Современная математика. Фундаментальные направления. Том 68, № 1 (2022). С. 144–156
Contemporary Mathematics. Fundamental Directions. ISSN 2413-3639 (Print)

DOI: 10.22363/2413-3639-2022-68-1-144-156 УДК 517.55

НЕКОТОРЫЕ ЗАДАЧИ КОМПЛЕКСНОГО АНАЛИЗА В МАТРИЧНЫХ ОБЛАСТЯХ ЗИГЕЛЯ

© 2022 г. **Г. Х. ХУДАЙБЕРГАНОВ, Б. Т. КУРБАНОВ**

Аннотация. Приведен обзор последних результатов в многомерном комплексном анализе, относящихся к матричным областям Зигеля.

ОГЛАВЛЕНИЕ

1. Введение

Теория функций многих комплексных переменных, или многомерный комплексный анализ, к настоящему времени имеет достаточно строго построенную теорию [2, 9, 16]. В то же время многие вопросы классического (одномерного) комплексного анализа до сих пор не имеют однозначных многомерных аналогов. Это связано со сложной структурой многомерного комплексного пространства, многозначностью (переопределенностью) условий Коши—Римана, отсутствием универсальной интегральной формулы Коши и т. д. В работах Э. Картана, К. Зигеля [3], Хуа Ло-Кена [11], И. И. Пятецкого-Шапиро [8] широко используется матричный подход изложения теории многомерного комплексного анализа. Здесь в основном исследованы классические области и связанные с ними вопросы теории функций и геометрии. Важность изучения классических областей состоит в том, что они не являются приводимыми, т. е. эти области в каком-то смысле являются модельными областями многомерного пространства. В нашем обзоре мы приводим последние результаты в многомерном комплексном анализе, относящиеся к классическим областям.

2. Матричная структура многомерных пространств

2.1. Пространства $\mathbb{C}[m\times k]$, $\mathbb{C}^n[m\times k]$. Рассмотрим пространство mk комплексных переменных $\mathbb{C}^{mk}$ с элементами

$$(z_{11}, z_{12}, \dots, z_{mk}). \tag{2.1}$$

В этом пространстве введем матричную структуру, отождествляя каждому элементу (2.1) прямоугольную матрицу из m строк и k столбцов:

$$\begin{pmatrix} z_{11} & \cdots & z_{1k} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ z_{m1} & \cdots & z_{mk} \end{pmatrix}.$$

После такого представления элементов пространство $\mathbb{C}^{mk}$ будем обозначать через $\mathbb{C}[m \times k]$. Такое матричное представление представляет удобство и компактность записи громоздких формул, а также дает возможность дальнейшей реализации идей одномерного комплексного анализа. Элементы пространства $\mathbb{C}[m \times k]$ обозначим заглавными буквами: $Z, U, V, W, \ldots$

Во многих вопросах представляет интерес пространство, получаемое при помощи декартового произведения нескольких $\mathbb{C}[m \times k]$:

$$\mathbb{C}^n[m \times k] = \underbrace{\mathbb{C}[m \times k] \times \mathbb{C}[m \times k] \times \cdots \times \mathbb{C}[m \times k]}_{n}.$$

Такая структура пространства позволяет использовать технику векторных исчислений (скалярное произведение, норма и т. п.). При $m = k$ получаются пространства квадратных матриц $\mathbb{C}[m \times m]$, $\mathbb{C}^n[m \times m]$. В монографии [14] приведены примеры простейших матричных областей (матричный единичный круг, матричная верхняя полуплоскость, матричный единичный поликруг) в этих пространствах.

2.2. Классификация матричных шаров, ассоциированных с классическими областями. В анализе всегда большую роль играло исследование конкретных классов областей. Известная теорема Римана утверждает, что *любая односвязная область, граница которой содержит более одной точки, конформно эквивалентна единичному кругу* $U = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$.

Эта теорема перестает быть верной в $\mathbb{C}^n$ при $n > 1$: не существует биголоморфного отображения шара

$$\mathbf{B}^n = \{z \in \mathbb{C}^n : |z| < 1\}$$

на поликруг

$$\mathbf{U}^n = \{z \in \mathbb{C}^n : ||z|| < 1\}.$$

Это связано с переопределенностью условий голоморфности при $n > 1$. Поэтому оказывается весьма существенным рассмотрение и изучение важнейших классов областей в многомерных комплексных пространствах.

Одним из таких классов областей является класс ограниченных однородных областей. В 1935 году Э. Картан доказал, что существует только шесть возможных типов неприводимых транзитивных ограниченных симметрических областей (см. [3]). Все эти области биголоморфно неэквивалентны и представляют большой интерес с разных точек зрения. Это связано с тем, что они являются сравнительно широким классом областей в $\mathbb{C}^n$, для которых удалось получить целый ряд содержательных существенно многомерных результатов.

Множество

$$\mathfrak{B}^{(1)}_{m,n} = \{(Z_1, \ldots, Z_n) = Z \in \mathbb{C}^n[m \times m] : I - \langle Z, Z\rangle > 0\}$$

называется *матричным шаром* (*первого типа*), здесь $\langle Z, Z\rangle = Z_1 Z_1^* + \ldots + Z_n Z_n^*$ — «скалярное» произведение, I — единичная матрица порядка m, $Z_\nu^* = \overline{Z'_\nu}$, $\nu = 1, \ldots, n$, а условие $I - \langle Z, Z\rangle > 0$ означает, что эрмитова матрица положительно определена, т. е. все ее собственные значения положительны.

Определим *матричные шары* $\mathfrak{B}^{(2)}_{m,n}$ и $\mathfrak{B}^{(3)}_{m,n}$ *второго и третьего типов*, соответственно:

$$\mathfrak{B}^{(2)}_{m,n} = \{Z \in \mathbb{C}^n[m \times m] : I - \langle Z, Z\rangle > 0,\ Z'_\nu = Z_\nu, \nu = 1, \ldots, n\}$$

и

$$\mathfrak{B}^{(3)}_{m,n} = \{Z \in \mathbb{C}^n[m \times m] : I - \langle Z, Z\rangle > 0,\ Z'_\nu = -Z_\nu, \nu = 1, \ldots, n\}.$$

Остовы (*границы Шилова*) матричных шаров $\mathfrak{B}^{(k)}_{m,n}$ обозначим через $\mathfrak{X}^{(k)}_{m,n}$, $k = 1, 2, 3$, т. е.

$$\mathfrak{X}^{(1)}_{m,n} = \{Z \in \mathbb{C}^n[m \times m] : \langle Z, Z\rangle = I\},$$

$$\mathfrak{X}^{(2)}_{m,n} = \{Z \in \mathbb{C}^n[m \times m] : \langle Z, Z\rangle = I,\ Z'_\nu = Z_\nu, \nu = 1, \ldots, n\},$$

$$\mathfrak{X}^{(3)}_{m,n} = \{Z \in \mathbb{C}^n[m \times m] : I - \langle Z, Z\rangle = 0,\ Z'_\nu = -Z_\nu, \nu = 1, \ldots, n\}.$$

Заметим, что $\mathfrak{B}^{(1)}_{1,1}$, $\mathfrak{B}^{(2)}_{1,1}$ и $\mathfrak{B}^{(3)}_{2,1}$ — единичные круги, а $\mathfrak{X}^{(1)}_{1,1}$, $\mathfrak{X}^{(2)}_{1,1}$ и $\mathfrak{X}^{(3)}_{2,1}$ — единичные окружности в комплексной плоскости $\mathbb{C}$.

Если $n = 1$, $m > 1$, то $\mathfrak{B}^{(k)}_{m,1}$, $k = 1,2,3$ — классические области первого, второго и третьего типов (по классификации Э. Картана), а остовы $\mathfrak{X}^{(1)}_{m,1}$, $\mathfrak{X}^{(2)}_{m,1}$ и $\mathfrak{X}^{(3)}_{m,1}$ — унитарные, симметрические унитарные и кососимметрические унитарные матрицы, соответственно.

Если $m = 1$, то $\mathfrak{B}^{(1)}_{1,n}$ — единичный шар в пространстве $\mathbb{C}^n$, а $\mathfrak{X}^{(1)}_{1,n}$ — единичная сфера (остов совпадает с топологической границей). Отметим, что автоморфизмы указанных матричных шаров описаны в работах [4, 15].

Приведем некоторые *нерешенные задачи,* связанные с матричными шарами $\mathfrak{B}^{(2)}_{m,n}$ и $\mathfrak{B}^{(3)}_{m,n}$:

$1_{1,2}$. *выписать ядра Коши для* $\mathfrak{B}^{(2)}_{m,n}$ *и* $\mathfrak{B}^{(3)}_{m,n}$;

$2_{1,2}$. *получить ядра Пуассона для* $\mathfrak{B}^{(2)}_{m,n}$ *и* $\mathfrak{B}^{(3)}_{m,n}$;

$3_{1,2}$. *определить инвариантный оператор Лапласа для* $\mathfrak{B}^{(2)}_{m,n}$ *и* $\mathfrak{B}^{(3)}_{m,n}$;

$4_{1,2}$. *ввести понятия гармонических функций в* $\mathfrak{B}^{(2)}_{m,n}$ *и* $\mathfrak{B}^{(3)}_{m,n}$;

$5_{1,2}$. *решить задачу Дирихле для* $\mathfrak{B}^{(2)}_{m,n}$ *и* $\mathfrak{B}^{(3)}_{m,n}$;

$6_{1,2,3}$. *выписать ортонормированный базис для* $\mathfrak{B}^{(1)}_{m,n}$, $\mathfrak{B}^{(2)}_{m,n}$, *и* $\mathfrak{B}^{(3)}_{m,n}$ *в пространстве квадратных матриц* $\mathbb{C}^n[m \times m]$ *(существование таких базисов следует из теоремы Э. Картана (1943) о полных круговых областях, см. [11]).*

2.3. Матричный аналог преобразования Кэли типа «единичный круг — верхняя полуплоскость». Единичный круг и его различные многомерные обобщения (единичный n-мерный шар, поликруг, матричный единичный круг, классические области четырех типов по классификации Картана, матричный шар) являются достаточно хорошо изученными: к настоящему времени решены многие важные вопросы многомерного комплексного анализа такие, как описание групп автоморфизмов, получение интегральных формул типа Коши—Сеге, Бергмана, Пуассона, доказательство необходимых и достаточных условий для голоморфной продолжимости функций с границы и т. д. Обширные результаты, полученные в этих областях, приведены в монографиях Хуа Ло-Кена [11], У. Рудина [9], Г. Худайберганова, А. М. Кытманова, Б. А. Шаимкулова [14], отметим также работы С. Косбергенова, А. М. Кытманова, С. Г. Мысливец [5].

Довольно часто задачи, поставленные для единичного круга на плоскости, переносятся на верхнюю полуплоскость при помощи преобразования Кэли

$$w = \frac{i(1+z)}{1-z}.$$

В этой связи является актуальным нахождение многомерных аналогов формулы для реализации преобразования типа «единичный круг — верхняя полуплоскость». Ниже мы рассмотрим реализацию классической области первого типа в виде области Зигеля второго рода.

Пусть $\mathbb{C}[p \times q]$ — пространство прямоугольных матриц из p строк и q столбцов ($q \geqslant p$), элементы которых — комплексные числа.

Область $\mathcal{R}_1$, образованная матрицами Z из $\mathbb{C}[p \times q]$, удовлетворяющих условию

$$I - ZZ^* > 0,$$

называется *классической областью первого типа* (по классификации Э. Картана, см. [11]). Здесь I — единичная матрица порядка p, $Z^* = \bar{Z}'$ — матрица, комплексно-сопряженная к транспонированной матрице Z'.

Граница Шилова $\mathcal{S}_1$ для области $\mathcal{R}_1$ образована матрицами Z из p строк и q столбцов с условием, что

$$ZZ^* = I.$$

Известно, что любая ограниченная однородная (по отношению к голоморфным автоморфизмам) область в $\mathbb{C}^N$ имеет реализацию в виде области Зигеля второго рода. В частности, область $\mathcal{R}_1$ биголоморфно эквивалентна некоторой области Зигеля второго рода, которая строится с помощью следующей конструкции (см. [10]).

Пусть U_1 — квадратная матрица порядка $p \times p$, а U_2 — матрица порядка $p \times (q-p)$. В пространстве пар матриц (U_1, U_2) комплексной размерности $N = pq$ рассмотрим область

$$\mathcal{D} = \{U = (U_1, U_2) \in \mathbb{C}[p \times q] : \mathrm{Im} U_1 - U_2 U_2^* > 0\},$$

где $\mathrm{Im}U_1 = \dfrac{1}{2i}(U_1 - U_1^*)$. Остов этой области обозначим

$$\mathcal{G} = \{U = (U_1, U_2) : \mathrm{Im}U_1 = U_2 U_2^*\}.$$

Следуя этой конструкции, область $\mathcal{R}_1$ можно задать и в следующей форме:

$$\mathcal{R}_1 = \{Z = (Z_1, Z_2) \in \mathbb{C}[p \times q] : I - \langle Z, Z\rangle > 0\},$$

здесь $\langle Z, Z\rangle = Z_1 Z_1^* + Z_2 Z_2^*$, а Z_1 и Z_2 — матрицы порядка $p \times p$ и $p \times (q-p)$, соответственно.

Обозначим через $d\mu$ и $d\eta$ элементы объемов (меры Лебега) в $\mathcal{D}$ и $\mathcal{G}$.

Теорема 2.1 (см. [13, 14])**.** *Отображение $\Phi : \mathbb{C}_z \to \mathbb{C}_u$ определяемое соответствиями*

$$U_1 = i(I - Z_1)^{-1}(I + Z_1), \qquad U_2 = (I - Z_1)^{-1} Z_2, \tag{2.2}$$

биголоморфно отображает область $\mathcal{R}_1$ на $\mathcal{D}$, при этом $\mathcal{S}_1$ переходит в $\mathcal{G}$.

Лемма 2.1. *Вещественный якобиан отображения $\Phi(Z)$ вычисляется по формуле*

$$J_R\Phi(Z) = 2^{2p^2} |\det(I - Z_1)|^{-2(p+q)}.$$

Доказательство. Пусть $B = \Phi(A)$, $A \in \mathcal{R}_1$, $B \in \mathcal{D}$. Рассмотрим разность

$$\Phi(Z + A) - \Phi(A) = (I - Z_1 - A_1)^{-1}\left(2iZ_1(I - A_1)^{-1},\, Z_2 + Z_1(I - A_1)^{-1}A_2\right).$$

Согласно правилу дифференцирования отображения

$$\Phi'(A) = (I - A_1)^{-1} \otimes \begin{pmatrix} 2i(I - A_1)^{-1} & (I - A_1)^{-1}A_2 \\ 0 & I^{(q-p)} \end{pmatrix},$$

где Φ' — матрица Якоби отображения Φ, знак $\otimes$ означает кронекеровское (прямое) произведение матриц. Отсюда, используя свойства прямого произведения матриц, имеем

$$\det \Phi'(A) = (\det(I - A_1)^{-1})^q (\det(2i(I - A_1)^{-1}))^p = (2i)^{p^2} \det{}^{-(p+q)}(I - A_1).$$

Следовательно,

$$J_R\Phi(Z) = |\det \Phi'(Z)|^2 = 2^{2p^2} |\det(I - Z_1)|^{-2(p+q)}.$$

Лемма доказана. □

3. Интегральные формулы и голоморфное продолжение

3.1. Интегральные формулы. Интегральные формулы в комплексном анализе являются хорошим средством при изучении свойств голоморфных функций. В классических областях Картана интегральные формулы типа Коши—Сеге, Бергмана, Пуассона были доказаны Хуа Ло-Кеном [11].

Пусть $\mathfrak{D}$ — полная выпуклая ограниченная круговая область с центром в начале координат, граница Шилова (остов) $\mathfrak{R}$ которой является гладким многообразием, либо неограниченная однородная область Зигеля второго рода с остовом $\mathfrak{R}$.

Функция f принадлежит *классу* $\mathcal{L}^p(\mathfrak{R})$ с заданной на нем мерой Лебега $d\mu$, если она интегрируема со степенью p по мере $d\mu$ на $\mathfrak{R}$, т. е. если интеграл

$$\int_{\mathfrak{R}} |f(x)|^p d\mu$$

конечен.

Класс Харди $\mathcal{H}^p(\mathfrak{D})$ $(0 < p < +\infty)$ состоит из всех функций f, голоморфных в области $\mathfrak{D}$, для которых равномерно ограничены интегралы

$$\int_{\mathfrak{R}} |f(rz)|^p d\mu < C_f$$

для всех $0 < r < 1$.

Через $\mathcal{O}^2(\mathfrak{D})$ обозначим пространство, состоящее из голоморфных функций в $\mathfrak{D}$, интегрируемых с квадратом по обычной мере Лебега $d\nu$, т. е. $f \in \mathcal{O}^2(\mathfrak{D})$, если f голоморфна в $\mathfrak{D}$ и

$$\int_{\mathfrak{D}} |f(\zeta)|^2 d\nu(\zeta) < +\infty.$$

Определим *ядро Бергмана* $K(U,V)$ в области $\mathcal{D}$ (см. раздел 2.3) следующим образом:

$$K(U,V)=\frac{c_k}{(\det[i(U_1-V_1^*)+2U_2V_2^*])^{p+q}},$$

где $c_k=(-1)^p 2^{p-2p^2}$.

Выясним, как преобразуется соответствующее ядро Бергмана в области $\mathcal{R}_1$ при биголоморфном отображении (2.2) $\Phi:\mathcal{R}_1\to\mathcal{D}$.

Как известно, ядро Бергмана в $\mathcal{R}_1$ имеет вид (см. [11, гл.4]):

$$K_{\mathcal{R}_1}(Z,W)=\frac{1}{(\det(I-\langle Z,W\rangle))^{p+q}}.$$

Непосредственные вычисления показывают, что

$$i(U_1-V_1^*)+2U_2V_2^*=-2(I-Z_1)^{-1}(I-\langle Z,W\rangle)(I-W_1^*)^{-1}.$$

Тогда из свойств определителя матриц имеем:

$$(\det[i(U_1-V_1^*)+2U_2V_2^*])^{p+q}=(-2)^p(\det[(I-Z_1)(I-W_1^*)])^{-(p+q)}(\det(I-\langle Z,W\rangle))^{p+q}.$$

Отсюда

$$K(\Phi(Z),\Phi(W))=\frac{c_k}{(-2)^p(\det[(I-Z_1)(I-W_1^*)])^{-(p+q)}}\cdot\frac{1}{(\det(I-\langle Z,W\rangle))^{p+q}}=$$

$$=\frac{1}{2^{2p^2}}K_{\mathcal{R}_1}(Z,W)\cdot(\det[(I-Z_1)(I-W_1^*)])^{p+q}.$$

Таким образом, получаем следующее утверждение.

Лемма 3.1. *При отображении* (2.2) *ядро Бергмана* $K(U,V)$ *преобразуется следующим образом*:

$$K(\Phi(Z),\Phi(W))=\frac{1}{2^{2p^2}}\,K_{\mathcal{R}_1}(Z,W)\,(\det[(I-Z_1)(I-W_1^*)])^{p+q}.$$

Теорема 3.1 (см. [14]). *Для всякой функции* $f\in\mathcal{O}^2(\mathcal{D})$ *справедлива формула*

$$f(U)=\int\limits_{\mathcal{D}} f(V)K(U,V)d\mu(V),\ U\in\mathcal{D}.$$

Интеграл в этой формуле задает ортогональный проектор из пространства $\mathcal{L}^2(\mathcal{D})$ *в пространство* $\mathcal{O}^2(\mathcal{D})$.

Определим *ядро Коши—Сеге* $C(U,V)$ в области $\mathcal{D}$ следующим образом:

$$C(U,V)=\frac{c_k}{(\det[i(U_1-V_1^*)+2U_2V_2^*])^{q}}$$

для $U\in\mathcal{D}$, $V\in\mathcal{G}$, где $c_k=(-1)^p 2^{p-2p^2}$.

Аналогично лемме 3.1 доказывается следующая лемма.

Лемма 3.2. *Пусть* $U=\Phi(Z)$ *и* $V=\Phi(W)$. *При отображении* (2.2) *ядро Коши—Сеге* $C(U,V)$ *преобразуется следующим образом*:

$$C(\Phi(Z),\Phi(W))=\frac{1}{2^{2p^2}}\,C_{\mathcal{R}_1}(Z,W)\,(\det[(I-Z_1)(I-W_1^*)])^{q},$$

где $C_{\mathcal{R}_1}(Z,W)$ — *ядро Коши—Сеге для области* $\mathcal{R}_1$ (*см.* [11, гл. 4]),

$$C_{\mathcal{R}_1}(Z,W)=\frac{1}{(\det(I-\langle Z,W\rangle))^{q}}.$$

Теорема 3.2 (см. [12,14]). *Для всякой функции* $f\in\mathcal{H}^1(\mathcal{D})$ *справедлива формула*

$$f(U)=\int\limits_{\mathcal{G}} f(V)C(U,V)d\mu(V),\quad U\in\mathcal{D}.$$

В качестве применения таких интегральных формул приводим достаточные условия голоморфной продолжимости функций в виде условий Морера.

3.2. Граничный вариант теоремы Морера. Граничные варианты теоремы Морера рассмотрены в работах [5–7, 17–19, 21], а также в монографии [14]. В них утверждается возможность голоморфного продолжения функции f с границы ∂D области $D \subset \mathbb{C}^n$ при условии равенства нулю интегралов от f по границам аналитических дисков, лежащих на ∂D.

Пусть $\mathbb{C}[p\times q]$ — пространство прямоугольных матриц из p строк и q столбцов ($q \geqslant p$), элементы которых — комплексные числа.

Известно, что всякое биголоморфное отображение $\Phi : \mathcal{R}_1 \to \mathcal{D}$ устанавливает изоморфность групп $\mathrm{Aut}(\mathcal{R}_1)$ и $\mathrm{Aut}(\mathcal{D})$ по формуле

$$\varphi \to \Phi\circ\varphi\circ\Phi^{-1},\ \varphi\in\mathrm{Aut}(\mathcal{D}),$$

т. е. изоморфность групп $\mathrm{Aut}(\mathcal{R}_1)$ и $\mathrm{Aut}(\mathcal{D})$ необходима для голоморфной эквивалентности областей $\mathcal{R}_1$ и $\mathcal{D}$.

Пусть Φ_A — автоморфизм области $\mathcal{R}_1$, переводящий точку $A = (A_1, A_2)$ в $(0, 0)$. Тогда отображение

$$\Psi_B = \Phi\circ\Phi_A\circ\Phi^{-1}, \quad \text{где} \quad B = \Phi(A),$$

является автоморфизмом области $\mathcal{D}$, переводящим точку $B = (B_1, B_2)$ в $(iE, 0)$.

Таким образом, при помощи отображения (2.2) выписывается группа автоморфизмов области $\mathcal{D}$.

Автоморфизм Φ_A в векторной форме определяется следующим образом:

$$\Phi_A^l = R^{-1}\left(E-\langle Z, A\rangle\right)^{-1}\sum_{j=1}^{2}(Z_j - A_j)Q_{jl}, \quad l = 1, 2, \tag{3.1}$$

где

$$Q = \begin{pmatrix} Q_{11} & Q_{12} \\ Q_{21} & Q_{22}\end{pmatrix}$$

— блочная матрица порядка q, элементы которой $Q_{11}, Q_{12}, Q_{21}, Q_{22}$ — матрицы порядков $p\times p$, $p\times(q-p)$, $(q-p)\times p$, $(q-p)\times(q-p)$, соответственно, и матрица R удовлетворяют условиям

$$R^*(E-\langle A, A\rangle)R = E, \quad Q^*(E^{(q)} - A^*A)Q = E^{(q)}.$$

В области $\mathcal{R}_1$ транзитивно действует подгруппа автоморфизмов с неподвижной точкой $(0, 0)$. Они называются *унитарными преобразованиями*, поскольку они линейны и для случая областей, состоящих из квадратных матриц, задаются унитарными матрицами. В рассматриваемом случае прямоугольных матриц такие преобразования получаются из (3.1) при $A = 0$:

$$W_l = \sum_{j=1}^{2} Z_jQ_{jl}, \quad l = 1, 2, \tag{3.2}$$

причем

$$\sum_{s=1}^{2} Q_{js}Q^*_{ks} = \begin{cases} 0 & \text{при } j\neq k, \\ E & \text{при } j = k.\end{cases}$$

Преобразованиям (3.2) в области $\mathcal{D}$ соответствуют следующие преобразования с неподвижной точкой $(iE, 0)$:

$$\psi^1_{\mathcal{U}}(U) = i\left[U_1 + iE - (U_1 - iE)Q_{11} - 2iU_2Q_{21}\right]^{-1}\left[U_1 + iE + (U_1 - iE)Q_{11} + 2iU_2Q_{21}\right],$$

$$\psi^2_{\mathcal{U}}(U) = i\left[U_1 + iE - (U_1 - iE)Q_{11} - 2iU_2Q_{21}\right]^{-1}\left[(U_1 - iE)Q_{12} + 2iU_2Q_{22}\right]. \tag{3.3}$$

Эти преобразования мы также назовем *обобщенными унитарными преобразованиями* области $\mathcal{D}$.

Рассмотрим следующее вложение круга $\Delta = \{|t| < 1\}$ в область $\mathcal{D}$:

$$\{\Omega_t \in \mathbb{C}^{pq} : \Omega_t = \Phi(t\Phi^{-1}(\Lambda^0)),\ t\in\Delta\}, \tag{3.4}$$

где $\Lambda^0 \in \mathcal{G}$. Если Ψ — произвольный автоморфизм области $\mathcal{D}$, то множество (3.4) под действием этого автоморфизма перейдет в некоторый аналитический диск с границей на $\mathcal{G}$.

Теорема 3.3. *Пусть f — непрерывная ограниченная функция на $\mathcal{G}$. Если для функции f выполнено условие*

$$\int_T f(\Psi(\Omega_t))\,dt = 0 \tag{3.5}$$

для всех автоморфизмов Ψ области $\mathcal{D}$ и фиксированного $\Lambda^0 \in \mathcal{G}$, то функция f голоморфно продолжается в $\mathcal{D}$ до функции $F \in \mathcal{H}^\infty(\mathcal{D})$, непрерывной вплоть до $\mathcal{G}$.

Доказательство. Доказательство теоремы проводится по схеме, изложенной в монографии [14] при доказательстве теорем такого типа.

В условии (3.5) вместо Ψ рассмотрим автоморфизм $\Psi = \Phi \circ \Phi_A^{-1} \circ \Phi^{-1}$:

$$\int_T f(\Phi \circ \Phi_A^{-1} \circ \Phi^{-1}(\Omega_t))\,dt = 0. \tag{3.6}$$

Так как $\mathcal{G}$ инвариантно относительно унитарных преобразований (3.3), то условие (3.6) будет выполняться для произвольных $\Lambda \in \mathcal{G}$. Обозначая $\Phi^{-1}(\Lambda) = \Theta$ и учитывая, что $\Omega_t = \Phi(t\Phi^{-1}(\Lambda))$, получим

$$\int_T f(\Phi \circ \Phi_A^{-1}(\Theta t))\,dt = 0. \tag{3.7}$$

Рассмотрим следующую параметризацию многообразия $\mathcal{S}_1$:

$$Z = \Theta t, \quad t = e^{i\phi}, \quad 0 \leqslant \phi \leqslant 2\pi, \quad \Theta \in \mathcal{S}_1^+,$$

где $\mathcal{S}_1^+$ — многообразие, состоящее из матриц $\Theta = (\Theta_1, \Theta_2)$ таких, что в матрице Θ_1 первый элемент $\theta_{11}^{(1)} > 0$. Фактически $\mathcal{S}_1^+$ отличается от $\mathcal{S}_1$ на множество меры нуль. Нормированная мера Лебега многообразия $\mathcal{S}_1$ может быть представлена в виде

$$d\sigma = \frac{d\phi}{2\pi} \wedge d\sigma_1(\Theta) = \frac{1}{2\pi i}\frac{dt}{t} \wedge d\sigma_1(\Theta),$$

где $t = e^{i\phi}$, а мера $d\sigma_1$ положительна на $\mathcal{S}_1^+$. Используя такое представление, переходим в условии (3.7) к интегрированию по многообразию $\mathcal{S}_1$, предварительно умножив (3.7) на $d\sigma_1(\Theta)$:

$$\int_{\mathcal{S}_1} f(\Phi \circ \Phi_A^{-1}(Z))\, z_{ks_l}^l\, d\sigma(Z) = 0, \tag{3.8}$$

где $z_{ks_l}^l$ — элементы матрицы $Z = (Z_1, Z_2)$; $l = 1, 2$; $k, s_1 = \overline{1, p}$; $s_2 = \overline{1, q-p}$.

Сделаем замену переменных $W = \Phi_A^{-1}$. Тогда (3.8) переходит в условие

$$\int_{\mathcal{S}_1} f(\Phi(W))\, \Phi_{ks_l}^{A,l}(W)\, d\sigma(\Phi_A(W)) = 0, \tag{3.9}$$

где $\Phi_{ks_l}^{A,l}$ — компонента автоморфизма Φ_A.

Из [5] мы знаем, что

$$d\sigma(\Phi_A(W)) = P_{\mathcal{R}_1}(W, A) d\sigma(W),$$

где $P_{\mathcal{R}_1}(W, A)$ — ядро Пуассона в $\mathcal{R}_1$. Следовательно,

$$\int_{\mathcal{S}_1} f(\Phi(W))\, \Phi_{ks_l}^{A,l}(W)\, P_{\mathcal{R}_1}(W, A) d\sigma(W) = 0 \tag{3.10}$$

для всех точек $A \in \mathcal{R}_1$ и всех l, k, s_l.

Так как матрицы R и Q_{jl} не зависят от W, то условие (3.10) будет выполняться и для компонент $\varphi_{ks_l}^{A,l}$ отображения

$$\varphi_A^l = (E - \langle W, A\rangle)^{-1}(W_l - A_l), \quad l = 1, 2,$$

т. е.

$$\int_{\mathcal{S}_1} f(\Phi(W))\, \varphi_{ks_l}^{A,l}(W)\, P_{\mathcal{R}_1}(W, A) d\sigma(W) = 0. \tag{3.11}$$

Теперь в этом интеграле при помощи отображения (2.2) произведем замену $U = \Phi(W)$:

$$\varphi_{ks_l}^{A,l}(W) = \varphi_{ks_l}^{A,l}(\Phi^{-1}(U)) = \psi_{ks_l}^{B,l}(U),$$

где $\psi_{ks_l}^{B,l}(U)$ — компонента отображения $\psi_B(U) = (\psi_B^1(U), \psi_B^2(U)) = \varphi_A \circ \Phi^{-1}$ и

$$\psi_B^1(U) = \varphi_A^1(\Phi^{-1}(U)) = -i(B_1^* - iE)[i(U_1 - B_1^*) + 2U_2B_2^*]^{-1}(U_1 - B_1)(B_1 + iE)^{-1},$$

$$\psi_B^2(U) = \varphi_A^2(\Phi^{-1}(U)) = -i(B_1^* - iE)[i(U_1 - B_1^*) + 2U_2B_2^*]^{-1}[U_2 - (U_1 + iE)(B_1 + iE)^{-1}B_2].$$

Далее в силу [20, лемма 3.4]:

$$P_{\mathcal{R}_1}(\Phi^{-1}(U), \Phi^{-1}(B))d\sigma(\Phi^{-1}(U)) = P(U,B)d\eta(U),$$

здесь $P(U,B)$ — ядро Пуассона в области $\mathcal{D}$ (см. теорема 3.2):

$$P(U,B) = c \cdot \frac{(\det[i(U_1 - U_1^*) + 2U_2U_2^*])^q}{(\det[i(U_1 - B_1^*) + 2U_2B_2^*])^{2q}},$$

где $c = (-1)^p 2^{p-2p^2}$. Тогда в условии (3.11) множество интегрирования будет меняться на $\mathcal{G}$, откуда получим условие

$$\int\limits_{\mathcal{G}} f(U)\, \psi_{ks_l}^{B,l}(U)\, P(U,B)d\eta(U) = 0 \tag{3.12}$$

для всех точек $B \in \mathcal{D}$ и всех l, k, s_l.

В целях упрощения записи далее используем следующее обозначение

$$\delta(U,B) = i(U_1 - B_1^*) + 2U_2B_2^*, \quad \delta^{-1}(U,B) = [i(U_1 - B_1^*) + 2U_2B_2^*]^{-1}.$$

Докажем две вспомогательных леммы.

Лемма 3.3. *Если условие* (3.12) *выполнено для компонент отображения* $\psi_B(U)$, *то*:

$$\text{а)} \quad \int\limits_{\mathcal{G}} f(U)P(U,B)\left[\delta^{-1}(B,B) - \delta^{-1}(U,B)\right] d\eta(U) = 0, \tag{3.13}$$

$$\text{б)} \quad \int\limits_{\mathcal{G}} f(U)P(U,B)\left[\delta^{-1}(U,B)U_2B_2^* - \delta^{-1}(B,B)B_2B_2^*\right] d\eta(U) = 0. \tag{3.14}$$

Доказательство.

а). Имеем

$$\int\limits_{\mathcal{G}} f(U)P(U,B)\delta^{-1}(U,B)(U_1 - B_1)d\eta(U) = 0,$$

$$\int\limits_{\mathcal{G}} f(U)P(U,B)\delta^{-1}(U,B)\left[U_2 - (U_1 + iE)(B_1 + iE)^{-1}B_2\right] d\eta(U) = 0.$$

Умножим первое равенство на i, а другое справа на $2B_2^*$ и сложим полученные равенства:

$$\int\limits_{\mathcal{G}} f(U)P(U,B)\delta^{-1}(U,B)\left[iU_1 - iB_1 + 2U_2B_2^* - (U_1 + iE)(B_1 + iE)^{-1}2B_2B_2^*\right] d\eta(U) = 0.$$

Сделаем следующие преобразования в квадратной скобке подынтегрального выражения:

$$iU_1 - iB_1^* - (iB_1 - iB_1^*) + 2U_2B_2^* - 2B_2B_2^* + 2B_2B_2^* - (U_1 + iE)(B_1 + iE)^{-1}2B_2B_2^* =$$
$$= \delta(U,B) - \delta(B,B) + [B_1 + iE - (U_1 + iE)]\,(B_1 + iE)^{-1}2B_2B_2^* =$$
$$= \delta(U,B) - \delta(B,B) - 2(U_1 - B_1)(B_1 + iE)^{-1}B_2B_2^*.$$

Подставляя это на свое место, получим:

$$\int\limits_{\mathcal{G}} f(U)P(U,B)\delta^{-1}(U,B)\left[\delta(U,B) - \delta(B,B) - 2(U_1 - B_1)(B_1 + iE)^{-1}B_2B_2^*\right] d\eta(U) =$$

$$= \int\limits_{\mathcal{G}} f(U)P(U,B)\delta^{-1}(U,B)\left[\delta(U,B)-\delta(B,B)\right]d\eta(U) -$$

$$-2\int\limits_{\mathcal{G}} f(U)P(U,B)\delta^{-1}(U,B)(U_1-B_1)(B_1+iE)^{-1}B_2B_2^*d\eta(U)=0.$$

Так как второй интеграл равен нулю, то

$$\int\limits_{\mathcal{G}} f(U)P(U,B)\delta^{-1}(U,B)\left[\delta(U,B)-\delta(B,B)\right]d\eta(U)=0,$$

и отсюда легко следует (3.13).

б). Имеем

$$\int\limits_{\mathcal{G}} f(U)P(U,B)\delta^{-1}(U,B)\left(iU_1-iB_1\right)\delta^{-1}(B,B)d\eta(U)=0. \tag{3.15}$$

Сделаем следующие преобразования:

$$iU_1-iB_1=iU_1-iB_1^*-(iB_1-iB_1^*)+2U_2B_2^*-$$

$$-2B_2B_2^*-2U_2B_2^*+2B_2B_2^*=\delta(U,B)-\delta(B,B)+2B_2B_2^*-2U_2B_2^*.$$

Подставим это в (3.15):

$$\int\limits_{\mathcal{G}} f(U)P(U,B)\delta^{-1}(U,B)\left[\delta(U,B)-\delta(B,B)+2B_2B_2^*-2U_2B_2^*\right]\delta^{-1}(B,B)d\eta(U)=$$

$$= \int\limits_{\mathcal{G}} f(U)P(U,B)\delta^{-1}(U,B)\left[\delta(U,B)-\delta(B,B)\right]\delta^{-1}(B,B)d\eta(U)+$$

$$+\int\limits_{\mathcal{G}} f(U)P(U,B)\delta^{-1}(U,B)\left[2B_2B_2^*-2U_2B_2^*\right]\delta^{-1}(B,B)d\eta(U)=0.$$

Следовательно,

$$\int\limits_{\mathcal{G}} f(U)P(U,B)\delta^{-1}(U,B)\left[2U_2B_2^*-2B_2B_2^*\right]d\eta(U)=$$

$$=\int\limits_{\mathcal{G}} f(U)P(U,B)\delta^{-1}(U,B)2U_2B_2^*d\eta(U)-\int\limits_{\mathcal{G}} f(U)P(U,B)\delta^{-1}(B,B)2B_2B_2^*d\eta(U)+$$

$$+\int\limits_{\mathcal{G}} f(U)P(U,B)\left[\delta^{-1}(B,B)-\delta^{-1}(U,B)\right]2B_2B_2^*d\eta(U)=0.$$

Так как последний интеграл согласно (3.13) равен нулю, отсюда следует (3.14). □

Введем следующий оператор дифференцирования:

$$\tilde{\partial}=\sum_{k=1}^{p}\sum_{s_1=1}^{p}\bar{b}^1_{ks_1}\frac{\partial}{\partial\bar{b}^1_{ks_1}}+\sum_{k=1}^{p}\sum_{s_2=1}^{q-p}\bar{b}^2_{ks_2}\frac{\partial}{\partial\bar{b}^2_{ks_2}}+i\sum_{k=1}^{p}\frac{\partial}{\partial\bar{b}^1_{kk}},$$

где $\bar{b}\,^l_{ij}$ — элементы матрицы B_l^*, $l=1,2$.

Лемма 3.4. *Справедливо равенство*

$$\tilde{\partial}P(U,B)=2pP(U,B)\left(\mathrm{Sp}\left[\left(\delta^{-1}(B,B)-\delta^{-1}(U,B)\right)(E-iB_1^*)\right]+\right.$$

$$\left.+\,2\mathrm{Sp}\left[\delta^{-1}(B,B)B_2B_2^*-\delta^{-1}(U,B)U_2B_2^*\right]\right),$$

где Sp *означает след матрицы.*

Доказательство. Вычисления показывают, что

$$\tilde{\partial}\det\delta(U,B) = p\det\delta(U,B) - i\sum_{k,s_1=1}^{p}\bar{b}^1_{ks_1}\delta(U,B)_{s_1k} + \sum_{k=1}^{m}\delta(U,B)_{kk} - i\sum_{k,s_1=1}^{p}(u^1_{s_1k} - \bar{b}^1_{ks_1})\delta(U,B)_{s_1k},$$

где $\delta(U,B)_{s_1k}$ — алгебраическое дополнение к s_1k-му элементу в матрице $\delta(U,B)$.

Аналогично

$$\tilde{\partial}\det\delta(B,B) = p\det\delta(B,B) - i\sum_{k,s_1=1}^{p}\bar{b}^1_{ks_1}\delta(B,B)_{s_1k} + \sum_{k=1}^{m}\delta(B,B)_{kk} - i\sum_{k,s_1=1}^{p}(b^1_{s_1k} - \bar{b}^1_{ks_1})\delta(B,B)_{s_1k}.$$

Тогда

$$\tilde{\partial}P(U,B) = 2pP(U,B)\times$$
$$\times\left(p - i\frac{\sum\limits_{k,s_1=1}^{p}\bar{b}^1_{ks_1}\delta(B,B)_{s_1k}}{\det\delta(B,B)} + \frac{\sum\limits_{k=1}^{p}\delta(B,B)_{kk}}{\det\delta(B,B)} - i\frac{\sum\limits_{k,s_1=1}^{p}(b^1_{s_1k} - \bar{b}^1_{ks_1})\delta(B,B)_{s_1k}}{\det\delta(B,B)} - \right.$$
$$\left. - p + i\frac{\sum\limits_{k,s_1=1}^{p}\bar{b}^1_{ks_1}\delta(U,B)_{s_1k}}{\det\delta(U,B)} + \frac{\sum\limits_{k=1}^{p}\delta(U,B)_{kk}}{\det\delta(U,B)} - i\frac{\sum\limits_{k,s_1=1}^{p}(u^1_{s_1k} - \bar{b}^1_{ks_1})\delta(U,B)_{s_1k}}{\det\delta(U,B)}\right) =$$
$$= 2pP(U,B)\left(-i\mathrm{Sp}\left[\delta^{-1}(B,B)B_1^*\right] + \mathrm{Sp}\delta^{-1}(B,B) - i\mathrm{Sp}\left[\delta^{-1}(B,B)(B_1 - B_1^*)\right] + \right.$$
$$\left. + i\mathrm{Sp}\left[\delta^{-1}(U,B)B_1^*\right] - \mathrm{Sp}\delta^{-1}(U,B) + i\mathrm{Sp}\left[\delta^{-1}(U,B)(U_1 - B_1^*)\right]\right) =$$
$$= 2pP(U,B)\left(\mathrm{Sp}\left[\delta^{-1}(B,B)(E - iB_1^*)\right] - \mathrm{Sp}\left[\delta^{-1}(U,B)(E - iB_1^*)\right] + \right.$$
$$\left. + 2\mathrm{Sp}\left[\delta^{-1}(B,B)B_2B_2^*\right] - 2\mathrm{Sp}\left[\delta^{-1}(U,B)U_2B_2^*\right]\right).$$

□

Из лемм 3.3 и 3.4 согласно условию (3.12) получаем

$$\tilde{\partial}F(B) = 0, \tag{3.16}$$

где $F(B) = \int\limits_{\mathcal{G}} f(U)P(U,B)d\eta(U)$ — интеграл Пуассона от функции f.

Функция $F(B)$ является вещественно-аналитической в области $\mathcal{D}$. Разложим ее в ряд Тейлора в окрестности точки $I = (I_1, \dots, I_p, \underbrace{\mathbf{0}\dots,\mathbf{0}}_{p\ \text{штук}})$, где I_k — p-мерный единичный вектор, у которого на k-м месте стоит i, а $\mathbf{0}$ — $(q-p)$-мерный нулевой вектор:

$$F(B) = \sum_{|\alpha|,|\beta|} c_{\alpha,\beta}\,(B - I)^{\alpha}\,\overline{(B - I)}^{\beta},$$

где α, β — мультииндексы:

$$|\alpha| = \sum_{l,k,j_l}\alpha^l_{kj_l},\ B^{\alpha} = \prod_{l,k,j_l} b_{kj_l}^{l,\alpha^l_{kj_l}}$$
$$(l = 1,2;\ k, j_1 = \overline{1,p};\ j_2 = \overline{1,q-p}).$$

Тогда согласно (3.16)

$$\tilde{\partial}F(B) = \sum_{|\alpha|,|\beta|} c_{\alpha,\beta}|\beta|c_{\alpha,\beta}\,(B - I)^{\alpha}\,\overline{(B - I)}^{\beta} = 0,$$

т. е. все коэффициенты $c_{\alpha,\beta}$ равны нулю при $|\beta| > 0$. Значит, все $\beta^l_{kj_l} = 0$. Следовательно, функция $F(B)$ голоморфна в области $\mathcal{D}$ и принадлежит классу $\mathcal{H}^{\infty}(\mathcal{D})$. □

Эта теорема допускает следующее обобщение.

Теорема 3.4. *Пусть f — непрерывная ограниченная функция на $\mathcal{G}$. Если для функции f выполнено условие* (3.5) *для всех автоморфизмов, переводящих точку $(iE, 0)$ в точки из некоторого открытого множества $\mathcal{V} \subset \mathcal{D}$, тогда f голоморфно продолжается в $\mathcal{D}$ до функции $F \in \mathcal{H}^\infty(\mathcal{D})$, непрерывной вплоть до $\mathcal{G}$.*

Обозначим

$$\Delta_\Psi = \{\Theta : \Theta = \Psi(\Omega_t)\},$$

где Ω_t определяется как в (3.4), а Ψ — автоморфизм области $\mathcal{D}$.

Следствие 3.1. *Пусть f — непрерывная и ограниченная функция на $\mathcal{G}$. Предположим, что функция f голоморфно продолжается в аналитические диски Δ_Ψ для всех автоморфизмов, переводящих точку $(iE, 0)$ в точки из некоторого открытого множества $\mathcal{V} \subset \mathcal{D}$. Тогда функция f голоморфно продолжается в $\mathcal{D}$ до функции $F \in \mathcal{H}^\infty(\mathcal{D})$, непрерывной вплоть до $\mathcal{G}$.*

Это следствие является аналогом для области $\mathcal{D}$ теоремы Стаута (см. [22]) о функциях с одномерным свойством голоморфного продолжения.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Беллман Р.* Введение в теорию матриц. — М.: Наука, 1976.
2. *Владимиров В.С.* Методы функций многих комплексных переменных. — М.: Наука, 1964.
3. *Зигель К.* Автоморфные функции нескольких комплексных переменных. — М.: ИЛ, 1954.
4. *Косбергенов С.* Голоморфные автоморфизмы и интеграл Бергмана для матричного шара// Докл. АН РУз. — 1998. — № 1. — С. 7–10.
5. *Косбергенов С., Кытманов А.М., Мысливец С.Г.* О граничной теореме Морера для классических областей// Сиб. мат. ж. — 1999. — *40*, № 3. — с. 595–604.
6. *Курбанов Б.Т.* О граничной теореме Морера// Докл. АН РУз. — 2001. — № 8-9. — С. 9–11.
7. *Кытманов А.М., Мысливец С.Г.* Об одном граничном аналоге теоремы Морера// Сиб. мат. ж. — 1995. — *36*, № 6. — С. 1350–1353.
8. *Пятецкий-Шапиро И.И.* Геометрия классических областей и теория автоморфных функций. — М.: Наука, 1961.
9. *Рудин У.* Теория функций в единичном шаре из $\mathbb{C}^n$. — М.: Мир, 1984.
10. *Фукс Б.А.* Специальные главы теории аналитических функций многих комплексных переменных. — М.: Физматгиз, 1962.
11. *Хуа Л.-К.* Гармонический анализ функций многих комплексных переменных в классических областях. — М.: ИЛ, 1959.
12. *Худайберганов Г., Курбанов Б.Т.* Формула Коши—Сеге для неограниченной реализации матричного шара// Вестн. НУУз. — 2006. — № 2. — С. 57-58.
13. *Худайберганов Г., Курбанов Б.Т.* Об одной реализации классической области первого типа// Узб. мат. ж. — 2014. — № 1. — С. 126–129.
14. *Худайберганов Г., Кытманов А.М., Шаимкулов Б.А.* Комплексный анализ в матричных областях. — Красноярск: Сибирский федеральный ун-т, 2011.
15. *Худайберганов Г., Хидиров Б.Б., Рахманов У.* Автоморфизмы матричных шаров// Вестн. НУУз. — 2010. — № 4. — С. 205–209.
16. *Шабат Б.В.* Введение в комплексный анализ. Ч. 2. — М.: Наука, 1985.
17. *Globevnik J.* A boundary Morera theorem// J. Geom. Anal. — 1993. — *3*, № 3. — С. 269–277.
18. *Globevnik J., Stout E.L.* Boundary Morera theorems for holomorphic functions of several complex variables// Duke Math. J. — 1991. — *64*, № 3. — С. 571–615.
19. *Grinberg E.* A boundary analogue of Morera's theorem on the unit ball of $\mathbb{C}^n$// Proc. Am. Math. Soc. — 1988. — *102*. — С. 114–116.
20. *Koranyi A.* The Poisson integral for the generalized half planes and bounded symmetric domains// Ann. Math. (2). — 1965. — *82*, № 2. — С. 332–350.
21. *Nagel A., Rudin W.* Moebius-invariant function spaces on balls and spheres// Duke Math. J. — 1976. — *43*, № 4. — С. 841–865.
22. *Stout E.L.* The boundary values of holomorphic functions of several complex variables// Duke Math. J. — 1977. — *44*, № 1. — С. 105–108.

Г.Х. Худайберганов
Национальный университет Узбекистана им. М. Улугбека, Ташкент, Узбекистан
E-mail: gkhudaiberg@mail.ru

Б. Т. Курбанов
Каракалпакский государственный университет им. Бердаха, Нукус, Узбекистан
E-mail: bukharbay@inbox.ru

DOI: 10.22363/2413-3639-2022-68-1-144-156 UDC 517.55

Some Problems of Complex Analysis in Matrix Siegel Domains

© 2022 **G. Kh. Khudaibergenov, B. T. Kurbanov**

Abstract. We give a review of recent results in multivariate complex analysis related to matrix Siegel domains.

REFERENCES

1. R. Bellman, *Vvedenie v teoriyu matrits* [Introduction to Matrix Analysis], Nauka, Moscow, 1976 (Russian translation).
2. V. S. Vladimirov, *Metody funktsiy mnogikh kompleksnykh peremennykh* [Methods of Functions of Several Complex Variables], Nauka, Moscow, 1964 (in Russian).
3. C. Siegel, *Avtomorfnye funktsii neskol'kikh kompleksnykh peremennykh* [Automorphic functions of several complex variables], IL, Moscow, 1954 (Russian translation).
4. S. Kosbergenov, "Golomorfnye avtomorfizmy i integral Bergmana dlya matrichnogo shara" [Holomorphic automorphisms and the Bergman integral for a matrix ball], *Dokl. AN RUz* [Rep. Acad. Sci. Usbekistan], 1998, No. 1, 7–10 (in Russian).
5. S. Kosbergenov, A. M. Kytmanov, and S. G. Myslivets, "O granichnoy teoreme Morera dlya klassicheskikh oblastey" [On Maurer's boundary theorem for classical domains], *Sib. mat. zh.* [Siberian Math. J.], 1999, **40**, No. 3, 595–604 (in Russian).
6. B. T. Kurbanov, "O granichnoy teoreme Morera" [On Maurer's boundary theorem], *Dokl. AN RUz* [Rep. Acad. Sci. Usbekistan], 2001, No. 8-9, 9–11 (in Russian).
7. A. M. Kytmanov and S. G. Myslivets, "Ob odnom granichnom analoge teoremy Morera" [On one boundary analog of Morera's theorem], *Sib. mat. zh.* [Siberian Math. J.], 1995, **36**, No. 6, 1350–1353 (in Russian).
8. I. I. Pyatetskiy-Shapiro, *Geometriya klassicheskikh oblastey i teoriya avtomorfnykh funktsiy* [Geometry of Classical Domains and the Theory of Automorphic Functions], Nauka, Moscow, 1961 (in Russian).
9. W. Rudin, *Teoriya funktsiy v edinichnom share iz* $\mathbb{C}^n$ [Function Theory in the Unit Ball of $\mathbb{C}^n$], Mir, Moscow, 1984 (in Russian).
10. B. A. Fuks, *Spetsial'nye glavy teorii analiticheskikh funktsiy mnogikh kompleksnykh peremennykh* [Special Chapters in the Theory of Analytic Functions of Several Complex Variables], Fizmatgiz, Moscow, 1962 (in Russian).
11. L. K. Hua, *Garmonicheskiy analiz funktsiy mnogikh kompleksnykh peremennykh v klassicheskikh oblastyakh* [Harmonic Analysis of Functions of Several Complex Variables in the Classical Domains], IL, Moscow, 1959 (Russian translation).
12. G. Khudayberganov and B. T. Kurbanov, "Formula Koshi—Sege dlya neogranichennoy realizatsii matrichnogo shara" [Cauchy–Szego formula for an unbounded realization of a matrix ball], *Vestn. NUUz* [Bull. Natl. Univ. Uzbekistan], 2006, No. 2, 57-58 (in Russian).
13. G. Khudayberganov and B. T. Kurbanov, "Ob odnoy realizatsii klassicheskoy oblasti pervogo tipa" [On one realization of the classical domain of the first type], *Uzb. mat. zh.* [Uzbek. Math. J.], 2014, No. 1, 126–129 (in Russian).

14. G. Khudayberganov, A. M. Kytmanov, and B. A. Shaimkulov, *Kompleksnyy analiz v matrichnykh oblastyakh* [Complex Analysis in Matrix Domains], Sibirskiy federal'nyy univ., Krasnoyarsk, 2011 (in Russian).
15. G. Khudayberganov, B. B. Khidirov, and U. Rakhmanov, "Avtomorfizmy matrichnykh sharov" [Automorphisms of matrix balls], *Vestn. NUUz* [Bull. Natl. Univ. Uzbekistan], 2010, No. 4, 205–209 (in Russian).
16. B. V. Shabat, *Vvedenie v kompleksnyy analiz. Ch. 2* [Introduction to Complex Analysis. V. 2], Nauka, Moscow, 1985 (in Russian).
17. J. Globevnik, "A boundary Morera theorem," *J. Geom. Anal.*, 1993, **3**, No. 3, 269–277.
18. J. Globevnik and E. L. Stout, "Boundary Morera theorems for holomorphic functions of several complex variables," *Duke Math. J.*, 1991, **64**, No. 3, 571–615.
19. E. Grinberg, "A boundary analogue of Morera's theorem on the unit ball of $\mathbb{C}^n$," *Proc. Am. Math. Soc.*, 1988, **102**, 114–116.
20. A. Koranyi, "The Poisson integral for the generalized half planes and bounded symmetric domains," *Ann. Math.* (2), 1965, **82**, No. 2, 332–350.
21. A. Nagel and W. Rudin, "Moebius-invariant function spaces on balls and spheres," *Duke Math. J.*, 1976, **43**, No. 4, 841–865.
22. E. L. Stout, "The boundary values of holomorphic functions of several complex variables," *Duke Math. J.*, 1977, **44**, No. 1, 105–108.

G. Kh. Khudaibergenov
National University of Uzbekistan, Tashkent, Uzbekistan
E-mail: gkhudaiberg@mail.ru

B. T. Kurbanov
Karakalpak State University, Nukus, Uzbekistan
E-mail: bukharbay@inbox.ru