

## ПЕРИОДИЧЕСКИЕ МЕРЫ ГИББСА ДЛЯ НС-МОДЕЛИ С ДВУМЯ СОСТОЯНИЯМИ НА ДЕРЕВЕ КЭЛИ

© 2022 г. У. А. РОЗИКОВ, Р. М. ХАКИМОВ, М. Т. МАХАММАДАЛИЕВ

Аннотация. В данной статье изучается Hard-Core (НС) модель с двумя состояниями и активностью  $\lambda > 0$  на дереве Кэли порядка  $k \geq 2$ . Известно, что существуют  $\lambda_{cr}$ ,  $\lambda_{cr}^0$ ,  $\lambda'_{cr}$  такие, что

- при  $\lambda \leq \lambda_{cr}$  для этой модели существует единственная мера Гиббса  $\mu^*$ , которая является трансляционно-инвариантной. Мера  $\mu^*$  является крайней при  $\lambda < \lambda_{cr}^0$  и не крайней при  $\lambda > \lambda'_{cr}$ ;
- при  $\lambda > \lambda_{cr}$  существуют ровно три 2-периодические меры Гиббса, одна из которых является  $\mu^*$ , две остальные являются не трансляционно-инвариантными и всегда крайними.

Крайность этих периодических мер была доказана с помощью максимальности и минимальности соответствующих решений некоторого уравнения, обеспечивающего согласованность этих мер. В данной работе мы дадим краткий обзор известных мер Гиббса для НС-модели и альтернативное доказательство крайности 2-периодических мер при  $k = 2, 3$ . Наше доказательство основано на методе реконструкции на дереве.

### ОГЛАВЛЕНИЕ

1. Введение . . . . .	95
2. Предварительные сведения и известные факты . . . . .	96
3. Условия крайности периодических мер . . . . .	101
Список литературы . . . . .	106

### 1. ВВЕДЕНИЕ

Решения проблем, возникающих в результате исследований при изучении термодинамических свойств физических и биологических систем, в основном приводятся к задачам теории мер Гиббса. Мера Гиббса — это фундаментальный закон, определяющий вероятность микроскопического состояния данной физической системы. Известно, что каждой мере Гиббса сопоставляется одна фаза физической системы, и если мера Гиббса не единственна, то говорят, что существует фазовый переход. Для достаточно широкого класса гамильтонианов известно, что множество всех предельных мер Гиббса (соответствующих данному гамильтониану) образует непустое выпуклое компактное подмножество в множестве всех вероятностных мер (см. например [3, 7, 23]) и каждая точка этого выпуклого множества однозначно разлагается по его крайним точкам. В связи с этим особый интерес представляет описание всех крайних точек этого выпуклого множества, т. е. крайних мер Гиббса.

Определение меры Гиббса и других понятий, связанных с теорией мер Гиббса, можно найти, например, в работах [3, 7, 23, 24]. Несмотря на многочисленные работы, посвященных изучению мер Гиббса, ни для одной модели не было получено полное описание всех предельных мер Гиббса. Относительно других моделей для модели Изинга на дереве Кэли эта задача изучена достаточно полно. Так, например, в работе [1] построено несчетное множество крайних гиббсовских мер, а в



работе [13] найдено необходимое и достаточное условие крайности неупорядоченной фазы модели Изинга на дереве Кэли.

В работе [20] Мазелью и Суховым была введена и изучена НС-модель (жесткий диск, жесткая сердцевина) на  $d$ -мерной решетке  $\mathbb{Z}^d$ . Работы [5, 6, 8–12, 15, 18, 20–25] посвящены изучению (слабо) периодических мер Гиббса для НС-модели с двумя состояниями на дереве Кэли. В работе [25] была доказана единственность трансляционно-инвариантной меры и неединственность периодических мер Гиббса для НС-модели. Также в [25] (соответственно, в [18]) найдено достаточное условие на параметры НС-модели, при котором трансляционно-инвариантная мера Гиббса является не крайней (соответственно, крайней). В работе [6] расширена область крайности этой меры. Работа [5] посвящена изучению слабо периодических мер Гиббса для НС-модели для нормального делителя индекса два, и при некоторых условиях на параметры показана единственность слабо периодической меры Гиббса, а в работе [8] дано полное описание слабо периодических мер Гиббса для НС-модели при любых значениях параметров в случае нормального делителя индекса два. Для ознакомления с другими свойствами НС-модели (и их обобщения) на дереве Кэли см. гл. 7 монографии [24].

В данной работе изучается НС-модель с двумя состояниями на дереве Кэли. Даны новые доказательства утверждения, что на дереве Кэли порядка два и три существуют ровно три  $G_k^{(2)}$ -периодические меры Гиббса. При этом найдены явные виды  $G_k^{(2)}$ -периодических (не трансляционно-инвариантных) мер Гиббса на дереве Кэли порядка два и три. Доказано, что эти меры являются крайними.

## 2. ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ СВЕДЕНИЯ И ИЗВЕСТНЫЕ ФАКТЫ

**2.1. Дерево Кэли.** Пусть  $\Gamma^k = (V, L, i)$  — дерево Кэли порядка  $k \geq 1$ , где  $V$  — множество вершин  $\Gamma^k$ ,  $L$  — множество его ребер и  $i$  — функция инцидентности, сопоставляющая каждому ребру  $l \in L$  его концевые точки  $x, y \in V$ . Если  $i(l) = \{x, y\}$ , то  $x$  и  $y$  называются *ближайшими соседями* вершины и обозначается  $l = \langle x, y \rangle$ . Пусть  $d(x, y), x, y \in V$  — расстояние между вершинами  $x, y$ , т. е. количество ребер кратчайшего пути, соединяющего  $x$  и  $y$ .

Для фиксированного  $x^0 \in V$  обозначим

$$W_n = \{x \in V \mid d(x, x^0) = n\}, \quad V_n = \bigcup_{j=0}^n W_j.$$

Для  $x \in W_n$  обозначим (множество прямых потомков вершины  $x$ )

$$S(x) = \{y \in W_{n+1} : d(x, y) = 1\}.$$

**2.2. Допустимые конфигурации.** Пусть  $\Phi = \{0, 1\}$  и  $\sigma \in \Phi^V$  — конфигурация, т. е.  $\sigma = \{\sigma(x) \in \Phi : x \in V\}$ , где  $\sigma(x) = 1$  означает, что вершина  $x$  на дереве Кэли занята, а  $\sigma(x) = 0$  означает, что она свободна. Конфигурация  $\sigma$  называется *допустимой*, если  $\sigma(x)\sigma(y) = 0$  для любых соседних  $\langle x, y \rangle$  из  $V$  ( $V_n$  или  $W_n$ , соответственно). Обозначим множество таких конфигураций через  $\Omega$  ( $\Omega_{V_n}$  и  $\Omega_{W_n}$ , соответственно). Ясно, что  $\Omega \subset \Phi^V$ .

Объединение конфигураций  $\sigma_{n-1} \in \Phi^{V_{n-1}}$  и  $\omega_n \in \Phi^{W_n}$  определяется следующей формулой:

$$\sigma_{n-1} \vee \omega_n = \{\{\sigma_{n-1}(x), x \in V_{n-1}\}, \{\omega_n(y), y \in W_n\}\}.$$

**2.3. Мера Гиббса.** Гамильтониан НС-модели определяется по формуле

$$H(\sigma) = J \sum_{x \in V} \sigma(x), \quad \sigma \in \Omega,$$

где  $J \in \mathbb{R}$ .

Пусть  $\mathbf{B}$  —  $\sigma$ -алгебра, порожденная цилиндрическими подмножествами  $\Omega$ . Для любого  $n$  обозначим через  $\mathbf{B}_{V_n} = \{\sigma \in \Omega : \sigma|_{V_n} = \sigma_n\}$  подалгебру алгебры  $\mathbf{B}$ , где  $\sigma|_{V_n}$  — сужение  $\sigma$  на  $V_n$ ,  $\sigma_n : x \in V_n \mapsto \sigma_n(x)$  — допустимая конфигурация в  $V_n$ .

**Определение 2.1.** Для  $\lambda > 0$  НС-мера Гиббса — это вероятностная мера  $\mu$  на  $(\Omega, \mathbf{B})$  такая, что для любого  $n$  и  $\sigma_n \in \Omega_{V_n}$

$$\mu\{\sigma \in \Omega : \sigma|_{V_n} = \sigma_n\} = \int_{\Omega} \mu(d\omega) P_n(\sigma_n | \omega_{W_{n+1}}),$$

где

$$P_n(\sigma_n | \omega_{W_{n+1}}) = \frac{e^{-H(\sigma_n)}}{Z_n(\lambda; \omega |_{W_{n+1}})} \mathbf{1}(\sigma_n \vee \omega |_{W_{n+1}} \in \Omega_{V_{n+1}}).$$

Здесь  $Z_n(\lambda; \omega |_{W_{n+1}})$  — нормировочный множитель с граничным условием  $\omega |_{W_n}$ :

$$Z_n(\lambda; \omega |_{W_{n+1}}) = \sum_{\tilde{\sigma}_n \in \Omega_{V_n}} e^{-H(\tilde{\sigma}_n)} \mathbf{1}(\tilde{\sigma}_n \vee \omega |_{W_{n+1}} \in \Omega_{V_{n+1}}).$$

Для  $\sigma_n \in \Omega_{V_n}$  положим

$$\#\sigma_n = \sum_{x \in V_n} \mathbf{1}(\sigma_n(x) \geq 1)$$

— число занятых вершин в  $\sigma_n$ .

Пусть  $z : x \mapsto z_x = (z_{0,x}, z_{1,x}) \in \mathbb{R}_+^2$  — векторнозначная функция на  $V$ . При  $n = 1, 2, \dots$  и  $\lambda > 0$  рассмотрим вероятностную меру  $\mu^{(n)}$  на  $\Omega_{V_n}$ , определяемую как

$$\mu^{(n)}(\sigma_n) = \frac{1}{Z_n} \lambda^{\#\sigma_n} \prod_{x \in W_n} z_{\sigma(x), x}. \quad (2.1)$$

Здесь  $Z_n$  — нормирующий делитель:

$$Z_n = \sum_{\tilde{\sigma}_n \in \Omega_{V_n}} \lambda^{\#\tilde{\sigma}_n} \prod_{x \in W_n} z_{\tilde{\sigma}(x), x}.$$

Говорят, что последовательность вероятностных мер  $\mu^{(n)}$  является *согласованной*, если для любых  $n \geq 1$  и  $\sigma_{n-1} \in \Omega_{V_{n-1}}$ :

$$\sum_{\omega_n \in \Omega_{W_n}} \mu^{(n)}(\sigma_{n-1} \vee \omega_n) \mathbf{1}(\sigma_{n-1} \vee \omega_n \in \Omega_{V_n}) = \mu^{(n-1)}(\sigma_{n-1}). \quad (2.2)$$

В этом случае существует единственная мера  $\mu$  на  $(\Omega, \mathbf{B})$  такая, что для всех  $n$  и  $\sigma_n \in \Omega_{V_n}$

$$\mu(\{\sigma |_{V_n} = \sigma_n\}) = \mu^{(n)}(\sigma_n).$$

**Определение 2.2.** Мера  $\mu$ , являющаяся пределом последовательности  $\mu^{(n)}$ , определенной формулой (2.1) с условием согласованности (2.2), называется *НС-мерой Гиббса* с  $\lambda > 0$ , соответствующей функции  $z : x \in V \setminus \{x^0\} \mapsto z_x$ . При этом НС-мера Гиббса, соответствующая постоянной функции  $z_x \equiv z$ , называется *трансляционно-инвариантной*.

Известно, что существует взаимно-однозначное соответствие между множеством  $V$  вершин дерева Кэли порядка  $k \geq 1$  и группой  $G_k$ , являющейся свободным произведением  $k+1$  циклических групп второго порядка с образующими  $a_1, \dots, a_{k+1}$ , соответственно (см. [2]). Поэтому множество  $V$  можно отождествлять с множеством  $G_k$ .

Пусть  $\hat{G}_k$  — подгруппа группы  $G_k$ .

Если гиббсовская мера инвариантна относительно некоторой подгруппы конечного индекса  $\hat{G}_k \subset G_k$ , то она называется  *$\hat{G}_k$ -периодической*.

Известно (см. [25]), что каждой НС-мере Гиббса для НС-модели на дереве Кэли можно сопоставить совокупность величин  $z = \{z_x, x \in G_k\}$ , удовлетворяющих равенству

$$z_x = \prod_{y \in S(x)} (1 + \lambda z_y)^{-1}, \quad (2.3)$$

где  $\lambda = e^{J_1} > 0$  — параметр,  $J_1 = -J\beta$ ,  $\beta = \frac{1}{T}$ ,  $T > 0$  — температура.

**Определение 2.3.** Совокупность величин  $z = \{z_x, x \in G_k\}$  называется  *$\hat{G}_k$ -периодической*, если  $z_{yx} = z_x$  для  $\forall x \in G_k, y \in \hat{G}_k$ .

$G_k$ -периодические совокупности называются *трансляционно-инвариантными*.

Для любого  $x \in G_k$  множество  $\{y \in G_k : \langle x, y \rangle\} \setminus S(x)$  имеет единственный элемент, который обозначим через  $x_\downarrow$  (см. [4]).

Пусть  $G_k / \hat{G}_k = \{H_1, \dots, H_r\}$  — фактор группа, где  $\hat{G}_k$  — нормальный делитель индекса  $r \geq 1$ .

**Определение 2.4.** Совокупность величин  $z = \{z_x, x \in G_k\}$  называется  $\widehat{G}_k$ -слабо периодической, если  $z_x = z_{ij}$  при  $x \in H_i, x_{\downarrow} \in H_j$  для  $\forall x \in G_k$ .

**Определение 2.5.** Мера  $\mu$  называется  $\widehat{G}_k$ -(слабо) периодической, если она соответствует  $\widehat{G}_k$ -(слабо) периодической совокупности величин  $z$ .

Заметим, что мера  $\mu$  является трансляционно-инвариантной, если она соответствует  $G_k$ -периодической совокупности величин  $z$ .

**2.4. Известные теоремы.** Известно, что для каждого  $\beta > 0$  меры Гиббса образуют непустое выпуклое компактное множество  $\mathbf{G}$  в пространстве всех вероятностных мер на  $\Omega$ , снабженном слабой топологией [3, Ch. 7].

Напомним (см. [7]), что мера Гиббса  $\mu$  (как элемент выпуклого множества) называется *крайней*, если  $\mu \neq s\nu + (1-s)\nu'$  для различных мер Гиббса  $\nu, \nu'$  и  $0 < s < 1$ .

Обозначим через  $ex\mathbf{G}$  множество всех крайних мер (точек) в  $\mathbf{G}$ . Заметим, что (см. [3, теорема 12.6]) каждой крайней мере  $\mu \in ex\mathbf{G}$  соответствует некоторое решение функционального уравнения (2.3). Но обратное неверно: могут существовать решения, не определяющие крайние меры. Теперь приведем несколько решений уравнения (2.3) и условия крайности соответствующих мер Гиббса.

**Теорема 2.1** (см. [5]). *Для любого нормального делителя  $\mathcal{G} \subset G_k$  всякая  $\mathcal{G}$ -периодическая мера Гиббса НС-модели является либо трансляционно-инвариантной, либо  $G_k^{(2)}$ -периодической мерой Гиббса, где*

$$G_k^{(2)} = \{x \in G_k : |x| - \text{четное число}\}.$$

**Теорема 2.2** (см. [25]).

- Для НС модели при  $k \geq 2$  и  $\lambda > 0$  трансляционно-инвариантная мера Гиббса  $\mu^*$  единственна.
- Для  $k \geq 2$  и

$$\lambda > \frac{1}{\sqrt{k}-1} \left( \frac{\sqrt{k}}{\sqrt{k}-1} \right)^k \quad (2.4)$$

мера  $\mu^*$  не является крайней.

- Для любого  $\epsilon > 0$  существует  $k_0$  такое, что мера  $\mu^*$  не является крайней для всех  $k \geq k_0$  и

$$\lambda > e^{1+\epsilon} \ln k (\ln k + \ln \ln k + 1 + \epsilon). \quad (2.5)$$

- Если для некоторых  $k$  и  $\lambda^0$  мера  $\mu^*$  не является крайней, то она остается некрайней для этого  $k$  и для всех  $\lambda > \lambda^0$ .

Следующая теорема доказана в [18].

**Теорема 2.3.** *Для  $\lambda = 1$  мера  $\mu^*$  является крайней для всех  $k$ .*

При доказательстве крайности некоторой меры Гиббса  $\mu$  обычно принимается алгоритм реконструкции, предложенный и изученный в [21] (см. также [24, гл. 4]). В этом алгоритме рекурсивно присваивается значение 1 вершине  $x$ , если все  $y \in S(x)$  имеют значения 0, и значение 0 в противном случае. Говорят, что реконструкция возможна, если при данной конфигурации  $\sigma_n \in \Omega_{W_n}$  возможно определить значения 0 или 1 для начальной точки  $x^0$ . Известно, что возможность реконструкции эквивалентна некрайности меры  $\mu$ . Точнее, рассматривается 0, 1-значная цепь Маркова, порожденная мерой  $\mu$  на пути дерева. Пусть матрица вероятностных переходов для цепи есть  $\mathbf{P} = (p_{ij})_{i,j=0,1}$ .

В [22] доказано, что реконструкция невозможна, если

$$\frac{(p_{00} - p_{10})^2}{\min\{p_{00} + p_{10}, p_{01} + p_{11}\}} \leq \frac{1}{k}.$$

В работе [18] эта оценка улучшена следующим образом.

**Теорема 2.4.** *Реконструкция невозможна, если*

$$(\sqrt{p_{00}p_{11}} - \sqrt{p_{01}p_{10}})^2 \leq \frac{1}{k}. \quad (2.6)$$

Основным результатом [6] является следующая теорема.

**Теорема 2.5.** *При  $k \geq 2$  и  $\lambda \in (0, \lambda_*)$  мера  $\mu^*$  является крайней, где*

$$\lambda_* = \lambda_*(k) = \frac{1}{t_*^k} \left( \frac{1}{t_*} - 1 \right), \quad (2.7)$$

и  $t_* \in (0, 1)$  является единственным решением уравнения

$$t^{k+1} - kt^2 + (2k - 1)t - k + 1 = 0. \quad (2.8)$$

Теперь дадим полное описание  $G_k^{(2)}$ -периодических мер Гиббса на дереве Кэли порядка два и три. Они соответствуют совокупности величин

$$z_x = \begin{cases} z_1, & \text{если } x \in G_k^{(2)}, \\ z_2, & \text{если } x \in G \setminus G_k^{(2)}. \end{cases} \quad (2.9)$$

Отсюда, в силу (2.3) имеем

$$\begin{cases} z_1 = \frac{1}{(1 + \lambda z_2)^k}, \\ z_2 = \frac{1}{(1 + \lambda z_1)^k}. \end{cases} \quad (2.10)$$

Известна следующая теорема.

**Теорема 2.6** (см. [25]). *Для НС модели при*

$$\lambda \leq \lambda_{cr} = (k - 1)^{-1} \left( \frac{k}{k - 1} \right)^k. \quad (2.11)$$

существует ровно одна  $G_k^{(2)}$ -периодическая мера Гиббса  $\mu_0$ , которая совпадает с единственной трансляционно-инвариантной мерой Гиббса  $\mu^*$ , а при  $\lambda > \lambda_{cr}$  существуют ровно три  $G_k^{(2)}$ -периодические меры Гиббса  $\mu_0, \mu_1, \mu_2$ , где мера  $\mu_0$  является трансляционно-инвариантной, а меры  $\mu_1$  и  $\mu_2$  являются  $G_k^{(2)}$ -периодическими (не трансляционно-инвариантными).

**2.5. Слабо периодические меры.** В работе [8] были изучены слабо периодические меры Гиббса для любых нормальных делителей индекса два и доказано, что такая мера единственна. Более того, она совпадает с единственной трансляционно-инвариантной мерой Гиббса.

Пусть  $A \subset \{1, 2, \dots, k + 1\}$  и  $H_A = \{x \in G_k : \sum_{i \in A} w_x(a_i) - \text{четное число}\}$ , где  $w_x(a_i)$  — число вхождений буквы  $a_i$  в слове  $x \in G_k$ , и  $G_k^{(4)} = H_A \cap G_k^{(2)}$  — нормальный делитель индекса 4.

Тогда в силу (2.3)  $G_k^{(4)}$ -слабо периодические меры соответствуют решениям следующей системы уравнений:

$$\begin{cases} z_1 = \frac{(1 + \lambda z_3)^k}{((1 + \lambda z_3)^{k/i} + \lambda z_4^{1-1/i})^i} \cdot \frac{1}{(1 + \lambda z_2)^{k-i}}, \\ z_2 = \frac{(1 + \lambda z_4)^k}{((1 + \lambda z_4)^{k/i} + \lambda z_3^{1-1/i})^i} \cdot \frac{1}{(1 + \lambda z_1)^{k-i}}, \\ z_3 = \frac{(1 + \lambda z_1)^k}{((1 + \lambda z_1)^{k/i} + \lambda z_2^{1-1/i})^i} \cdot \frac{1}{(1 + \lambda z_4)^{k-i}}, \\ z_4 = \frac{(1 + \lambda z_2)^k}{((1 + \lambda z_2)^{k/i} + \lambda z_1^{1-1/i})^i} \cdot \frac{1}{(1 + \lambda z_3)^{k-i}}. \end{cases} \quad (2.12)$$

Здесь  $i = |A|$  — мощность множества  $A$ .

Рассмотрим отображение  $W : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$ , определенное следующим образом:

$$\begin{cases} z_1' = \frac{(1 + \lambda z_3)^k}{((1 + \lambda z_3)^{k/i} + \lambda z_4^{1-1/i})^i} \cdot \frac{1}{(1 + \lambda z_2)^{k-i}}, \\ z_2' = \frac{(1 + \lambda z_4)^k}{((1 + \lambda z_4)^{k/i} + \lambda z_3^{1-1/i})^i} \cdot \frac{1}{(1 + \lambda z_1)^{k-i}}, \\ z_3' = \frac{(1 + \lambda z_1)^k}{((1 + \lambda z_1)^{k/i} + \lambda z_2^{1-1/i})^i} \cdot \frac{1}{(1 + \lambda z_4)^{k-i}}, \\ z_4' = \frac{(1 + \lambda z_2)^k}{((1 + \lambda z_2)^{k/i} + \lambda z_1^{1-1/i})^i} \cdot \frac{1}{(1 + \lambda z_3)^{k-i}}. \end{cases}$$

Заметим, что (2.12) — это уравнение  $z = W(z)$ . Чтобы решить систему уравнений (2.12), надо найти неподвижные точки отображения  $z' = W(z)$ .

Известны следующие леммы.

**Лемма 2.1** (см. [9]). *Отображение  $W$  имеет инвариантные множества следующих видов:*

$$\begin{aligned} I_1 &= \{(z_1, z_2, z_3, z_4) \in \mathbb{R}^4 : z_1 = z_2 = z_3 = z_4\}, & I_2 &= \{(z_1, z_2, z_3, z_4) \in \mathbb{R}^4 : z_1 = z_3, z_2 = z_4\}, \\ I_3 &= \{(z_1, z_2, z_3, z_4) \in \mathbb{R}^4 : z_1 = z_2, z_3 = z_4\}, & I_4 &= \{(z_1, z_2, z_3, z_4) \in \mathbb{R}^4 : z_1 = z_4, z_2 = z_3\}. \end{aligned}$$

**Лемма 2.2** (см. [9]). *Если на инвариантных множествах  $I_2, I_3, I_4$  существуют слабо периодические меры Гиббса, то они являются либо трансляционно-инвариантными, либо слабо периодическими (не периодическими).*

В работах [9, 11, 12, 15] были изучены слабо периодические меры Гиббса для НС-модели в случае нормального делителя индекса четыре на некоторых инвариантах. В частности, были доказаны утверждения следующей теоремы.

**Теорема 2.7.** *Для НС-модели в случае нормального делителя индекса четыре верны следующие утверждения:*

- Пусть  $k = 2$ ,  $\lambda_{cr} = 4$  и  $i = 1$  или  $i = 2$ . Тогда на  $I_2$  при  $\lambda < \lambda_{cr}$  существует одна слабо периодическая мера Гиббса, которая является трансляционно-инвариантной, при  $\lambda = \lambda_{cr}$  существуют две слабо периодические меры Гиббса, одна из которых является трансляционно-инвариантной, другая слабо периодической (не периодической), и при  $\lambda > \lambda_{cr}$  существуют ровно две слабо периодические (не периодические) меры Гиббса.
- Пусть  $k = 3$ ,  $i = 1$ ,  $\lambda_{cr} = \frac{27}{16}$ . Тогда для НС-модели в случае нормального делителя индекса четыре при  $\lambda \leq \lambda_{cr}$  существует одна слабо периодическая мера Гиббса (соответствующая совокупности величин из  $I_2$ ), которая является трансляционно-инвариантной, а при  $\lambda > \lambda_{cr}$  существуют ровно три слабо периодические меры Гиббса (соответствующие совокупности величин из  $I_2$ ), одна из которых является трансляционно-инвариантной, а две другие слабо периодическими (не периодическими).
- При  $k \geq 6$ ,  $i = 1$  и  $\lambda \in (\lambda^-(k), \lambda^+(k))$  существует не менее трех слабо периодических мер Гиббса, соответствующих совокупности величин из  $I_4$ . При этом одна из них является трансляционно-инвариантной, другие слабо периодическими (не периодическими) мерами Гиббса, где

$$s^\pm := s^\pm(k) = \frac{k - 3 \pm \sqrt{k^2 - 6k + 1}}{4},$$

$$\lambda^\pm := \lambda^\pm(k) = (s^\pm + 1)^k s^\pm.$$

**Замечание.** По лемме 2.2 ясно, что существующие слабо периодические меры Гиббса в теореме 2.7 отличаются от периодических.

## 3. УСЛОВИЯ КРАЙНОСТИ ПЕРИОДИЧЕСКИХ МЕР

Обозначим  $f(x) = \frac{1}{(1 + \lambda x)^k}$ . Следующая лемма очевидна.

**Лемма 3.1.** *Если  $(x_0, y_0)$  является решением системы уравнений*

$$\begin{cases} x = f(y), \\ y = f(x), \end{cases} \quad (3.1)$$

то  $(y_0, x_0)$  также является решением системы уравнений (3.1).

В частности, из леммы следует, что если существует решение  $(x_0, y_0)$  ( $x_0 \neq y_0$ ), то система (3.1) имеет более одного решения.

При изучении крайности нам необходимы явные виды решений, соответствующих мерам  $\mu_1$  и  $\mu_2$ . Теперь мы найдем явные виды решений при  $k = 2, 3$ .

*Случай  $k = 2$ .* Перепишем систему уравнений (2.10) при  $k = 2$ :

$$\begin{cases} \sqrt{z_1} + \lambda z_2 \sqrt{z_1} = 1, \\ \sqrt{z_2} + \lambda z_1 \sqrt{z_2} = 1. \end{cases} \quad (3.2)$$

Введя обозначения  $\sqrt{z_1} = x$  и  $\sqrt{z_2} = y$ , перепишем (3.2) следующим образом:

$$\begin{cases} x + \lambda xy^2 = 1, \\ y + \lambda yx^2 = 1. \end{cases} \quad (3.3)$$

В этой системе уравнений, вычтя из первого уравнения второе, получим

$$(x - y)(1 - \lambda xy) = 0.$$

Отсюда  $x = y$  или

$$\lambda xy = 1.$$

В случае  $x = y$  получим решение, соответствующее единственной трансляционно-инвариантной мере Гиббса  $\mu_0$  при  $\lambda > 0$ . Это решение имеет явный вид. Кроме того, в работе [11] была изучена крайность трансляционно-инвариантной меры Гиббса, соответствующей этому решению.

Пусть  $x \neq y$  и  $\lambda xy = 1$ . В этом случае, из (3.3) получим квадратное уравнение

$$\lambda x^2 - \lambda x + 1 = 0,$$

решения которого имеют вид

$$x_1 = \frac{\lambda + \sqrt{\lambda^2 - 4\lambda}}{2\lambda}, \quad x_2 = \frac{\lambda - \sqrt{\lambda^2 - 4\lambda}}{2\lambda}.$$

Ясно, что  $\lambda > \lambda_{cr} = 4$  и  $x_1 > 0$ ,  $x_2 > 0$ .

Далее, из  $\lambda xy = 1$  получим

$$y_1 = \frac{2}{\lambda + \sqrt{\lambda^2 - 4\lambda}}, \quad y_2 = \frac{2}{\lambda - \sqrt{\lambda^2 - 4\lambda}}.$$

Итак, для системы уравнений (3.3) имеем решения вида:  $(x_1, y_1)$  и  $(x_2, y_2)$ . В силу леммы 3.1  $(y_1, x_1)$  и  $(y_2, x_2)$  также являются решениями (3.3). Но не трудно заметить, что  $x_1 = y_2$  и  $x_2 = y_1$ . Из всего сказанного следует, что при  $0 < \lambda \leq \lambda_{cr}$  существует ровно одна  $G_k^{(2)}$ -периодическая мера Гиббса, которая совпадает с единственной трансляционно-инвариантной мерой Гиббса  $\mu_0$ , а при  $\lambda > \lambda_{cr}$  существуют ровно три  $G_k^{(2)}$ -периодические меры Гиббса  $\mu_0, \mu_1, \mu_2$ , где меры  $\mu_1, \mu_2$  соответствуют решениям  $(z_1, z_2) = (x_1^2, y_1^2)$  и  $(z_2, z_1) = (x_2^2, y_2^2)$ , соответственно, и являются  $G_k^{(2)}$ -периодическими (не трансляционно-инвариантными).

*Случай  $k = 3$ .* Перепишем систему уравнений (2.10) при  $k = 3$ :

$$\begin{cases} \sqrt[3]{z_1} + \lambda z_2 \sqrt[3]{z_1} = 1, \\ \sqrt[3]{z_2} + \lambda z_1 \sqrt[3]{z_2} = 1. \end{cases} \quad (3.4)$$

Введя обозначения  $\sqrt[3]{z_1} = x$  и  $\sqrt[3]{z_2} = y$ , перепишем (3.4) следующим образом:

$$\begin{cases} x + \lambda xy^3 = 1, \\ y + \lambda yx^3 = 1. \end{cases} \quad (3.5)$$

В этой системе уравнений, вычтя из первого уравнения второе, получим

$$(x - y)(1 - \lambda xy(x + y)) = 0.$$

Отсюда  $x = y$  или

$$\lambda xy(x + y) = 1.$$

В случае  $x = y$  получим решение, соответствующее единственной трансляционно-инвариантной мере Гиббса  $\mu^{(0)}$  при  $\lambda > 0$ . В работе [6] была изучена крайность трансляционно-инвариантной меры Гиббса, соответствующей этому решению.

Пусть  $x \neq y$ . Тогда  $\lambda xy(x + y) = 1$ . Используя последнее равенство, из первого уравнения (3.5) получим уравнение

$$x^2 + y^2 + xy = x + y.$$

Введем обозначения  $x + y = a$  и  $xy = b$ . Тогда  $ab\lambda = 1$  и  $a^2 - b = a$ . Отсюда имеем уравнение

$$a^3 - a^2 - \frac{1}{\lambda} = 0,$$

решение которого по формуле Кардано имеет вид

$$a = \frac{1}{6} \sqrt[3]{\frac{12\sqrt{12\lambda + 81} + 8\lambda + 108}{\lambda}} + \frac{2}{3} \sqrt[3]{\frac{\lambda}{12\sqrt{12\lambda + 81} + 8\lambda + 108}} + \frac{1}{3}.$$

С другой стороны, из  $x + y = a$ ,  $xy = b$  следует, что  $x$  и  $y$  являются решениями некоторого квадратного уравнения  $t^2 - at + b = 0$ . Используя равенство  $b = \frac{1}{a\lambda}$ , для решений этого квадратного уравнения будем иметь:

$$t_{1,2} = \frac{\lambda a^2 \pm \sqrt{\lambda^2 a^4 - 4\lambda a}}{2\lambda a},$$

т. е.

$$t_1 = \frac{\lambda a^2 - \sqrt{\lambda^2 a^4 - 4\lambda a}}{2\lambda a} = x, \quad t_2 = \frac{\lambda a^2 + \sqrt{\lambda^2 a^4 - 4\lambda a}}{2\lambda a} = y.$$

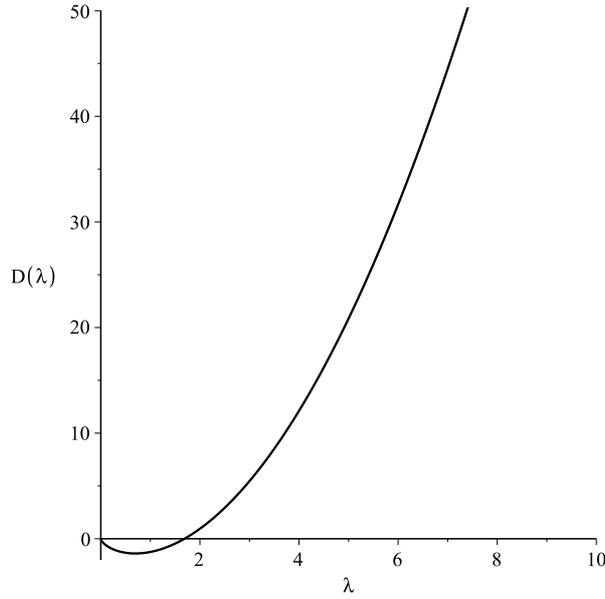
С помощью компьютерного анализа можно увидеть, что дискриминант  $D(\lambda) = a^4 \lambda^2 - 4\lambda a > 0$  при  $\lambda > \lambda_{cr} = \frac{27}{16}$  и  $D(\lambda_{cr}) = 0$  (см. рис. 1). Заметим, что это критическое значение  $\lambda_{cr}$  совпадает со значением из теоремы 2.6 при  $k = 3$ .

Значит, система уравнений (3.4) имеет решение  $(z_1, z_2)$ , где

$$z_1 = \left( \frac{\lambda a^2 - \sqrt{\lambda^2 a^4 - 4\lambda a}}{2\lambda a} \right)^3, \quad z_2 = \left( \frac{\lambda a^2 + \sqrt{\lambda^2 a^4 - 4\lambda a}}{2\lambda a} \right)^3.$$

Но в силу симметрии  $(z_2, z_1)$  также является решением (3.4). Итак, система уравнений (3.4) при  $0 < \lambda \leq \lambda_{cr}$  имеет единственное решение  $(z, z)$ , соответствующее единственной трансляционно-инвариантной мере  $\mu^{(0)}$ , а при  $\lambda > \lambda_{cr}$  имеет три решения  $(z, z)$ ,  $(z_1, z_2)$  и  $(z_2, z_1)$ , которые соответствуют мерам  $\mu^{(0)}$ ,  $\mu^{(1)}$ ,  $\mu^{(2)}$ , где меры  $\mu^{(1)}$ ,  $\mu^{(2)}$  являются  $G_k^{(2)}$ -периодическими (не трансляционно-инвариантными).

**3.1. Крайность меры.** Мы имеем  $G_k^{(2)}$ -периодические меры  $\mu_1$  и  $\mu_2$ . Чтобы изучить их (не) крайность воспользуемся методами из работ [14, 16, 17, 19] для трансляционно-инвариантных мер Гиббса. Для каждой трансляционно-инвариантной меры рассматривается цепь Маркова с состояниями  $\{0, 1\}$ , индексированная на дереве Кэли. А именно, предположим, что нам даны дерево Кэли с множеством вершин  $V$ , вероятностная мера  $\nu$  и матрица вероятностных переходов  $\mathbb{P} = (P_{ij})$  на множестве  $\{0, 1\}$ . Мы можем построить дерево, индексированное цепью Маркова  $X : V \rightarrow \{0, 1\}$ , путем выбора  $X(x^0)$  в соответствии с  $\nu$  и выбором  $X(v)$  для каждой вершины  $v \neq x^0$ , используя вероятности перехода с учетом значения его родителя, независимо от всего остального. Так как


 Рис. 1. График функции  $D(\lambda)$ .

трансляционно-инвариантные меры получаются при  $z_1 = z_2$ , в (2.9) матрица  $\mathbb{P}$  зависит только от  $z_1$ , более точно,

$$\mathbb{P} \equiv \mathbb{P}_{z_1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{1 + \lambda z_1} & \frac{\lambda z_1}{1 + \lambda z_1} \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Но в случае периодических мер матрица  $\mathbb{P}$  зависит от  $z_1$  и  $z_2$ , где  $z_1 \neq z_2$  и  $(z_1, z_2)$  — решение системы уравнений (2.10). Точнее,  $\mathbb{P} \equiv \mathbb{P}_{z_1, z_2} = \mathbf{P}_{\mu_1}$  (соотв.  $\mathbf{P}_{\mu_2}$ ) — матрица вероятностных переходов  $P_{il}$ , определенная данной периодической мерой Гиббса  $\mu_1$  (соответственно,  $\mu_2$ ). Заметим, что  $\mathbf{P}_{\mu_1}$  является произведением двух матриц вероятностных переходов:

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_{\mu_1} = \mathbb{P}_{z_1} \mathbb{P}_{z_2} &= \begin{pmatrix} \frac{1}{1 + \lambda z_1} & \frac{\lambda z_1}{1 + \lambda z_1} \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{1 + \lambda z_2} & \frac{\lambda z_2}{1 + \lambda z_2} \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} \frac{1 + \lambda^2 z_1 z_2 + \lambda z_1}{(1 + \lambda z_1)(1 + \lambda z_2)} & \frac{\lambda z_2}{(1 + \lambda z_1)(1 + \lambda z_2)} \\ \frac{1}{1 + \lambda z_2} & \frac{\lambda z_2}{1 + \lambda z_2} \end{pmatrix} \quad (3.6) \end{aligned}$$

Таким образом, матрица  $\mathbf{P}_{\mu_1}$  определяет марковскую цепь на дереве Кэли порядка  $k^2$ , которое состоит из вершин исходного дерева в четных местах.

Достаточное условие Кестена—Стигума некрайности меры Гиббса  $\mu_1$ , соответствующей матрице  $\mathbf{P}_{\mu_1}$ :  $k^2 s_2^2 > 1$ , где  $s_2$  есть второе по абсолютной величине собственное значение  $\mathbf{P}_{\mu_1}$ .

Найдем собственные значения этой матрицы:

$$s_1 = 1, \quad s_2 = \frac{\lambda^2 z_1 z_2}{\lambda^2 z_1 z_2 + \lambda z_1 + \lambda z_2 + 1}.$$

Случай  $k = 2$ . В этом случае

$$z_1 = \left( \frac{\lambda + \sqrt{\lambda^2 - 4\lambda}}{2\lambda} \right)^2, \quad z_2 = \left( \frac{\lambda - \sqrt{\lambda^2 - 4\lambda}}{2\lambda} \right)^2.$$

В силу симметрии решений достаточно проверить условие некрайности меры  $\mu_1$  при  $k = 2$ . Для этого вычислим  $\lambda^2 z_1 z_2$  и  $\lambda(z_1 + z_2)$ :

$$\lambda^2 z_1 z_2 = \lambda^2 \left( \frac{\lambda + \sqrt{\lambda^2 - 4\lambda}}{2\lambda} \right)^2 \left( \frac{\lambda - \sqrt{\lambda^2 - 4\lambda}}{2\lambda} \right)^2,$$

$$\lambda^2 z_1 z_2 = \lambda^2 \left( \frac{\lambda^2 - \lambda^2 + 4\lambda}{4\lambda^2} \right)^2 = 1,$$

$$\lambda(z_1 + z_2) = \lambda \frac{4\lambda^2 - 8\lambda}{4\lambda^2} = \lambda - 2.$$

Тогда из  $4s^2 > 1$  получим неравенство

$$4 \left( \frac{1}{\lambda} \right)^2 > 1,$$

решение которого есть  $\lambda < 2$ . Но меры  $\mu_1$  и  $\mu_2$  существуют при  $\lambda > 4$ . Значит, эти меры заведомо являются крайними.

Для исследования крайности приведем необходимые определения из работы [19]. Если удалить произвольное ребро  $\langle x^0, x^1 \rangle = l \in L$  из дерева Кэли  $\Gamma^k$ , то оно разбивается на две компоненты  $\Gamma_{x^0}^k$  и  $\Gamma_{x^1}^k$ , каждая из которых называется *полубесконечным* деревом или *полудеревом Кэли*.

Рассмотрим конечное полное поддерево  $\mathcal{T}$ , которое содержит все начальные точки полудерева  $\Gamma_{x^0}^k$ . Граница  $\partial\mathcal{T}$  поддерева  $\mathcal{T}$  состоит из ближайших соседей его вершин, которые лежат в  $\Gamma_{x^0}^k \setminus \mathcal{T}$ . Мы отождествляем поддерево  $\mathcal{T}$  с множеством его вершин. Через  $E(A)$  обозначим множество всех ребер  $A$  и  $\partial A$ .

В [19] ключевыми являются две величины  $\kappa$  и  $\gamma$ . Оба являются свойствами множества мер Гиббса  $\{\mu_{\mathcal{T}}^{\tau}\}$ , где граничное условие  $\tau$  фиксировано и  $\mathcal{T}$  является произвольным, начальным, полным, конечным поддеревом  $\Gamma_{x^0}^k$ . Для данного начального поддерева  $\mathcal{T}$  дерева  $\Gamma_{x^0}^k$  и вершины  $x \in \mathcal{T}$  мы будем писать  $\mathcal{T}_x$  для (максимального) поддерева  $\mathcal{T}$  с начальной точкой в  $x$ . Когда  $x$  не является начальной точкой  $\mathcal{T}$ , через  $\mu_{\mathcal{T}_x}^s$  обозначим меру Гиббса, в которой «предок»  $x$  имеет спин  $s$  и конфигурация на нижней границе  $\mathcal{T}_x$  (т. е. на  $\partial\mathcal{T}_x \setminus \{\text{предок } x\}$ ) задается через  $\tau$ .

Для двух мер  $\mu_1$  и  $\mu_2$  на  $\Omega$  через  $\|\mu_1 - \mu_2\|_x$  обозначим расстояние по норме

$$\|\mu_1 - \mu_2\|_x = \frac{1}{2} \sum_{i=0}^1 |\mu_1(\sigma(x) = i) - \mu_2(\sigma(x) = i)|.$$

Пусть  $\eta^{x,s}$  — конфигурация  $\eta$  со спином в  $x$ , равным  $s$ .

Следуя [19], определим

$$\kappa \equiv \kappa(\mu) = \frac{1}{2} \max_{i,j} \sum_{l=0}^1 |P_{il} - P_{jl}|,$$

$$\gamma \equiv \gamma(\mu) = \sup_{A \in \Gamma^k} \max \|\mu_A^{\eta^{y,s}} - \mu_A^{\eta^{y,s'}}\|_x,$$

где максимум берется по всем граничным условиям  $\eta$ , всем  $y \in \partial A$ , всем соседям  $x \in A$  вершины  $y$  и всем спином  $s, s' \in \{0, 1\}$ .

Достаточным условием крайности меры Гиббса  $\mu$  является  $k\kappa(\mu)\gamma(\mu) < 1$ , но для рассматриваемых  $G_k^{(2)}$ -периодических мер это условие выглядит:  $k^2\kappa(\mu)\gamma(\mu) < 1$ .

Используя (3.6), при  $i \neq j$  получим

$$\kappa = \frac{\lambda^2 z_1 z_2}{(1 + \lambda z_1)(1 + \lambda z_2)}.$$

А при  $i = j$  имеем  $|P_{il} - P_{jl}| = 0$ . Из работы [19, с. 151, теорема 5.1] известно, что для НС-модели справедлива оценка:  $\gamma \leq \frac{\lambda}{\lambda + 1}$ .

В случае  $k = 2$  для мер  $\mu_1$  и  $\mu_2$ , соответствующих решениям  $z_1$  и  $z_2$ , имеем  $\kappa = \frac{1}{\lambda}$ . Следовательно, из условия  $4\kappa\gamma > 1$  получим неравенство

$$\frac{4\lambda}{\lambda(\lambda + 1)} < 1,$$

решением которого является  $\lambda > 3$ . Следовательно, в случае  $k = 2$  условие крайности мер  $\mu_1$  и  $\mu_2$  выполняется при любых значениях  $\lambda > 4$ , т. е. в области существования этих мер.

Итак, доказана следующая теорема.

**Теорема 3.1.** Пусть  $k = 2$ . Тогда для НС-модели  $G_k^{(2)}$ -периодические меры Гиббса  $\mu_1$  и  $\mu_2$  при  $\lambda > 4$  являются крайними.

*Случай  $k = 3$ .* В этом случае проверим условие некрайности меры  $\mu^{(1)}$  (в силу симметрии решений и выражения для  $s_2$  область некрайности меры  $\mu^{(2)}$  совпадает с областью некрайности меры  $\mu^{(1)}$ ). Из условия Кестена—Стигума  $k^2 s_2^2 > 1$  получим неравенство

$$h(\lambda) = 9 \left( \frac{\lambda^2 z_1 z_2}{(1 + \lambda z_1)(1 + \lambda z_2)} \right)^2 - 1 > 0.$$

Так как выражения для  $z_1$  и  $z_2$  громоздкие, решить это неравенство аналитически очень трудно. Поэтому рассмотрим производную  $h\left(\frac{1}{\lambda}\right)$ :

$$\left( h\left(\frac{1}{\lambda}\right) \right)' = -\frac{1}{\lambda^2} h'\left(\frac{1}{\lambda}\right).$$

Ясно, что из возрастания функции  $h\left(\frac{1}{\lambda}\right)$  при  $\lambda \in (0, 1]$  следует убывание функции  $h(\lambda)$  при  $\lambda \in [1, +\infty)$ . Из графиков функций  $h(\lambda)$  и  $h\left(\frac{1}{\lambda}\right)$  можно увидеть, что функция  $h(\lambda)$  убывает при  $\lambda \in [1, +\infty)$  (см. рис. 2). Кроме того, меры  $\mu^{(1)}$  и  $\mu^{(2)}$  существуют при  $\lambda > \frac{27}{16}$ . Значит, эти меры заведомо являются крайними.

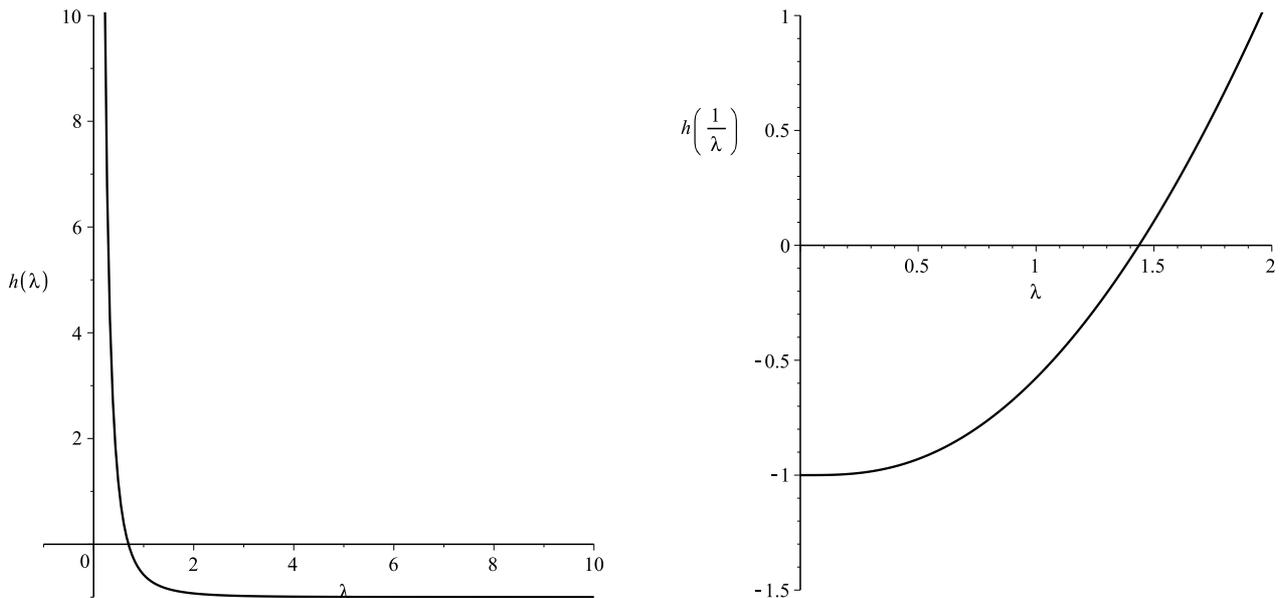


Рис. 2. График функции  $h(\lambda)$  при  $\lambda \in [1, +\infty)$  (слева) и график функции  $h\left(\frac{1}{\lambda}\right)$  при  $\lambda \in (0, 1]$  (справа).

Далее, проверим условие крайности меры  $\mu^{(1)}$  (в силу симметрии решений и выражения для  $\kappa$  область крайности меры  $\mu^{(2)}$  совпадает с областью крайности меры  $\mu^{(1)}$ ). Достаточным условием крайности меры  $\mu^{(1)}$  является:  $k^2\kappa(\mu^{(1)})\gamma(\mu^{(1)}) < 1$ , т. е.

$$g(\lambda) = \frac{9\lambda^2 z_1(\lambda) z_2(\lambda)}{(1 + \lambda z_1(\lambda))(1 + \lambda z_2(\lambda))} \cdot \frac{\lambda}{\lambda + 1} - 1 < 0.$$

Так как меры  $\mu^{(1)}$  и  $\mu^{(2)}$  существуют при  $\lambda > \lambda_{cr} = \frac{27}{16}$ , то неравенство  $g(\lambda) < 0$  можно рассмотреть при  $\lambda \in [1, +\infty)$ . Вычислим производную функции  $g\left(\frac{1}{\lambda}\right)$ :

$$\left(g\left(\frac{1}{\lambda}\right)\right)' = -\frac{1}{\lambda^2} g'\left(\frac{1}{\lambda}\right).$$

Из этого равенства и рис. 3 следует, что функция  $g(\lambda)$  убывает при  $\lambda \in [1, +\infty)$ , т. к. функция  $g\left(\frac{1}{\lambda}\right)$  возрастает при  $\lambda \in (0, 1]$  (см. рис. 3). Следовательно, неравенство  $g(\lambda) < 0$  справедливо при  $\lambda > \lambda_{cr} > 1$ .

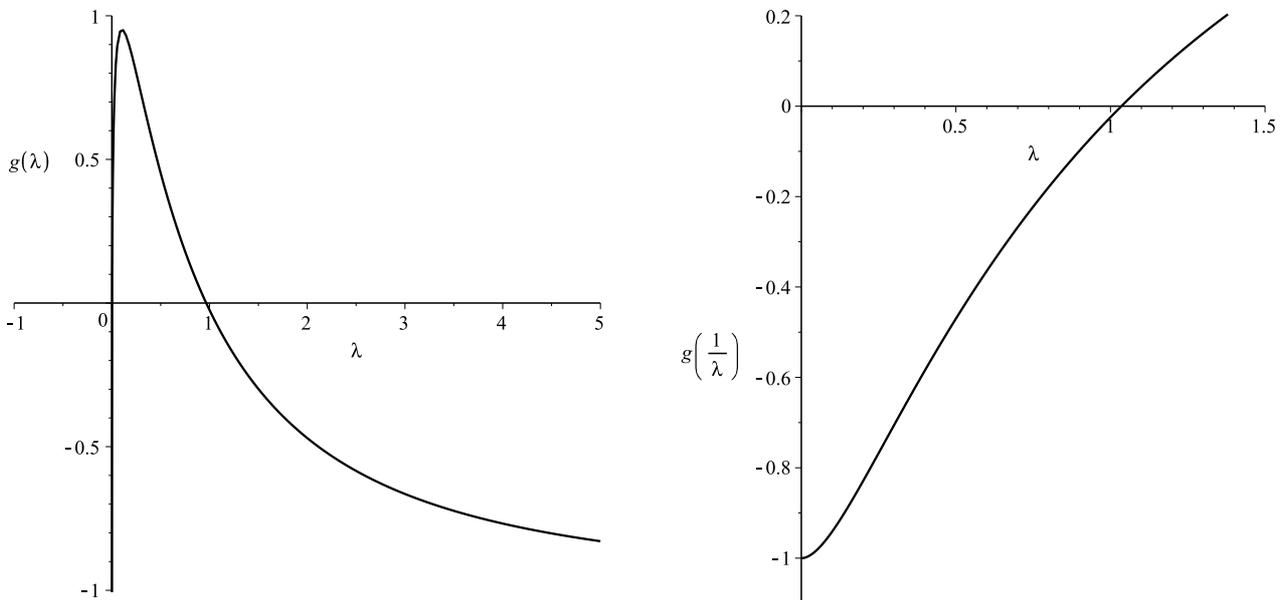


Рис. 3. График функции  $g(\lambda)$  при  $\lambda \in [1, +\infty)$  (слева) и график функции  $g\left(\frac{1}{\lambda}\right)$  при  $\lambda \in (0, 1]$  (справа).

Итак, верна следующая теорема.

**Теорема 3.2.** Пусть  $k = 3$ . Тогда для НС-модели  $G_k^{(2)}$ -периодические меры Гиббса  $\mu^{(1)}$  и  $\mu^{(2)}$  при  $\lambda > \frac{27}{16}$  являются крайними.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Блехер П. М., Ганиходжаев Н. Н. О чистых фазах модели Изинга на решетке Бете// Теор. вер. и ее прим. — 1990. — 35, № 2. — С. 920–930.
2. Ганиходжаев Н. Н., Розиков У. А. Описание периодических крайних гиббсовских мер некоторых решеточных моделей на дереве Кэли// Теор. мат. физ. — 1997. — 111, № 1. — С. 109–117.
3. Георги Х.-О. Гиббсовские меры и фазовые переходы. — М.: Мир, 1992.
4. Розиков У. А., Рахматуллаев М. М. Описание слабо периодических мер Гиббса модели Изинга на дереве Кэли// Теор. мат. физ. — 2008. — 156, № 2. — С. 292–302.
5. Розиков У. А., Хакимов Р. М. Условие единственности слабопериодической гиббсовской меры для модели жесткой сердцевин// Теор. мат. физ. — 2012. — 173, № 1. — С. 60–70.

6. Розиков У. А., Хакимов Р. М. Крайность трансляционно-инвариантной меры Гиббса для НС-модели на дереве Кэли// Бюлл. ин-та мат. — 2019. — 2. — С. 17–22.
7. Синай Я. Г. Теория фазовых переходов. Строгие результаты. — М.: Наука, 1980.
8. Хакимов Р. М. Единственность слабо периодической гиббсовской меры для НС-модели// Мат. заметки. — 2013. — 94, № 5. — С. 796–800.
9. Хакимов Р. М. Слабо периодические меры Гиббса для НС-модели для нормального делителя индекса четыре// Укр. мат. ж. — 2015. — 67, № 10. — С. 1409–1422.
10. Хакимов Р. М. НС-модель на дереве Кэли: трансляционно-инвариантные меры Гиббса// Вестн. НУ-Уз. — 2017. — 2, № 2. — С. 245–251.
11. Хакимов Р. М. Слабо периодические меры Гиббса для НС-моделей на дереве Кэли// Сиб. мат. ж. — 2018. — 59, № 1. — С. 185–196.
12. Хакимов Р. М., Махаммадалиев М. Т. Условие единственности и не единственности слабо периодических мер Гиббса для НС-модели// ArXiv. — 2019. — 1910.11772v1 [math.ph].
13. Bleher P. M., Ruiz J., Zagrebnov V. A. On the purity of the limiting Gibbs states for the Ising model on the Bethe lattice// J. Stat. Phys. — 1995. — 79, № 2. — С. 473–482.
14. Kesten H., Stigum B. P. Additional limit theorem for indecomposable multidimensional Galton–Watson processes// Ann. Math. Statist. — 1966. — 37. — С. 1463–1481.
15. Khakimov R. M., Madgoziyev G. T. Weakly periodic Gibbs measures for two and three state HC models on a Cayley tree// Uzb. Math. J. — 2018. — 3. — С. 116–131.
16. Külske C., Rozikov U. A. Extremality of translation-invariant phases for a three-state SOS-model on the binary tree// J. Stat. Phys. — 2015. — 160, № 3. — С. 659–680.
17. Külske C., Rozikov U. A. Fuzzy transformations and extremality of Gibbs measures for the Potts model on a Cayley tree// Random Structures Algorithms. — 2017. — 50, № 4. — С. 636–678.
18. Martin J. B. Reconstruction thresholds on regular trees// В сб.: «Discrete random walks, DRW'03. Proceedings of the conference, Paris, France, September 1–5, 2003». — Paris: MIMD, 2003. — С. 191–204.
19. Martinelli F., Sinclair A., Weitz D. Fast mixing for independent sets, coloring and other models on trees// Random Structures Algorithms. — 2007. — 31. — С. 134–172.
20. Mazel A. E., Suhov Yu. M. Random surfaces with two-sided constraints: an application of the theory of dominant ground states// J. Stat. Phys. — 1991. — 64. — С. 111–134.
21. Mossel E. Reconstruction on trees: beating the second eigenvalue// Ann. Appl. Probab. — 2001. — 11, № 1. — С. 285–300.
22. Mossel E., Peres Y. Information flow on trees// Ann. Appl. Probab. — 2003. — 13, № 3. — С. 817–844.
23. Preston C. J. Gibbs states on countable sets. — Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1974.
24. Rozikov U. A. Gibbs measures on Cayley trees. — Singapore: World Sci., 2013.
25. Suhov Yu. M., Rozikov U. A. A hard-core model on a Cayley tree: an example of a loss network// Queueing Syst. — 2004. — 46. — С. 197–212.

У. А. Розиков

Институт математики им. В. И. Романовского при Национальном университете Узбекистана им.

М. Улугбека, Ташкент, Узбекистан

E-mail: rozikovu@yandex.ru

Р. М. Хакимов

Наманганский государственный университет, Наманган, Узбекистан

E-mail: rustam-7102@rambler.ru

М. Т. Махаммадалиев

Наманганский государственный университет, Наманган, Узбекистан

E-mail: mmtmuxtor93@mail.ru

## Gibbs Periodic Measures for a Two-State HC-Model on a Cayley Tree

© 2022 U. A. Rozikov, R. M. Khakimov, M. T. Makhammadaliev

**Abstract.** In this paper, we study a two-state Hard-Core (HC) model with activity  $\lambda > 0$  on a Cayley tree of order  $k \geq 2$ . It is known that there are  $\lambda_{cr}$ ,  $\lambda_{cr}^0$ , and  $\lambda'_{cr}$  such that

- for  $\lambda \leq \lambda_{cr}$  this model has a unique Gibbs measure  $\mu^*$ , which is translation invariant. The measure  $\mu^*$  is extreme for  $\lambda < \lambda_{cr}^0$  and not extreme for  $\lambda > \lambda'_{cr}$ ;
- for  $\lambda > \lambda_{cr}$  there exist exactly three 2-periodic Gibbs measures, one of which is  $\mu^*$ , the other two are not translation-invariant and are always extreme.

The extremity of these periodic measures was proved using the maximality and minimality of the corresponding solutions of some equation, which ensures the consistency of these measures. In this paper, we give a brief overview of the known Gibbs measures for the HC-model and an alternative proof of the extremity of 2-periodic measures for  $k = 2, 3$ . Our proof is based on the tree reconstruction method.

### REFERENCES

1. P. M. Blekher and N. N. Ganikhodzhaev, “O chistyykh fazakh modeli Izinga na reshetke Bete” [On pure phases of the Ising model on the Bethe lattice], *Teor. ver. i ee prim.* [Probab. Theory Appl.], 1990, **35**, No. 2, 920–930 (in Russian).
2. N. N. Ganikhodzhaev and U. A. Rozikov, “Opisanie periodicheskikh kraynikh gibbsovskikh mer nekotorykh reshetochnykh modeley na dereve Keli” [Description of periodic extreme Gibbs measures of some lattice models on the Cayley tree], *Teor. mat. fiz.* [Theor. Math. Phys.], 1997, **111**, No. 1, 109–117 (in Russian).
3. H.-O. Georgii, *Gibbsovskie mery i fazovye perekhody* [Gibbs Measures and Phase Transitions], Mir, Moscow, 1992 (Russian translation).
4. U. A. Rozikov and M. M. Rakhmatullaev, “Opisanie slabo periodicheskikh mer Gibbsa modeli Izinga na dereve Keli” [Description of the weakly periodic Gibbs measures of the Ising model on the Cayley tree], *Teor. mat. fiz.* [Theor. Math. Phys.], 2008, **156**, No. 2, 292–302 (in Russian).
5. U. A. Rozikov and R. M. Khakimov, “Uslovie edinstvennosti slaboperiodicheskoy gibbsovskoy mery dlya modeli zhestkoy serdtseviny” [Uniqueness condition for the weakly periodic Gibbs measure in the hard-core model], *Teor. mat. fiz.* [Theor. Math. Phys.], 2012, **173**, No. 1, 60–70 (in Russian).
6. U. A. Rozikov and R. M. Khakimov, “Kraynost’ translyatsionno-invariantnoy mery Gibbsa dlya NS-modeli na dereve Keli” [The extremality of the translation-invariant Gibbs measure for the NC-model on the Cayley tree], *Byull. in-ta mat.* [Bull. Inst. Math.], 2019, **2**, 17–22 (in Russian).
7. Ya. G. Sinai, *Teoriya fazovykh perekhodov. Strogie rezul’taty* [Theory of Phase Transitions. Strict Results], Nauka, Moscow, 1980 (in Russian).
8. R. M. Khakimov, “Edinstvennost’ slabo periodicheskoy gibbsovskoy mery dlya HC-modeli” [Uniqueness of the weakly periodic Gibbs measure for the HC-model], *Mat. zametki* [Math. Notes], 2013, **94**, No. 5, 796–800 (in Russian).
9. R. M. Khakimov, “Slabo periodicheskie mery Gibbsa dlya NS-modeli dlya normal’nogo delitelya indeksa chetyre” [Weakly periodic Gibbs measures for the NC-model for a normal index divisor of four], *Ukr. mat. zh.* [Ukr. Math. J.], 2015, **67**, No. 10, 1409–1422 (in Russian).
10. R. M. Khakimov, “HC-model’ na dereve Keli: translyatsionno-invariantnye mery Gibbsa” [HC model on a Cayley tree: translation-invariant Gibbs measures], *Vestn. NUUZ* [Bull. Natl. Univ. Uzbekistan], 2017, **2**, No. 2, 245–251 (in Russian).

11. R. M. Khakimov, “Slabo periodicheskie mery Gibbsa dlya NS-modeley na dereve Keli” [Weakly periodic Gibbs measures for NC-models on a Cayley tree], *Sib. mat. zh.* [Siberian Math. J.], 2018, **59**, No. 1, 185–196 (in Russian).
12. R. M. Khakimov and M. T. Makhhammadaliev, “Uslovie edinstvennosti i ne edinstvennosti slabo periodicheskikh mer Gibbsa dlya NS-modelei” [Condition of uniqueness and nonuniqueness of weakly periodic Gibbs measures for the NC-model], *ArXiv*, 2019, 1910.11772v1 [math.ph] (in Russian).
13. P. M. Bleher, J. Ruiz, and V. A. Zagrebnov, “On the purity of the limiting Gibbs states for the Ising model on the Bethe lattice,” *J. Stat. Phys.*, 1995, **79**, No. 2, 473–482.
14. H. Kesten and B. P. Stigum, “Additional limit theorem for indecomposable multidimensional Galton–Watson processes,” *Ann. Math. Statist.*, 1966, **37**, 1463–1481.
15. R. M. Khakimov and G. T. Madgoziyev, “Weakly periodic Gibbs measures for two and three state HC models on a Cayley tree,” *Uzb. Math. J.*, 2018, **3**, 116–131.
16. C. Külske and U. A. Rozikov, “Extremality of translation-invariant phases for a three-state SOS-model on the binary tree,” *J. Stat. Phys.*, 2015, **160**, No. 3, 659–680.
17. C. Külske and U. A. Rozikov, “Fuzzy transformations and extremality of Gibbs measures for the Potts model on a Cayley tree,” *Random Structures Algorithms*, 2017, **50**, No. 4, 636–678.
18. J. B. Martin, “Reconstruction thresholds on regular trees,” In: *Discrete random walks, DRW’03. Proceedings of the conference, Paris, France, September 1–5, 2003*, MIMD, Paris, 2003, pp. 191–204.
19. F. Martinelli, A. Sinclair, and D. Weitz, “Fast mixing for independent sets, coloring and other models on trees,” *Random Structures Algorithms*, 2007, **31**, 134–172.
20. A. E. Mazel and Yu. M. Suhov, “Random surfaces with two-sided constraints: an application of the theory of dominant ground states,” *J. Stat. Phys.*, 1991, **64**, 111–134.
21. E. Mossel, “Reconstruction on trees: beating the second eigenvalue,” *Ann. Appl. Probab.*, 2001, **11**, No. 1, 285–300.
22. E. Mossel and Y. Peres, “Information flow on trees,” *Ann. Appl. Probab.*, 2003, **13**, No. 3, 817–844.
23. C. J. Preston, *Gibbs states on countable sets*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1974.
24. U. A. Rozikov, *Gibbs measures on Cayley trees*, World Sci., Singapore, 2013.
25. Yu. M. Suhov and U. A. Rozikov, “A hard-core model on a Cayley tree: an example of a loss network,” *Queueing Syst.*, 2004, **46**, 197–212.

U. A. Rozikov

Romanovskiy Institute of Mathematics, Tashkent, Uzbekistan

E-mail: rozikovu@yandex.ru

R. M. Khakimov

Namangan State University, Namangan, Uzbekistan

E-mail: rustam-7102@rambler.ru

M. T. Makhhammadaliev

Namangan State University, Namangan, Uzbekistan

E-mail: mmtmuxtor93@mail.ru