Современная математика. Фундаментальные направления. Том 68, № 1 (2022). С. 70–79
Contemporary Mathematics. Fundamental Directions. ISSN 2413-3639 (Print)

DOI: 10.22363/2413-3639-2022-68-1-70-79 УДК 512.74+517.926

СИСТЕМЫ МАТРИЧНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ДЛЯ ПОВЕРХНОСТЕЙ

© 2022 г. **К. К. МУМИНОВ, Р. А. ГАФФОРОВ**

Аннотация. Установлены необходимые и достаточные условия эквивалентности поверхностей относительно действия специальной псевдоортогональной группы.

ОГЛАВЛЕНИЕ

1. Введение

Пусть C^n — комплексное n-мерное линейное пространство, и пусть $GL(n,C)$ — группа всех обратимых линейных преобразований в C^n. Элементы из C^n представляются в виде n-мерных вектор-столбцов $\overrightarrow{x} = \{\overrightarrow{x}_j\}_{j=1}^n$, а преобразования $g \in GL(n,C)$ в виде $n \times n$-матриц $(g_{ij})_{i,j=1}^n$, где x_i, $g_{ij} \in C$, $i,j = 1,\ldots,n$. Действие $g \in GL(n,C)$ на вектор $\overrightarrow{x} = \{\overrightarrow{x}_j\}_{j=1}^n \in C^n$ определяется как умножение матрицы g на вектор-столбец $\overrightarrow{x}$ (запись: $g\overrightarrow{x}$).

C^∞-дифференцируемое отображение $x : (0,1) \times (0,1) \to C^n$ называется *элементарной поверхностью*. Если G — подгруппа группы $GL(n,C)$, то две элементарные поверхности $\overrightarrow{y}(s,t)$ и $\overrightarrow{x}(s,t)$ называют *G-эквивалентными*, если $\overrightarrow{y}(s,t) = g\overrightarrow{x}(s,t)$ для некоторого $g \in G$ и любых $(s,t) \in (0,1) \times (0,1)$.

Одной из важных задач в дифференциальной геометрии является проблема нахождения удобных критериев для эквивалентности элементарных поверхностей. Одним из эффективных методов при решении такой задачи является использование инструментов теории дифференциальных инвариантов.

В настоящей работе задача G-эквивалентности элементарных поверхностей для специальной псевдоортогональной группы $SO(n,p,C)$ переформулируется в терминах дифференциальной алгебры, что позволяет использовать алгебраический подход для решения этой задачи. Такой подход применялся при получении необходимых и достаточных условий G-эквивалентности поверхностей в случае действий общей линейной, специальной линейной, ортогональной, псевдоортогональной и симплектической групп (см. [1,4,5,9]).

Кроме того, описываются системы дифференциальных уравнений, решения которых восстанавливают поверхности с точностью до их эквивалентности относительно действия специальной псевдоортогональной группы $SO(n,p,C)$.

2. Предварительные сведения

Для каждой элементарной поверхности $\overrightarrow{x}(s,t) = (x_j(s,t))_{j=1}^n$ через

$$M_s(\overrightarrow{x}) = \begin{pmatrix} x_1(s,t) & \dfrac{\partial x_1(s,t)}{\partial s} & \dfrac{\partial^2 x_1(s,t)}{\partial s^2} & \dots & \dfrac{\partial^{n-1} x_1(s,t)}{\partial s^{n-1}} \\ x_2(s,t) & \dfrac{\partial x_2(s,t)}{\partial s} & \dfrac{\partial^2 x_2(s,t)}{\partial s^2} & \dots & \dfrac{\partial^{n-1} x_2(s,t)}{\partial s^{n-1}} \\ x_3(s,t) & \dfrac{\partial x_3(s,t)}{\partial s} & \dfrac{\partial^2 x_3(s,t)}{\partial s^3} & \dots & \dfrac{\partial^{n-1} x_3(s,t)}{\partial s^{n-1}} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_n(s,t) & \dfrac{\partial x_n(s,t)}{\partial s} & \dfrac{\partial^2 x_n(s,t)}{\partial s^2} & \dots & \dfrac{\partial^{n-1} x_n(s,t)}{\partial s^{n-1}} \end{pmatrix}$$

обозначим $n\times n$-матрицу $(m_{ij}(s,t))_{i,j=1}^n$, где i-ый столбец имеет координаты $m_{ij}(s,t) = \dfrac{\partial^{i-1} x_j(s,t)}{\partial s^{i-1}}$, $i,j = 1,\dots,n$, при этом считается, что $\dfrac{\partial^0 x_j(s,t)}{\partial s^0} = x_j(s,t)$ для всех $j = 1,\dots,n,\ \ s,t \in (0,1)$.

Через

$$M'_{ss}(\overrightarrow{x}) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial x_1(s,t)}{\partial s} & \dfrac{\partial^2 x_1(s,t)}{\partial s^2} & \dfrac{\partial^3 x_1(s,t)}{\partial s^3} & \dots & \dfrac{\partial^{n} x_1(s,t)}{\partial s^{n}} \\ \dfrac{\partial x_2(s,t)}{\partial s} & \dfrac{\partial^2 x_2(s,t)}{\partial s^2} & \dfrac{\partial^3 x_2(s,t)}{\partial s^3} & \dots & \dfrac{\partial^{n} x_2(s,t)}{\partial s^{n}} \\ \dfrac{\partial x_3(s,t)}{\partial s} & \dfrac{\partial^2 x_3(s,t)}{\partial s^2} & \dfrac{\partial^3 x_3(s,t)}{\partial s^3} & \dots & \dfrac{\partial^{n} x_3(s,t)}{\partial s^{n}} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dfrac{\partial x_n(s,t)}{\partial s} & \dfrac{\partial^2 x_n(s,t)}{\partial s^2} & \dfrac{\partial^3 x_n(s,t)}{\partial s^3} & \dots & \dfrac{\partial^{n} x_n(s,t)}{\partial s^{n}} \end{pmatrix}$$

обозначается матрица $\left\{\dfrac{\partial^i x_j(s,t)}{\partial s^i}\right\}_{i,j=1}^n$, а через

$$M'_{st}(\overrightarrow{x}) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial x_1(s,t)}{\partial t} & \dfrac{\partial^2 x_1(s,t)}{\partial s \partial t} & \dfrac{\partial^3 x_1(s,t)}{\partial s^2 \partial t} & \dots & \dfrac{\partial^{n} x_1(s,t)}{\partial s^{n-1} \partial t} \\ \dfrac{\partial x_2(s,t)}{\partial t} & \dfrac{\partial^2 x_2(s,t)}{\partial s \partial t} & \dfrac{\partial^3 x_2(s,t)}{\partial s^2 \partial t} & \dots & \dfrac{\partial^{n} x_2(s,t)}{\partial s^{n-1} \partial t} \\ \dfrac{\partial x_3(s,t)}{\partial t} & \dfrac{\partial^2 x_3(s,t)}{\partial s \partial t} & \dfrac{\partial^3 x_3(s,t)}{\partial s^2 \partial t} & \dots & \dfrac{\partial^{n} x_3(s,t)}{\partial s^{n-1} \partial t} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dfrac{\partial x_n(s,t)}{\partial t} & \dfrac{\partial^2 x_n(s,t)}{\partial s \partial t} & \dfrac{\partial^3 x_n(s,t)}{\partial s^2 \partial t} & \dots & \dfrac{\partial^{n} x_n(s,t)}{\partial s^{n-1} \partial t} \end{pmatrix}$$

— матрица $\left\{\dfrac{\partial^i x_j(s,t)}{\partial s^{i-1} \partial t}\right\}_{i,j=1}^n$.

Всюду в дальнейшем рассматриваются только регулярные поверхности, т. е. элементарные поверхности $\overrightarrow{x}(s,t)$, для которых определитель

$$\det M_s\overrightarrow{(x)}(s,t) = det \begin{pmatrix} x_1(s,t) & \dfrac{\partial x_1(s,t)}{\partial s} & \dfrac{\partial^2 x_1(s,t)}{\partial s^2} & \dots & \dfrac{\partial^{n-1} x_1(s,t)}{\partial s^{n-1}} \\ x_2(s,t) & \dfrac{\partial x_2(s,t)}{\partial s} & \dfrac{\partial^2 x_2(s,t)}{\partial s^2} & \dots & \dfrac{\partial^{n-1} x_2(s,t)}{\partial s^{n-1}} \\ x_3(s,t) & \dfrac{\partial x_3(s,t)}{\partial s} & \dfrac{\partial^2 x_3(s,t)}{\partial s^3} & \dots & \dfrac{\partial^{n-1} x_3(s,t)}{\partial s^{n-1}} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_n(s,t) & \dfrac{\partial x_n(s,t)}{\partial s} & \dfrac{\partial^2 x_n(s,t)}{\partial s^2} & \dots & \dfrac{\partial^{n-1} x_n(s,t)}{\partial s^{n-1}} \end{pmatrix} \neq 0$$

при всех $s,t\in(0,1)$.

Пусть $O(n,C)$ (соответственно, $O(n,p,C)$) ортогональная (соответственно, псевдоортогональная) подгруппа в $GL(n,C)$, т. е.

$$O(n,C)=\{g\in GL(n,C): g^T g=e\}$$

(соответственно,

$$O(n,p,C)=\{g\in GL(n,C): g^T e_p g=e_p\}),$$

где g^T — транспонированная матрица g, e — единица группы $GL(n,C)$, $e_p=(e^p_{ij})^n_{i,j=1}$ — матрица из $GL(n,C)$, для которой $e^p_{ii}=1$ при $i=1,2,\dots,p$, $e^p_{ii}=-1$ при $i=p+1,\dots,n$, $e^p_{ij}=0$ при $i\neq j$, $p\in\{1,\dots,n-1\}$.

Через $SO(n,C)$ (соответственно $SO(n,p,C)$) обозначим специальную ортогональную (соответственно, специальную псевдоортогональную) подгруппу в $GL(n,C)$, т. е.

$$SO(n,C)=\{g\in O(n,C): \det g=1\}$$

(соответственно,

$$SO(n,p,C)=\{g\in O(n,p,C): \det g=1\}).$$

Следующая теорема устанавливает необходимые и достаточные условия G-эквивалентности регулярных поверхностей $\overrightarrow{x}(s,t)$ и $\overrightarrow{y}(s,t)$ с помощью матриц $M_s(\overrightarrow{x})$ и $M_s(\overrightarrow{y})$, в случае, когда $G=SO(n,p,C)$.

Теорема 2.1. *Две регулярные поверхности $\overrightarrow{x}(s,t)$ и $\overrightarrow{y}(s,t)$ является $SO(n,p,C)$-эквивалентными тогда и только тогда, когда выполнены следующие равенства*:

$$a)\ M_s^{-1}(\overrightarrow{x})(s,t)M'_{ss}(\overrightarrow{x})(s,t)=M_s^{-1}(\overrightarrow{y})(s,t)M'_{ss}(\overrightarrow{y})(s,t);$$

$$b)\ M_s^{-1}(\overrightarrow{x})(s,t)M'_{st}(\overrightarrow{x})(s,t)=M_s^{-1}(\overrightarrow{y})(s,t)M'_{st}(\overrightarrow{y})(s,t);$$

$$c)\ M_s^{T}(\overrightarrow{x})(s,t)e_pM_s(\overrightarrow{x})(s,t)=M_s^{T}(\overrightarrow{y})(s,t)e_pM_s(\overrightarrow{y})(s,t);$$

$$d)\ \det M_s(\overrightarrow{x})(s,t)=\det M_s(\overrightarrow{y})(s,t)$$

для всех $s,t\in(0,1)$.

Доказательство. Пусть поверхности $\overrightarrow{x}(s,t)$ и $\overrightarrow{y}(s,t)$ — $SO(n,p,C)$-эквиваленты, т. е. существует такой элемент $g\in SO(n,p,C)$, для которого верно равенство $\overrightarrow{y}(s,t)=g\overrightarrow{x}(s,t)$. Следовательно, в силу определения матрицы $M_s(\overrightarrow{x})$ имеем, что $M_s(\overrightarrow{y})=gM_s(\overrightarrow{x})$. Покажем, что из этого равенства вытекает справедливость равенств $a),b),c),d)$.

Действительно,

a). $M_s^{-1}(\overrightarrow{y})(s,t)M'_{ss}(\overrightarrow{y})(s,t)=(gM_s(\overrightarrow{x})(s,t))^{-1}(gM_{ss}(\overrightarrow{x})(s,t))=$
$=M_s^{-1}(\overrightarrow{x})(s,t)g^{-1}gM'_{ss}(\overrightarrow{x})(s,t)=M_s^{-1}(\overrightarrow{x})(s,t)M'_{ss}(\overrightarrow{x})(s,t);$

b). $M_s^{-1}(\overrightarrow{y})(s,t)M'_{st}(\overrightarrow{y})(s,t)=(gM_s(\overrightarrow{x})(s,t))^{-1}(gM_s(\overrightarrow{x})(s,t))'_{st}=$
$=M_s^{-1}(\overrightarrow{x})(s,t)g^{-1}gM'_{st}(\overrightarrow{x})(s,t)=M_s^{-1}(\overrightarrow{x})(s,t)M'_{st}(\overrightarrow{x})(s,t);$

c). $M_s^{T}(\overrightarrow{y})(s,t)e_pM_s(\overrightarrow{y})(s,t)=(gM_s(\overrightarrow{x})(s,t))^{T}e_pgM_s(\overrightarrow{x})(s,t)=$
$=M_s^{T}(\overrightarrow{x})(s,t)g^Te_pgM_s(\overrightarrow{x})(s,t)=M_s^{T}(\overrightarrow{x})(s,t)e_pM_s(\overrightarrow{x})(s,t);$

d). $\det M_s(\overrightarrow{y})(s,t)=\det(gM_s(\overrightarrow{x})(s,t))=\det g\cdot\det M_s(\overrightarrow{x})(s,t)=\det M_s(\overrightarrow{x})(s,t).$

Обратно, пусть для поверхностей $\overrightarrow{x}(s,t)$ и $\overrightarrow{y}(s,t)$ выполняются соотношения $a),b),c),d)$. Заметим, что если $A(s,t)=A$ — обратимая матрица, то из равенства $A^{-1}A=AA^{-1}=e$ вытекает, что $A_sA^{-1}+A(A^{-1})_s=0$, откуда $(A^{-1})_s=-A^{-1}A_sA^{-1}$. Используя это равенство, соотношения $a),b)$ переписываются, соответственно, в виде:

$a')$. $(M_s(\overrightarrow{y})\cdot M_s(\overrightarrow{x})^{-1})_s=0;$

$b')$. $(M_s(\overrightarrow{y})\cdot M_s(\overrightarrow{x})^{-1})_t=0.$

Эти равенства означают, что

$$M_s(\overrightarrow{y}) \cdot M_s(\overrightarrow{x})^{-1} = g = (g_{ij})_{i,j=1}^n \in GL(n, C).$$

Следовательно, $M_s(\overrightarrow{y}(s,t)) = gM_s(\overrightarrow{x}(s,t))$, в частности, $\overrightarrow{y}(s,t) = g\overrightarrow{x}(s,t)$ для всех $s,t \in (0,1)$.

Далее, в силу равенства c) имеем, что

$$g^T e_p g = \left(M_s(\overrightarrow{y})M_s(\overrightarrow{x})^{-1}\right)^T e_p M_s(\overrightarrow{y})M_s(\overrightarrow{x})^{-1} = e_p,$$

т. е. $g^T e_p g = e_p$. Это означает, что $g \in O(n,p,C)$.

Используя теперь равенство d), получим, что

$$\det M_s(\overrightarrow{y}) = \det(gM_s(\overrightarrow{x})) = \det g \cdot \det M_s(\overrightarrow{x}),$$

что влечет равенство $\det g = 1$. Следовательно, $g \in SO(n,p,C)$. Теорема 2.1 доказана. □

3. Дифференциальные уравнения для $SO(n,p,C)$-эквивалентных поверхностей

Пусть $\overrightarrow{x}(s,t) = \{x_j(s,t)\}_{j=1}^n$ регулярная поверхность в C^n, и пусть $M_s(\overrightarrow{x}) = \left\{\frac{\partial^{i-1}x_j(s,t)}{\partial s^{i-1}}\right\}_{i,j=1}^n$, $s,t \in (0,1)$.

Для вычисления обратной матрицы $(M_s(\overrightarrow{x})(s,t))^{-1}$ через $M_{ij}(s,t)$ обозначим минор порядка $(n-1)$, получающийся после вычеркивания из определителя $\det M_s(\overrightarrow{x})(s,t)$ i-ой строки и j-го столбца.

Пусть $\tilde{A}_{ij}(s,t)$ — алгебраическое дополнение элемента $\dfrac{\partial^{j-1}x_i(s,t)}{\partial s^{j-1}}$ матрицы $M_s(\overrightarrow{x})(s,t)$, т. е.

$$\tilde{A}_{ij}(s,t) = (-1)^{i+j}M_{ji}(s,t).$$

Элементы $\alpha_{ij}(s,t)$ обратной матрицы $(M_s(\overrightarrow{x})(s,t))^{-1}$ имеют вид

$$\alpha_{ij}(s,t) = \frac{1}{\det M_s(\overrightarrow{x})(s,t)}\tilde{A}_{ij}(s,t), \quad i,j = \overline{1,n}.$$

Следовательно, элемент $a_{ij}(s,t)$ матрицы $(M_s(\overrightarrow{x})(s,t))^{-1}M'_{ss}(\overrightarrow{x})(s,t)$ вычисляется с помощью равенства

$$a_{ij}(s,t) = \frac{1}{\det M_s(\overrightarrow{x})(s,t)}\sum_{k=1}^n \tilde{A}_{ik}(s,t)\frac{\partial^j x_k(s,t)}{\partial s^j} = \frac{1}{\det M_s(\overrightarrow{x})(s,t)}\sum_{k=1}^n (-1)^{i+k}M_{ik}(s,t)\frac{\partial^j x_k(s,t)}{\partial s^j},$$

где

$$M_{ij}(s,t) = \begin{vmatrix} x_1(s,t) & \dots & \dfrac{\partial^{j-2}x_1(s,t)}{\partial s^{j-2}} & \dfrac{\partial^j x_1(s,t)}{\partial s^j} & \dots & \dfrac{\partial^{n-1}x_1(s,t)}{\partial s^{n-1}} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_{i-1}(s,t) & \dots & \dfrac{\partial^{j-2}x_{i-1}(s,t)}{\partial s^{j-2}} & \dfrac{\partial^j x_{i-1}(s,t)}{\partial s^j} & \dots & \dfrac{\partial^{n-1}x_{i-1}(s,t)}{\partial s^{n-1}} \\ x_{i+1}(s,t) & \dots & \dfrac{\partial^{j-2}x_{i+1}(s,t)}{\partial s^{j-2}} & \dfrac{\partial^j x_{i+1}(s,t)}{\partial s^j} & \dots & \dfrac{\partial^{n-1}x_{i+1}(s,t)}{\partial s^{n-1}} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_n(s,t) & \dots & \dfrac{\partial^{j-2}x_n(s,t)}{\partial s^{j-2}} & \dfrac{\partial^j x_n(s,t)}{\partial s^j} & \dots & \dfrac{\partial^{n-1}x_n(s,t)}{\partial s^{n-1}} \end{vmatrix}$$

и

$$\det M_s(\overrightarrow{x})(s,t) = \frac{\partial^{j-1}x_1(s,t)}{\partial s^{j-1}}\tilde{A}_{1j}(s,t) + \dots + \frac{\partial^{j-1}x_n(s,t)}{\partial s^{j-1}}\tilde{A}_{nj}(s,t).$$

Таким образом, произведение

$$(M_s(\overrightarrow{x}))^{-1}M'_{ss}(\overrightarrow{x}) = A(s,t) = (a_{ij}(s,t))_{i,j=1}^n$$

имеет следующий вид:

$$A(s,t)=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{1n}(s,t) \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{2n}(s,t) \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & a_{3n}(s,t) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & a_{nn}(s,t) \end{pmatrix},$$

где

$$a_{in}(s,t)=\frac{1}{\det M_s(\overrightarrow{x})(s,t)}\sum_{k=1}^{n}(-1)^{i+k}M_{ik}(s,t)\frac{\partial^n x_k(s,t)}{\partial s^n}$$

— комплекснозначные бесконечно дифференцируемые функции, $(s,t)\in(0,1)\times(0,1)$, $i=1,\dots,n$, вычисляемые по формулам

$$a_{in}=\frac{\left[\overrightarrow{x}\dots\overrightarrow{x}_s^{(i-1)}\overrightarrow{x}_s^{(i+1)}\dots\overrightarrow{x}_s^{(n-1)}\right]}{\det M_s(\overrightarrow{x})},\ i=2,\dots,n-1;$$

$$a_{1n}=\frac{\left[\overrightarrow{x}_s^{(n)}\overrightarrow{x}_s^{(1)}\dots\overrightarrow{x}_s^{(n-1)}\right]}{\det M_s(\overrightarrow{x})};$$

....

$$a_{nn}=\frac{\left[\overrightarrow{x}\,\overrightarrow{x}_s^{(1)}\dots\overrightarrow{x}_s^{(n-2)}\overrightarrow{x}_s^{(n)}\right]}{\det M_s(\overrightarrow{x})}$$

(запись $[\overrightarrow{x}\ \overrightarrow{y}\dots\overrightarrow{z}]$ означает детерминант матрицы, у которой столбцами являются векторы $\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y},\dots,\overrightarrow{z}$).

Из этих равенств вытекает, что числовая функция

$$\det M_s(\overrightarrow{x})=\left[\overrightarrow{x}\ \overrightarrow{x}^{(1)}\dots\overrightarrow{x}^{(n-1)}\right]=d(s,t)$$

удовлетворяет равенствам

$$a_{nn}d=a_{nn}\left[\overrightarrow{x}\ \overrightarrow{x}_s^{(1)}\dots\overrightarrow{x}_s^{(n-1)}\right]=\left[\overrightarrow{x}\ \overrightarrow{x}_s^{(1)}\dots\overrightarrow{x}_s^{(n-2)}\ \overrightarrow{x}_s^{(n)}\right]=d_s^{'},$$

т. е.

$$d_s^{'}(s,t)=a_{nn}(s,t)d(s,t)$$

для всех $s,t\in(0,1)$. Кроме того, для невырожденной матрицы $C=M_s^T(\overrightarrow{x})e_pM_s(\overrightarrow{x})$ следует, что

$$\begin{cases} det\ C=d^2,(n-p)-\text{четно},\\ det\ C=-d^2,(n-p)-\text{нечетно}.\end{cases}$$

Рассмотрим следующую систему матричных дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} X_s^{'}(s,t)=X(s,t)A(s,t),\\ X_t^{'}(s,t)=X(s,t)B(s,t).\end{cases}\tag{3.1}$$

где $X(s,t)=(x_{ij}(s,t))_{i,j=1}^n$ — неизвестная $n\times n$-матрица, $A(s,t)=(a_{ij}(s,t))_{i,j=1}^n$, $B(s,t)=(b_{ij}(s,t))_{i,j=1}^n$ — заданные фиксированные $n\times n$-матрицы, $s,t\in(0,1)$ (предполагается, что функции $a_{ij}(s,t)$ и $b_{ij}(s,t)$ являются C^∞-дифференцируемыми).

Решение $X(s,t)$ системы (3.1) называется *невырожденным*, если $\det X(s,t)\neq 0$ для всех $s,t\in(0,1)$. Два решения $X_0(s,t)$ и $X_1(s,t)$ называют $SO(n,p,C)$-*эквивалентными*, если $X_1(s,t)=gX_0(s,t)$ для некоторого $g\in SO(n,p,C)$.

Вместе с системой (3.1) рассмотрим также следующую систему равенств:

$$\begin{cases} X^T(s,t)e_pX(s,t)=C(s,t),\\ \det X(s,t)=d(s,t),\end{cases}$$

где
$$C(s,t) = (c_{ij}(s,t))_{i,j=1}^n = C^T(s,t),$$
а $c_{ij}(s,t)$, $d(s,t)$ — C^∞-дифференцируемые функции, $d(s,t) \neq 0$ при всех $s,t \in (0,1)$.

Теорема 3.1. *Пусть невырожденные матрицы $A(s,t)$, $B(s,t)$, $C(s,t)$ удовлетворяют следующим условиям*:

(i).
$$A(s,t) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{1n}(s,t) \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{2n}(s,t) \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & a_{3n}(s,t) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & a_{nn}(s,t) \end{pmatrix};$$

(ii). $A_t(s,t) + B(s,t)A(s,t) = B_s(s,t) + A(s,t)B(s,t)$,
где $A_t(s,t) = \Big(\dfrac{\partial\, a_{ij}(s,t)}{\partial t}\Big)_{i,j=1}^n$, $B_s(s,t) = \Big(\dfrac{\partial\, b_{ij}(s,t)}{\partial s}\Big)_{i,j=1}^n$;

(iii). $C_s(s,t) = A^T(s,t)C(s,t) + C(s,t)A(s,t)$, *где* $C_s(s,t) = \Big(\dfrac{\partial\, c_{ij}(s,t)}{\partial s}\Big)_{i,j=1}^n$;

(iv). $C_t(s,t) = B^T(s,t)C(s,t) + C(s,t)B(s,t)$, *где* $C_t(s,t) = \Big(\dfrac{\partial\, c_{ij}(s,t)}{\partial t}\Big)_{i,j=1}^n$,

и пусть C^∞-дифференцируемая функция $d(s,t)$ удовлетворяет равенствам

(v). $d_s'(s,t) = a_{nn}d$;
(vi). $d_t'(s,t) = (b_{11} + b_{22} + \ldots + b_{nn})d$;
(vii). $d^2(s,t) = \det C(s,t)$.

Тогда система уравнений
$$\begin{cases} X_s' = XA, \\ X_t' = XB, \\ X^T e_p X = C, \\ \det X = d \end{cases} \tag{3.2}$$
имеет невырожденное решение. При этом решение системы (3.2) *единственно с точностью до $SO(n,p,C)$-эквивалентности.*

Доказательство. В силу условия $A_t - B_s = AB - BA$ (см. условие (ii)) система (3.1) имеет невырожденное решение $X_0(s,t)$ (см., например, [2, § 7]). Покажем, что всякое другое решение $X_1 = X_1(s,t)$ системы (3.1) имеет вид $X_1 = gX_0$, где $g \in GL(n,R)$. Действительно, используя (3.1), имеем
$$(X_1(s,t)X_0^{-1}(s,t))_s = (X_1(s,t))_s X_0^{-1}(s,t) + X_1(s,t)(X_0^{-1}(s,t))_s = (X_1(s,t))_s X_0^{-1}(s,t) +$$
$$+ X_1(s,t)(-X_0^{-1}(s,t)X_{0\,s}(s,t)X_0^{-1}(s,t)) = (X_{1\,s}(s,t) - X_1(s,t)X_0^{-1}(s,t)X_{0\,s}(s,t))X_0^{-1}(s,t) =$$
$$= (X_1(s,t)A(s,t) - X_1(s,t)A(s,t))X_0^{-1}(s,t) = 0.$$
Аналогичным образом получаем
$$(X_1(s,t)X_0^{-1}(s,t))_t = (X_1(s,t))_t X_0^{-1}(s,t) + X_1(s,t)(X_0^{-1}(s,t))_t = (X_1(s,t))_t X_0^{-1}(s,t) +$$
$$+ X_1(s,t)(-X_0^{-1}(s,t)X_{0\,t}(s,t)X_0^{-1}(s,t)) = (X_{1\,t}(s,t) - X_1(s,t)X_0^{-1}(s,t)X_{0\,t}(s,t))X_0^{-1}(s,t) =$$
$$= (X_1(s,t)B(s,t) - X_1(s,t)B(s,t))X_0^{-1}(s,t) = 0.$$
Поэтому $X_1X_0^{-1} = g \in GL(n,C)$, т. е. $X_1 = gX$. Таким образом, все матрицы
$$\{gX = gX_0(s,t) : g \in GL(n,C)\} \tag{3.3}$$
также является решениями системы (3.2).

Если $X = (x_{jk}(s,t))_{j,k=1}^n$ — решение системы (3.1), $X_s = (x_{jk}^{(1)}(s,t))_{j,k=1}^n$, то учитывая вид матрицы A (см. условие (i)) и записав первое уравнение системы (3.1) в виде $X_s = XA$, получим

$$\begin{cases} \dfrac{\partial\, x_{j1}(s,t)}{\partial\, s} = x_{j2}(s,t), \ j = 1,\ldots,n, \\ \ldots \\ \dfrac{\partial\, x_{j\,n-1}(s,t)}{\partial\, s} = x_{j\,n}(s,t), \ j = 1,\ldots,n, \\ \dfrac{\partial\, x_{j\,n}(s,t)}{\partial\, s} = \sum\limits_{k=1}^{n} a_{k\,n} x_{j\,k}(s,t), \ j = 1,\ldots,n. \end{cases} \tag{3.4}$$

Это означает, что решение $X = (x_{jk}(s,t))_{j,k=1}^n$ системы (3.1) имеет вид $X = M_s(\overrightarrow{x})$, где $\overrightarrow{x} = (x_{11}(s,t),\ldots,x_{n1}(s,t))$.

Пусть теперь $X(s,t)$ невырожденное решения системы (3.1), и пусть

$$W = {(X^T)}^{-1} C X^{-1}.$$

Ясно, что матрица W является невырожденной и симметрической. Поскольку $X(t)$ является решением системы (3.1), то из условия (iii) следует, что

$$\begin{gathered} W_s' = ({(X^T(s,t))}^{-1} C(s,t) X^{-1}(s,t))_s' = ({(X^T)}^{-1}(s,t))_s' C(s,t) X^{-1}(s,t) + \\ + {(X^T(s,t))}^{-1} (C(s,t)X^{-1}(s,t))_s' = -{(X^{-1}(s,t) X_s'(s,t) X^{-1}(s,t))}^T C(s,t) X^{-1}(s,t) + \\ + {(X^T(s,t))}^{-1} (C_s'(s,t) X^{-1}(s,t) - C(s,t) X^{-1}(s,t) X_s'(s,t) X^{-1}(s,t)) = \\ = {(X^{-1}(s,t))}^T [-(X_s(s,t))^T {(X^{-1}(s,t))}^T C(s,t) + C_s'(s,t) - \\ - C(s,t) X^{-1}(s,t) X_s'(s,t)] X^{-1}(s,t) = {(X^{-1}(s,t))}^T (-A^T(s,t) C(s,t) + C_s'(s,t) - \\ - C(s,t) A(s,t)) X^{-1}(s,t) = 0. \end{gathered}$$

Аналогичным образом устанавливается, что

$$\begin{gathered} W_t' = ({(X^T(s,t))}^{-1} C(s,t) X^{-1}(s,t))_t' = ({(X^T)}^{-1}(s,t))_t' C(s,t) X^{-1}(s,t) + \\ + {(X^T(s,t))}^{-1} (C(s,t)X^{-1}(s,t))_t' = -{(X^{-1}(s,t) X_t'(s,t) X^{-1}(s,t))}^T C(s,t) X^{-1}(s,t) + \\ + {(X^T(s,t))}^{-1} (C_t'(s,t) X^{-1}(s,t) - C(s,t) X^{-1}(s,t) X_t'(s,t) X^{-1}(s,t)) = \\ = {(X^{-1}(s,t))}^T [-(X_t(s,t))^T {(X^{-1}(s,t))}^T C(s,t) + C_t'(s,t) - \\ - C(s,t) X^{-1}(s,t) X_t'(s,t)] X^{-1}(s,t) = {(X^{-1}(s,t))}^T (-B^T(s,t) C(s,t) + C_t'(s,t) - \\ - C(s,t) B(s,t)) X^{-1}(s,t) = 0. \end{gathered}$$

Следовательно,

$${(X^T)}^{-1} C X^{-1} = (h_{ij})_{i,j=1}^n = h \in GL(n,C),$$

в частности,

$$X^T h X = C. \tag{3.5}$$

Из разложения Такаги для невырожденной симметричной матрицы h (см., например, [7, гл. 4, § 4.4]) имеем, что $h = U^T D U$, где U — унитарная матрица, $D = diag(\lambda_1,\ldots,\lambda_n)$ — диагональная матрица с элементами $\lambda_j > 0$, $j = 1,\ldots,n$.

Взяв

$$D_p = diag(\sqrt{\lambda_1},\ldots,\sqrt{\lambda_p}, i\sqrt{\lambda_{p+1}},\ldots, i\sqrt{\lambda_n}),$$

где $i^2 = -1$, и положив $g = D_p U \in GL(n,C)$, получим, что $D = D_p^T e_p D_p$ и

$$h = U^T D_p^T e_p D_p U = g^T e_p g.$$

Таким образом, для $Y = gX$ с учетом (3.4) имеем, что

$$Y^T e_p Y = X^T g^T e_p g X = X^T h X = C.$$

Отсюда и из (3.3) следует, что Y является невырожденным решением системы

$$\begin{cases} X_s' = XA, \\ X_t' = XB, \\ X^T e_p X = C. \end{cases} \tag{3.6}$$

Если $X(s,t)$ — невырожденное решение системы (3.4), $g \in O(n,p,C)$ и $Y(s,t) = gX(s,t)$, то

$$Y_s'(s,t) = gX_s'(s,t) = gX(s,t)A(s,t) = Y(s,t)A(s,t)$$

и

$$Y_t'(s,t) = gX_t'(s,t) = gX(s,t)B(s,t) = Y(s,t)B(s,t),$$

при этом

$$Y^T(s,t)e_pY(s,t) = X^T(s,t)g^Te_pgX(s,t) = X^T(s,t)e_pX(s,t) = C(s,t).$$

Это означает, что $Y(s,t)$ также является невырожденным решением системы (3.6). Таким образом, для системы (3.5) существует единственное с точностью до $O(n,p,C)$-эквивалентности невырожденное решение $X(s,t) = (x_{ij}(s,t))_{i,j=1}^n$.

Легко убедиться, что для системы уравнений (3.2) выполнены следующие соотношения:

$$\begin{cases} a_{nn} = \dfrac{d_s'}{d} = \dfrac{[\vec{x}\,\vec{x}_s^{(1)}\dots\vec{x}_s^{(n-1)}]_s}{[\vec{x}\,\vec{x}_s^{(1)}\dots\vec{x}_s^{(n-1)}]}, \\ b_{11}+b_{22}+\ldots+b_{nn} = \dfrac{d_t'}{d} = \dfrac{[\vec{x}\,\vec{x}_s^{(1)}\dots\vec{x}_s^{(n-1)}]_t}{[\vec{x}\,\vec{x}_s^{(1)}\dots\vec{x}_s^{(n-1)}]}. \end{cases}$$

Обозначая $u(s,t) = \det X(s,t)$, получим, что

$$\frac{d_s(s,t)u(s,t) - d(s,t)u_s(s,t)}{u^2(s,t)} \cdot \frac{u(s,t)}{d(s,t)} = 0$$

и аналогично

$$\frac{d_t(s,t)u(s,t) - d(s,t)u_t(s,t)}{u^2(s,t)} \cdot \frac{u(s,t)}{d(s,t)} = 0.$$

Следовательно,

$$\frac{d}{u} = const = \lambda,$$

или $d = \lambda \det X(s,t)$ для некоторой константы $\lambda \neq 0$.

Так как $X^T(s,t)e_pX(s,t) = C(s,t)$ и $X^T(s,t)JX(s,t) = C(s,t)$, то

$$\begin{cases} \det C(s,t) = u^2(s,t) & \text{при четном } (n-p), \\ \det C(s,t) = -u^2(s,t) & \text{при нечетном } (n-p). \end{cases}$$

Следовательно,

$$u^2(s,t) = d^2(s,t) = \lambda^2u^2(s,t),$$

что влечет равенство $\lambda = \pm 1$. Поскольку для любого $g \in O(n,p,C)$ верно равенство $g^Te_pg = e_p$, то $\det g = \pm 1$. Поэтому всегда найдется такое $g \in O(n,p,C)$, что $\det g = \lambda$.

Следовательно, для $Y(s,t) = gX(s,t)$ имеем, что

$$\det Y(s,t) = \det g \cdot \det X(s,t) = \lambda \cdot \frac{d(s,t)}{\lambda} = d(s,t),$$

т. е. $Y(s,t)$ является невырожденным решением системы (3.2).

Пусть $X(s,t)$ — одно из этих решений, тогда $Y(s,t) = gX(s,t)$ будет общим решением этой системы тогда и только тогда, когда $g \in SO(n,p,C)$.

Действительно, если X и Y — два невырожденных решения системы (3.2), то как показано выше, $Y = gX$ для некоторого $g \in SO(n,p,C)$.

Обратно, если $g \in SO(n,p,C)$ и $X(s,t)$ — фиксированное решение системы (3.2), то для $Y(s,t) = gX(s,t)$ имеем, что

$$\det Y(s,t) = \det g \cdot \det X(s,t) = \det X(s,t) = \det(s,t),$$

т. е. $Y(s,t)$ — также решение системы (3.1). Теорема 3.1 доказана. □

Следствие 3.1. *Пусть* $X_0(s,t)$ — *невырожденное решение системы* (3.2). *Тогда совокупность всех невырожденных решений системы* (3.2) *совпадает с множеством* $\{gX_0(s,t) : g \in SO(n,p,C)\}$.

Для каждой элементарной поверхности $\overrightarrow{x}(s,t) = (x_j(s,t))_{j=1}^n$ рассмотрим $n \times n$-матрицу

$$M_s(\overrightarrow{x}) = \left\{\frac{\partial^{i-1} x_j(s,t)}{\partial s^{i-1}}\right\}_{i,j=1}^n,$$

где $\dfrac{\partial^0 x_j(s,t)}{\partial s^0} = x_j(s,t)$ для всех $j = 1, \ldots, n$, и положим

$$M'_{ss}(\overrightarrow{x}) = \left(\frac{\partial^i x_j(s,t)}{\partial s^i}\right)_{i,j=1}^n, \quad M'_{s\,t}(\overrightarrow{x}) = \left(\frac{\partial^i x_j(s,t)}{\partial s^{i-1}\partial t}\right)_{i,j=1}^n.$$

Элементарная поверхность $\overrightarrow{x}(s,t)$ называется *регулярной*, если $\det M_s(\overrightarrow{x}(s,t)) \neq 0$ при всех $s,t \in (0,1)$.

Теорема 3.2. *Пусть выполнены условия теоремы* 3.1. *Тогда*:

(i). *для любого невырожденного решения* $X(s,t) = (x_{ij}(s,t))_{i,j=1}^n$ *системы уравнений* (3.2) *существует регулярная поверхность* $\overrightarrow{x}(s,t) = (x_j(s,t))_{j=1}^n$, $s,t \in (0,1)$, *для которой* $M_s(\overrightarrow{x}(s,t)) = X(s,t)$ *при всех* $s,t \in (0,1)$;

(ii). *существует единственная с точностью до* $SO(n,p,C)$*-эквивалентности регулярная поверхность* $\overrightarrow{x}(s,t)$, *для которой матрица* $M_s(\overrightarrow{x}(s,t))$ *является решением системы* (3.2).

Доказательство.

(i). Если $X(s,t) = (x_{ij}(s,t))_{i,j=1}^n$ — невырожденное решение системы (3.2), то в силу равенств (3.4) имеем, что

$$\frac{\partial x_{ji}}{\partial s}(s,t) = x_{j(i+1)}(s,t),$$

т. е.

$$x_{ij}(s,t) = \frac{\partial x_{j1}}{\partial s^{i-1}}(s,t)$$

для всех $j = 1, \ldots, n$, $i = 1, \ldots, n$. Следовательно, для регулярной поверхности $\overrightarrow{x}(s,t) = (x_{j1}(s,t))_{j=1}^n$ верно равенство $M_s(\overrightarrow{x}(s,t)) = X(s,t)$ для всех $s,t \in (0,1)$.

(ii). Пусть $\overrightarrow{x}(s,t)$ и $\overrightarrow{y}(s,t)$ — две регулярные поверхности, для которых матрицы $M_s(\overrightarrow{x}(s,t))$ и $M_s(\overrightarrow{y}(s,t))$ является решениями системы (3.2). Согласно теореме 3.2, существует такое $g \in SO(n,p,C)$, что $M_s(\overrightarrow{y}(s,t)) = gM_s(\overrightarrow{x}(s,t))$, в частности, $\overrightarrow{y}(s,t) = g\overrightarrow{x}(s,t)$ для всех $s,t \in (0,1)$. Это означает, что поверхности $\overrightarrow{x}(s,t)$ и $\overrightarrow{y}(s,t)$ являются $SO(,p,C)$-эквивалентными. □

Замечание 3.1. Варианты теорем 3.1 и 3.2 для C^∞-дифференцируемых путей были получены раннее в монографии [6, гл. 4, § 4.3].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Бекбаев У. Д., Муминов К. К.* Об эквивалентности и инвариантах элементарных поверхностей относительно симплектической группы// Узб. мат. ж. — 1997. — № 4. — С. 26–30.
2. *Винберг Э. Б.* Компактные группы Ли. — М.: МГУ, 1967.
3. *Винберг Э. Б., Попов В. Л.* Теория инвариантов// Итоги науки и техн. Соврем. пробл. мат. Фундам. направл. — 1989. — *55*. — С. 137–309.
4. *Муминов К. К.* Эквивалентность поверхностей в комплексных векторных пространствах относительно Sp(2,C) групп// Узб. мат. ж. — 1997. — № 2. — С. 53–57.
5. *Муминов К. К.* Эквивалентность путей и поверхностей для действия псевдоортогональной группы// Узб. мат. ж. — 2005. — № 2. — С. 35–43.
6. *Муминов К. К., Чилин В. И.* Эквивалентность кривых в конечномерных пространствах. — Lambert Academic Publishing, 2015.
7. *Хорн Р., Джонсон Ч.* Матричный анализ. — М.: Мир, 1989.
8. *Muminov K. K.* Equivalence of multidimensional surfaces with to the acting of classical groups// Uzbek. Math. J. — 2010. — № 1. — С. 99–107.
9. *Muminov K. K., Bekboev U. D.* On differential rational invariants of classical movements groups of vector spaces// Methods Funct. Anal. Topology. — 2004. — *10*, № 3. — С. 7–10.

К. К. Муминов
Национальный университет Узбекистана им. М. Улугбека, Ташкент, Узбекистан
E-mail: m.muminov@rambler.ru

Р. А. Гаффоров
Ферганский государственный университет, Фергана, Узбекистан
E-mail: gafforov.rahmatjon@mail.ru

DOI: 10.22363/2413-3639-2022-68-1-70-79 UDC 512.74+517.926

Systems of Matrix Differential Equations for Surfaces

 K. K. Muminov, R. A. Gafforov

Abstract. Necessary and sufficient conditions for the equivalence of surfaces under the action of a special pseudo-orthogonal group are established.

REFERENCES

1. U. D. Bekbaev and K. K. Muminov, “Ob ekvivalentnosti i invariantakh elementarnykh poverkhnostey otnositel’no simplekticheskoy gruppy” [On the equivalence and invariants of elementary surfaces with respect to the symplectic group], *Uzb. mat. zh.* [Uzbek. Math. J.], 1997, No. 4, 26–30 (in Russian).
2. E. B. Vinberg, *Kompaktnye gruppy Li* [Compact Lie Groups], MGU, Moscow, 1967 (in Russian).
3. E. B. Vinberg and V. L. Popov, “Teoriya invariantov” [Invariant theory], *Itogi nauki i tekhn. Sovrem. probl. mat. Fundam. napravl.* [Totals Sci. Tech. Contemp. Probl. Math. Fundam. Directions], 1989, **55**, 137–309 (in Russian).
4. K. K. Muminov, “Ekvivalentnost’ poverkhnostey v kompleksnykh vektornykh prostranstvakh otnositel’no Sp(2,C) grupp” [Equivalence of surfaces in complex vector spaces with respect to Sp(2,C) groups], *Uzb. mat. zh.* [Uzbek. Math. J.], 1997, No. 2, 53–57 (in Russian).
5. K. K. Muminov, “Ekvivalentnost’ putey i poverkhnostey dlya deystviya psevdoortogonal’noy gruppy” [Equivalence of paths and surfaces for the action of a pseudo-orthogonal group], *Uzb. mat. zh.* [Uzbek. Math. J.], 2005, No. 2, 35–43 (in Russian).
6. K. K. Muminov and V. I. Chilin, *Ekvivalentnost’ krivykh v konechnomernykh prostranstvakh* [Equivalence of Curves in Finite-Dimensional Spaces], Lambert Academic Publishing, 2015 (in Russian).
7. R. Horn and Ch. Johnson, *Matrichnyy analiz* [Matrix Analysis], Mir, Moscow, 1989 (Russian translation).
8. K. K. Muminov, “Equivalence of multidimensional surfaces with to the acting of classical groups,” *Uzbek. Math. J.*, 2010, No. 1, 99–107.
9. K. K. Muminov and U. D. Bekboev, “On differential rational invariants of classical movements groups of vector spaces,” *Methods Funct. Anal. Topology*, 2004, **10**, No. 3, 7–10.

K. K. Muminov
National University of Uzbekistan, Tashkent, Uzbekistan
E-mail: m.muminov@rambler.ru

R. A. Gafforov
Fergana State University, Fergana, Uzbekistan
E-mail: gafforov.rahmatjon@mail.ru