Современная математика. Фундаментальные направления. Том 68, № 1 (2022). С. 157–166
Contemporary Mathematics. Fundamental Directions. ISSN 2413-3639 (Print)

DOI: 10.22363/2413-3639-2022-68-1-157-166 УДК 519.21

О НЕРАВЕНСТВАХ ДЛЯ МОМЕНТОВ ВЕТВЯЩИХСЯ СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ

© 2022 г. **Я. М. ХУСАНБАЕВ, Х. Е. КУДРАТОВ**

Аннотация. Мы рассматриваем ветвящиеся случайные процессы с иммиграцией, начинающиеся со случайного числа элементов. В данной работе даются оценки сверху для моментов таких процессов.

ОГЛАВЛЕНИЕ

1. Введение

Пусть $\{\xi_{k,i}, \varepsilon_k : k, i \in \mathbb{N}\}$ — независимые, неотрицательные, целые случайные величины такие, что $\{\xi_{k,i} : k, i \in \mathbb{N}\}$, а величины $\{\varepsilon_k : k \in \mathbb{N}\}$ одинаково распределены.

Рассмотрим ветвящиеся процессы с иммиграцией X_k, $k \geqslant 0$, которые определены следующим рекуррентным соотношением:

$$X_0 = \eta, \ X_k = \sum_{j=1}^{X_{k-1}} \xi_{k,j} + \varepsilon_k, \ k \geqslant 1, \tag{1.1}$$

где η — неотрицательная целая случайная величина, не зависящая от $\{\xi_{k,i}, \varepsilon_k : k, i \geqslant 1\}$ (см. [4]). Последовательность $\{X_k : k \in \mathbb{Z}_+\}$ называется *ветвящимся процессом с иммиграцией*. Величина X_k интерпретируется как размер k-го поколения популяции, в которой начальные моменты — это η частиц, где $\xi_{k,j}$ — число потомков j-й особи в $(k-1)$-м поколении, а ε_k — число иммигрантов, дающих вклад в k-е поколение.

В случае, когда $\eta \equiv 1$ и $\varepsilon_k \equiv 0$, процесс (1.1) является хорошо известным и тщательно исследованным процессом Галтона—Ватсона (см., например, [2, 4, 6]).

Обозначим

$$m := E\xi_{1,1}, \quad \sigma^2 := D\xi_{1,1}, \quad \gamma_p := E\xi_{1,1}^p, \quad \theta_p := E \mid \xi_{1,1} - m \mid^p,$$

$$\lambda := E\varepsilon_1, \quad b^2 := D\varepsilon_1, \quad \tau_p := E\varepsilon_1^p, \quad \delta_p := E \mid \varepsilon_1 - \lambda \mid^p,$$

$$\nu_p := E\eta^p, \quad s^2 := D\eta, \quad \beta_p := E|\eta - E\eta|^p.$$

Здесь и далее полагаем, что все моменты конечные.

Случаи $m < 1$, $m = 1$, $m > 1$ называются *субкритическим*, *критическим* и *суперкритическим*, соответственно.

Благодаря практической важности процессов вида (1.1) многие научные работы были посвящены их изучению (см., например, [3]). Ветвящиеся процессы с иммиграцией и их разнообразные обобщения до сих пор представляют большой научный интерес (см., например, недавно опубликованные работы [5, 7]). В работе [5] доказана слабая сходимость агрегации многотипных ветвящихся процессов Гальтона—Ватсона с иммиграцией к стационарному гауссовскому процессу с нулевым средним. В работе [7] получены необходимые и достаточные условия существования моментов стационарного распределения субкритических многотипных процессов Гальтона—Ватсона с иммиграцией.

Оценки моментов случайных величин играют важную роль в теории вероятностей. Многие результаты были получены для моментов суммы независимых случайных величин (см. [8, 10]). Однако оценки моментов процессов вида (1.1) были мало изучены. Хорошо известно, что моменты $EX_n^m, m \geqslant 1$ получаются дифференцированием производящей функции Es^{X_n} m раз. Однако выражение для m-й производной функции Es^{X_n} становится сложным при увеличении числа m. Поэтому важной является оценка сверху моментов EX_n^m. Неравенства для моментов критических и суперкритических процессов Гальтона—Ватсона были впервые даны С. В. Нагаевым (см. [9]). В его работе в основном был использован анализ производящих функций.

В настоящей работе предоставляются оценки моментов ветвящихся случайных процессов с иммиграцией. Мы используем вероятностные методы и хорошо применимые известные неравенства для сумм независимых случайных величин.

2. Основные результаты

Пусть имеется процесс (1.1). В следующих двух теоремах дадим оценки моментов и оценки центральных моментов процессов X_n.

Теорема 2.1. *Справедливы следующие неравенства*:

1. *при* $0 < p \leqslant 1$ *и* $m \neq 1$
$$EX_n^p \leqslant \left(\nu_1 m^{n-1} + \frac{m^{n-1}-1}{m-1}\lambda\right)\gamma_p + \tau_p;$$
2. *при* $0 < p \leqslant 1$ *и* $m = 1$
$$EX_n^p \leqslant (\nu_1 + \lambda n)\gamma_p + \tau_p;$$
3. *при* $p > 1$ *и* $2^{p-1}\gamma_p \neq 1$
$$EX_n^p \leqslant \left(2^{p-1}\gamma_p\right)^n \nu_p + \frac{2^{p-1}\tau_p\left[\left(2^{p-1}\gamma_p\right)^n - 1\right]}{2^{p-1}\gamma_p - 1};$$
4. *при* $p > 1$ *и* $2^{p-1}\gamma_p = 1$
$$EX_n^p \leqslant \nu_p + 2^{p-1}\tau_p n.$$

Теорема 2.2. *Справедливы следующие неравенства*:

1. *при* $0 < p \leqslant 1$ *и* $m \neq 1$
$$E|X_n - EX_n|^p \leqslant m^{n-1}\theta_p\left(\nu_1 + \frac{\lambda}{m-1}\right)\frac{\left(m^{(p-1)n}-1\right)}{m^{(p-1)}-1} + \left(\delta_p - \frac{\lambda\theta_p}{m-1}\right)\frac{\left(m^{np}-1\right)}{m^p-1} + m^{np}\beta_p;$$
2. *при* $0 < p \leqslant 1$ *и* $m = 1$
$$E|X_n - EX_n|^p \leqslant (\theta_p\nu_1 + \delta_p)n + \frac{(n-1)n}{2}\theta_p\lambda + \beta_p;$$
3. *при* $1 < p \leqslant 2$ *и* $m \neq 1$
$$E|X_n - EX_n|^p \leqslant$$
$$\leqslant 2^{2(p-1)}n^{p-1}\left[2\theta_p m^{n-1}\left(\nu_1 + \frac{\lambda}{m-1}\right)\frac{m^{n(p-1)}-1}{m^{p-1}-1} + \left(\delta_p - \frac{2\theta_p\lambda}{m-1}\right)\frac{m^{pn}-1}{m^p-1}\right] + 2^{p-1}m^{np}\beta_p;$$
4. *при* $1 < p \leqslant 2$ *и* $m = 1$
$$E|X_n - EX_n|^p \leqslant 2^{2(p-1)}n^p[2\theta_p\nu_1 + \delta_p + (n-1)\theta_p\lambda] + 2^{p-1}\beta_p;$$

5. *при* $p > 2$ *и* $m \neq 1$, $m \neq (2^{\frac{p}{2}-1}\gamma_{\frac{p}{2}})^{\frac{1}{p}}$

$$E|X_n - EX_n|^p \leqslant 2^{2(p-1)}n^{p-1}[C(p)\theta_p\left(\nu_{\frac{p}{2}} + \frac{2^{\frac{p}{2}-1}\tau_{\frac{p}{2}}}{2^{\frac{p}{2}-1}\gamma_{\frac{p}{2}} - 1}\right)\frac{m^{pn} - (2^{\frac{p}{2}-1}\gamma_{\frac{p}{2}})^n}{m^p - 2^{\frac{p}{2}-1}\gamma_{\frac{p}{2}}} +$$
$$+ \left(\delta_p - \frac{2^{\frac{p}{2}-1}C(p)\theta_p\tau_{\frac{p}{2}}}{2^{\frac{p}{2}-1}\gamma_{\frac{p}{2}} - 1}\right)\frac{m^{np}-1}{m^p - 1}] + 2^{p-1}m^{np}\beta_p,$$

где $C(p)$ — *константа, зависящая только от* p;

6. *при* $p > 2$ *и* $m = 1$

$$E|X_n - EX_n|^p \leqslant 2^{2(p-1)}n^p[C(p)\theta_p\nu_{\frac{p}{2}} + \delta_p + 2^{\frac{p}{2}-1}C(p)\theta_p\tau_{\frac{p}{2}}(n-1)] + 2^{p-1}\beta_p,$$

где $C(p)$ — *константа, зависящая только от* p.

Рассмотрим важный частный случай. Если $\varepsilon_i \equiv 0$, $i \geqslant 1$, тогда мы имеем процесс Гальтона—Ватсона:

$$Z_0 = \zeta, \quad Z_n = \sum_{j=1}^{Z_{n-1}} \xi_{n,j}, \quad n \in \mathbb{N}. \tag{2.1}$$

Воспользуемся обозначениями

$$\mu_p := E\zeta^p, \quad \beta'_p := E|\zeta - E\zeta|^p.$$

Для этого процесса из теорем выше будем иметь следующие результаты.

Следствие 2.1. *Пусть* Z_n, $n = 0, 1, \ldots$ — *процесс, определенный формулой* (2.1). *Тогда*

1. *при* $0 < p \leqslant 1$
$$EZ_n^p \leqslant \mu_1 m^{n-1}\gamma_p;$$
2. *при* $p > 1$
$$EZ_n^p \leqslant \mu_p\gamma_p^n.$$

Следствие 2.2. *Пусть* Z_n, $n = 0, 1, \ldots$ — *процесс, определенный формулой* (2.1). *Тогда*

1. *при* $0 < p \leqslant 1$ *и* $m \neq 1$
$$E|Z_n - EZ_n|^p \leqslant \mu_1 m^{(n-1)p}\theta_p\frac{m^{(1-p)n} - 1}{m^{1-p} - 1} + m^{np}\beta'_p;$$
2. *при* $0 < p \leqslant 1$ *и* $m = 1$
$$E|Z_n - EZ_n|^p \leqslant \mu_1\theta_p n + \beta'_p;$$
3. *при* $1 < p \leqslant 2$ *и* $m \neq 1$
$$E|Z_n - EZ_n|^p \leqslant 2^p n^{p-1}\theta_p\mu_1 m^{n-1}\frac{m^{(p-1)n} - 1}{m^{p-1} - 1} + 2^{p-1}m^{np}\beta'_p;$$
4. *при* $1 < p \leqslant 2$ *и* $m = 1$
$$E|Z_n - EZ_n|^p \leqslant 2^p n^{p-1}\theta_p\mu_1 n + 2^{p-1}\beta'_p;$$
5. *при* $p > 2$ *и* $m \neq (\gamma_{\frac{p}{2}})^{\frac{1}{p}}$
$$E|Z_n - EZ_n|^p \leqslant 2^{p-1}n^{p-1}C(p)\theta_p\mu_{\frac{p}{2}}\frac{m^{pn} - \gamma_{\frac{p}{2}}^n}{m^p - \gamma_{\frac{p}{2}}} + 2^{p-1}m^{np}\beta'_p,$$
где $C(p)$ — *константа, зависящая только от* p;
6. *при* $p > 2$ *и* $m = (\gamma_{\frac{p}{2}})^{\frac{1}{p}}$
$$E|Z_n - EZ_n|^p \leqslant 2^{p-1}n^{p-1}C(p)\theta_p\mu_{\frac{p}{2}}n + 2^{p-1}\gamma_{\frac{p}{2}}^n\beta'_p,$$
где $C(p)$ — *константа, зависящая только от* p.

3. Предварительные результаты

Дадим некоторые леммы, используемые для доказательства основных результатов.
Введем обозначения

$$f(s) := Es^{\xi_{1.1}}, \quad h(s) := Es^{\varepsilon_1}, \quad \varphi(s) := Es^{\eta}, \quad H_n(s) := Es^{X_n}.$$

Лемма 3.1. *Справедливо следующее соотношение*:

$$H_n(s) = \varphi(f_n(s)) \prod_{k=0}^{n-1} h(f_{n-1-k}(s)), \tag{3.1}$$

где $f_0(s) = s$, $f_k(s)$ — k*-я итерация функции* $f(s)$.

Доказательство. Воспользуемся методом математической индукции. При $n = 1$ имеем

$$H_1(s) = Es^{X_1} = Es^{(\xi_{1,1}+\ldots+\xi_{1,\eta}+\varepsilon_1)} = Es^{\varepsilon_1} E\left[Es^{(\xi_{1,1}+\ldots+\xi_{1,\eta})}/\eta\right] = h(s)E(f(s))^{\eta} = \varphi(f(s))h(s),$$

где мы воспользовались независимостью величин $\eta, \{\xi_{1,j}, j \in \mathbb{N}\}$ и ε_1. Пусть выражение (3.1) выполнено при $n = m$. Докажем его для $n = m + 1$:

$$H_{m+1}(s) = Es^{X_{m+1}} = Es^{(\xi_{m+1,1}+\ldots+\xi_{m+1,X_m}+\varepsilon_{m+1})} = Es^{\varepsilon_{m+1}} E\left[E^{(\xi_{m+1,1}+\ldots+\xi_{m+1,X_m})}/X_m\right] =$$

$$= h(s)E(f(s))^{X_m} = \varphi(f_{m+1}(s)) \prod_{k=0}^{m} h(f_{m-k}(s)).$$

Это завершает доказательство леммы 3.1. □

Лемма 3.2. *Пусть* X_n — *ветвящийся случайный процесс с иммиграцией, определенный формулой* (1.1). *Тогда*

(i) $EX_n = m^n\nu_1 + \dfrac{m^n-1}{m-1}\lambda$, *если* $m \neq 1$;

(ii) $EX_n = \nu_1 + n\lambda$, *если* $m = 1$;

(iii) $DX_n = s^2m^{2n} + \nu_1\sigma^2\dfrac{m^{n-1}(m^n-1)}{m-1} + b^2\dfrac{m^{2n}-1}{m^2-1} + \dfrac{\lambda\sigma^2(m^n-1)(m^{n-1}-1)}{(m+1)(m-1)^2}$, *если* $m \neq 1$;

(iv) $DX_n = s^2 + \nu_1\sigma^2 n + b^2 n + \dfrac{\lambda\sigma^2}{2}n(n-1)$, *если* $m = 1$;

(v) $cov(X_k, X_n) = m^{|k-n|}DX_{min(k,n)}$.

Доказательство. Сначала докажем равенство (i). Логарифмируя обе части равенства (3.1), получаем соотношение

$$\ln H_n(s) = \ln\varphi(f_n(s)) + \ln h(f_{n-1}(s)) + \ldots + \ln h(s).$$

Дифференцируя это равенство, получим

$$\frac{1}{H_n(s)}H_n'(s) = \frac{1}{\varphi(f_n(s))}(\varphi'(f_n(s))f_n'(s)) + \frac{1}{h(f_{n-1}(s))}(h'(f_{n-1}(s))f_{n-1}'(s)) + \ldots + \frac{1}{h(s)}h'(s). \tag{3.2}$$

Учитывая выражения $H_n(1) = 1$, $f_n(1) = 1$, $f_n'(1) = m^n$, $\varphi(1) = 1$, $\varphi'(1) = \nu_1$, $h(1) = 1$, $h'(1) = \lambda$ в равенстве (3.2), будем иметь

$$H_n'(1) = \nu_1 m^n + \lambda m^{n-1} + \ldots + \lambda m + \lambda = \nu_1 m^n + \frac{m^n-1}{m-1}\lambda.$$

Доказательство пункта (ii) производится аналогично пункту (i). Перейдем к доказательству равенства (iii). Дифференцируя равенство (3.2), получим

$$\frac{H_n''(s)H_n(s) - (H_n'(s))^2}{H_n^2(s)} = \frac{(\varphi''(f_n(s))(f_n'(s))^2 + f_n''(s)\varphi'(f_n(s)))\varphi(f_n(s)) - (\varphi'(f_n(s))f_n'(s))^2}{\varphi^2(f_n(s))} +$$

$$+ \frac{(h''(f_{n-1}(s))(f_{n-1}'(s))^2 + f_{n-1}''(s)h'(f_{n-1}(s)))h(f_{n-1}(s)) - (h'(f_{n-1}(s))f_{n-1}'(s))^2}{h^2(f_{n-1}(s))} + \ldots$$

$$\ldots + \frac{h''(s)h(s) - (h'(s))^2}{h^2(s)}.$$

Учитывая соотношения $H_n(1)=1$, $f_n(1)=1$, $f_n'(1)=m^n$, $\varphi(1)=1$, $\varphi'(1)=\nu_1$, $h(1)=1$, $h'(1)=\lambda$ в последнем равенстве, будем иметь

$$H_n''(1)-(H_n'(1))^2=\varphi''(1)m^{2n}+f_n''(1)\nu_1-\nu_1^2m^{2n}+h''(1)m^{2(n-1)}+f_{n-1}''(1)\lambda-$$
$$-\lambda^2m^{2(n-1)}+\ldots+h''(1)-\lambda^2=[s^2-\nu_1]m^{2n}+(\sigma^2+m(m-1))\frac{m^{n-1}(m^n-1)}{m-1}\nu_1+$$
$$+(b^2-\lambda)[m^{2(n-1)}+m^{2(n-2)}+\ldots+1]+\lambda(f_{n-1}''(1)+\ldots+f''(1)).$$

Рассматривая выражения $f_n''(1)=f''(1)\dfrac{m^{n-1}(m^n-1)}{m-1}$ (см. [1]) в последнем равенстве, получим пункт (iii). Доказательство равенства (iv) является аналогичным доказательству пункта (iii). Теперь докажем равенство (v). С этой целью докажем следующее рекуррентное соотношение:

$$EX_k=m\,EX_{k-1}+\lambda, \tag{3.3}$$
$$Cov(X_k,X_n)=m\,Cov(X_k,X_{n-1}),\quad 0\leqslant k<n. \tag{3.4}$$

В самом деле, из соотношения (1.1) получаем

$$E(X_k/\mathfrak{F}_{k-1})=E\left(\left(\sum_{j=1}^{X_{k-1}}\xi_{k,j}+\varepsilon_k\right)/\mathfrak{F}_{k-1}\right)=mX_{k-1}+\lambda,$$

откуда следует равенство (3.3). Используя равенство (3.3) и свойства условного математического ожидания, получим

$$E((X_k-EX_k)(X_n-EX_n)/\mathfrak{F}_{n-1})=(X_k-EX_k)E((X_n-mEX_{n-1}-\lambda)/\mathfrak{F}_{n-1})=$$
$$=(X_k-EX_k)E\left(\left(\sum_{j=1}^{X_{n-1}}\xi_{n,j}+\varepsilon_n-mEX_{n-1}-\lambda\right)/\mathfrak{F}_{n-1}\right)=$$
$$=(X_k-EX_k)E\left(\left(\sum_{j=1}^{X_{n-1}}(\xi_{n,j}-m)+m(X_{n-1}-EX_{n-1})+(\varepsilon_n-\lambda)\right)/\mathfrak{F}_{n-1}\right)=$$
$$=m(X_k-EX_k)(X_{n-1}-EX_{n-1}),$$

где $\mathfrak{F}_k$ — σ-алгебра, порожденная случайными величинами $X_0,X_1,\ldots,X_k$. Из последнего соотношения следует равенство (3.4). В свою очередь, равенство (v) следует из равенства (3.4).

Это завершает доказательство леммы 3.2. □

Теперь дадим некоторые результаты, необходимые для доказательства основных результатов.

Следующая лемма является обобщением неравенства фон Бара—Эссеена для случайных сумм независимых одинаково распределенных случайных величин.

Лемма 3.3. *Пусть $Y_1,Y_2,\ldots,Y_n,\ldots$ — независимые и одинаково распределенные случайные величины, ζ — случайная величина, принимающая неотрицательные целые значения и не зависящая от $\{Y_k,k\in\mathbb{N}\}$. Пусть $E\zeta<\infty, EY_1=0$ и $E|Y_1|^p<\infty$ для некоторых $0<p\leqslant 2$. Тогда*

$$E|\sum_{k=1}^{\zeta}Y_k|^p\leqslant 2E\zeta E|Y_1|^p. \tag{3.5}$$

Доказательство. Из независимости случайных величин ζ и $\{Y_k,k\in\mathbb{N}\}$, а также из формулы полной вероятности следует соотношение

$$E|\sum_{k=1}^{\zeta}Y_k|^p=\sum_{N=0}^{\infty}E|\sum_{k=1}^{N}Y_k|^pI\{\zeta=N\}=\sum_{N=0}^{\infty}E|\sum_{k=1}^{N}Y_k|^pP\{\zeta=N\}. \tag{3.6}$$

Для последнего равенства из неравенства фон Бара—Эссеена (см. [10]) имеем

$$\sum_{N=0}^{\infty}E|\sum_{k=1}^{N}Y_k|^pP\{\zeta=N\}\leqslant 2\sum_{N=0}^{\infty}\sum_{k=1}^{N}E|Y_k|^pP\{\zeta=N\}=2E|Y_1|^p\sum_{N=0}^{\infty}NP\{\zeta=N\}=2E\zeta E|Y_1|^p. \tag{3.7}$$

Из равенств (3.6) и (3.7) следует соотношение (3.5). Это завершает доказательство леммы 3.3. □

Лемма 3.4. *Пусть* $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n, \ldots$ — *независимые и одинаково распределенные случайные величины,* ζ — *случайная величина, принимающая целые значения и не зависящая от* $\{Y_k, k \in \mathbb{N}\}$. *Пусть* $E\zeta < \infty, EY_1 = 0$ *и* $E|Y_1|^p < \infty$ *при некотором* $p \geqslant 2$. *Тогда*

$$E|\sum_{k=1}^{\zeta} Y_k|^p \leqslant C(p) E\zeta^{\frac{p}{2}} E|Y_1|^p, \tag{3.8}$$

где $C(p)$ — *константа, зависящая только от* p.

Доказательство. Из независимости случайных величин ζ и $\{Y_k, k \in \mathbb{N}\}$ и формулы полной вероятности имеем

$$E|\sum_{k=1}^{\zeta} Y_k|^p = \sum_{N=0}^{\infty} E|\sum_{k=1}^{N} Y_k|^p I\{\zeta = N\} = \sum_{N=0}^{\infty} E|\sum_{k=1}^{N} Y_k|^p P\{\zeta = N\}. \tag{3.9}$$

Так как величины $\{Y_k, k \in \mathbb{N}\}$ одинаково распределены, из последнего равенства и из неравенства Марцинкевича—Зигмунда (см. [10]) следует

$$\sum_{N=0}^{\infty} E|\sum_{k=1}^{N} Y_k|^p P\{\zeta = N\} \leqslant C(p) \sum_{N=0}^{\infty} N^{\frac{p}{2}-1} E \sum_{k=1}^{N} |Y_k|^p P\{\zeta = N\} =$$

$$= C(p) E|Y_1|^p \sum_{N=0}^{\infty} N^{\frac{p}{2}} P\{\zeta = N\} = C(p) E\zeta^{\frac{p}{2}} E|Y_1|^p. \tag{3.10}$$

Из равенств (3.9) и (3.10) следует соотношение (3.8).

Это завершает доказательство леммы 3.4. □

Лемма 3.5 (см. [8]). *Справедливы следующие равенства*:

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)^p \leqslant \sum_{i=1}^{n} a_i^p \quad \textit{при } 0 < p \leqslant 1 \quad (a_i \geqslant 0),$$

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)^p \leqslant n^{p-1} \sum_{i=1}^{n} a_i^p \quad \textit{при } p > 1 \quad (a_i \geqslant 0).$$

4. Доказательство основных результатов

В этом разделе мы представим доказательства теорем 2.1 и 2.2.

Доказательство теоремы 2.1. Рассмотрим сначала случай $0 < p \leqslant 1$ и $m \neq 1$. Используя первое неравенство леммы 3.5, получим

$$E(X_n^p / X_{n-1}) = E\left[\left(\sum_{i=1}^{X_{n-1}} \xi_{n,i} + \varepsilon_n\right)^p / X_{n-1}\right] \leqslant E\left[\left(\left(\sum_{i=1}^{X_{n-1}} \xi_{n,i}\right)^p + \varepsilon_n^p\right) / X_{n-1}\right] \leqslant$$

$$\leqslant E\left(\sum_{i=1}^{X_{n-1}} \xi_{n,i}^p / X_{n-1}\right) + E\varepsilon_n^p = X_{n-1}\gamma_p + \tau_p. \tag{4.1}$$

Из равенства (i) леммы 3.2 следует

$$EX_n^p \leqslant EX_{n-1}\gamma_p + \tau_p = \left(m^{n-1}\nu + \frac{m^{n-1} - 1}{m - 1}\lambda\right)\gamma_p + \tau_p.$$

В случае $0 < p \leqslant 1$ $m = 1$, используя соотношение (4.1) и равенство (ii) леммы 3.2, получаем

$$EX_n^p \leqslant EX_{n-1}\gamma_p + \tau_p = (\nu + \lambda n)\gamma_p + \tau_p.$$

Теперь рассмотрим случай $p > 1$, $2^{p-1}\gamma_p \neq 1$. Используя второе неравенство леммы 3.5, получаем

$$E(X_n^p/X_{n-1}) = E\left[\left(\sum_{i=1}^{X_{n-1}} \xi_{n,i} + \varepsilon_n\right)^p /X_{n-1}\right] \leqslant 2^{p-1}\left[E\left(\sum_{i=1}^{X_{n-1}} \xi_{n,i}\right)^p /X_{n-1} + E\varepsilon_n^p/X_{n-1}\right] \leqslant$$
$$\leqslant 2^{p-1}\left[E\left(X_{n-1}^{p-1}\sum_{i=1}^{X_{n-1}} \xi_{n,i}^p/X_{n-1}\right) + \tau_p\right] = 2^{p-1}(X_{n-1}^p\gamma_p + \tau_p).$$

Из последнего неравенства следует, что

$$EX_n^p \leqslant 2^{p-1}\left[\gamma_p EX_{n-1}^p + \tau_p\right] \leqslant \ldots \leqslant \left(2^{p-1}\gamma_p\right)^n EX_0^p + \tau_p \sum_{k=1}^n \left(2^{p-1}\right)^k \gamma_p^{k-1} =$$
$$= \left(2^{p-1}\gamma_p\right)^n \nu_p + \frac{2^{p-1}\tau_p\left[\left(2^{p-1}\gamma_p\right)^n - 1\right]}{2^{p-1}\gamma_p - 1}.$$

Пусть $p > 1$, $2^{p-1}\gamma_p = 1$. Используя второе неравенство леммы 3.5, получим

$$E(X_n^p/X_{n-1}) \leqslant 2^{p-1}\left(X_{n-1}^p\gamma_p + \tau_p\right)$$

и, следовательно,

$$EX_n^p \leqslant 2^{p-1}\left(\gamma_p EX_{n-1}^p + \tau_p\right) \leqslant \ldots \leqslant \left(2^{p-1}\gamma_p\right)^n EX_0^p + 2^{p-1}\tau_p \sum_{k=1}^n \left(2^{p-1}\gamma_p\right)^{k-1} = \nu_p + 2^{p-1}\tau_p n.$$

Это завершает доказательство теоремы 2.1. □

Доказательство теоремы 2.2. Рассмотрим сначала случай $0 < p \leqslant 1$ и $m \neq 1$. Имеем

$$X_n - EX_n = X_n - E(X_n/X_{n-1}) + E(X_n/X_{n-1}) - EX_n =$$
$$= \sum_{j=1}^{X_{n-1}} \xi_{n,j} + \varepsilon_n - mX_{n-1} - \lambda + mX_{n-1} + \lambda - mEX_{n-1} - \lambda =$$
$$= \sum_{j=1}^{X_{n-1}} (\xi_{n,j} - m) + (\varepsilon_n - \lambda) + m(X_{n-1} - EX_{n-1}) \tag{4.2}$$

Используем обозначения

$$D_n = X_n - EX_n, \quad M_n = \sum_{j=1}^{X_{n-1}} (\xi_{n,j} - m) + (\varepsilon_n - \lambda).$$

Эти обозначения позволяют переписать формулу (4.2) в следующем виде:

$$D_n = mD_{n-1} + M_n.$$

Из этого равенства следует, что

$$D_n = mD_{n-1} + M_n = m(mD_{n-2} + M_{n-1}) + M_n = m^2D_{n-2} + mM_{n-1} + M_n =$$
$$= m^2(mD_{n-3} + M_{n-2}) + mM_{n-1} + M_n = m^3D_{n-3} + m^2M_{n-2} + mM_{n-1} + M_n =$$
$$= \ldots = m^nD_0 + m^{n-1}M_1 + m^{n-2}M_2 + \ldots + mM_{n-1} + M_n = \sum_{k=1}^n m^{(n-k)}M_k + m^nD_0. \tag{4.3}$$

Из формулы (4.3) и леммы 3.5 следует, что

$$E|X_n - EX_n|^p = E\left|\sum_{k=1}^n m^{(n-k)}M_k + m^nD_0\right|^p \leqslant E\left|\sum_{k=1}^n m^{(n-k)}M_k\right|^p + E|m^nD_0|^p =$$
$$= E\left|\sum_{k=1}^n m^{(n-k)}\sum_{j=1}^{X_{k-1}} (\xi_{k,j} - m) + (\varepsilon_k - \lambda)\right|^p + m^{np}\beta_p \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{k=1}^{n} m^{(n-k)p} E \left| \sum_{j=1}^{X_{k-1}} (\xi_{k,j} - m) + (\varepsilon_k - \lambda) \right|^p + m^{np}\beta_p \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{k=1}^{n} m^{(n-k)p} \left[E \left| \sum_{j=1}^{X_{k-1}} (\xi_{k,j} - m) \right|^p + E\left|\varepsilon_k - \lambda\right|^p \right] + m^{np}\beta_p \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{k=1}^{n} m^{(n-k)p} \left[E \sum_{j=1}^{X_{k-1}} |\xi_{k,j} - m|^p + \delta_p \right] + m^{np}\beta_p =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} m^{(n-k)p} \left[\theta_p \left(\nu_1 m^{k-1} + \lambda \frac{m^{k-1} - 1}{m - 1} \right) + \delta_p \right] + m^{np}\beta_p. \tag{4.4}$$

Первое неравенство теоремы 2.2 следует из формулы (4.4).

Случай $0 < p \leqslant 1,\ m = 1$ доказывается аналогично.

Теперь рассмотрим случай $1 < p \leqslant 2,\ m \neq 1$. Согласно формуле (4.3) и лемме 3.5, имеем

$$E|X_n - EX_n|^p = E \left| \sum_{k=1}^{n} m^{(n-k)} M_k + m^n D_0 \right|^p \leqslant 2^{p-1} \left[E \left| \sum_{k=1}^{n} m^{(n-k)} M_k \right|^p + E|m^n D_0|^p \right]. \tag{4.5}$$

Из лемм 3.3 и 3.5 следует

$$E \left| \sum_{k=1}^{n} m^{(n-k)} M_k \right|^p \leqslant n^{p-1} \sum_{k=1}^{n} m^{(n-k)p} E \left| \sum_{j=1}^{X_{k-1}} (\xi_{k,j} - m) + (\varepsilon_k - \lambda) \right|^p \leqslant$$

$$\leqslant 2^{p-1} n^{p-1} \sum_{k=1}^{n} m^{(n-k)p} \left[E \left| \sum_{j=1}^{X_{k-1}} (\xi_{k,j} - m) \right|^p + E|\varepsilon_k - \lambda|^p \right] =$$

$$= 2^{p-1} n^{p-1} \sum_{k=1}^{n} m^{(n-k)p} [2\theta_p \left(\nu_1 m^{k-1} + \lambda \frac{m^{k-1} - 1}{m - 1} \right) + \delta_p]. \tag{4.6}$$

Третье неравенство теоремы 2.2 следует из формул (4.5) и (4.6).

Случай $1 < p \leqslant 2,\ m = 1$ доказывается аналогично.

Остается только рассмотреть случай $p > 2$. Из лемм 3.4 и 3.5 следует

$$E \left| \sum_{k=1}^{n} m^{(n-k)} M_k \right|^p \leqslant n^{p-1} \sum_{k=1}^{n} m^{(n-k)p} E \left| \sum_{j=1}^{X_{k-1}} (\xi_{k,j} - m) + (\varepsilon_k - \lambda) \right|^p \leqslant$$

$$\leqslant 2^{p-1} n^{p-1} \sum_{k=1}^{n} m^{(n-k)p} \left[E \left| \sum_{j=1}^{X_{k-1}} (\xi_{k,j} - m) \right|^p + E|\varepsilon_k - \lambda|^p \right] \leqslant$$

$$\leqslant 2^{p-1} n^{p-1} \sum_{k=1}^{n} m^{(n-k)p} [C(p) \theta_p E X_{k-1}^{\frac{p}{2}} + \delta_p]. \tag{4.7}$$

Пятое неравенство теоремы 2.2 следует из формул (4.5), (4.7) и теоремы 2.1.

Случай $p > 2,\ m = 1$ доказывается аналогично. Это завершает доказательство теоремы 2.2. $\square$

Авторы выражают искреннюю благодарность рецензенту, чьи комментарии внесли вклад в улучшение статьи.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Ватутин В. А.* Ветвящиеся процессы и их применения. — М.: МИАН, 2008.
2. *Севастьянов Б. А.* Ветвящиеся процессы. — М.: Наука, 1971.
3. *Asmussen S., Hering H.* Branching processes. — Boston etc.: Birkhauser, 1983.
4. *Athreya K. B., Ney P. E.* Branching processes. — New York—Heidelberg: Springer, 1972.
5. *Barczy M., Nedenyi F. K., Pap G.* On aggregation of multitype Galton—Watson branching processes with immigration// ArXiv. — 2018. — 1711.04099v2 [math.PR].
6. *Harris T. E.* The theory of branching processes. — Berlin—Göttingen—Heidelberg: Springer, 1963.
7. *Kevei P., Wiandt P.* Moments of the stationary distribution of subkritical multitype Galton—Watson processes with immigration// ArXiv. — 2020. — 2002.08848v1 [math.PR].
8. *Lin Z., Bai Z.* Probability inequalities. — Berlin—Heidelberg: Springer, 2010.
9. *Nagaev S. V.* Probabilistic inequalities for the Galton—Watson processes// Theory Probab. Appl. — 2015. — *59*. — С. 611–640.
10. *Petrov V. V.* Sums of independent random variables. — Berlin: Springer, 1972.

Я. М. Хусанбаев
Институт математики им. В. И. Романовского, Ташкент, Узбекистан
E-mail: yakubjank@mail.ru

Х. Е. Кудратов
Национальный университет Узбекистана им. М. Улугбека, Ташкент, Узбекистан
E-mail: qudratovh_83@mail.ru

DOI: 10.22363/2413-3639-2022-68-1-157-166 UDC 519.21

On the Inequalities for Moments of Branching Random Processes

© 2022 **Ya. M. Khusanbayev, Kh. E. Kudratov**

Abstract. We consider branching random processes with immigration starting from a random number of items. In this work, we provide estimates from above for the moments of such processes.

REFERENCES

1. V. A. Vatutin, *Vetvyashchiesya protsessy i ikh primeneniya* [Branching Processes and Their Applications], MIAN, Moscow, 2008 (in Russian).
2. B. A. Sevast'yanov, *Vetvyashchiesya protsessy* [Branching Processes], Nauka, Moscow, 1971 (in Russian).
3. S. Asmussen and H. Hering, *Branching processes*, Birkhauser, Boston etc., 1983.
4. K. B. Athreya and P. E. Ney, *Branching processes*, Springer, New York—Heidelberg, 1972.
5. M. Barczy, F. K. Nedenyi, and G. Pap, "On aggregation of multitype Galton—Watson branching processes with immigration," *ArXiv*, 2018, 1711.04099v2 [math.PR].
6. T. E. Harris, *The theory of branching processes*, Springer, Berlin—Göttingen—Heidelberg, 1963.
7. P. Kevei and P. Wiandt, "Moments of the stationary distribution of subkritical multitype Galton—Watson processes with immigration," *ArXiv*, 2020, 2002.08848v1 [math.PR].
8. Z. Lin and Z. Bai, *Probability inequalities*, Springer, Berlin—Heidelberg, 2010.
9. S. V. Nagaev, "Probabilistic inequalities for the Galton—Watson processes," *Theory Probab. Appl.*, 2015, **59**, 611–640.
10. V. V. Petrov, *Sums of independent random variables*, Springer, Berlin, 1972.

Ya. M. Khusanbayev
Romanovskiy Institute of Mathematics, Tashkent, Uzbekistan
E-mail: yakubjank@mail.ru

Kh. E. Kudratov
National University of Uzbekistan, Tashkent, Uzbekistan
E-mail: qudratovh_83@mail.ru