагаем, что система (4.1), (4.2) разрешима. Ее разрешимость следует из общей теории множителей Лагранжа. Однако можно доказать разрешимость алгебраическим методом напрямую.

Из теории условного экстремума известно достаточное условие, при котором решение $\mathring{C}^{(1)}[\beta]$ и $\mathring{\lambda}_\alpha$ дает локальный минимум функции $\Psi\left(C, C^{(1)}, \lambda\right)$ на многообразии (3.4). Оно состоит в положительной определенности квадратичной формы

$$F\left(C^{(1)}\right)=\sum_{\beta=0}^{k}\sum_{\gamma=0}^{k}\frac{\partial^2\Psi}{\partial C^{(1)}[\beta]\,\partial C^{(1)}[\gamma]}C^{(1)}[\beta]\,C^{(1)}[\gamma] \tag{4.3}$$

на множестве векторов $C^{(1)}=\left(C^{(1)}[0], C^{(1)}[1],\ldots,C^{(1)}[k]\right)$ при условии

$$QC^{(1)}=0. \tag{4.4}$$

Здесь матрица Q имеет вид

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & h & 2h & \dots & kh \\ 0 & h^2 & (2h)^2 & \dots & (kh)^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & h^{m-2} & (2h)^{m-2} & \dots & (kh)^{m-2} \end{pmatrix}.$$

Мы покажем, что в рассмотренном случае квадратичная форма $F\left(C^{(1)}\right)$ строго положительна.

Теорема 4.3. *Для любого ненулевого вектора*

$$C^{(1)} = \left(C^{(1)}[0], C^{(1)}[1], \dots, C^{(1)}[k]\right) \in \mathbb{R}^{k+1}$$

из подпространства $QC^{(1)} = 0$ функция $F\left(C^{(1)}\right)$ является строго положительной.

Доказательство. Из определения функции Лагранжа $\Psi\left(C, C^{(1)}, \lambda\right)$ и из равенства (4.3) получаем

$$F\left(C^{(1)}\right) = \sum_{\beta=0}^{k}\sum_{\gamma=0}^{k} G''_m(h\beta - h\gamma)\, C^{(1)}[\gamma]\, C^{(1)}[\beta].$$

Рассмотрим линейный функционал вида

$$\nu_{C^{(1)}}(x) = \sum_{\beta=0}^{k} C^{(1)}[\beta]\,\delta(x - h\beta).$$

Если учесть условие (4.4), то этот функционал принадлежит пространству $L_2^{(m-1)*}(0,1)$. Поэтому он имеет экстремальную функцию $U_{C^{(1)}}(x) \in L_2^{(m-1)}$, которая является решением уравнения

$$\frac{d^{2m-2}}{dx^{2m-2}} U_{C^{(1)}}(x) = (-1)^m \nu_{C^{(1)}}(x).$$

Ясно, что для $U_{C^{(1)}}(x)$ можно получить следующую линейную комбинацию сдвигов фундаментального решения:

$$U_{C^{(1)}}(x) = \sum_{\gamma=0}^{k} C^{(1)}[\gamma]\, G''_m(x - h\gamma).$$

Здесь $G''_m(x)$ — решение уравнения

$$\frac{d^{2m-2}}{dx^{2m-2}} G''_m(x) = \delta(x).$$

Квадрат нормы функции $U_{C^{(1)}}(x)$ в пространстве $L_2^{(m-1)}(0,1)$ совпадает с формой $F\left(C^{(1)}\right)$:

$$\left\| U_{C^{(1)}}(x) | L_2^{(m-1)} \right\|^2 = \left(\nu_{C^{(1)}}(x), U_{C^{(1)}}(x)\right) = \sum_{\gamma=0}^{k}\sum_{\beta=0}^{k} G''_m(h\beta - h\gamma)\, C^{(1)}[\beta]\, C^{(1)}[\gamma].$$

Следовательно, ясно, что для ненулевых $C^{(1)}[\beta]$ функция $F\left(C^{(1)}\right)$ является строго положительной. Известно, что при $k > m$ система (4.4) всегда имеет решение, т. е. матрица Q имеет правую обратную, и тогда система (4.1), (4.2) имеет единственное решение. □

Теорема 4.4. *Если матрица Q имеет правую обратную, то матрица M системы* (4.1), (4.2) *невырождена.*

Доказательство. Обозначим через G'' матрицу квадратичной формы (4.3). Запишем однородную систему, соответствующую системе (4.1), (4.2), в следующем виде:

$$M\begin{pmatrix} C^{(1)} \\ \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} G'' & Q^* \\ Q & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} C^{(1)} \\ \lambda \end{pmatrix} = 0. \tag{4.5}$$

Покажем, что единственное решение задачи (4.5) является тождественным нулем.

Пусть $\overline{C}^{(1)}, \overline{\lambda}$ — решение задачи (4.5). Рассмотрим следующий функционал для вектора $\overline{C}^{(1)}$:

$$\mu_{\overline{C}^{(1)}}(x) = \sum_{\gamma=0}^{k} \overline{C}^{(1)}[\gamma]\,\delta(x - h\gamma).$$

Ясно, что этот функционал лежит в пространстве $L_2^{(m-1)*}(0,1)$. Возьмем в качестве экстремальной функции для $\mu_{\overline{C}^{(1)}}(x)$ функцию

$$U_{\overline{C}^{(1)}}(x) = \sum_{\gamma=0}^{k} \overline{C}^{(1)}[\gamma]\, G''_m(x - h\gamma) + \sum_{\alpha=1}^{m-1} \overline{\lambda} x^{\alpha-1}.$$

Это является возможным, так как функция $U_{C^{(1)}}(x)$ лежит в пространстве $L_2^{(m-1)}(0,1)$ и является решением уравнения

$$\frac{d^{2m-2}}{dx^{2m-2}} U_{\overline{C}^{(1)}}(x) = (-1)^m \mu_{\overline{C}^{(1)}}(x).$$

Первые $k+1$ уравнений системы (4.5) означают, что функция $U_{C^{(1)}}(x)$ обнуляется во всех узлах разностной формулы, т. е. $U_{\overline{C}^{(1)}}(h\beta) = 0$, $\beta = 0, 1, \ldots, k$. Тогда относительно нормы функционала $\mu_{\overline{C}^{(1)}}(x)$ в $L_2^{(m-1)*}(0,1)$ имеем

$$\left\| \mu_{\overline{C}^{(1)}}(x) \,|\, L_2^{(m-1)*} \right\|^2 = \Big(\mu_{\overline{C}^{(1)}}(x), U_{\overline{C}^{(1)}}(x) \Big) = \sum_{\beta=0}^{k} \overline{C}^{(1)}[\beta]\, U_{\overline{C}^{(1)}}(h\beta) = 0,$$

что возможно только при $\overline{C}^{(1)}[\beta] = 0$. Учитывая это, из первых $k+1$ уравнений системы (4.5) получаем

$$Q^* \overline{\lambda} = 0. \tag{4.6}$$

По утверждению теоремы матрица Q имеет правую обратную, и тогда матрица Q^* имеет левую обратную. Отсюда и из (4.6) следует, что решение $\overline{\lambda}$ также нулевое. Теорема доказана. □

Следовательно, система (4.1), (4.2) имеет единственное решение.

Благодарности

Мы очень благодарны рецензенту за замечания и предложения, позволившие улучшить качество статьи.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Бабушка И., Прагер М., Витасек Э.* Численные процессы решения дифференциальных уравнений. — М.: Мир, 1969.
2. *Соболев С. Л.* Введение в теорию кубатурных формул. — М.: Наука, 1974.
3. *Соболев С. Л., Васкевич В. Л.* Кубатурные формулы. — Новосибирск: Ин-т мат., 1996.
4. *Шадиметов Х. М.* Весовые оптимальные кубатурные формулы в периодическом пространстве Соболева// Сиб. ж. выч. мат. — 1999. — *2*, № 2. — С. 185–195.
5. *Шадиметов Х. М.* Об оптимальных решетчатых квадратурных и кубатурных формулах// Докл. РАН. — 2001. — *376*, № 5. — С. 597–599.
6. *Шадиметов Х. М.* Функциональная постановка задач оптимальных разностных формул// Узб. мат. ж. — 2015. — № 4. — С. 179–183.
7. *Akhmedov D. M., Hayotov A. R., Shadimetov Kh. M.* Optimal quadrature formulas with derivatives for Cauchy type singular integrals// Appl. Math. Comput. — 2018. — *317*. — C. 150–159.
8. *Babuška I., Sobolev S.* Optimization of numerical methods// Apl. Mat. — 1965. — *10*. — C. 9–170.
9. *Boltaev N. D., Hayotov A. R., Shadimetov Kh. M.* Construction of optimal quadrature formula for numerical calculation of Fourier coefficients in Sobolev space $L_2^{(1)}$// Am. J. Numer. Anal. — 2016. — *4*, № 1. — C. 1–7.
10. *Dahlquist G.* Convergence and stability in the numerical integration of ordinary differential equations// Math. Scand. — 1956. — *4*. — C. 33–52.
11. *Dahlquist G.* Stability and error bounds in the numerical integration of ordinary differential equations. — Stockholm: Almqvist & Wiksell, 1958.

12. *Henrici P.* Discrete variable methods in ordinary differential equations. — New York—London: John Wiley & Sons, 1962.
13. *Shadimetov Kh. M., Hayotov A. R.* Optimal quadrature formulas in the sense of Sard in $W_2^{(m,m-1)}$ space// Calcolo. — 2014. — *51*. — C. 211–243.
14. *Shadimetov Kh. M., Hayotov A. R., Akhmedov D. M.* Optimal quadrature formulas for Cauchy type singular integrals in Sobolev space// Appl. Math. Comput. — 2015. — *263*. — C. 302–314.
15. *Shadimetov Kh. M., Mirzakabilov R. N.* The problem on construction of difference formulas// Probl. Comput. Appl. Math. — 2018. — *5*, № 17. — C. 95–101.

Х. М. Шадиметов
Ташкентский государственный транспортный университет, Ташкент, Узбекистан
E-mail: `kholmatshadimetov@mail.ru`

Р. Н. Мирзакабилов
Институт математики им. В. И. Романовского, Ташкент, Узбекистан
E-mail: `ravshan.m.n@mail.ru`

DOI: 10.22363/2413-3639-2022-68-1-167-177 UDC 517.962

Optimal Difference Formulas in the Sobolev Space

© 2022 **Kh. M. Shadimetov, R. N. Mirzakabilov**

Abstract. Optimization of computational methods in functional spaces is one of the main problems of computational mathematics. In this paper, algebraic and functional assertions for the problem of difference formulas are discussed. For optimization of difference formulas, i.e., for construction of optimal difference formulas in functional spaces, an important role is played by the extremal function of the given difference formula. In this work, we explicitly find in Sobolev spaces the extremal function of the difference formula and compute the norm of the error functional of the difference formula. Furthermore, we prove existence and uniqueness of the optimal difference formula.

REFERENCES

1. I. Babuška, M. Práger, and E. Vitásek, *Chislennye protsessy resheniya differentsial'nykh uravneniy* [Numerical Processes In Differential Equations], Mir, Moscow, 1969 (Russian translation).
2. S. L. Sobolev, *Vvedenie v teoriyu kubaturnykh formul* [Introduction to the Theory of Cubature Formulas], Nauka, Moscow, 1974 (in Russian).
3. S. L. Sobolev and V. L. Vaskevich, *Kubaturnye formuly* [Cubature Formulas], Inst mat., Novosibirsk, 1996 (in Russian).
4. Kh. M. Shadimetov, "Vesovye optimal'nye kubaturnye formuly v periodicheskom prostranstve Soboleva" [Weighted optimal cubature formulas in periodic Sobolev space], *Sib. zh. vych. mat.* [Siberian J. Comput. Math.], 1999, **2**, No. 2, 185–195 (in Russian).
5. Kh. M. Shadimetov, "Ob optimal'nykh reshetchatykh kvadraturnykh i kubaturnykh formulakh" [On optimal lattice quadratures and cubature formulas], *Dokl. RAN* [Rep. Russ. Acad. Sci.], 2001, **376**, No. 5, 597–599 (in Russian).
6. Kh. M. Shadimetov, "Funktsional'naya postanovka zadach optimal'nykh raznostnykh formul" [Functional statement of problems of optimal difference formulas], *Uzb. mat. zh.* [Uzbek. Math. J.], 2015, No. 4, 179–183 (in Russian).

7. D. M. Akhmedov, A. R. Hayotov, and Kh. M. Shadimetov, "Optimal quadrature formulas with derivatives for Cauchy type singular integrals," *Appl. Math. Comput.*, 2018, **317**, 150–159.
8. I. Babuška and S. Sobolev, "Optimization of numerical methods," *Apl. Mat.*, 1965, **10**, 9–170.
9. N. D. Boltaev, A. R. Hayotov, and Kh. M. Shadimetov, "Construction of optimal quadrature formula for numerical calculation of Fourier coefficients in Sobolev space $L_2^{(1)}$," *Am. J. Numer. Anal.*, 2016, **4**, No. 1, 1–7.
10. G. Dahlquist, "Convergence and stability in the numerical integration of ordinary differential equations," *Math. Scand.*, 1956, **4**, 33–52.
11. G. Dahlquist, *Stability and error bounds in the numerical integration of ordinary differential equations*, Almqvist & Wiksell, Stockholm, 1958.
12. P. Henrici, *Discrete variable methods in ordinary differential equations*, John Wiley & Sons, New York—London, 1962.
13. Kh. M. Shadimetov and A. R. Hayotov, "Optimal quadrature formulas in the sense of Sard in $W_2^{(m,m-1)}$ space," *Calcolo*, 2014, **51**, 211–243.
14. Kh. M. Shadimetov, A. R. Hayotov, and D. M. Akhmedov, "Optimal quadrature formulas for Cauchy type singular integrals in Sobolev space," *Appl. Math. Comput.*, 2015, **263**, 302–314.
15. Kh. M. Shadimetov and R. N. Mirzakabilov, "The problem on construction of difference formulas," *Probl. Comput. Appl. Math.*, 2018, **5**, No. 17, 95–101.

Kh. M. Shadimetov
Tashkent State Transport University, Tashkent, Uzbekistan
E-mail: kholmatshadimetov@mail.ru

R. N. Mirzakabilov
Romanovskiy Institute of Mathematics, Tashkent, Uzbekistan
E-mail: ravshan.m.n@mail.ru