Современная математика. Фундаментальные направления. Том 68, № 1 (2022). С. 127–143
Contemporary Mathematics. Fundamental Directions. ISSN 2413-3639 (Print)

DOI: 10.22363/2413-3639-2022-68-1-127-143 УДК 517.55

ГОЛОМОРФНОЕ ПРОДОЛЖЕНИЕ ФУНКЦИЙ ВДОЛЬ ФИКСИРОВАННОГО НАПРАВЛЕНИЯ (ОБЗОР)

© 2022 г. **А.С. САДУЛЛАЕВ**

Аннотация. В этой статье мы даем обзор наиболее весомых и важных результатов по голоморфным продолжениям функций вдоль фиксированного направления. Мы останавливаемся на следующих по характеру геометрических вопросах многомерного комплексного анализа:

- голоморфное продолжение формальных рядов вдоль пучка прямых, теорема Форелли;
- голоморфное продолжение функций, имеющих тонкую особенность вдоль фиксированного направления;
- голоморфное продолжение функций вдоль семейства аналитических кривых.

ОГЛАВЛЕНИЕ

1. Введение

Классическая теорема Хартогса утверждает, что если функция $f\left('z,z_n\right)$ голоморфна в поликруге $'U\times\{|z_n|<r_n\}$, $r_n>0$ и такова, что при каждом фиксированном $'z^0\in{}'U$ функция $f\left('z^0,z_n\right)$ голоморфная по z_n в круге $\{|z_n|<r_n\}$, голоморфно продолжается в больший круг $\{|z_n|<R_n\}$, $R_n>r_n$, то $f\left('z,z_n\right)$ по совокупности переменных $\left('z,z_n\right)$ голоморфно продолжается в поликруг $'U\times\{|z_n|<R_n\}$.

Теорема Хартогса, доказанная в начале прошлого века, развивалась и обобщалась во многих направлениях. В литературе имеются богатый набор статей и монографий, содержащих такие обобщения и их применения в различных направлениях математики. В этой работе мы вкратце останавливаемся на следующих, наиболее весомых и важных частях дальнейшего продвижения теорем типа Хартогса:

- голоморфное продолжение формальных рядов вдоль пучка прямых (теорема Форелли);
- голоморфное продолжение функций, имеющих тонкую особенность вдоль фиксированного направления (теорема Чирки—Садуллаева);
- голоморфное продолжение функций вдоль семейства аналитических кривых.

Основным методом изучения рассматриваемых вопросов является теория плюрипотенциала, объекты и методы этой теории, такие как плюригармонические меры, функции Грина, емкости и др.

Поэтому в разделе 2 мы коротко напомним основы теории плюрипотенциала (подробнее с этой теорией можно ознакомиться, например, в [6, 7, 9, 21]).

2. Элементы теории плюрипотенциала

Классическая теория потенциала основывается на субгармонических функциях и операторе Лапласа Δ. Построенная в 80-х годах теория плюрипотенциала, основанная на плюрисубгармонических (psh) функциях, связана с оператором Монжа—Ампера $(dd^c u)^n$, где, как обычно, $d = \partial + \overline{\partial}$, $d^c = i\left(\overline{\partial} - \partial\right)$. Теория построена благодаря исследованиям многочисленных авторов, успешно развивается и применяется в различных направлениях науки (см. [1–35] и библиографию).

Для дважды гладкой функции $u \in C^2(G)$, $G \subset \mathbb{C}^n$, по определению

$$(dd^c u)^k = \underbrace{dd^c u \wedge dd^c u \wedge \ldots \wedge dd^c u}_{k \text{ раз}}$$

представляет собой дифференциальную форму бистепени (k, k). Нетрудно доказать, что

$$(dd^c u)^n = \pi^n n! \det\left(\frac{\partial^2 u}{\partial z_j \partial \bar{z}_k}\right) \beta_n,$$

где $\beta_n = \left(\frac{i}{2}\right)^n \prod\limits_{j=1}^{n} dz_j \wedge d\bar{z}_j$ — форма объема в пространстве $\mathbb{C}^n$.

Оператор $(dd^c u)^k$ для произвольной ограниченной плюрисубгармонической функции, $-M \leqslant u(z) \leqslant M$, $M = const$, определяется в обобщенном смысле, в виде потока. Рекуррентное соотношение

$$\int (dd^c u)^k \wedge \phi = \int u\,(dd^c u)^{k-1} \wedge dd^c \phi, \quad \phi \in D^{(n-k,n-k)}(G), \quad k = 1, 2, \ldots, n, \tag{2.1}$$

где $D^{(n-k,n-k)}(G)$ — пространство бесконечно гладких финитных дифференциальных форм бистепени $(n-k, n-k)$, определяет $(dd^c u)^k$ как положительный поток бистепени (k, k). Фундаментальная теорема теории плюрипотенциала утверждает слабую сходимость потоков $(dd^c u_j)^k$ для монотонно убывающей локально ограниченной последовательности psh функций: если $u_j(z) \in psh(G) \bigcap L^\infty_{loc}(G)$, $u_j(z) \downarrow u(z)$, то $(dd^c u_j)^k \mapsto (dd^c u)^k$. Это обстоятельство позволяет применять поток типа меры $(dd^c u)^k$ в классе $u(z) \in psh(G) \bigcap L^\infty_{loc}(G)$ таким же успехом, что и дифференциальную форму $(dd^c u)^k$ в классе $u(z) \in psh(G) \bigcap C^2(G)$.

Для подмножества $E \subset G$ области $G \subset \mathbb{C}^n$ определим $\mathcal{P}$-меру. Положим

$$\omega(z, E, G) = \sup\left\{u(z) \in psh(G) : \ u|_E \leqslant -1, \ u|_G < 0\right\}.$$

Тогда регуляризация $\omega^*(z, E, G) = \overline{\lim\limits_{w \to z}}\, \omega(z, E, G)$ называется *$\mathcal{P}$-мерой* множества E относительно области G. Для содержательной теории обычно предполагают, что область G-регулярная, что существует функция $\rho(z) \in psh(G)$ такая, что $\rho|_G < 0$, $\lim\limits_{z \to \partial G} \rho(z) = 0$. При таком предположении $\mathcal{P}$-мера $\omega^*(z, E, G)$ либо нигде не равна нулю, $-1 \leqslant \omega^*(z, E, G) < 0$, либо $\omega^*(z, E, G) \equiv 0$. Последнее имеет место тогда и только тогда, когда E плюриполярно в G, т. е. существует плюрисубгармоническая функция $\sigma(z) \not\equiv -\infty$ такая, что $\sigma|_E \equiv -\infty$. В применениях, особенно в оценках голоморфных функций, часто используются следующая теорема о двух константах: если $u \in psh(G)$, $u|_G \leqslant M$, $u|_E \leqslant m$, то

$$u(z) \leqslant M\left(1 + \omega * (z, E, G)\right) - m\omega * (z, E, G) \ \ \forall z \in G. \tag{2.2}$$

Неравенство (2.2) содержательно, когда E не является плюриполярным множеством, т. е. когда $\omega^* \not\equiv 0$.

Аналогично гармоническим функциям в классической теории потенциала, локально ограниченная плюрисубгармоническая функция $u(z) \in psh(G) \bigcap L^\infty_{loc}(G)$ называется *максимальной функцией*, если для нее оператор Монжа—Ампера $(dd^c u)^n = 0$. При $n = 1$ оператор Монжа—Ампера $dd^c u = 4\Delta u dx \wedge dy$. Следовательно, максимальные функции при $n = 1$ являются гармоническими, и поэтому они являются бесконечно гладкими. В отличие от классического случая $n = 1$, при

$n > 1$ максимальные функции не обязательно гладкие; они могут быть даже разрывными. Тем не менее, имеет место следующая теорема.

Теорема 2.1. *Для любого компакта $K \subset G$ плюрисубгармоническая функция $\omega^*(z,K,G)$ является максимальной, $(dd^c\omega^*(z,K,G))^n = 0$ в области $G \backslash K$.*

Далее, функция $\omega(z,K,G)$, которая заведомо равна -1 в точках $z \in K$, при регуляризации, возможно, терпит скачок: в некоторых точках $z^0 \in K$, может оказаться, что $\omega\left(z^0,K,G\right) > -1$. Такие точки называются *(плюри)иррегулярными точками* компакта K. Если совокупность иррегулярных точек $I_K = \left\{z^0 \in K: \ \omega^*\left(z^0,K,G\right) > -1\right\} = \varnothing$, т. е. все точки компакта K плюрирегулярны, то K называется *плюрирегулярным компактом*. Плюрирегулярные компакты играют важную роль в теории плюрипотенциала. Для них справедлива следующая теорема.

Теорема 2.2. *Если K — плюрирегулярный компакт в плюрирегулярной области $G \subset \mathbb{C}^n$, то $\mathcal{P}$-мера $\omega^*(z,K,G)$ является непрерывной функцией в G.*

Величина

$$C(K,G) = \int\limits_K (dd^c\omega^*)^n = \int\limits_G (dd^c\omega^*)^n$$

называется *емкостью* (K,G). Для открытого множества $U \subset G$ его емкость определяется как $C(U,G) = \sup\{C(K,G) : K \subset U, \ K - \text{компакт}\}$. И наконец, величина $C^*(E,G) = \inf\{C(U,G) : U \supset E, \ U - \text{открытое}\}$ называется *внешней емкостью* произвольного множества $E \subset G$.

Внешняя емкость $C^*(E,G)$ множества $E \subset G$ неотрицательна, $C^*(E,G) \geqslant 0$, причем она равна нулю, $C^*(E,G) = 0$, тогда и только тогда, когда E — плюриполярное. Более того, функция множества $C^*(E,G)$ удовлетворяет всем условиям измеримости Шоке, и борелевские множества являются измеримыми относительно $C(E,G)$: если $E \subset G$ — борелевское множество, то его внутренняя и внешняя емкости совпадают,

$$C^*(E,G) = C_*(E,G) = \sup\{C(K,G): \ K \subset E, \ K - \text{компакт}\}.$$

В описаниях голоморфных оболочек большую роль играет функция Грина в $\mathbb{C}^n$. Для множества $E \subset \mathbb{C}^n$ функция Грина $V(z,E)$ определяется с помощью класса Лелона

$$L = \{u(z) \in psh(\mathbb{C}^n): \quad u(z) \leqslant \alpha + \ln(1+|z|) \ \ \forall z \in \mathbb{C}^n, \ \ \alpha = \alpha(u) = \text{const}\}.$$

Положим $V(z,E) = \sup\{u(z) \in L: \ \ u|_E \leqslant 0\}$; тогда регуляризация $V^*(z,E)$ называется *обобщенной функцией Грина*, или просто *функцией Грина*. Функция $V^*(z,E) \geqslant 0$ либо принадлежит классу L, либо $V^*(z,E) \equiv +\infty$. Последнее имеет место тогда и только тогда, когда E является плюриполярным множеством. Функция $V^*(z,E)$ является монотонной функцией по E : из $E_1 \subset E_2$ следует $V^*(z,E_1) \geqslant V^*(z,E_2)$. Если открытое множество $U \subset \mathbb{C}^n$ представляется в виде объединения возрастающей последовательности компактов, $U = \bigcup\limits_{j=1}^{\infty} K_j, \ K_j \subset K_{j+1}$, то $V^*(z,U) = \lim\limits_{j\to\infty} V^*(z,K_j)$. Для произвольного множества $E \subset \mathbb{C}^n$ существует убывающая последовательность открытых множеств

$$U_1 \supset U_2 \supset \ldots, \quad U_j \supset E: \quad V^*(z,E) = \left[\lim_{j\to\infty} V^*(z,U_j)\right]^*.$$

Для плюрирегулярных компактов $K \subset \mathbb{C}^n$, $V^*(z,\,K)\,|_K \equiv 0$, функция Грина является непрерывной во всем $\mathbb{C}^n$. В этом случае открытое множество $\{V^*(z,K) < \beta\}$ содержит внутри себя компакт K, $K \subset \{V^*(z,K) < \beta\}$ $\forall \beta > 0$.

Для любого полинома $P_m(z)$, $\deg P \leqslant m$, функция $\dfrac{1}{m}\ln|P(z)| \in L$. Следовательно, справедливо неравенство Бернштейна—Уолша

$$\frac{1}{m}\ln|P(z)| \leqslant \frac{1}{m}\ln\|P(z)\|_K + V(z,K). \tag{2.3}$$

Совокупность всех функций вида $\dfrac{1}{\deg P}\ln|P(z)|$, где $P(z)$ – полиномы в $\mathbb{C}^n$, является собственным подклассом L. Следовательно,

$$V(z,K)\geqslant\sup\left\{\frac{1}{\deg P}\ln|P(z)|:\ \ \|P\|_K\leqslant 1\right\}. \tag{2.4}$$

На самом деле, в (2.4) имеет место знак равенства.

Теорема 2.3. *Для любого компакта $K\subset\mathbb{C}^n$ имеет место равенство*

$$V(z,K)=\sup\left\{\frac{1}{\deg P}\ln|P(z)|:\ \ \|P\|_K\leqslant 1,\ P-\textit{полиномы}\right\}. \tag{2.5}$$

Ниже нам понадобится также функция Грина круговых компактов. Пусть $K\subset\mathbb{C}^n$ — круговой компакт, т. е. с каждой точкой $z^0\in K$ компакт K содержит все точки вида $e^{i\phi}z^0$, $\phi\in\mathbb{R}$. Из (2.5) вытекает, что функция Грина $V(z,K)$ кругового компакта K совпадает с функцией Грина $V\left(z,\hat{K}\right)$ полиномиальной выпуклой оболочки $\hat{K}$, которая является полным круговым компактом.

Теорема 2.4. *Пусть $K\subset\mathbb{C}^n$ — круговой компакт. Тогда*

$$V(z,K)=\sup\left\{\frac{1}{\deg P}\ln|P(z)|:\ \ \|P\|_K\leqslant 1,\ P-\textit{полиномы}\right\}=$$
$$=\sup\left\{\frac{1}{\deg Q}\ln|Q(z)|:\ \ \|Q\|_K\leqslant 1,\ Q-\textit{однородные полиномы}\right\}.$$

Доказательство. Доказательство теоремы проводим в два шага.

Шаг 1 (см. [6, 7]). Для кругового компакта $K\subset\mathbb{C}^n$ полиномиально выпуклая оболочка $\hat{K}$ совпадает с выпуклой оболочкой $\tilde{K}$ относительно однородных полиномов. В самом деле, для этого нужно показать, что если $z^0\in\tilde{K}$, т. е. если $\left|Q\left(z^0\right)\right|\leqslant\|Q\|_K$ для всех однородных полиномов Q, то это неравенство выполняется и для всех полиномов $P(z)$.

Фиксируем полином $P(z)=\sum\limits_{j=0}^{m}Q_j(z)$, $m=\deg P$, такой, что $\|P\|_K\leqslant 1$. Для любой комплексной прямой l, заданной формулой $z=\lambda\xi$, где $\lambda\in\mathbb{C}^n$ фиксирована, $\|\lambda\|=1$ и $\xi\in\mathbb{C}$ — параметр, пересечение $l\bigcap K$ представляет собой круг $\{|\xi|\leqslant r(l)\}$. Применяя неравенство Коши для сечения $P(z)|_l=\sum\limits_{j=0}^{m}Q_j(\lambda)\,\xi^m$, мы получим $|Q_j(\lambda)|\leqslant\dfrac{1}{r^j(l)}$, $j=0,1,\ldots,m$. Отсюда $|Q_j(\lambda)\,r(l)|\leqslant 1$, что эквивалентно неравенству $\|Q_j\|_{K\bigcap l}\leqslant 1$. Следовательно, $\|Q_j\|_K\leqslant 1$, $j=0,1,\ldots,m$, и при фиксированном $\sigma<1$ справедливо $\left|P\left(\sigma z^0\right)\right|\leqslant\sum\limits_{j=0}^{m}\left|Q_j\left(z^0\right)\right|\,\sigma^j\leqslant\dfrac{1}{1-\sigma}$. Это неравенство выполняется для любого полинома R такого, что $\|R\|_K=1$, в частности, для P^k, $k\in\mathbb{N}$, т. е. $\left|P^k\left(\sigma z^0\right)\right|\leqslant\dfrac{1}{1-\sigma}$, или $\left|P\left(\sigma z^0\right)\right|\leqslant\dfrac{1}{(1-\sigma)^{1/k}}$. Устремив сначала $k\to\infty$, а затем $\sigma\to 1$, получаем $\left|P\left(z^0\right)\right|\leqslant 1$.

Шаг 2. Достаточно доказать теорему для полиномиально выпуклого компакта $\hat{K}=K$. Положим

$$V_O(z,K)=\sup\left\{\frac{1}{\deg Q}\ln|Q(z)|:\ \ \|Q\|_K\leqslant 1,\ Q-\text{однородные полиномы}\right\}.$$

Тогда с одной стороны $V_O(z,K)\leqslant V(z,K)$. С другой стороны, фиксируем число $\varepsilon>0$, точку $z^0\in\mathbb{C}^n\backslash K$ и находим полином $P_m(z)=\sum\limits_{j=0}^{m}Q_j(z)$, $m=\deg P_m$, такой, что

$$\|P_m\|_K\leqslant 1,\quad V\left(z^0,K\right)-\frac{1}{m}\ln\left|P_m\left(z^0\right)\right|<\varepsilon. \tag{2.6}$$

Рассматривая сечения $P_m|_l=P_m(\lambda\xi)=\sum\limits_{j=0}^{m}Q_j(\lambda)\,\xi^j$ на комплексные прямые l вида $z=\lambda\xi$, $\lambda\in\mathbb{C}^n$, $\xi\in\mathbb{C}$, как выше, по неравенствам Коши мы получаем, что $\|Q_j\|_K\leqslant 1$, $j=0,1,\ldots,m$. Из

$P_m(z) = \sum\limits_{j=0}^{m} Q_j(z)$, $V\left(z^0, K\right) - \dfrac{1}{m}\ln\left|P_m\left(z^0\right)\right| < \varepsilon$ вытекает, что хотя бы для одного $0 \leqslant j_0 \leqslant m$

$$P_m(z) = \sum_{j=0}^{m} Q_j(z), \quad \left|Q_{j_0}\left(z^0\right)\right| \geqslant \frac{\left|P_m\left(z^0\right)\right|}{m}$$

и

$$V\left(z^0, K\right) - \frac{1}{m}\ln\left|mQ_{j_0}\left(z^0\right)\right| < \varepsilon. \tag{2.7}$$

Так как $\|Q_{j_0}\|_K \leqslant 1$ и $j_0 \leqslant m$, то $\dfrac{1}{m}\ln\left|Q_{j_0}\left(z^0\right)\right| \leqslant V_O\left(z^0, K\right)$. Следовательно, согласно (2.7),

$$V\left(z^0, K\right) - V_O\left(z^0, K\right) = V\left(z^0, K\right) - \frac{1}{m}\ln\left|mQ_{j_0}\left(z^0\right)\right| + \frac{\ln m}{m} \leqslant \varepsilon + \frac{\ln m}{m}.$$

Здесь $\varepsilon > 0$ мы можем взять сколь угодно маленькой, а $m = \deg P_m$ — сколь угодно большой. Отсюда $V\left(z^0, K\right) \leqslant V_O\left(z^0, K\right)$, и вместе с $V_O(z, K) \leqslant V(z, K)$ получаем, что $V_O(z, K) = V(z, K)$. Теорема доказана. □

Следствие 2.1. *Если K — круговой компакт, принадлежащий замкнутому единичному шару $\|z\| \leqslant 1$, то*

$$\hat{K} = \left\{z: \ |z| \cdot \exp V\left(\frac{z}{|z|}, \ K\right) \leqslant 1\right\}.$$

Доказательство. Действительно, для любого однородного полинома Q_m, $\|Q_m\|_K \leqslant 1$ имеем

$$\left|Q_m\left(\frac{z}{|z|}\right)\right|^{1/m} \leqslant \exp V\left(\frac{z}{|z|}, K\right).$$

Отсюда

$$|Q_m(z)| = |z|^m \left|Q_m\left(\frac{z}{|z|}\right)\right| \leqslant \left[|z| \exp V\left(\frac{z}{|z|}, K\right)\right]^m$$

и, значит,

$$\tilde{K} \supset \left\{z: |z| \exp V\left(\frac{z}{|z|}, K\right) \leqslant 1\right\}.$$

Так как, согласно шагу 1 доказательства теоремы 2.4, имеет место $\tilde{K} = \hat{K}$, то

$$\hat{K} \supset \left\{z: |z| \exp V\left(\frac{z}{|z|}, K\right) \leqslant 1\right\}.$$

На самом деле, здесь вместо включения $\supset$ будет знак равенства $=$, поскольку компакт, стоящий в правой части, является полиномиально выпуклым. □

Следствие 2.2 (ср. [18]). *Если круговой компакт K принадлежит единичной сфере $S(0,1)$, то полиномиально выпуклая оболочка $\hat{K}$ содержит шар $|z| \leqslant \exp\left[-\sup\limits_{|\xi|=1} V(\xi, K)\right]$.*

Доказательство. Вытекает из следствия 2.1. □

Следствие 2.3. *Для кругового компакта $K \subset \mathbb{C}^n$ имеет место тождество $\exp V(Rz, K) = R\exp V(z, K) \ \ \forall z \notin \hat{K} \bigcap R\hat{K}$.*

Доказательство. В самом деле, можно считать, что K — полиномиально выпуклый, $K = \hat{K}$ и $R > 1$. Тогда для $z \notin \hat{K}$ согласно теореме 2.4

$$\exp V(Rz, K) = \sup\left\{|Q(Rz)|^{1/\deg Q}: \ \|Q\|_K \leqslant 1, \ Q \text{ — однородные полиномы}\right\} =$$

$$= \sup\left\{|Q(Rz)|^{1/\deg Q}: \ \|Q\|_K \leqslant 1, \ Q \text{ — однородные полиномы } \deg Q \geqslant 1\right\} =$$

$$= \sup\left\{R\,|Q(z)|^{1/\deg Q}: \ \|Q\|_K \leqslant 1, \ Q \text{ — однородные полиномы } \deg Q \geqslant 1\right\} =$$

$$= R\sup\left\{|Q(z)|^{1/\deg Q}: \ \|Q\|_K \leqslant 1, \ Q \text{ — однородные полиномы}\right\} = R\exp V(z, K).$$

т. е. $\exp V(Rz, K) = R\exp V(z, K) \ \ \forall z \notin \hat{K}$. □

Следствие 2.4. *Для кругового компакта* $K \subset \mathbb{C}^n$ *имеет место тождество* $\exp V(z, RK) = R^{-1}\exp V(z, K) \ \ \forall z \notin \hat{K} \bigcap R\hat{K}$.

Доказательство. Действительно, считая опять K полиномиально выпуклым, $K = \hat{K}$ и $R > 1$, для $z \notin \hat{K}$ согласно теореме 2.4 имеем

$$\exp V(Rz, RK) = R\exp V(z, RK), \ \ z \notin RK.$$

Очевидно, $\exp V(Rz, RK) = \exp V(z, K)$. Отсюда $\exp V(z, RK) = R^{-1}\exp V(z, K) \ \ \forall z \notin R\hat{K}$. □

3. Сходимость формальных рядов Хартогса

1. Рассмотрим формальный ряд Хартогса

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k('z)\ z_n^k, \tag{3.1}$$

где $c_k('z)$ — голоморфные функции в некоторой области $'D \subset \mathbb{C}^{n-1}$. Этот ряд — формальный в том смысле, что пока не понятно, где и как он сходится. Предположим, что при каждом фиксированном $'z \in {'D}$ ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k('z)\ z_n^k$ сходится в круге $|z_n| < R('z^0)$. Мы предполагаем, что $R('z)$ является максимальным радиусом сходимости,

$$R^{-1}('z) = \overline{\lim_{k\to\infty}} \sqrt[k]{|c_k('z)|}.$$

Если ряд (3.1) равномерно сходится в некоторой окрестности плоскости $\{z_n = 0\}$, т. е. сумма ряда $f('z, z_n)$ голоморфна в окрестности $\{z_n = 0\}$, то, как известно, $f('z, z_n)$ голоморфно продолжается в область

$$D = \{'z \in {'D}: \ \ |z_n| < R_*('z)\}, \tag{3.2}$$

где $R_*('z) = \underline{\lim}_{'w\to z} R(z)$ — нижняя регуляризация функции $R('z)$. Отметим, что $-\ln R_*('z) \in psh('D)$, причем множество $\{'z \in {'D}: \ \ R_*('z) < R('z)\}$ — плюриполярное.

Без условия сходимости ряда (3.1) в некоторой окрестности плоскости $\{z_n = 0\}$ по совокупности переменных голоморфное продолжение функции $f('z, z_n)$ в область типа (3.2), вообще говоря, не имеет места.

Пример 3.1. Берем последовательность компактов

$$K_m = K_m^1 \bigcup K_m^2 \subset \mathbb{C}, \quad K_m^1 = \left\{|z_1| \leqslant 1, \ \frac{1}{m} \leqslant \arg z_1 \leqslant 2\pi\right\},$$

$$K_m^2 = \left\{\frac{1}{m} \leqslant |z_1| \leqslant 1, \ \arg z_1 = \frac{1}{2m}\right\}, \quad m = 1, 2, \ldots$$

Тогда непрерывная на компакте K_m функция

$$g_m(z) = \begin{cases} \dfrac{1}{m!}, & \text{если } z_1 \in K_m^1, \\ m!, & \text{если } z_1 \in K_m^2, \end{cases}$$

равномерно на K_m приближается полиномами, т. е. существует полином $P_m(z_1)$ такой, что $\|g_m - P_m\|_{K_m} \leqslant \dfrac{1}{m!}$. Ряд

$$f(z_1, z_2) = \sum_{m=1}^{\infty} P_m(z_1)\ z_2^m$$

обладает тем свойством, что при любом фиксированном z_1^0 таком, что $|z_1^0| < 1$, он сходится на всей плоскости $|z_2| < \infty$, но его сумма $f(z_1, z_2)$ не является голоморфной на множестве $S = \{|z_1| < 1, \ \arg z_1 = 0\} \subset \mathbb{C}^2$.

Тем не менее, имеет место следующая теорема.

Теорема 3.1 (см. [12, 35]). *Рассмотрим ряд Хартогса*

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k\left('z\right) z_n^k$$

с голоморфными в области $'D \subset \mathbb{C}^{n-1}$ *коэффициентами* $c_k\left('z\right),\ k = 0, 1, \ldots$ *Предположим, что радиус сходимости ряда положителен при каждом фиксированном* $'z \in {}'D$, *т. е.* $R\left('z\right) = 1/\overline{\lim\limits_{k\to\infty}} \sqrt[k]{\left|c_k\left('z\right)\right|} > 0\ \forall 'z \in {}'D$.

Тогда существует нигде не плотное замкнутое множество $'S \subset {}'D$ *такое, что*

а). $-\ln R_*\left('z\right) \in psh\left('D \backslash 'S\right)$;

б). *сумма ряда голоморфна по совокупности переменных в*

$$\left\{'z \in {}'D \backslash S,\ |z_n| < R_*\left('z\right)\right\}.$$

Отметим, что без условия $R\left('z\right) > 0\ \forall 'z \in {}'D$ теорема 3.1, вообще говоря, не верна.

Пример 3.2. Пусть $K = \{|z_1| \leqslant 1\}$ — замкнутый единичный круг на комплексной плоскости $\mathbb{C}_{z_1}$. Берем последовательность полиномиально выпуклых компактов

$$F_m = \left\{z_1 \in \mathbb{C}:\ 1 + \frac{1}{m} \leqslant |z_1| \leqslant m,\ 0 \leqslant \arg z_1 \leqslant 2\pi - \frac{1}{m}\right\}.$$

Тогда $F_m \subset F_{m+1}$ и $\bigcup\limits_{m=1}^{\infty} F_m = \mathbb{C} \backslash K$. Более того, компакты $F_m \bigcup K$ полиномиально выпуклы. Положим

$$g_m\left(z_1\right) = \begin{cases} m!, & \text{если } z_1 \in F_m \\ \dfrac{1}{m!}, & \text{если } z_1 \in K. \end{cases}$$

По теореме Мергеляна эти функции равномерно на $F_m \bigcup K$ приближаются полиномами, т. е. существуют полиномы $p_m\left(z_1\right)$ такие, что

$$\left\|g_m\left(z_1\right) - p_m\left(z_1\right)\right\|_{K \bigcup F_m} < \frac{1}{m!},\ \ m = 1, 2, \ldots$$

Рассмотрим формальный ряд

$$f\left(z_1, z_2\right) = \sum_{m=1}^{\infty} p_m\left(z_1\right) z_2^m.$$

Этот ряд сходится на всей плоскости $\mathbb{C}_{z_2}$ для любой фиксированной точки $z_1 \in K$, и его сумма голоморфна в $\{|z_1| < 1\} \times \mathbb{C}_{z_2}$. Но радиус сходимости ряда $R\left(z_1\right) = 0$ для всех $z_1 \in \mathbb{C} \backslash K$, и ряд не определяет голоморфную функцию в $\left[\mathbb{C}_{z_1} \backslash K\right] \times \mathbb{C}_{z_2}$.

2. Для формальных рядов на пучке комплексных прямых ситуация более естественная. Пусть на пучке комплексных прямых $\{l:\ z = \lambda\xi,\ \lambda \in \mathbb{C}^n,\ \xi \in \mathbb{C}\} \approx P^{n-1}$ определен формальный ряд

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k\left(\lambda\right) \xi^k = \sum_{k=0}^{\infty} c_k\left(\lambda\xi\right) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k\left(z\right), \tag{3.3}$$

где $c_k\left(z\right)$ — однородные многочлены в $\mathbb{C}^n$.

Теорема 3.2 (см. [7]). *Если для каждой комплексной прямой из некоторого пучка* $\Im \subset \{l:\ z = \lambda\xi,\ \lambda \in \mathbb{C}^n,\ \xi \in \mathbb{C}\}$ *ряд* (3.3) *сходится в круге* $l \bigcap B\left(0, 1\right)$, *то этот ряд сходится в открытом множестве* $G = \left\{z \in \mathbb{C}^n:\ |z| \cdot \exp V^*\left(\frac{z}{|z|}, E\right) < 1\right\}$. *Здесь* $E = \bigcup\limits_{l \in \Im} l \bigcap B\left(0, 1\right)$.

Доказательство. В самом деле, без нарушения общности считаем, что $\Im$ совпадает с совокупностью всех комплексных прямых l, для которых ряд (3.3) сходится в круге $l \bigcap B\left(0, 1\right)$. Фиксируем $\varepsilon > 0$ и положим

$$F_N = \left\{\lambda \in S\left(0, 1\right):\ \left|\sum_{k=0}^{\infty} c_k\left(\lambda\right) \xi^k\right| \leqslant N \ \text{ при } \ |\xi| \leqslant 1 - \varepsilon\right\}.$$

По неравенствам Коши $|c_k(\lambda)| \leqslant \dfrac{N}{(1-\varepsilon)^k}$, $\lambda \in F_N$, $k = 0, 1, \ldots$ Следовательно, по неравенству Бернштейна—Уолша имеем

$$|c_k(\lambda)| \leqslant \frac{N}{(1-\varepsilon)^k} \left[\exp V^*(\lambda, F_N)\right]^k, \ \lambda \in \mathbb{C}^n, \ k = 0, 1, \ldots$$

В частности, для $\lambda = \dfrac{z}{|z|} \in S(0,1)$

$$\left|c_k\left(\frac{z}{|z|}\right)\right| \leqslant \frac{N}{(1-\varepsilon)^k} \left[\exp V^*\left(\frac{z}{|z|}, F_N\right)\right]^k, \ z \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\},$$

что эквивалентно неравенству

$$|c_k(z)| \leqslant \frac{N}{(1-\varepsilon)^k} \left[|z| \exp V^*\left(\frac{z}{|z|}, F_N\right)\right]^k, \ z \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}, \ k = 0, 1, \ldots$$

Отсюда вытекает, что однородный ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k(z)$ сходится в

$$G_{N,\varepsilon} = \left\{z \in \mathbb{C}^n : \ |z| \cdot \exp V^*\left(\frac{z}{|z|}, F_N\right) < 1 - 2\varepsilon\right\}.$$

Отметим, что множество F_N является замкнутым круговым компактом на сфере $S(0,1)$, причем $F_N \subset F_{N+1}$, $N = 1, 2, \ldots$ и $\bigcup\limits_{N=1}^{\infty} \hat{F}_N = E$. Следовательно, устремив сначала $N \to \infty$, а затем $\varepsilon \to 0$, мы получаем сходимость ряда $\sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k(z)$ внутри открытого множества $G = \Big\{z \in \mathbb{C}^n : |z| \cdot \exp V^*\Big(\dfrac{z}{|z|}, E\Big) < 1\Big\}$. □

Замечание 3.1. Если $f(z)$ — какая-либо функция, бесконечно гладкая в окрестности нуля, $f(z) \in C^\infty\{0\}$, то ей соответствует формальный степенной ряд

$$f \sim \sum_{|I|+|J|=0}^{\infty} c_{IJ} z^I \bar{z}^J, \tag{3.4}$$

где $I = (i_1, i_2, \ldots, i_n)$ и $J = (j_1, j_2, \ldots, j_n)$ — мультииндексы, $|I| = i_1 + i_2 + \ldots + i_n$, $|J| = j_1 + j_2 + \ldots + j_n$, $z^I = z_1^{i_1} z_2^{i_2} \ldots z_n^{i_n}$, $\bar{z}^J = \bar{z}_1^{j_1} \bar{z}_2^{j_2} \ldots \bar{z}_n^{j_n}$. Перепишем ряд в (3.4) в виде

$$\sum_{|I|+|J|=0}^{\infty} c_{IJ} z^I \bar{z}^J = \sum_{|I|=0}^{\infty} c_{I0} z^I + \sum_{|I|+|J|=0, J\neq 0}^{\infty} c_{IJ} z^I \bar{z}^J. \tag{3.5}$$

Если сужение функции $f(z)$ на каждую комплексную прямую $\{l : \ z = w\xi, \ w \in \mathbb{C}^n, \ \xi \in \mathbb{C}\} \subset P^{n-1}$ голоморфно продолжается в единичный круг, то последний ряд в (3.5) обращается в нуль, т. е. $f(z) = \sum\limits_{|I|=0}^{\infty} c_{I0} z^I$, и по теореме 3.2 получаем голоморфность функции в шаре $B(0,1) \subset \mathbb{C}^n$. Таким образом, мы приходим к прекрасной теореме Форелли.

Теорема 3.3 (теорема Форелли [27]). *Если f — бесконечно гладкая функция в точке 0 и сужение $f|_l$ голоморфно в круге $l \bigcap B(0,1)$ для всех комплексных прямых $l \ni 0$, то f голоморфно продолжается в шар $l \bigcap B(0,1)$.*

Замечание 3.2.

1). Для функции $f(z_1, z_2) = \dfrac{z_1^{k+1} \bar{z}_2}{z_1 \bar{z}_1 + z_2 \bar{z}_2} \in C^k(\mathbb{C}^2)$ теорема 3.2 неприменима, хотя сужение функции голоморфно для всех комплексных прямых $l \ni 0$ (f не определяет формальный степенной ряд (3.4)).

2). Функция $f(z_1,z_2) = |z_1|^2 - |z_2|^2 \in C^\infty(\mathbb{C}^2)$, $f|_l \equiv 0$ на комплексных прямых $\Im = \left\{z_2 = e^{i\theta}z_1,\ \theta\in[0,2\pi]\right\}$. Хотя множество $\Im \subset P^1$ образует неплюриполярное множество в проективном пространстве P^1, теорема 3.2 здесь неприменима. Для применения теоремы 3.2 к формальным рядам по z и по $\bar z$ нужно потребовать, чтобы множество $\Im \subset P^{n-1}$ было неполярным в смысле вещественного анализа.

Теорему 3.2 можно доказать в общей форме, когда для комплексной прямой $l \in \Im$ не требуется сходимость ряда (3.3) в круге $l\bigcap B(0,1)$, а требуется его сходимость в произвольном круге $l\bigcap B(0,r_l)$, $0 < r_l \leqslant \infty$. Имеет место следующая основная теорема.

Теорема 3.4. *Пусть дан пучок комплексных прямых* $\Im \subset \{l : z = w\xi,\ w\in\mathbb{C}^n,\ \|w\|=1,\ \xi\in\mathbb{C}\}$, *проходящих через нуль. Если для каждой комплексной прямой* $l\in\Im$ *сужение* $\sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k(\lambda)\,\xi^k$ *ряда* (3.3) *сходится в круге* $l\bigcap B(0,r_l)$, $0<r_l\leqslant\infty$, *то этот ряд сходится в открытом множестве* $G = \left\{z\in\mathbb{C}^n:\ |z|\cdot\exp V^*\Big(\frac{z}{|z|},E\Big) < 1\right\}$. *Здесь* $E = \bigcup\limits_{l\in\Im} l\bigcap B(0,r_l)$.

Доказательство. Доказательство проведем в несколько шагов, предполагая первоначально для определенности, что $\Im$ — это множество всех комплексных прямых, для которых $r_l > 0$, т. е. $\Im = \left\{l\in P^{n-1}:\ r_l > 0\right\}$.

1. При $0 < r_l \leqslant 1\ \forall l\in\Im$ фиксируем числа $N\in\mathbb{N}$, $r>0$ и $0<\varepsilon<r$. Положим $\Im_r = \{l\in\Im:\ r_l\geqslant r\}$ и обозначим

$$F_{N,r,\varepsilon} = \left\{\lambda\in S(0,1),\ l=\{z=\lambda\xi\}\in\Im_r:\ \left|\sum_{k=0}^{\infty} c_k(\lambda)\,\xi^k\right| \leqslant N \ \text{ при }\ |\xi|\leqslant r_l-\varepsilon\right\}.$$

По неравенствам Коши $|c_k(\lambda)| \leqslant \dfrac{N}{(r_l-\varepsilon)^k}$, $\lambda\in F_{N,r,\varepsilon}$, $k=0,1,\ldots$ Это эквивалентно тому, что $|c_k((r_l-\varepsilon)\lambda)| \leqslant N$, $\lambda\in F_{N,r,\varepsilon}$, $k=0,1,\ldots$ Так как $F_{N,r,\varepsilon}$ — круговой компакт, то отсюда $|c_k(z)|\leqslant N$, $z=\lambda\xi$, $\lambda\in F_{N,r,\varepsilon}$, $|\xi|\leqslant r_l-\varepsilon$, $k=0,1,\ldots$ Следовательно, $\|c_k(z)\|_{E_{N,r,\varepsilon}} \leqslant N$, где $E_{N,r,\varepsilon} = \{|z|\leqslant r_l-\varepsilon,\ z=\lambda\xi,\ \lambda\in F_{N,r,\varepsilon}\}$, и по неравенству Бернштейна—Уолша $|c_k(z)| \leqslant N\left[\exp V^*(z,E_{N,r,\varepsilon})\right]^k$, $z\in\mathbb{C}^n$, $k=0,1,\ldots$

В частности, для $\lambda = \dfrac{z}{|z|}\in S(0,1)$

$$\left|c_k\left(\frac{z}{|z|}\right)\right| \leqslant N\left[\exp V^*\left(\frac{z}{|z|},E_{N,r,\varepsilon}\right)\right]^k,\ \ z\in\mathbb{C}^n\setminus\{0\},$$

что эквивалентно неравенству

$$|c_k(z)| \leqslant N\left[|z|\exp V^*\left(\frac{z}{|z|},E_{N,r,\varepsilon}\right)\right]^k,\ \ z\in\mathbb{C}^n\setminus\{0\},\ k=0,1,\ldots$$

Отсюда вытекает, что однородный ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k(z)$ сходится в

$$G_{N,r,\varepsilon} = \left\{z\in\mathbb{C}^n:\ |z|\cdot\exp V^*\left(\frac{z}{|z|},E_{N,r,\varepsilon}\right) < 1\right\}.$$

Устремив сначала $N\to\infty$, а затем $\varepsilon\to 0$, мы получаем сходимость ряда $\sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k(z)$ внутри открытого множества

$$G_r = \left\{z\in\mathbb{C}^n:\ |z|\cdot\exp V^*\left(\frac{z}{|z|},E_r\right) < 1\right\},$$

где $E_r = \bigcup\limits_{l \in \Im_r} l \bigcap B(0, r_l)$. При $r \downarrow 0$ множество E_r, возрастая, сходится к E. Следовательно, $V^*\Big(\dfrac{z}{|z|}, E_r\Big) \downarrow V^*\Big(\dfrac{z}{|z|}, E\Big)$ и ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k(z)$ равномерно сходится внутри открытого множества

$$G = \left\{ z \in \mathbb{C}^n : \ |z| \cdot \exp V^* \left(\frac{z}{|z|}, E \right) < 1 \right\}.$$

2. Ряд (3.3) сходится в круге $l \bigcap B(0, r_l)$ переменного радиуса r_l, $0 < r_l \leqslant R$, $l \in \Im$. Сделаем преобразование $z = Rw$. Соответствующий ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k(Rw)$ обладает тем свойством, что его сужение на $l \in \Im$ сходится в круге радиуса r_l/R, $0 < r_l/R \leqslant 1$. Тогда из сказанного выше следует, что этот ряд сходится в открытом множестве

$$\left\{ w \in \mathbb{C}^n : \ |w| \cdot \exp V^* \left(\frac{w}{|w|}, \frac{E}{R} \right) < 1 \right\}, \ \ \frac{E}{R} = \bigcup_{l \in \Im} l \bigcap B(0, r_l/R).$$

Следовательно, ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k(z)$ сходится в открытом множестве

$$\left\{ z \in \mathbb{C}^n : \ \frac{|z|}{R} \exp V^* \left(\frac{z}{|z|}, \frac{E}{R} \right) < 1 \right\}.$$

Но согласно следствию 2.4 из теоремы 2.4, функция Грина $V^*\Big(\xi, \dfrac{E}{R}\Big) = RV^*(\xi, E)$. Следовательно, ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k(z)$ сходится в открытом множестве $\left\{ z \in \mathbb{C}^n : \ |z| \exp V^*\Big(\dfrac{z}{|z|}, E\Big) < 1 \right\}$, где $E = \bigcup\limits_{l \in \Im} l \bigcap B(0, r_l)$.

3. Рассмотрим общий случай: $0 < r_l \leqslant \infty$, $l \in \Im$. Фиксируем $R > 1$ и обозначим $E_R = E \bigcap \{\|z\| \leqslant R\}$. Согласно пункту 2 доказательства, ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k(z)$ сходится в открытом множестве $\left\{ z \in \mathbb{C}^n : \ |z| \exp V^*\Big(\dfrac{z}{|z|}, E_R\Big) < 1 \right\}$. Теперь доказательство теоремы легко получается путем устремления R к бесконечности: $V^*\Big(\dfrac{z}{|z|}, E_R\Big) \downarrow V^*\Big(\dfrac{z}{|z|}, E\Big)$ при $R \uparrow \infty$. □

4. Голоморфное продолжение функций, имеющих тонкую особенность вдоль фиксированного направления

Начнем со следующей теоремы, опубликованной в совместной с Е. М. Чиркой статье [13].

Теорема 4.1. *Пусть функция $f('z, z_n)$ голоморфна в поликруге $U = {}'U \times U_n \subset \mathbb{C}^{n-1}_{'z} \times \mathbb{C}_{z_n}$ и при каждом фиксированном $'a$ из некоторого неплюриполярного множества $E \subset {}'U$ функция $f('a, z_n)$ переменного z_n продолжается до функции, голоморфной на всей плоскости, за исключением некоторого полярного (дискретного) множества особенностей $S_{'a}$. Тогда f голоморфно продолжается в $({}'U \times \mathbb{C}) \setminus S$, где S — замкнутое плюриполярное (аналитическое) подмножество $'U \times \mathbb{C}$.*

Трудным моментом доказательства теоремы является описание особого множества вне U; априори $\bigcup\limits_{'a \in {}'U} S_{'a}$ может быть всюду плотным в $'U \times [\mathbb{C} \setminus U_n]$. Эти трудности преодолевается путем разложения функции в ряд Якоби—Хартогса $f(z', z_n) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k('z, z_n)\, g^k(z_n)$ по всевозможным рациональным функциям

$$g(z_n) = \frac{z_n^m}{p_m(z_n)}, \ p_m(z_n) - \text{полином степени } m > 0. \tag{4.1}$$

Далее в доказательстве существенно применяется теория плюрипотенциала, потенциальные свойства семейства плюрисубгармонических функций и псевдовогнутых множеств.

Для формальных рядов на пучке прямых, т. е. для формальных рядов однородных многочленов $\sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k(z)$, где $c_k(z)$ — однородные многочлены, справедлива следующая теорема (ср. пример 3.2).

Теорема 4.2. *Пусть дан неплюриполный пучок комплексных прямых*

$$\Im \subset \{l : z = \lambda\xi,\ \lambda \in \mathbb{C}^n,\ \|\lambda\| = 1,\ \xi \in \mathbb{C}\} = P^n,$$

проходящих через нуль. Если для каждой комплексной прямой $l \in \Im$ сужение $\sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k(\lambda)\,\xi^k$ ряда $\sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k(z)$ на комплексную прямую l сходится в круге радиуса $r_l > 0$ и сумма этого ряда голоморфна на $\mathbb{C}$, за исключением полярного (дискретного) множества, то ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k(z)$ определяет в пространстве $\mathbb{C}^n$ голоморфную функцию за исключением, быть может, некоторого плюриполярного (аналитического) множества $S \subset \mathbb{C}^n$.

Доказательство. Согласно теореме 3.4 ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k(z)$ сходится в открытом множестве

$$G = \left\{ z \in \mathbb{C}^n :\ |z| \cdot \exp V^*\left(\frac{z}{|z|}, E\right) < 1 \right\},$$

где $E = \bigcup\limits_{l\in\Im} l \bigcap B(0, r_l)$. Сумма этого ряда $f(z) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k(z)$ является голоморфной функцией в G. По условию теоремы 4.2 множество E не является плюриполярным. Следовательно, $V^*(\cdot, E) \not\equiv +\infty$ и область G содержит точку 0.

Рассмотрим стандартное преобразование в пространстве $\mathbb{C}^n$:

$$\pi : (z_1, z_2, \ldots, z_{n-1}, z_n) \to (z_1 z_n, z_2 z_n, \ldots, z_{n-1} z_n, z_n),$$

при котором вертикальные комплексные прямые $('z^0, z_n) = (z_1^0, z_2^0, \ldots, z_{n-1}^0, z_n)$, $z_n \in \mathbb{C}$, переходят в пучок прямых $(z_1^0 z_n, z_2^0 z_n, \ldots, z_{n-1}^0 z_n, z_n)$, $z_n \in \mathbb{C}$. Поэтому функция $\tilde{f}('z, z_n) = \pi^{-1} \circ f = f(z_1 z_n, z_2 z_n, \ldots, z_{n-1} z_n, z_n)$, $z_n \in \mathbb{C}$, обладает свойством голоморфности по совокупности переменных в некоторой окрестности плоскости $\{z_n = 0\}$, и при каждом фиксированном $'z^0 = (z_1^0, z_2^0, \ldots, z_{n-1}^0) :\ l = \{z_1^0 z_n, z_2^0 z_n, \ldots, z_{n-1}^0 z_n, z_n,\ z_n \in \mathbb{C}\} \in \Im$ функция $\tilde{f}('z^0, z_n)$, $z_n \in \mathbb{C}$, голоморфно продолжается на всю плоскость $\mathbb{C}_{z_n}$ за исключением полярного (дискретного) множества. По теореме 4.1 функция $\tilde{f}('z, z_n)$ голоморфно продолжается в $\mathbb{C}^n \backslash S$, где $S \subset \mathbb{C}^n$ — плюриполярное (аналитическое) множество. Отсюда функция $f(z) = \pi \circ f(z)$ голоморфно продолжается в $[\mathbb{C}^n \backslash \{z_n = 0\}] \backslash \pi(S)$, где $\pi(S)$ — плюриполярное (аналитическое) множество в $\mathbb{C}^n \backslash \{z_n = 0\}$.

Выше мы рассматривали преобразование $\pi : (z_1, z_2, \ldots, z_{n-1}, z_n) \to (z_1 z_n, z_2 z_n, \ldots, z_{n-1} z_n, z_n)$, выделяя координату oz_n. Если мы проделаем эту процедуру для каждого индекса $k = n, n-1, \ldots, 1$, то получим, что функция $f(z)$ голоморфно продолжается в $[\mathbb{C}^n \backslash \{z_k = 0\}] \backslash A_k$, где A_k — плюриполярное (аналитическое) множество в $\mathbb{C}^n \backslash \{z_k = 0\}$. Отсюда легко вытекает, что $f(z)$ голоморфно продолжается в $\mathbb{C}^n \backslash A$, где A — плюриполярное (аналитическое) множество в $\mathbb{C}^n$. □

5. Голоморфное продолжение функций вдоль семейства аналитических кривых

Вариация теоремы Хартогса в смысле замены координатных прямых семействами аналитических кривых, пожалуй, впервые рассмотрена в работе Е. М. Чирки [15]. Приведем три утверждения из этой работы, в которых продемонстрированы новые подходы в изучении функций, голоморфных на голоморфных слоениях:

1). *Пусть в области $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ даны n линейно независимых расслоений $\left\{S_\xi^j\right\}$, $\Omega = \bigcup\limits_\xi S_\xi^j$, голоморфными кривыми S_ξ^j, $j = 1, 2, \ldots, n$. Если функция f локально ограничена в Ω и все сужения $f|_{S_\xi^j}$ являются голоморфными, то f голоморфна в Ω.*

Доказательство этого утверждения основывается на том факте, что при указанных условиях f является липшицевой функцией, имеющей локально ограниченный дифференциал df почти всюду в Ω, причем $\bar{\partial} f = 0$.

2). *Пусть область $\Omega \subset D \times \mathbb{C}^k_w$, $D \subset \mathbb{C}^m_z$, расслоена голоморфными графиками S_ξ так, что $w = \phi_\xi(z)$. Если все сужения $f|_{S_\xi}$ функции $f(z,w)$голоморфны на S_ξ и $f(c,w)$ голоморфны на $\Omega \bigcap \{z = c\}$, $c \in D$, то $f(z,w)$ является голоморфной в Ω.*

В доказательстве утверждения сначала с использованием теоремы Бэра находится открытая часть $\Omega_1 \subset \Omega$, где $f(z,w)$ ограничена, а затем с применением метода доказательства утверждения 1 доказывается голоморфность этой функции в Ω_1. Далее, так как $f(c,w)$ голоморфна на $\Omega \bigcap \{z = c\}$, то по классической лемме Хартогса заключается, что $f(z,w)$ голоморфна в Ω.

Следующее утверждение является криволинейным аналогом классической леммы Хартогса.

3). *Пусть область $\Omega \subset D \times \mathbb{C}^k_w$, $D \subset \mathbb{C}^m_z$, $0 \in D$, как в утверждении 2, расслоена голоморфными графиками S_ξ так, что $w = \phi_\xi(z)$. Если все сужения $f|_{S_\xi}$ функции $f(z,w)$ голоморфны на S_ξ и $f(z,w)$ голоморфна по совокупности переменных в некоторой окрестности $\Omega \bigcap \{z = 0\}$, то $f(z,w)$ является голоморфной функцией в Ω.*

Отметим, что теорема Форелли (см. раздел 3) является своеобразным вариантом теоремы Хартогса. В работе [15] Е. М. Чирка показал также справедливость криволинейного аналога теоремы Форелли при $n = 2$. Дальнейшие вариации теоремы Хартогса, а также теоремы Форелли получены в работах [28, 29, 31] К.-Т. Кима, Е. Полецкого, Г. Шмалза, Ж.-Ч. Жу.

Теорема 5.1 (см. [31]). *Если функция $f : B(0,1) \to \mathbb{C}$ — бесконечно гладкая в точке 0, $f \in C^\infty(0)$, и голоморфна вдоль интегральных аналитических кривых векторного поля $X = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j z_j \dfrac{\partial}{\partial z}$, где α_j — константы, $\dfrac{\alpha_j}{\alpha_k} > 0 \ \forall j,k$, то f голоморфна в $B(0,1)$.*

Теорема 5.2 (см. [28]). *Пусть область $\Omega \subset D \times \mathbb{C}^k_w$, $D \subset \mathbb{C}^m_z$, расслоена гладким радиальным в точке 0 семейством аналитических кривых $\{S_\xi\}$, $\xi \in P^{n-1}$, $0 \in S_\xi$ так, что $\bigcup_\xi S_\xi = \Omega$. Если функция $f \in \mathbb{C}^\infty\{0\}$ обладает тем свойством, что все ее сужения $f|_{S_\xi}$ голоморфны на S_ξ, то f голоморфно продолжается в Ω.*

В этом разделе мы изучаем голоморфное продолжение формального ряда из однородных многочленов, который голоморфен вдоль заданного семейства аналитических кривых, проходящих через нуль. При этом на семейство аналитических кривых не накладываются какие-либо другие условия. Начнем со следующей леммы, которая имеет и самостоятельное значение.

Лемма 5.1. *Ряд вида $\sum_{k=0}^{\infty} a_k(\xi)\,\xi^k$, где $a_k(\xi) \in O(U)$, $k = 0, 1, \ldots$, сходится равномерно внутри круга $U : |\xi| < 1$ тогда и только тогда, когда для любого $\varepsilon > 0$*

$$\varlimsup_{k \to \infty} \|a_k(\xi)\|^{1/k}_{|\xi| \leqslant 1-\varepsilon} \leqslant 1. \tag{5.1}$$

Доказательство. В самом деле, если выполняется (5.1), то при фиксированном $\varepsilon > 0$ найдется k_0 такое, что $|a_k(\xi)| < (1+\varepsilon)^k$, $|\xi| \leqslant 1 - \varepsilon$, $k \geqslant k_0$. Следовательно, $\left|a_k(\xi)\,\xi^k\right| \leqslant |(1+\varepsilon)\,\xi|^k \leqslant \left(1-\varepsilon^2\right)^k$ и ряд $\sum_{k=0}^{\infty} a_k(\xi)\,\xi^k$ сходится равномерно в круге $|\xi| \leqslant 1 - \varepsilon$. И наоборот, если ряд $\sum_{k=0}^{\infty} a_k(\xi)\,\xi^k$ сходится в круге $|\xi| \leqslant 1 - \varepsilon$ равномерно, то $\left\|a_k(\xi)\,\xi^k\right\|_{|\xi| \leqslant 1-\varepsilon} \leqslant const$, $k = 0, 1, 2, \ldots$ Отсюда $\varlimsup_{k \to \infty} \|a_k(\xi)\|^{1/k}_{|\xi| \leqslant 1-\varepsilon} \leqslant 1$. □

Замечание 5.1. Если неравенство $\varlimsup_{k \to \infty} |a_k(\xi)|^{1/k} \leqslant 1$ выполняется поточечно при фиксированных $\xi \in U$, то существует всюду плотное открытое множество $\tilde{U} \subset U$, внутри которого ряд сходится равномерно.

В самом деле, положим $F_m = \left\{\xi \in U : \ \left|a_k(\xi)\,\xi^k\right| \leqslant m, \ k = 0, 1, 2, \ldots, \right\}$. Тогда F_m — замкнутые подмножества U и $U = \bigcup\limits_{m=1}^{\infty} F_m$. По теореме Бэра мы получаем, что открытое ядро $\tilde{U} = \bigcup\limits_{m=1}^{\infty} F_m^0$ является всюду плотным в U, а ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k(\xi)\,\xi^k$ равномерно сходится внутри $\tilde{U}$.

Следующая теорема является ключевой в исследовании голоморфных функций многих переменных вдоль фиксированных кривых. Пусть $A = \{z = p(\xi), \ |\xi| < 1\}$ — аналитическая кривая, где $p(\xi) = (p_1(\xi), \ldots, p_n(\xi))$ — голоморфная в единичном круге $U : \ |\xi| < 1$ вектор-функция, $p(0) = 0$. Положим $A_\varepsilon = A \bigcap \{\,|\xi| < 1 - \varepsilon\}, \ 0 < \varepsilon < 1$.

Теорема 5.3. *Предположим, что $A \subset \mathbb{C}^n$ — аналитическая кривая, проходящая через нуль, $0 \in A$, такая, что ряд из однородных полиномов $f(z) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k(z)$, где $c_k(z)$ — однородный полином степени k, сходится на множестве A. Тогда $\overline{\lim\limits_{k\to\infty}} \|c_k(z)\|_{A_\varepsilon}^{1/k} \leqslant 1$.*

Доказательство. Действительно, пусть $A : \{z = p(\xi)\}$ — аналитическая кривая, проходящая через 0, где $p(\xi)$ — голоморфная в единичном круге $U : |\xi| < 1$ вектор-функция, $p(0) = 0$. Предположим, что $f_A(z) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k(p(\xi))$ сходится в круге $|\xi| < 1$. Запишем

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k(p(\xi)) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{c_k(p(\xi))}{\xi^k}\xi^k,$$

где $\dfrac{c_k(p(\xi))}{\xi^k}$ — голоморфные функции в единичном круге $|\xi| < 1$. Ясно, что ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k(p(\xi))$ сходится равномерно в круге $|\xi| < 1 - \varepsilon$, $\varepsilon > 0$. Следовательно, согласно лемме 5.1

$$\overline{\lim_{k\to\infty}} \left\| \frac{c_k(p(\xi))}{\xi^k} \right\|_{|\xi| \leqslant 1-\varepsilon}^{1/k} \leqslant 1.$$

Отсюда

$$\overline{\lim_{k\to\infty}} \|c_k(p(\xi))\|_{|\xi| \leqslant 1-\varepsilon}^{1/k} \leqslant 1.$$

□

Основным результатом раздела 4 является следующая теорема.

Теорема 5.4. *Пусть дано произвольное семейство $\aleph = \{A_\alpha, \ \alpha \in \Lambda\}$ аналитических кривых A_α: $z = p_\alpha(\xi), \ \xi \in U, \ p_\alpha(0) = 0$. Если ряд из однородных полиномов $f(z) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k(z)$, где $c_k(z)$ — однородный полином степени k, сходится на каждом множестве A_α, $\alpha \in \Lambda$, то этот ряд сходится равномерно внутри шара*

$$B\left(0, \frac{1}{\exp \underline{\gamma}(E)}\right) = \left\{ z \in \mathbb{C}^n : \ \ \|z\| < \frac{1}{\exp \underline{\gamma}(E)} \right\}, \tag{5.2}$$

Здесь $E = \bigcup\limits_{\alpha \in \Lambda} A_\alpha$ и $\underline{\gamma}(E) = \underline{\lim\limits_{z\to\infty}} [V^*(z, \ E) - \ln\|z\|]$ — нижняя постоянная Робена множества E.

Следствие 5.1. *В условиях теоремы 5.4, если множество $E = \bigcup\limits_{\alpha\in\Lambda} A_\alpha$ не является плюриполярным в $\mathbb{C}^n$, то формальный ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k(z)$ имеет сумму $f(z)$, голоморфную в непустом шаре $\|z\| < \exp^{-1} \underline{\gamma}(E)$.*

Замечание 5.2 (см. раздел 3)**.** Если $f(z) \in C^\infty\{0\}$, то ей соответствует формальный степенной ряд

$$f \sim \sum_{|I|=0}^{\infty} c_{I0} z^I + \sum_{|I|+|J|=0, J\neq 0}^{\infty} c_{IJ} z^I \bar{z}^J, \tag{5.3}$$

где $I=(i_1,i_2,\dots,i_n)$ и $J=(j_1,j_2,\dots,j_n)$ — мультииндексы, $|I|=i_1+i_2+\ldots+i_n$, $|J|=j_1+j_2+\ldots+j_n$, $z^I=z_1^{i_1}z_2^{i_2}\ldots z_n^{i_n}$, $\bar z^J=\bar z_1^{j_1}\bar z_2^{j_2}\ldots\bar z_n^{j_n}$. Если сужения $f|_{A_\alpha}$, $\alpha\in\Lambda$ голоморфны и множество $E=\bigcup\limits_{\alpha\in\Lambda}A_\alpha$ не является $\mathbb{R}^{2n}$-полярным, то второй ряд в (5.3) обращается в нуль. Поэтому, применяя теорему 5.4 в этом случае, мы получаем, что функция f является голоморфной в некоторой окрестности нуля.

Доказательство теоремы 5.2. Фиксируем число $0<\varepsilon<1$. Согласно теореме 5.1 имеет место $\varlimsup\limits_{k\to\infty}\|c_k(z)\|^{1/k}_{A_{\alpha,\varepsilon}}\leqslant 1$ для каждого $\alpha\in\Lambda$, где $A_{\alpha,\varepsilon}=\{z\in\mathbb{C}^n:\ z=p_\alpha(\xi),\ |\xi|\leqslant 1-\varepsilon\}\subset\subset A_\alpha$. Для каждого фиксированного $j\in\mathbb{N}$ положим

$$\Lambda_{j,\varepsilon}=\left\{\alpha\in\Lambda:\ \|c_k(z)\|^{1/k}_{A_{\alpha,\varepsilon}}\leqslant 1+\varepsilon,\ \ k\geqslant j\right\}$$

и

$$E_{j,\varepsilon}=\left\{\bigcup A_{\alpha,\varepsilon}:\ \alpha\in\Lambda_{j,\varepsilon}\right\}.$$

Тогда $\|c_k(z)\|^{1/k}_{E_{j,\varepsilon}}\leqslant 1+\varepsilon,\ \ k\geqslant j$. По непрерывности это неравенство верно вплоть до замыкания $\overline{E}_{j,\varepsilon}$, т. е. $\|c_k(z)\|^{1/k}_{\overline{E}_{j,\varepsilon}}\leqslant 1+\varepsilon,\ \ k\geqslant j$. По неравенству Бернштейна—Уолша

$$|c_k(z)|^{1/k}\leqslant(1+\varepsilon)\exp V^*\left(z,\overline{E}_{j,\varepsilon}\right),\ \ z\in\mathbb{C}^n,\ k\geqslant j.$$

Отсюда следует, что при фиксированном радиусе $R>0$

$$|c_k(z)|^{1/k}\leqslant(1+\varepsilon)\max_{\|z\|=R}\exp V^*\left(z,\overline{E}_{j,\varepsilon}\right),\ \ z\in\partial B(0,R),\ k\geqslant j,$$

и для произвольного $z\in\mathbb{C}^n$ имеем неравенство

$$|c_k(z)|^{1/k}=\left|c_k\left(\frac{\|z\|}{R}\frac{Rz}{\|z\|}\right)\right|^{1/k}=\frac{\|z\|}{R}\left|c_k\left(\frac{Rz}{\|z\|}\right)\right|^{1/k}\leqslant(1+\varepsilon)\|z\|\frac{\max\limits_{\|\xi\|=R}\exp V^*\left(\xi,\overline{E}_{j,\varepsilon}\right)}{R},\ \ k\geqslant j.$$

При $R\to\infty$ из этого неравенства мы получаем, что

$$|c_k(z)|^{1/k}\leqslant(1+\varepsilon)\|z\|\exp\underline{\gamma}\left(\overline{E}_{j,\varepsilon}\right),\ \ k\geqslant j. \tag{5.4}$$

Из (5.4) вытекает, что ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty}c_k(z)$ равномерно сходится в шаре

$$B\left(0,\frac{1}{(1+\varepsilon)\exp\underline{\gamma}\left(\overline{E}_{j,\varepsilon}\right)}\right)=\left\{\|z\|<\frac{1}{(1+\varepsilon)\exp\underline{\gamma}\left(\overline{E}_{j,\varepsilon}\right)}\right\}. \tag{5.5}$$

Устремив сначала $j\to\infty$, а затем $\varepsilon\to 0$, мы из (5.5) получаем, что ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty}c_k(z)$ равномерно сходится в шаре

$$B\left(0,\frac{1}{\exp\underline{\gamma}(E)}\right)=\left\{z\in\mathbb{C}^n:\ \ \|z\|<\frac{1}{\exp\underline{\gamma}(E)}\right\}.$$

Теорема доказана. □

Замечание 5.3. Как видно из доказательства теоремы 5.4, область сходимости ряда $f(z)=\sum\limits_{k=0}^{\infty}c_k(z)$ может быть больше, чем шар (5.2), если мы воспользуемся оценками однородных полиномов в круговых областях.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Абдуллаев Б.И., Садуллаев А.* Теория потенциалов в классе m-субгармонических функций// Тр. МИАН. — 2012. — *279.* — С. 166–192.
2. *Абдуллаев Б.И., Садуллаев А.* Емкости и гессианы в классе m-субгармонических функций// Докл. РАН. — 2013. — *448*, № 5. — С. 1–3.
3. *Атамуратов А.А.* О мероморфном продолжении вдоль фиксированного направления// Мат. заметки. — 2009. — *86*, № 3. — С. 323–327.

4. *Захарюта В. П.* Экстремальные плюрисубгармонические функции, ортогональные полиномы и теорема Бернштейна—Уолша для аналитических функций многих комплексных переменных// Ann. Polon. Math. — 1976. — *33.* — С. 137–148.
5. *Имомкулов С. А.* О голоморфном продолжении функций, заданных на граничном пучке комплексных прямых// Изв. РАН. Сер. Мат. — 2005. — *69*, № 2. — С. 125–144.
6. *Садуллаев А.* Плюрисубгармонические меры и емкости на комплексных многообразиях// Усп. мат. наук. — 1981. — *36*, № 4. — С. 35–105.
7. *Садуллаев А.* Плюрисубгармонические функции// Соврем. пробл. мат. Фундам. направл. — 1985. — *8.* — С. 65–113.
8. *Садуллаев А.* О плюригармоническом продолжении вдоль фиксированного направления// Мат. сб. — 2005. — *196.* — С. 145–156.
9. *Садуллаев А.* Теория плюрипотенциала. Применения. — Рига: Palmarium Academic Publishing, 2012.
10. *Садуллаев А., Имомкулов С. А.* Продолжение плюригармонических функций с дискретными особенностями на параллельных сечениях// Вестн. Красноярск. гос. ун-та. — 2004. — № 5/2. — С. 3–6.
11. *Садуллаев А., Имомкулов С. А.* Продолжение голоморфных и плюригармонических функций с тонкими особенностями на параллельных сечениях// Тр. МИАН. — 2006. — *253.* — С. 158–174.
12. *Садуллаев А., Туйчиев Т.* О продолжении рядов Хартогса, допускающих голоморфное продолжение на параллельные сечениия// Узб. мат. ж. — 2009. — № 1. — С. 148–157.
13. *Садуллаев А., Чирка Е. М.* О продолжении функций с полярными особенностями// Мат. сб. — 1987. — *132*, № 3. — С. 383–390.
14. *Худайберганов Г.* О полиномиальной и рациональной выпуклости объединения компактов в $\mathbb{C}^n$// Изв. вузов. Сер. мат. — 1987. — № 2. — С. 70–74.
15. *Чирка Е.* Вариация теоремы Хартогса// Тр. МИАН. — 2006. — *253.* — С. 232–240.
16. *Abdullayev B. I.* Subharmonic functions on complex Hyperplanes of $\mathbb{C}^n$// Журн. СФУ. Сер. Мат. Физ. — 2013. — *6*, № 4. — С. 409–416.
17. *Abdullayev B. I.* $\mathcal{P}$-measure in the class of $m - wsh$ functions// Журн. СФУ. Сер. Мат. Физ. — 2014. — *7*, № 1. — С. 3–9.
18. *Alexander H.* Projective capacity// Ann. Math. Stud. — 1981. — *100*, № 1. — С. 3–27.
19. *Atamuratov A. A., Vaisova M. D.* On the meromorphic extension along the complex lines// TWMS J. Pure Appl. Math. — 2011. — *2*, № 1. — С. 10–16.
20. *Bedford E.* Survey of pluripotential theory, several complex variable// Math. Notes. — 1993. — *38.* — С. 48–95.
21. *Bedford E., Taylor B. A.* A new capacity for plurisubharmonic functions// Acta Math. — 1982. — *149*, № 1-2. — С. 1–40.
22. *Blocki Z.* Weak solutions to the complex Hessian equation// Ann. Inst. Fourier. — 2005. — *5.* — С. 1735–1756.
23. *Bloom T., Levenberg N.* Weighted pluripotential theory in $\mathbb{C}^N$// Am. J. Math. — 2003. — *125*, № 1. — С. 57–103.
24. *Cegrell U.* The general definition of the complex Monge—Ampere operator// Ann. Inst. Fourier. — 2004. — *54.* — С. 159–179.
25. *Coman D., Guedj V., Zeriahi A.* Domains of definition of Monge—Ampere operators on compact Kahler manifolds// Math. Z. — 2008. — *259.* — С. 393–418.
26. *Dinew S., Kolodziej S.* A priori estimates for the complex Hessian equation// Anal. PDE. — 2014. — *7.* — С. 227–244.
27. *Forelly F.* Plurisubharmonicity in terms of harmonic slices// Math. Scand. — 1977. — *41.* — С. 358–364.
28. *Joo J.-C., Kim K.-T., Schmalz G.* A generalization of Forelli's theorem// Math. Ann. — 2013. — *355.* — С. 1171–1176.
29. *Joo J.-C., Kim K.-T., Schmalz G.* On the generalization of Forelli's theorem// Math. Ann. — 2016. — *365.* — С. 1187–1200.
30. *Khudaiberganov G.* On the homogeneous-polynomially convex hull of balls// Pliska Stud. Math. Bulgar. — 1989. — *10.* — С. 45–49.
31. *Kim K.-T., Poletsky E., Schmalz G.* Functions holomorphic along holomorphic vector fields// J. Geom. Anal. — 2009. — *19.* — С. 655–666.
32. *Klimek M.* Pluripotential theory. — Oxford etc.: Clarendon Press, 1991.
33. *Siciak J.* Extremal plurisubharmonic functios in $\mathbb{C}^n$ // Ann. Polon. Math. — 1981. — *39.* — С. 175–211.
34. *Tuychiev T.* On domains of convergence of multidimensional locunary series// Журн. СФУ. Сер. Мат. Физ. — 2019. — *12*, № 6. — С. 736–746.

35. *Tuychiev T., Tishabaev J.* On the continuation of the Hartogs series with holomorphic coefficients// Bull. Natl. Univ. Uzbekistan. Math. Nat. Sci. — 2019. — *2*, № 1. — С. 69–76.

А. С. Садуллаев
Национальный университет Узбекистана им. М. Улугбека, Ташкент, Узбекистан
E-mail: `sadullaev@mail.ru`

DOI: 10.22363/2413-3639-2022-68-1-127-143 UDC 517.55

Holomorphic Continuation of Functions Along a Fixed Direction (Survey)

© 2022 **A. S. Sadullaev**

Abstract. In this article, we give an overview of the most significant and important results on holomorphic extensions of functions along a fixed direction. We discuss the following geometric questions of multidimensional complex analysis:

- holomorphic extension along a bundle of complex straight line, the Forelly theorem;
- holomorphic continuation of functions with thin singularities along a fixed direction;
- holomorphic continuation of functions along a family of analytic curves.

REFERENCES

1. B. I. Abdullaev and A. Sadullaev, “Teoriya potentsialov v klasse m-cubgarmonicheskikh funktsiy” [Potential theory in the class of m-subharmonic functions], *Tr. MIAN* [Proc. Math. Inst. Russ. Acad. Sci.], 2012, **279**, 166–192 (in Russian).
2. B. I. Abdullaev and A. Sadullaev, “Emkosti i gessiany v klasse m-subgarmonicheskikh funktsiy” [Capacities and Hessians in the class of m-subharmonic functions], *Dokl. RAN* [Rep. Russ. Acad. Sci.], 2013, **448**, No. 5, 1–3 (in Russian).
3. A. A. Atamuratov, “O meromorfnom prodolzhenii vdol’ fiksirovannogo napravleniya” [On meromorphic continuation along a fixed direction], *Mat. zametki* [Math. Notes], 2009, **86**, No. 3, 323–327 (in Russian).
4. V. P. Zakharyuta, “Ekstremal’nye plyurisubgarmonicheskie funktsii, ortogonal’nye polinomy i teorema Bernshteyna—Uol’sha dlya analiticheskikh funktsiy mnogikh kompleksnykh peremennykh” [Extremal plurisubharmonic functions, orthogonal polynomials, and the Bernstein–Wolsh theorem for analytic functions of several complex variables], *Ann. Polon. Math.*, 1976, **33**, 137–148 (in Russian).
5. S. A. Imomkulov, “O golomorfnom prodolzhenii funktsiy, zadannykh na granichnom puchke kompleksnykh pryamykh” [On the holomorphic continuation of functions defined on the boundary pencil of complex lines], *Izv. RAN. Ser. Mat.* [Bull. Acad. Sci. USSR. Ser. Math.], 2005, **69**, No. 2, 125–144 (in Russian).
6. A. Sadullaev, “Plyurisubgarmonicheskie mery i emkosti na kompleksnykh mnogoobraziyakh” [Plurisubharmonic measures and capacities on complex manifolds], *Usp. mat. nauk* [Progr. Math. Sci.], 1981, **36**, No. 4, 35–105 (in Russian).
7. A. Sadullaev, “Plyurisubgarmonicheskie funktsii” [Plurisubharmonic functions], *Sovrem. probl. mat. Fundam. napravl.* [Contemp. Math. Fundam. Directions], 1985, **8**, 65–113 (in Russian).
8. A. Sadullaev, “O plyurigarmonicheskom prodolzhenii vdol’ fiksirovannogo napravleniya” [On pluriharmonic continuation along a fixed direction], *Mat. sb.* [Math. Digest], 2005, **196**, 145–156 (in Russian).
9. A. Sadullaev, *Teoriya plyuripotentsiala. Primeneniya* [Theory of Pluripotential. Applications], Palmarium Academic Publishing, Riga, 2012 (in Russian).
10. A. Sadullaev and S. A. Imomkulov, “Prodolzhenie plyurigarmonicheskikh funktsiy s diskretnymi osobennostyami na parallel’nykh secheniyakh” [Extension of pluriharmonic functions with discrete

singularities on parallel sections], *Vestn. Krasnoyarsk. gos. un-ta* [Bull. Krasnoyarsk State Univ.], 2004, No. 5/2, 3–6 (in Russian).
11. A. Sadullaev and S. A. Imomkulov, "Prodolzhenie golomorfnykh i plyurigarmonicheskikh funktsiy s tonkimi osobennostyami na parallel'nykh secheniyakh" [Extension of holomorphic and pluriharmonic functions with fine singularities on parallel sections], *Tr. MIAN* [Proc. Math. Inst. Russ. Acad. Sci.], 2006, **253**, 158–174 (in Russian).
12. A. Sadullaev and T. Tuychiev, "O prodolzhenii ryadov Khartogsa, dopuskayushchikh golomorfnoe prodolzhenie na parallelnye secheniiya" [On extension of Hartogs series admitting holomorphic extension to parallel sections], *Uzb. mat. zh.* [Uzbek. Math. J.], 2009, No. 1, 148–157 (in Russian).
13. A. Sadullaev and E. M. Chirka, "O prodolzhenii funktsiy s polyarnymi osobennostyami" [On the continuation of functions with polar singularities], *Mat. sb.* [Math. Digest], 1987, **132**, No. 3, 383–390 (in Russian).
14. G. Khudayberganov, "O polinomial'noy i ratsional'noy vypuklosti ob"edineniya kompaktov v $\mathbb{C}^n$" [On the polynomial and rational convexity of the union of compact sets in $\mathbb{C}^n$], *Izv. vuzov. Ser. mat.* [Bull. Higher Edu. Inst. Ser. Math.], 1987, No. 2, 70–74 (in Russian).
15. E. Chirka, "Variatsiya teoremy Khartogsa" [Variation of Hartogs' theorem], *Tr. MIAN* [Proc. Math. Inst. Russ. Acad. Sci.], 2006, **253**, 232–240 (in Russian).
16. B. I. Abdullayev, "Subharmonic functions on complex Hyperplanes of $\mathbb{C}^n$," *Zhurn. SFU. Ser. Mat. Fiz.*, 2013, **6**, No. 4, 409–416.
17. B. I. Abdullayev, "$\mathcal{P}$-measure in the class of $m - wsh$ functions," *Zhurn. SFU. Ser. Mat. Fiz.*, 2014, **7**, No. 1, 3–9.
18. H. Alexander, "Projective capacity," *Ann. Math. Stud.*, 1981, **100**, No. 1, 3–27.
19. A. A. Atamuratov and M. D. Vaisova, "On the meromorphic extension along the complex lines," *TWMS J. Pure Appl. Math.*, 2011, **2**, No. 1, 10–16.
20. E. Bedford, "Survey of pluripotential theory, several complex variable," *Math. Notes*, 1993, **38**, 48–95.
21. E. Bedford and B. A. Taylor, "A new capacity for plurisubharmonic functions," *Acta Math.*, 1982, **149**, No. 1-2, 1–40.
22. Z. Blocki, "Weak solutions to the complex Hessian equation," *Ann. Inst. Fourier*, 2005, **5**, 1735–1756.
23. T. Bloom and N. Levenberg, "Weighted pluripotential theory in $\mathbb{C}^N$," *Am. J. Math.*, 2003, **125**, No. 1, 57–103.
24. U. Cegrell, "The general definition of the complex Monge—Ampere operator," *Ann. Inst. Fourier*, 2004, **54**, 159–179.
25. D. Coman, V. Guedj, and A. Zeriahi, "Domains of definition of Monge—Ampere operators on compact Kahler manifolds," *Math. Z.*, 2008, **259**, 393–418.
26. S. Dinew and S. Kolodziej, "A priori estimates for the complex Hessian equation," *Anal. PDE*, 2014, **7**, 227–244.
27. F. Forelly, "Plurisubharmonicity in terms of harmonic slices," *Math. Scand.*, 1977, **41**, 358–364.
28. J.-C. Joo, K.-T. Kim, and G. Schmalz, "A generalization of Forelli's theorem," *Math. Ann.*, 2013, **355**, 1171–1176.
29. J.-C. Joo, K.-T. Kim, and G. Schmalz, "On the generalization of Forelli's theorem," *Math. Ann.*, 2016, **365**, 1187–1200.
30. G. Khudaiberganov, "On the homogeneous-polynomially convex hull of balls," *Pliska Stud. Math. Bulgar.*, 1989, **10**, 45–49.
31. K.-T. Kim, E. Poletsky, and G. Schmalz, "Functions holomorphic along holomorphic vector fields," *J. Geom. Anal.*, 2009, **19**, 655–666.
32. M. Klimek, *Pluripotential theory*, Clarendon Press, Oxford etc., 1991.
33. J. Siciak, "Extremal plurisubharmonic functios in $\mathbb{C}^n$," *Ann. Polon. Math.*, 1981, **39**, 175–211.
34. T. Tuychiev, "On domains of convergence of multidimensional locunary series," *Zhurn. SFU. Ser. Mat. Fiz.*, 2019, **12**, No. 6, 736–746.
35. T. Tuychiev and J. Tishabaev, "On the continuation of the Hartogs series with holomorphic coefficients," *Bull. Natl. Univ. Uzbekistan. Math. Nat. Sci.*, 2019, **2**, No. 1, 69–76.

A. S. Sadullaev
National University of Uzbekistan, Tashkent, Uzbekistan
E-mail: sadullaev@mail.ru