Современная математика. Фундаментальные направления. Том 68, № 1 (2022). С. 80–94
Contemporary Mathematics. Fundamental Directions. ISSN 2413-3639 (Print)

DOI: 10.22363/2413-3639-2022-68-1-80-94 УДК 517.988.67

ОБ АНАЛИТИЧЕСКИХ ВОЗМУЩЕНИЯХ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ В СЛУЧАЕ НЕПОЛНОГО ОБОБЩЕННОГО ЖОРДАНОВОГО НАБОРА

© 2022 г. **Д. Г. РАХИМОВ, Д. АХМАДЖАНОВА**

Аннотация. На основе методов теории бифуркаций рассмотрена задача возмущения линейных уравнений малыми аналитическими слагаемыми. В отличие от работы В. А. Треногина [7], исследован случай неполного обобщенного жорданового набора линейного фредгольмового оператора, действующего из одного банахова пространства в другое банахово пространство. Предложен прием, использующий регуляризацию фредгольмова оператора специальным образом построенным конечномерным оператором.

ОГЛАВЛЕНИЕ

1. Введение

В середине прошлого века В. А. Треногин [1, 7] исследовал задачу возмущения линейных уравнений малым линейным слагаемым

$$Bx = h + \varepsilon Ax, \tag{1.1}$$

где B, A — линейные операторы, действующие из банахова пространства E_1 в банахово пространство E_2, причем B — фредгольмов оператор с $N(B) = span\{\varphi_1, \dots, \varphi_n\}$, $N(B^*) = span\{\psi_1, \dots, \psi_n\}$, и отвечающими им A-жордановыми цепочками с длинами $p_1 \leqslant p_2 \leqslant \ldots \leqslant p_n$:

$$B\varphi_i^{(s)} = A\varphi_i^{(s-1)},\ s = \overline{2, p_i}, i = \overline{1, n}. \tag{1.2}$$

Если

$$D_p = det\| \left\langle A\varphi_i^{(p_i)}, \psi_j^{(1)} \right\rangle \| \neq 0,$$

то обобщенный жорданов набор (ОЖН) $\{\varphi_i^{(s)}\}_{i=\overline{1,n}}^{s=\overline{1,p_i}}$ называется *полным*. В частности, доказана теорема, утверждающая, что для полноты ОЖН необходимо и достаточно, чтобы существовало число ρ, такое, что для всех ε, удовлетворяющих неравенству $0 < \varepsilon < \rho$, оператор $B - \varepsilon A$ был непрерывно обратимым. Далее доказано, что в случае полноты ОЖН уравнение (1.1) имеет единственное решение и определен порядок зависимости решения от параметра ε. Если ОЖН неполный, то, естественно, эта теорема не справедлива, по той же причине не обратим оператор $B - \varepsilon A$. Для этого случая В. А. Треногиным был предложен способ пополнения ОЖН. Позже в работе [3] был предложен иной способ пополнения ОЖН, но эти процессы требовали огромных вычислительных выкладок. В данной статье (см. разделы 2 и 3) рассматривается более общий случай — аналитические возмущения с неполным ОЖН. Применяемый здесь метод позволяет обойти сложный процесс пополнения ОЖН, и он основан на методе редукции, разработанном автором (см. [4, 5]). В последнее время появились работы [8–10], посвященные задачам возмущения существенного спектра линейных операторов, действующих в гильбертовых или банаховых пространствах. Там же определены понятия обобщенных жордановых цепочек, которые могут позволять исследовать возмущения в существенном спектре методами, изложенными в нашей статье. В данной работе используются терминология и обозначения работы [1].

2. Основные определения и утверждения

Пусть E_1, E_2 — некоторые банаховы пространства, $A(t) \in L\{E_1, E_2\}$ — оператор-функция, аналитически зависящая от спектрального параметра $t \in G \subset \mathbb{C}$.

Определение 2.1. Точка $\lambda \in G$ называется *регулярной точкой* оператор-функции $A(t)$, если оператор $A(\lambda)$ имеет ограниченный обратный $A^{-1}(\lambda) \in L\{E_1, E_2\}$. Совокупность всех регулярных точек $\rho(A)$ называют *резольвентным множеством* $A(t)$, а $A^{-1}(\lambda)$ — *резольвентой*.

Определение 2.2. Множество $\sigma(A) = \mathbb{C} - \rho(A)$ называется *спектром* оператора $A(t)$.

Очевидно, что резольвентное множество $\rho(A)$ — открытое множество, а спектр $\sigma(A)$ — замкнутое множество.

Определение 2.3. Точка спектра λ_0 называется *изолированной*, если существует окрестность точки λ_0, все точки которой регулярны.

Если при некотором λ уравнение $A(\lambda)x = 0$ имеет нетривиальное решение $x = \varphi$, то λ называется *собственным значением*, а решение φ — соответствующим *собственным элементом* оператор-функции $A(t)$. Совокупность всех изолированных собственных значений называется *дискретным спектром* $A(t)$ и обозначается $\sigma_p(A)$. Множество всех собственных элементов, соответствующих собственному значению λ, образуют подпространство, которое называют *собственным подпространством* оператора $A(\lambda)$ и обозначают $N(A(\lambda))$. Собственное подпространство $N^*(A(\lambda))$ оператора $A^*(\lambda)$ называют *дефектным подпространством*.

Определение 2.4. Точку $\lambda \in \sigma_p(A)$ называют *фредгольмовой*, если оператор $A(\lambda)$ нормально разрешим и $dimN(A(\lambda)) = dimN^*(A(\lambda)) < \infty$, и *нетеровой*, если оператор $A(\lambda)$ нормально разрешим, $m = dimN(A(\lambda)) < \infty$, $n = dimN^*(A(\lambda)) < \infty$, $m \neq n$.

Пусть λ — фредгольмова точка такая, что $N(A(\lambda)) = \{\varphi_i\}_1^n$, $N^*(A(\lambda)) = \{\psi_i\}_1^n$. Согласно следствию из теоремы Хана—Банаха существуют системы элементов $\{\gamma_i\}_1^n \subset E_1^*$, $\{z_i\}_1^n \subset E_2$, биортогональные соответственно к $\{\varphi_i\}_1^n$, $\{\psi_i\}_1^n$. Тогда проекторы $P = \sum\limits_{i=1}^{n} \langle \cdot, \gamma_i \rangle \varphi_i$, $Q = \sum\limits_{i=1}^{n} \langle \cdot, \psi_i \rangle z_i$ порождают разложения в прямые суммы $E_1 = E_1^n \oplus E_1^{\infty - n}$, $E_2 = E_{2n} \oplus E_{2,\infty-n}$.

Лемма (обобщенная лемма Шмидта, см. [1, гл. VII, §21, с. 340, лемма 21.1]). *Оператор* $\tilde{A}(\lambda) = A(\lambda) + \sum\limits_{i=1}^{n} \langle \cdot, \gamma_i \rangle z_i$ *непрерывно обратим, обратный к нему обозначим как* $\Gamma = \tilde{A}^{-1}(\lambda)$.

Справедливы равенства $\tilde{A}(\lambda)\varphi_i = z_i$, $\Gamma z_i = \varphi_i$, и $\tilde{A}^*(\lambda)\psi_i = \gamma_i$, $\Gamma^*\gamma_i = \psi_i$.

Определение 2.5. Будем говорить, что элементы $\varphi_i^{(1)} \equiv \varphi_i, \varphi_i^{(2)}, \ldots, \varphi_i^{(p_i)}$ образуют *обобщенную* $A(\lambda)$*-жорданову цепочку* (ОЖЦ) длины p_i, соответствующую φ_i, если выполнены тождества:

$$A(\lambda)\varphi_i^{(s)} = \sum_{j=1}^{s-1} A_j \varphi_i^{(s-j)}, \ s = \overline{2, p_i}, \tag{2.1}$$

где $A_j = \dfrac{1}{j!}A^{(j)}(\lambda)$, $j = 1, 2, 3, \ldots$, при этом для всех $\psi_l \in N^*(A(\lambda))$ выполняется $\langle\sum\limits_{j=1}^{s-1} A_j\varphi_i^{(s-j)}, \psi_l\rangle = 0$, $s = \overline{2, p_i}$, и $\langle\sum\limits_{j=1}^{p_i} A_j\varphi_i^{(p_i+1-j)}, \psi_k\rangle \neq 0$ хотя бы для одного функционала $\psi_k \in N^*(A(\lambda))$. Элементы $\varphi_i^{(2)}, \ldots, \varphi_i^{(p_i)}$ называют $A(\lambda)$-*присоединенными* элементами.

Так как уравнения (2.1) решаются неоднозначно, то требуется, чтобы $\langle\varphi_i^{(s)}, \gamma_j\rangle = 0$, $j, i = \overline{1, n}$, $s = \overline{2, p_i}$. Этим $A(\lambda)$-присоединенные элементы $\varphi_i^{(2)}, \ldots, \varphi_i^{(p_i)}$ определяются единственным образом по рекуррентным формулам [6, гл. 1, §2, с. 38, лемма 2.3]:

$$\varphi_i^{(s)} = \sum_{s-1=s_1l_1+s_2l_2+\ldots+s_kl_k} \left[(\Gamma A_{s_1})^{l_1}(\Gamma A_{s_2})^{l_2}\ldots(\Gamma A_{s_k})^{l_k}\right]\varphi_i, \tag{2.2}$$

$$s = \overline{2, p_i},\ i = \overline{1, n}.$$

Совокупность элементов $\{\varphi_i^{(s)}\}$, $s = \overline{2, p_i}$, $i = \overline{1, n}$, называется *обобщенным $A(\lambda)$-жордановым набором* (ОЖН), а число $N = p_1 + p_2 + \ldots + p_n$ — *корневым числом* оператора $A(\lambda)$.

Определение 2.6. Говорят, что оператор-функция $A(t)$ имеет в точке λ полный ОЖН, если

$$det\left\|\left\langle\sum_{j=1}^{p_i} A_j\varphi_i^{(p_i+1-j)}, \psi_l\right\rangle\right\| \neq 0. \tag{2.3}$$

Согласно определению, ОЖН будет неполным, если хотя бы одна цепочка имеет бесконечную длину или определитель (2.3) равен нулю. Тем не менее, как показано в монографии [1, гл. IX, §30, с. 428, теорема 30.1] (см. также [3]), полнота ОЖН связана с непрерывной обратимостью оператора $B - \varepsilon A$. В частности, при равенстве нулю определителя полноты показана схема продолжения жордановых цепочек до полного ОЖН. Следующие утверждения позволяют обойти трудности, связанные с построением полного ОЖН. Как будет показано в следующем разделе, для обратимости возмущенного оператора полнота ОЖН необязательна, а достаточна конечность длин всех цепочек.

Определение 2.7. Условие отсутствия общих нулей операторов $A(\lambda_0)$ и $\sum\limits_{s=1}^{\infty} A_s(\lambda - \lambda_0)^s$ назовем «*условием снятия вырождения*».

Условие снятия вырождения гарантирует возможность выполнения применяемого далее процесса регуляризации в задаче о возмущении.

3. Необходимое и достаточное условие конечности обобщенной жордановой цепочки

Пусть E_1, E_2 — банаховы пространства, $A(\varepsilon) \in L(E_1, E_2)$ — аналитическая относительно малого параметра $\varepsilon \in \mathbb{C}$ оператор-функция, причем $A(0) = B$ — фредгольмов оператор с $N(B) = \{\varphi_1^{(1)}, \ldots, \varphi_n^{(1)}\}$, $N(B^*) = \{\psi_1^{(1)}, \ldots, \psi_n^{(1)}\}$ и неполным ОЖН $\{\varphi_i^{(s)}\}_{i=\overline{1,n}}^{s=\overline{1,p_i}}$

$$B\varphi_i^{(s)} = \sum_{k=1}^{s-1} A_k\varphi_i^{(s-k)}, \quad \left\langle\sum_{k=1}^{s-1} A_k\varphi_i^{(s-k)}, \psi_j^{(1)}\right\rangle = 0, \quad s = \overline{2, p_i},\ i, j = \overline{1, n}, \tag{3.1}$$

$$\left\langle\sum_{k=1}^{p_i} A_k\varphi_i^{(p_i+1-k)}, \psi_j^{(1)}\right\rangle \neq 0, \quad i, j = \overline{1, n}, \quad D_p = det\left\|\left\langle\sum_{k=1}^{p_i} A_k\varphi_i^{(p_i+1-k)}, \psi_j^{(1)}\right\rangle\right\| = 0.$$

Пусть $\{\gamma_i\}_{i=\overline{1,n}}$, $\{z_i\}_{i=\overline{1,n}}$ — биортогональные системы к нулям $\{\varphi_i^{(1)}\}_{i=\overline{1,n}}$ и дефектным функционалам $\{\psi_i^{(1)}\}_{i=\overline{1,n}}$ соответственно.

Для каждого $i = \overline{1, n}$ введем оператор $B_i = B + \sum\limits_{j\neq i}\langle\cdot, \gamma_j\rangle z_j$. Несложно убедиться в том, что $N(B_i) = \{\varphi_i^{(1)}\}$, $N^*(B_i) = \{\psi_i^{(1)}\}$. Рассмотрим возмущенные оператор-функции $\overline{A}_i(\varepsilon) = B_i - \sum\limits_{k=1}^{\infty} \varepsilon^k A_k$, где ε — малый комплексный параметр.

Лемма 3.1. *Если для некоторого $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ ОЖЦ $\{\varphi_i^{(j)}\}_1^{p_i}$ конечна, то оператор $\overline{A}_i(\varepsilon)$ непрерывно обратим.*

Доказательство. Пусть ОЖЦ $\{\varphi_i^{(j)}\}_1^{p_i}$ имеет конечную длину p_i. Уравнение $\overline{A}_i(\varepsilon)y = h$ запишется в виде

$$B_i y = \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon^k A_k y + h.$$

Так как $\widetilde{B_i} = \widetilde{B} = B + \sum\limits_{k=1}^{n} \langle \cdot, \gamma_k \rangle z_k$ и согласно обобщенной лемме Шмидта существует и ограничен оператор $\Gamma = \left[\widetilde{B_i}\right]^{-1} = \widetilde{B}^{-1}$, то последнее равенство примет вид

$$\left[I - \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon^k \Gamma A_k\right] y = \Gamma h + \langle y, \gamma_i \rangle \varphi_i. \tag{3.2}$$

В силу аналитичности оператор-функции $A(\varepsilon)$ в окрестности точки $\varepsilon = 0$ существует предел $R = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\|A_n\|} < \infty$. Поэтому при $|\varepsilon| \leqslant \rho < \dfrac{1}{\|\Gamma\| R}$ оператор $\left[I - \sum\limits_{k=1}^{\infty} \varepsilon^k \Gamma A_k\right]^{-1}$ существует и ограничен. Тогда (3.2) сводится к системе

$$y = \left[I - \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon^k \Gamma A_k\right]^{-1} \Gamma h + \xi_i \left[I - \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon^k \Gamma A_k\right]^{-1} \varphi_i,\ \xi_i = \langle y, \gamma_i \rangle. \tag{3.3}$$

Подставляя первое во второе в системе (3.3), имеем

$$\xi_i \left\langle \left(\sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon^k A_k\right) \left[I - \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon^k \Gamma A_k\right]^{-1} \varphi_i, \psi_i \right\rangle = -\left\langle \left[I - \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon^k \Gamma A_k\right]^{-1} \Gamma h, \gamma_i \right\rangle \tag{3.4}$$

Распишем левую и правую части равенства (3.4) по степеням ε:

$$\xi_i \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon^k \left\langle \sum_{k=s_1+s_2 l_2+\ldots+s_\nu l_\nu} A_{s_1} (\Gamma A_{s_2})^{l_2} \ldots (\Gamma A_{s_\nu})^{l_\nu} \varphi_i, \psi_i \right\rangle =$$

$$= -\langle h, \psi_i \rangle - \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon^k \left\langle \sum_{k=s_1+s_2 l_2+\ldots+s_\nu l_\nu} A_{s_1} (\Gamma A_{s_2})^{l_2} \ldots (\Gamma A_{s_\nu})^{l_\nu} \Gamma h, \psi_i \right\rangle.$$

Тогда, используя формулы (2.2), можем записать

$$\xi_i \left[\sum_{k=1}^{p_i} \varepsilon^k \left\langle \sum_{s=1}^{k} A_s \varphi_i^{(k+1-s)}, \psi_i \right\rangle + \sum_{k=p_i+1}^{\infty} \varepsilon^k \left\langle \sum_{k=s_1+s_2 l_2+\ldots+s_\nu l_\nu} A_{s_1} (\Gamma A_{s_2})^{l_2} \ldots (\Gamma A_{s_\nu})^{l_\nu} \varphi_i, \psi_i \right\rangle\right] =$$

$$= -\langle h, \psi_i \rangle - \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon^k \left\langle \sum_{k=s_1+s_2 l_2+\ldots+s_\nu l_\nu} A_{s_1} (\Gamma A_{s_2})^{l_2} \ldots (\Gamma A_{s_\nu})^{l_\nu} \Gamma h, \psi_i \right\rangle.$$

Согласно определению ОЖН, первые $p_i - 1$ слагаемых первой суммы равны нулю, поэтому

$$\xi_i \left[\varepsilon^{p_i} \left\langle \sum_{s=1}^{p_i} A_s \varphi_i^{(p_i+1-s)}, \psi_i \right\rangle + \sum_{k=p_i+1}^{\infty} \varepsilon^k \left\langle \sum_{k=s_1+s_2 l_2+\ldots+s_\nu l_\nu} A_{s_1} (\Gamma A_{s_2})^{l_2} \ldots (\Gamma A_{s_\nu})^{l_\nu} \varphi_i, \psi_i \right\rangle\right] =$$

$$= -\langle h, \psi_i \rangle - \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon^k \left\langle \sum_{k=s_1+s_2 l_2+\ldots+s_\nu l_\nu} A_{s_1} (\Gamma A_{s_2})^{l_2} \ldots (\Gamma A_{s_\nu})^{l_\nu} \Gamma h, \psi_i \right\rangle.$$

Пусть q_i — номер первого отличного от нуля члена последовательности

$$h_i^{(s)} = \left\langle \sum_{s=s_1+s_2 l_2+\ldots+s_\nu l_\nu} A_{s_1} (\Gamma A_{s_2})^{l_2} \ldots (\Gamma A_{s_\nu})^{l_\nu} \Gamma h, \psi_i \right\rangle,\ s = 0, 1, 2, 3, \ldots,$$

если $\langle h, \psi_i\rangle \neq 0$, то положим $q_i = 0$. Тогда

$$\xi_i\varepsilon^{p_i}\left[\left\langle\sum_{s=1}^{p_i}A_s\varphi_i^{(p_i+1-s)},\psi_i\right\rangle+\sum_{k=p_i+1}^{\infty}\varepsilon^{k-p_i}\left\langle\sum_{k=s_1+s_2l_2+\ldots+s_\nu l_\nu}A_{s_1}(\Gamma A_{s_2})^{l_2}\ldots(\Gamma A_{s_\nu})^{l_\nu}\varphi_i,\psi_i\right\rangle\right]=$$
$$=-\varepsilon^{q_i}\sum_{k=q_i}^{\infty}\varepsilon^{k-q_i}h_i^{(k)}. \quad (3.5)$$

Из равенства (3.5) следует, что найдется ρ_0 такое, что для всех ε, удовлетворяющих условию $0 < \|\varepsilon\| \leqslant \rho_0 < \rho < \dfrac{1}{\|\Gamma\|R}$, система (3.3), а вместе с ней и уравнение $\overline{A}_i(\varepsilon)y = h$, имеет единственное решение для любого $h \in E_2$. □

Теорема 3.1. *Для того, чтобы все цепочки $\{\varphi_i^{(j)}\}_{i=\overline{1,n}}^{j=\overline{1,p_i}}$ были конечными, необходимо и достаточно, чтобы существовало число ρ_0 такое, что для всех ε, удовлетворяющих неравенству $0 < |\varepsilon| \leqslant \rho_o$, операторы $\overline{A}_i^{-1}(\varepsilon)$, $i = \overline{1,n}$, существовали и были ограниченными.*

Доказательство. Необходимость следует из леммы, поэтому докажем достаточность.

Предположим противное, т. е. пусть для всех ε из круга $0 < |\varepsilon| \leqslant \rho_o$, операторы $\overline{A}_i^{-1}(\varepsilon)$, $i = \overline{1,n}$, существуют и ограничены, но для некоторого i цепочка $\{\varphi_i^{(j)}\}$, $j = \overline{1,p_i}$ имеет бесконечную длину, т. е.

$$B_i\varphi_i = 0,\ B_i\varphi_i^{(s)} = \sum_{k=1}^{s-1}A_k\varphi_i^{(s-k)},\ s \geqslant 2.$$

Если присоединенные элементы $\{\varphi_i^{(j)}\}$, $j = \overline{2,\infty}$ выбраны из подпространства $E_1^{\infty-n}$, то методом математической индукции находим

$$\varphi_i^{(s)} = \sum_{s=s_1l_1+\ldots+s_kl_k}(\Gamma A_{s_1})^{l_1}\ldots(\Gamma A_{s_k})^{l_k}\varphi_i.$$

Пусть $M = \max\limits_{i\in N}\|\Gamma A_i\|$.

Тогда справедливы неравенства $\|\varphi_i^{(s)}\| \leqslant \sum\limits_{s=s_1l_1+\ldots+s_kl_k}(\|\Gamma\|\|A_{s_1}\|)^{l_1}\ldots(\|\Gamma\|\|A_{s_k}\|)^{l_k}\|\varphi_i\| \leqslant 2^sM^s\|\varphi_i\|$, из которых вытекает, что в круге $|\varepsilon| \leqslant \rho_1 < (2M)^{-1}$ ряд

$$y(\varepsilon) = \sum_{s=0}^{+\infty}\varphi_i^{(s+1)}\varepsilon^s$$

сходится абсолютно и равномерно. Этот ряд при указанных значениях ε является решением уравнения

$$\overline{A}_i(\varepsilon)y(\varepsilon) = 0.$$

Полученное противоречие доказывает теорему. □

4. Аналитические возмущения в линейных уравнениях

Рассмотрим возмущенное линейное уравнение

$$By = h + \sum_{k=1}^{\infty}\varepsilon^kA_ky, \quad (4.1)$$

где ε — малый числовой параметр ($|\varepsilon| < \rho_0$), E_1, E_2 — банаховы пространства, $B, A_k \in L(E_1, E_2)$, $k = 1, 2, \ldots$, а B — фредгольмов оператор такой, что $N(B) = \{\varphi_i\}_{i=1}^n$ и $N^*(B) = \{\psi_i\}_{i=1}^n$. Пусть $\{\gamma_i\}_{i=1}^n$, $\{z_i\}_{i=1}^n$ — биортогональные к ним системы, и пусть $\{\varphi_i^{(j)}\}_{i=\overline{1,n}}^{j=\overline{1,p_i}}$ — ОЖН с конечными A-ОЖЦ. Если ОЖН полный, то, как известно (см. [1, гл. 9, теорема 31.2]), уравнение (4.1) имеет единственное решение, аналитическое в $\mathbb{C}$. Если ОЖН неполный, то теорема 31.2 в той постановке не справедлива. В этом разделе исследуется такой случай.

Сначала приведем два примера, показывающие возможность существования неполных ОЖН.

Пример 4.1. В пространстве $\mathbb{R}^3$ рассмотрим следующую задачу на собственные значения где

$$(B-\lambda A)x=0, \quad \text{где} \quad B=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}, \quad A=\begin{pmatrix}1&-1&0\\1&-1&1\\0&1&0\end{pmatrix}.$$

Собственному значению $\lambda_0=0$ соответствуют собственные элементы $\varphi_1^{(1)}=e_1=(1,0,0)$, $\varphi_2^{(1)}=e_2=(0,1,0)$. Для данной матрицы $\psi_1=e_1$, $\psi_2=e_2$, $Ae_1=e_1+e_2$, $Ae_2=-e_1-e_2+e_3$. Тогда $\langle Ae_1,\psi_1\rangle=1$, $\langle Ae_1,\psi_2\rangle=1$, $\langle Ae_2,\psi_1\rangle=-1$, $\langle Ae_2,\psi_2\rangle=-1$, т. е.

$$\begin{vmatrix}1&1\\-1&-1\end{vmatrix}=0.$$

Такая же картина наблюдается и в случае наличия ОЖЦ конечной длины p_i, $i=\overline{1,n}$, $N=p_1+p_2+\ldots+p_n$.

Пример 4.2. Пусть для задачи, рассмотренной в примере 4.1,

$$B=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}, \quad A=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&1\\1&1&0\end{pmatrix}.$$

Тогда для этой задачи $\lambda_0=0$ и $\varphi_1^{(1)}=e_1=(1,0,0)$, $\varphi_2^{(1)}=e_2=(0,1,0)$. Так как $Ae_1=e_3$, $Ae_2=e_3$, то $\langle Ae_i,e_j\rangle=0$ для всех $i,j=1,2$, что означает существование присоединенных элементов. Таковыми являются $\varphi_1^{(2)}=e_1+e_3$, $\varphi_2^{(2)}=e_2+e_3$. Так как $A\varphi_1^{(2)}=e_1+e_2+e_3$, $A\varphi_2^{(2)}=e_1+e_2+e_3$, то $\langle A\varphi_i^{(2)},\varphi_j^{(1)}\rangle=1$ для всех $i,j=1,2$. Следовательно, каждая цепочка имеет длину 2, но $det\|\langle A\varphi_i^{(2)},\varphi_j^{(1)}\rangle\|=\begin{vmatrix}1&1\\1&1\end{vmatrix}=0$.

Рассмотрим уравнения

$$\overline{B_i}y=h+\sum_{k=1}^{\infty}\varepsilon^k A_k y, \tag{4.2}$$

где $\overline{B_i}=B+\sum\limits_{s\neq i}\langle\cdot,\gamma_s\rangle z_s$, $i=\overline{1,n}$.

Теорема 4.1. *Пусть фредгольмов оператор $B\in L(E_1,E_2)$ с числом нулей $n>1$ имеет неполный ОЖН с A-ОЖЦ конечной длины $p_i, i=\overline{1,n}$. Тогда каждое уравнение из (4.2) имеет единственное решение $y_i(\varepsilon)$, которое при условии $p_i-q_i\leqslant 0$ будет аналитическим в точке $\varepsilon=0$ и в ее некоторой окрестности, а при условии $p_i>q_i$ имеет в точке $\varepsilon=0$ полюс порядка p_i-q_i.*

Доказательство. Так как $\widetilde{\overline{B_i}}=\widetilde{B}=B+\sum\limits_{k=1}^{n}\langle\cdot,\gamma_s\rangle z_s$, то в силу обобщенной леммы Шмидта существует и ограничен оператор $\Gamma_i=\widetilde{\overline{B_i}}^{-1}=\widetilde{B}^{-1}=\Gamma$. Тогда уравнение (4.2) сведется к системе

$$y=\left[I-\sum_{k=1}^{\infty}\varepsilon^k\Gamma A_k\right]^{-1}\Gamma h+\xi_i\left[I-\sum_{k=1}^{\infty}\varepsilon^k\Gamma A_k\right]^{-1}\varphi_i, \xi_i=\langle y,\gamma_i\rangle. \tag{4.3}$$

Подставляя первое во второе в системе (4.3), имеем

$$\xi_i\left\langle\left(\sum_{k=1}^{\infty}\varepsilon^k A_k\right)\left[I-\sum_{k=1}^{\infty}\varepsilon^k\Gamma A_k\right]^{-1}\varphi_i,\psi_i\right\rangle=-\left\langle\left[I-\sum_{k=1}^{\infty}\varepsilon^k\Gamma A_k\right]^{-1}\Gamma h,\gamma_i\right\rangle. \tag{4.4}$$

Распишем левую и правую части равенства (4.4) по степеням ε:

$$\xi_i\sum_{k=1}^{\infty}\varepsilon^k\left\langle\sum_{k=s_1+s_2l_2+\ldots+s_\nu l_\nu}A_{s_1}\left(\Gamma A_{s_2}\right)^{l_2}\ldots\left(\Gamma A_{s_\nu}\right)^{l_\nu}\varphi_i,\psi_i\right\rangle=$$

$$=-\langle h,\psi_i\rangle-\sum_{k=1}^{\infty}\varepsilon^k\left\langle\sum_{k=s_1+s_2l_2+\ldots+s_\nu l_\nu}A_{s_1}\left(\Gamma A_{s_2}\right)^{l_2}\ldots\left(\Gamma A_{s_\nu}\right)^{l_\nu}\Gamma h,\psi_i\right\rangle.$$

Тогда, используя формулы (2.3), можно записать

$$\xi_i \left[\sum_{k=1}^{p_i} \varepsilon^k \left\langle \sum_{s=1}^{k} A_s \varphi_i^{(k+1-s)}, \psi_i \right\rangle + \sum_{k=p_i+1}^{\infty} \varepsilon^k \left\langle \sum_{k=s_1+s_2l_2+\ldots+s_\nu l_\nu} A_{s_1} (\Gamma A_{s_2})^{l_2} \ldots (\Gamma A_{s_\nu})^{l_\nu} \varphi_i, \psi_i \right\rangle \right] =$$

$$= -\langle h, \psi_i \rangle - \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon^k \left\langle \sum_{k=s_1+s_2l_2+\ldots+s_\nu l_\nu} A_{s_1} (\Gamma A_{s_2})^{l_2} \ldots (\Gamma A_{s_\nu})^{l_\nu} \Gamma h, \psi_i \right\rangle.$$

Согласно определению ОЖН, первые $p_i - 1$ слагаемых первой суммы равны нулю, поэтому

$$\xi_i \left[\varepsilon^{p_i} \left\langle \sum_{s=1}^{p_i} A_s \varphi_i^{(p_i+1-s)}, \psi_i \right\rangle + \sum_{k=p_i+1}^{\infty} \varepsilon^k \left\langle \sum_{k=s_1+s_2l_2+\ldots+s_\nu l_\nu} A_{s_1} (\Gamma A_{s_2})^{l_2} \ldots (\Gamma A_{s_\nu})^{l_\nu} \varphi_i, \psi_i \right\rangle \right] =$$

$$= -\langle h, \psi_i \rangle - \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon^k \left\langle \sum_{k=s_1+s_2l_2+\ldots+s_\nu l_\nu} A_{s_1} (\Gamma A_{s_2})^{l_2} \ldots (\Gamma A_{s_\nu})^{l_\nu} \Gamma h, \psi_i \right\rangle.$$

Пусть q_i — номер первого отличного от нуля члена последовательности

$$h_i^{(s)} = \left\langle \sum_{s=s_1+s_2l_2+\ldots+s_\nu l_\nu} A_{s_1} (\Gamma A_{s_2})^{l_2} \ldots (\Gamma A_{s_\nu})^{l_\nu} \Gamma h, \psi_i \right\rangle, \; s = 0, 1, 2, 3, \ldots;$$

если $\langle h, \psi_i \rangle \neq 0$, то положим $q_i = 0$. Тогда

$$\xi_i \varepsilon^{p_i} \left[\left\langle \sum_{s=1}^{p_i} A_s \varphi_i^{(p_i+1-s)}, \psi_i \right\rangle + \sum_{k=p_i+1}^{\infty} \varepsilon^{k-p_i} \left\langle \sum_{k=s_1+s_2l_2+\ldots+s_\nu l_\nu} A_{s_1} (\Gamma A_{s_2})^{l_2} \ldots (\Gamma A_{s_\nu})^{l_\nu} \varphi_i, \psi_i \right\rangle \right] =$$

$$= -\varepsilon^{q_i} \sum_{k=q_i}^{\infty} \varepsilon^{k-q_i} h_i^{(k)}. \qquad (4.5)$$

Здесь возможны несколько случаев: 1) если $p_i > q_i$, то $\xi_i(\varepsilon)$ имеет при $\varepsilon = 0$ полюс порядка $p_i - q_i$; 2) если же $p_i \leqslant q_i < +\infty$ или $p_i < q_i < +\infty$, то $\xi_i(\varepsilon)$ аналитичны в $\mathbb{C}$.

Без ограничения общности можно предположить, что $p_1 \leqslant p_2 \leqslant \ldots \leqslant p_n$ и $q_1 \geqslant q_2 \geqslant \ldots \geqslant q_n$. Если это не так, то можно поменять местами нули и дефектные функционалы так, чтобы были справедливы эти неравенства.

Согласно предположению, ОЖН $\{\varphi_i^{(s)}\}_{i=\overline{1,n}}^{s=\overline{1,p_i}}$ неполный, поэтому в силу формул (2.3)

$$D_p = det \left\| \left\langle \sum_{s=1}^{p_i} A_s \varphi_i^{(p_i+1-s)}, \psi_j \right\rangle \right\| = 0.$$

Предположим, что ранг матрицы определителя полноты равен $n-1$. Пусть главным минором, определяющим ранг, является левый верхний минор, т. е.

$$D_p' = det \left\| \left\langle \sum_{s=1}^{p_i} A_s \varphi_i^{(p_i+1-s)}, \psi_j \right\rangle \right\|_{i,j=\overline{1,n-1}} \neq 0.$$

Без ограничения общности можно предположить, что $\langle \sum\limits_{s=1}^{p_n} A_s \varphi_n^{(p_n+1-s)}, \psi_n \rangle \neq 0$.

Перепишем уравнение (4.1) в виде

$$B_n y = h + \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon^k A_k y + \sum_{s=1}^{n-1} \langle y, \gamma_s \rangle z_s,$$

где $B_n = B + \sum\limits_{s=1}^{n-1} \langle \cdot, \gamma_s \rangle z_s$. Согласно теореме 3.1 в силу условия $\langle \sum\limits_{s=1}^{p_n} A_s \varphi_n^{(p_n)}, \psi_n \rangle \neq 0$ существует число ρ_0 такое, что для всех ε из круга $0 < |\varepsilon| < \rho_0$ оператор $B_n - \sum\limits_{k=1}^{\infty} \varepsilon^k A_k$ непрерывно обратим.

Поэтому имеем

$$y = \left(B_n - \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon^k A_k\right)^{-1} h + \sum_{s=1}^{n-1} \xi_s \left(B_n - \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon^k A_k\right)^{-1} z_s,$$

или

$$y = y_n + \sum_{s=1}^{n-1} \xi_s \left(B_n - \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon^k A_k\right)^{-1} z_s, \quad \xi_s = \langle y, \gamma_s \rangle, s = \overline{1, n-1}. \tag{4.6}$$

Вычислим выражение

$$x_s = \left(B_n - \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon^k A_k\right)^{-1} z_s = \left(\widetilde{B_n} - \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon^k A_k - \langle \cdot, \gamma_n \rangle z_n\right)^{-1} z_s = \left(I - \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon^k \Gamma A_k - \langle \cdot, \gamma_n \rangle \varphi_n\right)^{-1} \varphi_s.$$

Отсюда

$$\left(I - \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon^k \Gamma A_k - \langle \cdot, \gamma_n \rangle \varphi_n\right) x_s = \varphi_s,$$

или

$$\left(I - \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon^k \Gamma A_k\right) x_s - \langle x_s, \gamma_n \rangle \varphi_n = \varphi_s.$$

Введя обозначение $\xi_s' = \langle x_s, \gamma_n \rangle$, переносим второй член из левой части в правую часть равенства. Обращая оператор $I - \sum\limits_{k=1}^{\infty} \varepsilon^k \Gamma A_k$, имеем:

$$x_s = \xi_s' \left(I - \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon^k \Gamma A_k\right)^{-1} \varphi_n + \left(I - \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon^k \Gamma A_k\right)^{-1} \varphi_s.$$

Подставляя его в правую сторону в выражении для ξ_s', получим уравнение для определения ξ_s':

$$\xi_s' = \xi_s' \left\langle \left(I - \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon^k \Gamma A_k\right)^{-1} \varphi_n, \gamma_n \right\rangle + \left\langle \left(I - \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon^k \Gamma A_k\right)^{-1} \varphi_s, \gamma_n \right\rangle.$$

Применяя к нему равенства (2.3), приходим к уравнению:

$$\xi_s' \cdot \varepsilon^{p_n} \left[\left\langle \sum_{k=1}^{p_n} A_k \varphi_n^{(p_n+1-k)}, \psi_n \right\rangle + O(\varepsilon)\right] = -\varepsilon^{p_s} \left[\left\langle \sum_{k=1}^{p_s} A_k \varphi_s^{(p_s+1-k)}, \psi_n \right\rangle + O(\varepsilon)\right]. \tag{4.7}$$

Так как $p_s \leqslant p_n$, то из формул (2.3) следует, что ξ_s' имеет полюс порядка $p_n - p_s$ в точке $\varepsilon = 0$. □

Подставляя значение x_s в (4.4), имеем

$$y = y_n + \sum_{s=1}^{n-1} \xi_s \left[\xi_s' \left(I - \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon^k \Gamma A_k\right)^{-1} \varphi_n + \left(I - \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon^k \Gamma A_k\right)^{-1} \varphi_s\right], \tag{4.8}$$

$$\xi_l = \langle y, \gamma_l \rangle, \ l = \overline{1, n-1}.$$

Теперь подставим первое уравнение во вторые, и после нескольких преобразований приходим к системе:

$$\sum_{j=1}^{n-1} \xi_j a_{ij} = -\langle y_n, \gamma_i \rangle, \quad i = \overline{1, n-1}, \tag{4.9}$$

где

$$a_{ij} = \varepsilon^{p_j} \left\langle \sum_{k=1}^{p_j} A_k \varphi_j^{(p_j+1-k)}, \psi_i \right\rangle + \xi_j' \varepsilon^{p_n} \left\langle \sum_{k=1}^{p_n} A_k \varphi_n^{(p_n+1-k)}, \psi_i \right\rangle,$$

$$\langle y_n, \gamma_i \rangle = \varepsilon^{q_i} \cdot \left(\langle h_i^{(q_i)}, \psi_i \rangle + O(\varepsilon)\right) + \varepsilon^{p_n} \cdot \xi_n'' \left\langle \sum_{k=1}^{p_n} A_k \varphi_n^{(p_n+1-k)}, \psi_i \right\rangle.$$

Если учесть, что $\xi'_j = O(\varepsilon^{p_j-p_n})$ и $\xi''_n = O(\varepsilon^{q_n-p_n})$ (см. формулы (4.2) и (4.6)), то

$$a_{ij} = \varepsilon^{p_j}\left[\left\langle \sum_{k=1}^{p_j} A_k\varphi_j^{(p_j+1-k)}, \psi_i\right\rangle + O(\varepsilon)\right]$$

и

$$\langle y_n, \gamma_i\rangle = \varepsilon^{q_n}\left[\left\langle \sum_{k=1}^{p_n} A_k\varphi_n^{(p_n+1-k)}, \psi_i\right\rangle + \varepsilon^{q_i-q_n}\langle h_i^{(q_i)}, \psi_i\rangle + O(\varepsilon)\right].$$

Так как определитель системы (4.9) $\Delta(\varepsilon) = \varepsilon^{p_1+\ldots+p_{n-1}}(D'_p + O(\varepsilon)) \neq 0$, то она имеет единственное решение. Теперь определим порядок зависимости коэффициентов ξ_i от параметра ε. Для этого оценим сопутствующие определители

$$\Delta_i = \varepsilon^{q_n + \sum\limits_{j\neq i} p_j}(D_{pk} + O(\varepsilon)), \quad i = \overline{1, n-1}.$$

Тогда $\xi_i = \varepsilon^{q_n - p_i}C(\varepsilon)$, $i = \overline{1, n-1}$. Поэтому если $D_{pk} = 0$ и $q_n \geqslant p_n$, то все ξ_i, и в том числе решение y, будут непрерывными в точке $\varepsilon = 0$ и в некоторой ее окрестности. В случае $p_i < q_n < p_{i+1}$ решение имеет полюс порядка $p_{i+1} - q_n$, а если $p_1 > q_n$, то решение имеет полюс порядка $p_1 - q_n$. Этим доказана следующая теорема.

Теорема 4.2. *Пусть в уравнении* (4.1) *оператор B фредгольмов с $N(B) = \{\varphi_i\}_1^n$, $N^*(B) = \{\psi_i\}_1^n$ и соответствующим неполным ОЖН $\{\varphi_i^{(s)}\}_{i=\overline{1,n}}^{s=\overline{1,p_i}}$, состоящим из A-обобщенных жордановых цепочек конечной длины p_i, $i = 1, 2, \ldots, n$, и пусть ранг матрицы определителя полноты равен $n-1$. Если y_n — решение уравнения* (4.2)*, то уравнение* (4.1) *имеет решение вида*

$$y(\varepsilon) = y_n(\varepsilon) + \sum_{j=1}^{n-1}\xi_j\left[\xi\left(I - \sum_{k=1}^{\infty}\varepsilon^k\Gamma A_k\right)^{-1}\varphi_n + \left(I - \sum_{k=1}^{\infty}\varepsilon^k\Gamma A_k\right)^{-1}\varphi_j\right].$$

Если $D_{pk} = 0$ и дополнительно выполнено неравенство $p_n \leqslant q_n$, то решение $y(\varepsilon)$ будет аналитическим при $\varepsilon = 0$ и в некоторой окрестности, и при условии $p_1 > q_n$ оно имеет в точке $\varepsilon = 0$ полюс порядка $p_1 - q_n$. Если $p_i < q_n < p_{i+1}$, то решение $y(\varepsilon)$ имеет полюс порядка $p_{i+1} - q_n$.

5. Возмущение линейного уравнения, аналитически зависящее от нескольких малых параметров

5.1. Обобщенные жордановы цепочки. Пусть $T(\lambda)\colon E_1 \to E_2$ — оператор-функция, аналитическая в некотором малом полидиске $\Delta \subset \mathbb{C}^q$, и λ_0 — ее изолированная фредгольмова точка такая, что $N(T(\lambda_0)) = E_1^n = \{\varphi_i\}_1^n$, $N^*(T(\lambda_0)) = E_{2,n} = \{\psi_i\}_1^n$. Пусть $\{\gamma_i\}_1^n$ и $\{z_i\}_1^n$ — соответствующие биортогональные системы. Тогда проекционные операторы $P = \sum\limits_{k=1}^n\langle\gamma_k, \cdot\rangle\varphi_k$ и $Q = \sum\limits_{k=1}^n\langle\psi_k, \cdot\rangle z_k$ порождают разложения $E_1 = E_1^n \oplus E_1^{\infty-n}$, $E_2 = E_{2,n} \oplus E_{2,\infty-n}$ (см. раздел 2).

Введем обозначения

$$\varepsilon = \lambda - \lambda_0 = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_q), \quad B = -T(\lambda_0), \quad T_\alpha = \frac{1}{\alpha!}\cdot\frac{\partial^{|\alpha|}T(\lambda_0)}{\partial\lambda_1^{\alpha_1}\ldots\partial\lambda_q^{\alpha_q}},$$

$$\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_q) \text{ — мультииндекс}, \quad |\alpha| = \alpha_1 + \ldots + \alpha_q, \quad \alpha! = \alpha_1!\ldots\alpha_q!.$$

Определение 5.1. ОЖЦ, *отвечающей элементу* $\varphi_i \in N(B)$, называется совокупность решений уравнений

$$B\varphi_i = 0, \quad B\varphi_i^{(\alpha)} = \sum_{0<\beta\leqslant\alpha} T_\beta\varphi_i^{(\alpha-\beta)}. \tag{5.1}$$

Уравнения (5.1) имеют решения, если

$$\left\langle \psi_j, \sum_{0<\beta\leqslant\alpha} T_\beta\varphi_i^{(\alpha-\beta)}\right\rangle = 0, \quad j = 1, 2, \ldots, n.$$

Решения уравнений (5.1) при $|\alpha| = p$, называем ОПЭ порядка p. Совокупность всех φ_i, $i = 1, 2, \ldots, n$, и всевозможных ОПЭ к ним назовем ОЖН.

Условиями принадлежности $\varphi_i^{(\alpha)}$ подпространству $E_1^{\infty - n}$

$$\langle \gamma_i, \varphi_j^{(\alpha)} \rangle = 0,\ i = 1, 2, \ldots, n,$$

ОЖЦ, тем самым и ОЖН, определяются однозначно.

Согласно обобщенной лемме Шмидта ОПЭ можно записать в виде (см. (2.2))

$$\varphi_i^{(\alpha)} = \sum_{0 < \beta \leqslant \alpha} \Gamma T_\beta \varphi_i^{(\alpha - \beta)}. \tag{5.2}$$

Отметим, что начиная с некоторого номера p_0 могут отсутствовать все или только часть ОПЭ порядков p. В последнем случае может оказаться, что ОЖЦ состоит из бесконечного числа элементов.

Пример 5.1.

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad T_{10} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad T_{01} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\varphi^{(0)} = \{-1;\, 1;\, 1\}, \quad \psi^{(0)} = \{-1;\, 1; -1\}, \quad \Gamma = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Выпишем ОПЭ:

$$\varphi^{(0,n)} = \{-1;\, 0;\, 1\}, \quad n = 1, 2, \ldots$$

Учитывая это, введем следующие определения.

Определение 5.2. Назовем *порядком* ОЖЦ наибольший из порядков p, для которого существуют все ОПЭ, а *длиной* — число составляющих ее элементов.

Определение 5.3. Бесконечную последовательность мультииндексов $\{\beta\}$ назовем *регулярной*, если вместе с каждым β в нее входят все $\gamma < \beta$.

Ясно, что если длина ОЖЦ бесконечна, то существует по крайней мере одна последовательность ОПЭ $\{\varphi^{(\beta)}\}$ такая, что нумерующая ее последовательность мультииндексов β является регулярной.

Лемма 5.1. *Имеет место формула*

$$\varphi_i^{(\alpha)} = \sum_{\alpha = k_1\alpha_1 + \ldots + k_m\alpha_m + \ldots} \Big[(\Gamma T_{\alpha_1})^{k_1} \ldots (\Gamma T_{\alpha_m})^{k_m} \ldots \Big] \varphi_i, \tag{5.3}$$

где $k_1\alpha_1 + \ldots + k_m\alpha_m + \ldots = (k_1\alpha_1^{(1)} + \ldots + k_m\alpha_1^{(n)} + \ldots, \ldots, k_1\alpha_m^{(1)} + \ldots + k_m\alpha_m^{(n)} + \ldots)$ — *всевозможные представления мультииндексов* α *в виде линейных комбинаций мультииндексов* $\alpha_j \leqslant \alpha$.

Доказательство. Действительно, для $\alpha = 1_j = \{0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0\}$

$$\varphi_i^{(1_j)} = \sum_\beta \Gamma T_\beta \varphi_i^{(0)}.$$

Предположим, что формула (5.3) справедлива для всех $\beta < \alpha$. Тогда

$$\varphi_i^{(\alpha)} = \sum_\beta \Gamma T_\beta \varphi_i^{(\alpha - \beta)} = \sum_{\alpha = \beta + k_1\alpha_1 + \ldots + k_m\alpha_m + \ldots} \Gamma T_\beta \Big[(\Gamma T_{\alpha_1})^{k_1} \ldots (\Gamma T_{\alpha_m})^{k_m} \ldots \Big] \varphi_i =$$

$$= \sum_{\alpha = k_1'\alpha_1 + \ldots + k_m'\alpha_m + \ldots} \Big[(\Gamma T_{\alpha_1})^{k_1'} \ldots (\Gamma T_{\alpha_m})^{k_m'} \ldots \Big] \varphi_i.$$

□

Замечание 5.1. Формулы (5.2), (5.3) определяют для каждого φ_i, $i = 1, 2, \ldots, n$ всю последовательность элементов $\{\varphi_j^{(\alpha)}\}$, в том числе с теми индексами α, для которых соответствующие ОПЭ отсутствуют. Элементы этой последовательности удовлетворяют уравнениям

$$\widetilde{B}\varphi_i^{(0)} = z_i, \ \ \widetilde{B}\varphi_i^{(\alpha)} = \sum_{0<\beta\leqslant\alpha} T_\beta \varphi_i^{(\alpha-\beta)}, \tag{5.4}$$

где $\widetilde{B} = B + \sum\limits_{i=1}^{n} \langle \gamma_i, \cdot \rangle z_i$.

Будем считать, что ряд $\sum\limits_{\alpha>0} \varepsilon^\alpha a_\alpha$, мажорирующий $\sum\limits_{\alpha>0} \varepsilon^\alpha T_\alpha$, сходится в полидиске $\Delta_1 = \{\varepsilon\colon |\varepsilon_i| < \rho_i^{(1)}\} \subseteq \Delta$ к функции $a(\varepsilon)$.

Теорема 5.1. *Если уравнение*

$$\left(B - \sum_{\alpha>0} \varepsilon^\alpha T_\alpha\right) y = 0 \tag{5.5}$$

в некоторой окрестности $\varepsilon = 0$ *имеет решение вида*

$$y(\varepsilon) = \varphi + \sum_{\beta>0} \varepsilon^\beta y_\beta,$$

то каждому $\varphi \in N(B)$ *отвечает ОЖЦ бесконечной длины.*

Доказательство. Подставляя $y(\varepsilon)$ в (5.5), имеем

$$B\varphi = 0, \quad By_\alpha = \sum_\beta T_\beta y_{\alpha-\beta}, \quad |\alpha| = 1, 2, 3, \ldots \tag{5.6}$$

Так как $y_\alpha \in D(B)$, то согласно свойству дефектного функционала ψ выполнено $\langle \psi, By_\alpha \rangle = 0$, т. е. $\langle \psi, \sum\limits_\beta T_\beta y_{\alpha-\beta} \rangle = 0$, для любого α. Следовательно, все уравнения (5.6) разрешимы. Таким образом, элементу $\varphi \in N(B)$ отвечает ОЖЦ $\{y_\alpha\}$ бесконечной длины. Теорема доказана. □

5.2. Возмущение линейного уравнения малыми линейными слагаемыми. Рассмотрим уравнение

$$By = h + \sum_{\alpha>0} \varepsilon^\alpha T_\alpha y, \tag{5.7}$$

где $h \in E_2$ — некоторый известный элемент.

Если $n = 0$, то решение уравнения (5.7) в $\Delta' \subseteq \Delta$ единственно и аналитически зависит от ε (см. [1, с. 432]).

В случае $n \geqslant 1$ заменим уравнение (5.7) эквивалентной системой

$$\begin{cases} \widetilde{B}y = h + \sum\limits_{\alpha>0} \varepsilon^\alpha T_\alpha y + \sum\limits_{i=1}^{n} \xi_i z_i, \\ \xi_i = \langle \gamma_i, y \rangle, \ i = 1, 2, \ldots, n. \end{cases} \tag{5.8}$$

Пусть $\varepsilon \in \Delta - \{\varepsilon\colon \|\Gamma \sum\limits_{\alpha>0} \varepsilon^\alpha T_\alpha\| < 1\}$. Тогда система (4.7) заменится следующей:

$$\begin{cases} y = \left[I - \Gamma \sum\limits_{\alpha>0} \varepsilon^\alpha T_\alpha\right]^{-1} \Gamma h + \sum\limits_{i=1}^{n} \xi_i \left[I - \Gamma \sum\limits_{\alpha>0} \varepsilon^\alpha T_\alpha\right]^{-1} \varphi_i, \\ \xi_i = \langle \gamma_i, y \rangle, \ i = 1, 2, \ldots, n. \end{cases} \tag{5.9}$$

Подставляя значение y во второе уравнение и замечая, что

$$\left[I - \Gamma \sum_{\alpha>0} \varepsilon^\alpha T_\alpha\right]^{-1} \Gamma = \Gamma \left[I - \sum_{\alpha>0} \varepsilon^\alpha T_\alpha \Gamma\right]^{-1}, \ \langle \gamma_i, \Gamma u \rangle = \langle \psi_i, u \rangle,$$

приходим к системе линейных уравнений, определяющей ξ_i, $i = 1, 2, \ldots, n$:

$$\sum_{i=1}^{n} \xi_i \left\langle \psi_j, \sum_{\alpha>0} \varepsilon^\alpha T_\alpha \left[I - \Gamma \sum_{\alpha>0} \varepsilon^\alpha T_\alpha \right]^{-1} \varphi_i \right\rangle + \left\langle \psi_j, \left[I - \Gamma \sum_{\alpha>0} \varepsilon^\alpha T_\alpha \right]^{-1} \right\rangle h = 0, \quad j = 1, 2, \ldots, n. \tag{5.10}$$

Так как

$$\sum_{\alpha>0} \varepsilon^\alpha T_\alpha \left[I - \Gamma \sum_{\alpha>0} \varepsilon^\alpha T_\alpha \right]^{-1} = \sum_{\alpha>0} \varepsilon^\alpha \sum_{\alpha=\alpha^{(0)}+k_1\alpha^{(1)}+\ldots+k_m\alpha^{(m)}+\ldots} T_{\alpha^{(0)}} \left[(\Gamma T_{\alpha^{(1)}})^{k_1} \ldots (\Gamma T_{\alpha^{(m)}})^{k_m} \ldots \right],$$

то учитывая (5.3) и замечание 5.1, имеем

$$\sum_{i=1}^{n} \xi_i \sum_{\alpha>0} \varepsilon^\alpha \left\langle \psi_j, \sum_{\beta \leqslant \alpha} T_\beta \varphi_i^{(\alpha-\beta)} \right\rangle + \sum_{\alpha>0} \varepsilon^\alpha \left\langle \psi_j, h^{(\alpha)} \right\rangle = 0, \quad j = \overline{1, n}, \tag{5.11}$$

где

$$h^{(\alpha)} = \sum_{\alpha=k_1\alpha^{(1)}+\ldots+k_m\alpha^{(m)}+\ldots} \left[(\Gamma T_{\alpha^{(1)}})^{k_1} \ldots (\Gamma T_{\alpha^{(m)}})^{k_m} \ldots \right] h. \tag{5.12}$$

Для тех индексов α, для которых существует ОПЭ $\varphi_i^{(\alpha)}$, соответствующий коэффициент $\left\langle \psi_j, \sum\limits_{\beta \leqslant \alpha} T_\beta \varphi_i^{(\alpha-\beta)} \right\rangle$, $j = 1, 2, \ldots, n$, равен нулю. Отметим также, что для элементов цепочки $\{h^{(\alpha)}\}$, принадлежащих $E_{2,\infty-n}$, коэффициенты $\langle \psi_j, h^{(\alpha)} \rangle$, $j = 1, 2, \ldots, n$, нулевые.

Таким образом, решение уравнения (5.11) в окрестности $\varepsilon = 0$ сводится к определению чисел ξ_i, $i = 1, 2, \ldots, n$, удовлетворяющих системе линейных уравнений (5.11), т. е. сводится к исследованию особенностей мероморфных функций нескольких переменных.

Замечание 5.2. Рассматривая в пространстве $\mathbb{C}^q$ отдельные направления $\overline{a} = (a_1, \ldots, a_q)$, т. е. полагая $\varepsilon_i = \lambda a_i$, придем к результатам, сформулированным в [1].

5.3. Приложения. Рассмотрим уравнение

$$Bx = h + \varepsilon_1 T_{10} x + \varepsilon_2 T_{01} x,$$

где:

а) B, T_{10} и T_{01} — операторы примера 5.1. Так как $n = 1$, то система (5.11) состоит из одного уравнения и $\xi = a(h, \varepsilon) \big/ b(\varepsilon)$, где

$$b(\varepsilon) = \varepsilon_1 (3 + 9\varepsilon_1 + 4\varepsilon_2 + 43\varepsilon_1^2 + 10\varepsilon_1\varepsilon_2 + 2\varepsilon_2^2 + \ldots);$$

б) $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $T_{10} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $T_{01} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

$$\varphi^{(0)} = \{0;\ 1;\ -1\}, \quad \psi^{(0)} = \{1;\ 1;\ 0\}, \quad \Gamma = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \ dim N(B) = 1.$$

В этом случае

$$b(\varepsilon) = \varepsilon_1^2 + 2\varepsilon_1\varepsilon_2 + 2\varepsilon_2^3 + 7\varepsilon_1^2\varepsilon_2 + 5\varepsilon_1\varepsilon_2^2 + \varepsilon_2^3 \ldots$$

в) Теперь рассмотрим краевые задачи Дирихле (Неймана) для уравнения Лапласа

$$\Delta u = 0, \ \ u|_S = g(S) \ \ \left(\frac{\partial u}{\partial n} \bigg|_S = g(S) \right), \tag{5.13}$$

где S — эллипсоид,

$$\begin{aligned} \xi &= \arcsin\theta \cos\varphi, \\ \eta &= a(1 - \varepsilon_1) \sin\theta \sin\varphi, \\ \zeta &= a(1 - \varepsilon_2) \cos\varphi, \end{aligned} \tag{5.14}$$

$g(S)$ — аналитическая функция параметров $\varepsilon_1, \varepsilon_2$.

Разыскивая решение (5.13) в виде соответствующего потенциала, приходим к интегральным уравнениям в пространстве функций, интегрируемых с квадратом по поверхности сферы единичного радиуса, ядра которых зависят от двух параметров ε_1 и ε_2.

Все необходимые подсчеты проведены в [2], где рассмотрена внутренняя задача Дирихле в предположении, что граничная функция $g(S)$ не зависит от ε. В [2] эта задача рассмотрена как пример задачи возмущения линейного уравнения малыми линейными слагаемыми для случая $n = 0$. Здесь мы отметим только, что для внутренней задачи Дирихле и внешней Неймана соответствующий интегральный оператор B не имеет нулей, а для внешней задачи Дирихле и внутренней Неймана подпространство $N(B)$ одномерно, $\varphi^{(0)}(\theta, \varphi) = 1$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Вайнберг М. М., Треногин В. А.* Теория ветвления решений нелинейных уравнений. — М.: Наука, 1969.
2. *Логинов Б. В.* К теории возмущений для неоднородных уравнений// В сб.: «Исследования по дифференциальным уравнениям и их приложениям». — Алма-Ата: Илым, 1965. — С. 95–101.
3. *Логинов Б. В., Русак Ю. Б.* Обобщенная жорданова структура в теории ветвления // В сб.: «Прямые и обратные задачи для уравнений с частными производными». — Ташкент: Фан, 1978. — С. 133–148.
4. *Рахимов Д. Г.* О вычислении кратных собственных значений редукционным методом ложных возмущений// Журн. Средневолж. мат. об-ва. — 2010. — № 3. — С. 106–112.
5. *Рахимов Д. Г.* О регуляризации кратных собственных значений редукционным методом ложных возмущений// Вестн. Самар. гос. ун-та. Естеств. сер. — 2012. — № 6. — С. 35–41.
6. *Рахимов Д. Г., Логинов Б. В.* Возмущения в задачах на собственные значения. — Ташкент: Ташкент. унив. инф. техн., 2020.
7. *Треногин В. А.* Линейные уравнения в пространстве Банаха с малым параметром// В сб.: «Материалы 6 Межвузовской физ.-мат. науч. конф. Дальнего Востока». — Хабаровск, 1967.
8. *Albrecht A., Howlett P., Verma G.* Inversion of operator pencils on Banach space using Jordan chains when the generalized resolvent has an isolated essential singularity// Linear Algebra Appl. — 2020. — *595*. — С. 33–62.
9. *Albrecht A., Howlett P., Verma G.* Inversion of operator pencils on Hilbert space// J. Aust. Math. Soc. — 2020. — *108*, № 2. — С. 145–176.
10. *Avrachenkov K. E., Filar J. A., Howlett P. G.* Analytic perturbation theory and its applications. — Philadelphia: SIAM, 2013.

Д. Г. Рахимов
Филиал Российского университета нефти и газа им. И. М. Губкина, Ташкент, Узбекистан
E-mail: davranaka@yandex.com

Д. Ахмаджанова
Национальный Университет Узбекистана им. М. Улугбека, Ташкент, Узбекистан
E-mail: durdona@mail.ru

DOI: 10.22363/2413-3639-2022-68-1-80-94 UDC 517.988.67

On Analytic Perturbations of Linear Equations in the Case of Incomplete Generalized Jordan Set

© 2022 **D. G. Rakhimov, D. Akhmadzhanova**

Abstract. Based on the methods of the theory of bifurcations, the problem of perturbation of linear equations by small analytic terms is considered. In contrast to the work of Trenogin [7], the case of an incomplete generalized Jordan set of a linear Fredholm operator acting from one Banach space to another Banach space is studied. A technique is proposed that uses the regularization of the Fredholm operator by a specially constructed finite-dimensional operator.

REFERENCES

1. M. M. Vaynberg and V. A. Trenogin, *Teoriya vetvleniya resheniy nelineynykh uravneniy* [Branching Theory for Solutions of Nonlinear Equations], Nauka, Moscow, 1969 (in Russian).
2. B. V. Loginov, "K teorii vozmushcheniy dlya neodnorodnykh uravneniy" [On perturbation theory for nonhomogeneous equations], In: *Issledovaniya po differentsial'nym uravneniyam i ikh prilozheniyam* [Research on Differential Equations and Their Applications], Ilym, Alma-Ata, 1965, pp. 95–101 (in Russian).
3. B. V. Loginov and Yu. B. Rusak, "Obobshchennaya zhordanova struktura v teorii vetvleniya" [Generalized Jordan structure in branching theory], In: *Pryamye i obratnye zadachi dlya uravneniy s chastnymi proizvodnymi* [Direct and Inverse Problems for Partial Differential Equations], Fan, Tashkent, 1978, pp. 133–148 (in Russian).
4. D. G. Rakhimov, "O vychislenii kratnykh sobstvennykh znacheniy reduktsionnym metodom lozhnykh vozmushcheniy" [On the calculation of multiple eigenvalues by the reduction method of false perturbations], *Zhurn. Srednevolzh. mat. ob-va* [J. Middle Volga Math. Soc.], 2010, No. 3, 106–112 (in Russian).
5. D. G. Rakhimov, "O regulyarizatsii kratnykh sobstvennykh znacheniy reduktsionnym metodom lozhnykh vozmushcheniy" [On regularization of multiple eigenvalues by the reduction method of false perturbations], *Vestn. Samar. gos. un-ta. Estestv. ser.* [Bull. Samara State Univ. Nat. Sci. Ser.], 2012, No. 6, 35–41 (in Russian).
6. D. G. Rakhimov and B. V. Loginov, *Vozmushcheniya v zadachakh na sobstvennye znacheniya* [Perturbations in Eigenvalue Problems], Tashkent. univ. inf. tekhn., Tashkent, 2020 (in Russian).
7. V. A. Trenogin, "Lineynye uravneniya v prostranstve Banakha s malym parametrom" [Linear equations in Banach space with a small parameter], In: *Materialy 6 Mezhvuzovskoy fiz.-mat. nauch. konf. Dal'nego Vostoka* [Proc. 6th Interuniv. Phys.-Math. Sci. Conf. of Far East], Khabarovsk, 1967 (in Russian).
8. A. Albrecht, P. Howlett, and G. Verma, "Inversion of operator pencils on Banach space using Jordan chains when the generalized resolvent has an isolated essential singularity," *Linear Algebra Appl.*, 2020, **595**, 33–62.
9. A. Albrecht, P. Howlett, and G. Verma, "Inversion of operator pencils on Hilbert space," *J. Aust. Math. Soc.*, 2020, **108**, No. 2, 145–176.
10. K. E. Avrachenkov, J. A. Filar, and P. G. Howlett, *Analytic perturbation theory and its applications*, SIAM, Philadelphia, 2013.

D. G. Rakhimov
Tashkent Branch of Gubkin Russian State University of Oil and Gaz, Tashkent, Uzbekistan
E-mail: davranaka@yandex.com

D. Akhmadzhanova
National University of Uzbekistan, Tashkent, Uzbekistan
E-mail: durdona@mail.ru