Современная математика. Фундаментальные направления. Том 68, № 1 (2022). С. 59–69
Contemporary Mathematics. Fundamental Directions. ISSN 2413-3639 (Print)

DOI: 10.22363/2413-3639-2022-68-1-59-69 УДК 512.554

ЛОКАЛЬНЫЕ И 2-ЛОКАЛЬНЫЕ ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЯ ЛОКАЛЬНО ПРОСТЫХ АЛГЕБР ЛИ

© 2022 г. **Ш. А. АЮПОВ, К. К. КУДАЙБЕРГЕНОВ, Б. Б. ЮСУПОВ**

Аннотация. В статье изучаются локальные и 2-локальные дифференцирования классических локально простых алгебр Ли. Доказано, что каждое локальное и 2-локальное дифференцирование классической локально простой алгебры Ли является дифференцированием. Далее показано, что каждое локальное дифференцирование борелевской подалгебры локально простой алгебры Ли является дифференцированием.

ОГЛАВЛЕНИЕ

1. Введение

Пусть $\mathcal{L}$ — алгебра. Линейный оператора $D : \mathcal{L} \to \mathcal{L}$ называется *дифференцированием*, если $D(xy) = D(x)y + xD(y)$ для всех $x, y \in \mathcal{L}$ (тождество Лейбница). Каждому элементу $a \in \mathcal{L}$ соответствует дифференцирование R_a, которое называется *внутренним дифференцированием*.

Понятие локального дифференцирования впервые было введено в 1990 г. Р. В. Кадисоном [16], а также Д. Р. Ларсоном и А. Р. Сурором [17]. Линейный оператор Δ над алгеброй $\mathcal{L}$ называется *локальным дифференцированием*, если для любого $x \in \mathcal{L}$ существует дифференцирование D_x (зависящее от x) такое, что $\Delta(x) = D_x(x)$. Основная задача состоит в том, чтобы получить условия, при которых локальные дифференцирования становятся дифференцированиями и привести примеры алгебр с локальными дифференцированиями, которые не являются дифференцированиями. Р. В. Кадисоном доказано, что каждое непрерывное локальное дифференцирование алгебры фон Неймана M в двойственный банахов M-бимодуль является дифференцированием. В 2001 г. Б. Е. Джонсоном завершено исследование локальных дифференцирований и показано, что каждое локальное дифференцирование, отображающее C^*-алгебру A в банахов A-бимодуль, является дифференцированием [15].

Исследование локальных дифференцирований алгебр измеримых операторов началось работах в [1,6] и др. Затем в [5,12] схожие концепции были рассмотрены для алгебр Ли. В [5] Ш. А. Аюпов и К. К. Кудайбергенов доказали, что каждое локальное дифференцирование полупростой алгебры Ли является дифференцированием и привели примеры нильпотентных конечномерных алгебр Ли с локальными дифференцированиями, которые не являются дифференцированиями. В [2] исследованы локальные дифференцирования разрешимых алгебр Ли и было показано, что каждое локальное дифференцирование разрешимой алгебры Ли идеальным нильрадикалом является дифференцированием.

В [3] Ш. А. Аюпов, А. Х. Худайбердиев и В. В. Юсупов доказали, что все локальные и 2-локальные дифференцирования разрешимых алгебр Лейбница с идеальными или абелевыми нильрадикалами, чья размерность дополняющего пространства максимальна, являются дифференцированием. Также они показали, что разрешимая алгебра Лейбница с абелевыми нильрадикалами, которые имеют размерность дополняющего пространства 1, содержит локальные дифференцирования, которые не являются дифференцированиями.

В 1997 г. П. Шемрл [20] ввел понятие 2-локальных дифференцирований и 2-локальных автоморфизмов на алгебрах. А именно, отображение $\nabla : \mathcal{L} \to \mathcal{L}$ (не обязательно линейное) на алгебре $\mathcal{L}$ называется *2-локальным дифференцированием*, если для всех пар элементов $x, y \in \mathcal{L}$ существует дифференцирование $D_{x,y} : \mathcal{L} \to \mathcal{L}$ такое, что $D_{x,y}(x) = \nabla(x)$ и $D_{x,y}(y) = \nabla(y)$. Понятие 2-локального автоморфизма определяется схожим образом. Для данной алгебры $\mathcal{L}$ основная задача, связанная с этими понятиями, состоит в том, чтобы доказать, что они автоматически являются дифференцированиями (соответственно, автоморфизмами) или привести примеры локальных и 2-локальных дифференцирований или автоморфизмов на $\mathcal{L}$, которые не являются дифференцированиями или автоморфизмами, соответственно. Решение этой задачи для конечномерных алгебр Ли над алгебраически замкнутым полем нулевой характеристики было получено в [4, 8, 12]. А именно, в [8] доказано, что каждое 2-локальное дифференцирование на полупростой алгебре Ли $\mathcal{L}$ является дифференцированием и что каждая конечномерная нильпотентная алгебра Ли с размерностью большей, чем 2, содержит 2-локальные дифференцирования, которые не являются дифференцированием. Аналогичные результаты касательно 2-локальных дифференцирований и автоморфизмов на простых алгебрах Лейбница были получены в [7]. Для 2-локальных автоморфизмов З. Чен и В. Ванг в [12] доказали, что если $\mathcal{L}$ — простая алгебра Ли типа A_l, D_l или E_k $(k = 6, 7, 8)$ над алгебраически замкнутым полем нулевой характеристики, то каждый 2-локальный автоморфизм $\mathcal{L}$ является автоморфизмом. Наконец, в [4] Ш. А. Аюпов и К. К. Кудайбергенов обобщили результат, полученный в [12], и доказали, что каждый 2-локальный автоморфизм конечномерной полупростой алгебры Ли над алгебраически замкнутым полем нулевой характеристики является автоморфизмом. Более того, они показали, что каждая нильпотентная алгебра Ли конечной размерности большей, чем 2, содержит 2-локальные автоморфизмы, которые не являются автоморфизмами.

В [10, 11, 22] были изучены 2-локальные дифференцирования бесконечномерных алгебр Ли над полем нулевой характеристики и доказано, что все 2-локальные дифференцирования алгебры Витта являются (глобальными) дифференцированиями и что каждое 2-локальное дифференцирование на алгебре Вирасоро является дифференцированием. В [9] авторы доказали, что каждое 2-локальное дифференцирование обобщенной алгебры Витта $W_n(\mathbb{F})$ над векторным пространством $\mathbb{F}^n$ является дифференцированием, где $\mathbb{F}$ — поле нулевой характеристики. Ниже мы рассмотрим обобщенные алгебры Витта вида $W = W(G, I)$ над полем $\mathbb{F}$, где I — бесконечное множество индексов, а $G = \bigoplus\limits_{i \in I} \mathbb{Z} = \{(\mathbf{a}_i)_{i \in I} : \mathbf{a}_i = 0 \text{ кроме конечного числа } i \in I\}$, и докажем, что все 2-локальные дифференцирования $W(G, I)$ также являются дифференцированиями. Наконец, в [9] показано, что все 2-локальные дифференцирования $B(\mathbb{Z}^n, I)$, борелевской подалгебры $W_n(\mathbb{F})$, являются дифференцированиями. В [13] Й. Чен, К. Жао и Й. Жао изучили локальные дифференцирования на обобщенных алгебрах Витта. Они доказали, что каждое локальное дифференцирование на алгебрах Витта является дифференцированием и что каждое локальное дифференцирование на нецентрированной обобщенной алгебре Вирасоро высшего ранга является дифференцированием.

В настоящей работе изучаются локальные и 2-локальные дифференцирования классических локально простых алгебр Ли и их борелевские подалгебры.

В разделе 2 доказывается, что каждое локальное дифференцирование классической локально простой алгебры Ли является дифференцированием. В разделе 3 доказывается, что всякое 2-локальное дифференцирование такой алгебры Ли является дифференцированием. В разделе 4 доказывается аналогичный результат для борелевских подалгебр описанных выше алгебр Ли.

2. Предварительные замечания

В этом разделе дадим необходимые определения и некоторые предварительные результаты.

Определение 2.1. *Алгебра Ли* $\mathcal{L}$ над полем $\mathbb{K}$ — это векторное пространство на $\mathbb{K}$ с билинейным отображением $\mathcal{L} \times \mathcal{L} \to \mathcal{L}$, обозначаемым $(x, y) \mapsto [x, y]$ и называемым *скобкой* $\mathcal{L}$, которое удовлетворяет следующему свойству:

$$[x, x] = 0, \quad \forall x \in \mathcal{L},$$
$$[[x, y], z] + [[y, z], x] + [[z, x], y] = 0, \forall x, y, z \in \mathcal{L}.$$

Алгебра Ли $\mathcal{L}$ называется *разрешимой*, если $\mathcal{L}^{(k)} = \{0\}$ для некоторого целого k, где $\mathcal{L}^{(0)} = \mathcal{L}$, $\mathcal{L}^{(k)} = [\mathcal{L}^{(k-1)}, \mathcal{L}^{(k-1)}]$, $k \geqslant 1$. Всякая алгебра Ли $\mathcal{L}$ содержит единственный максимальный разрешимый идеал, который называется *радикалом* $\mathcal{L}$ и обозначается через $\mathrm{Rad}\mathcal{L}$. Нетривиальная алгебра Ли $\mathcal{L}$ называется *полупростой*, если $\mathrm{Rad}\mathcal{L} = 0$. Это эквивалентно требованию того, что $\mathcal{L}$ не имеет ненулевых абелевых идеалов. В алгебре $\mathcal{L}$ *простой* алгеброй Ли называется неабелева алгебра Ли, которая не содержит ненулевых правильных идеалов.

Известна следующая теорема для локальных и 2-локальных дифференцирований на полупростых алгебрах Ли.

Теорема 2.1 (см. [5]). *Пусть $\mathcal{L}$ — конечномерная полупростая алгебра Ли. Тогда любое локальное дифференцирование Δ на $\mathcal{L}$ является дифференцированием.*

Теорема 2.2 (см. [8]). *Пусть $\mathcal{L}$ — конечномерная полупростая алгебра Ли. Тогда всякое 2-локальное дифференцирование Δ на $\mathcal{L}$ является дифференцированием.*

Пусть $\mathbb{F}$ — алгебраически замкнутое поле нулевой характеристики, и предположим, что $\mathcal{L}$ — конечномерная простая алгебра Ли над $\mathbb{F}$ ранга l, $\mathcal{H}$ — фиксированная подалгебра Картана алгебры $\mathcal{L}$, $R \subseteq \mathcal{H}^*$ — соответствующая корневая система алгебры $\mathcal{L}$, $\Pi = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_l\}$ — фиксированная база R, R^+ — множество соответствующих положительных корней относительно Π. Корни в Π называются *простыми*.

Положим
$$\mathbb{B} = \mathcal{H} \bigoplus \left(\oplus_{\alpha \in R^+} \mathcal{L}_\alpha\right).$$
Тогда $\mathbb{B}$ называется *стандартной борелевской подалгеброй* $\mathcal{L}$.

Известны следующие теоремы для локальных дифференцирований стандартных борелевских подалгебр.

Теорема 2.3 (см. [21]). *Пусть $\mathbb{F}$ — алгебраически замкнутое поле нулевой характеристики, $\mathcal{L}$ — конечномерная простая алгебра Ли над $\mathbb{F}$, $\mathbb{B}$ — стандартная борелевская подалгебра $\mathcal{L}$. Тогда любое локальное дифференцирование Δ на $\mathbb{B}$ является дифференцированием.*

Если $\mathcal{A}$ — аддитивная группа в $\mathbb{Z}^n$ и $n > 0$, то групповая алгебра $\mathbb{F}\mathcal{A}$ изоморфна полиномиальной алгебре Лорена $\mathbb{F}[t_1^{\pm 1}, \ldots, t_n^{\pm 1}]$ над $\mathbb{F}$. Для набора из n элементов $J = (j_1, \ldots, j_n) \in \mathbb{Z}^n$ запишем $t^J = t_1^{j_1} \cdots t_n^{j_n}$. Пусть T — линейная оболочка $T = \bigoplus_{i=1}^{n} \mathbb{F}\partial_i$ операторов $\partial_i = t^i \dfrac{\partial}{\partial t_i}$. Если отображение $(\partial, J) \to \partial(J) : T \otimes \mathcal{A} \to \mathbb{F}$ удовлетворяет $\partial_i(J) = j_i$, то соответствующая обобщенная алгебра Витта $W = W_n(\mathbb{F})$ может быть определена алгеброй Ли $\mathrm{Der}_{\mathbb{F}}\left(\mathbb{F}[t_1^{\pm 1}, \ldots, t_n^{\pm 1}]\right)$ дифференцирования полиномиальной алгебры Лорена $\mathbb{F}[t_1^{\pm 1}, \ldots, t_n^{\pm 1}]$ над $\mathbb{F}$, состоящей из полиномиальных векторных полей Лорена

$$w(J; i) = w(j_1, \ldots, j_n; i) = t_1^{j_1} \cdots t_n^{j_n} \frac{\partial}{\partial t_i},$$

где $(t_1, \ldots, t_n) \in \mathbb{F}^n$ — канонические координаты в $\mathbb{F}^n$. Алгебра Ли, которая изоморфна алгебре Ли $W^n(\mathbb{F})$ полиномиальных векторных полей Лорена, называется *алгеброй Витта* над векторным пространством $\mathbb{F}^n$. Алгебра Ли $W_n(\mathbb{F})$ имеет базис $\{w(\mathbf{a}, i) : \mathbf{a} \in \mathbb{Z}^n,\ i \in I\}$ такой, что выполняется правило умножения:

$$[w(\mathbf{a}, i), w(\mathbf{b}, j)] = \mathbf{a}_j w(\mathbf{a} + \mathbf{b}, i) - \mathbf{b}_i w(\mathbf{a} + \mathbf{b}, j), \tag{2.1}$$

где $i, j \in I$ и $\mathbf{a} = (\mathbf{a}_i)$, $\mathbf{b} = (\mathbf{b}_i) \in \mathbb{Z}^n$.

Известны следующие теоремы для локальных и 2-локальных дифференцирований бесконечномерных алгебр Ли.

Теорема 2.4 (см. [9]). *Всякое 2-локальное дифференцирование Δ на $W_n(\mathbb{F})$ является дифференцированием.*

Теорема 2.5 (см. [13]). *Всякое локальное дифференцирование Δ на $W_n(\mathbb{F})$ является дифференцированием.*

Пусть $\mathbb{Z}_+$ — множество положительных целых чисел. Полагая

$$B(\mathbb{Z}^n, I) = \operatorname{span}\left\{w(\mathbf{a}, i) : \mathbf{a} \in \mathbb{Z}^n_+\right\},$$

мы получаем т. н. *стандартную борелевскую подалгебру* $W_n(\mathbb{F})$.

Теорема 2.6 (см. [9]). *Пусть $B(\mathbb{Z}^n, I)$ — борелевская подалгебра обобщенной алгебры Витта $W_n(\mathbb{F})$ над полем нулевой характеристики. Тогда любое 2-локальное дифференцирование на $B(\mathbb{Z}^n, I)$ является дифференцированием.*

Для данного векторного пространства V пусть $\mathfrak{gl}(V)$ обозначает алгебру Ли всех линейных эндоморфизмов над V. Представление алгебры Ли $\mathcal{L}$ над V является гомоморфизмом алгебры Ли $\rho : \mathcal{L} \to \mathfrak{gl}(V)$. Например, $\mathrm{ad} : \mathcal{L} \to \mathfrak{gl}(\mathcal{L})$, заданное в виде $\mathrm{ad}(x)(y) = [x, y]$ является представлением $\mathcal{L}$ на векторном пространстве $\mathcal{L}$, которое называется *сопряженным представлением*. Если V — конечномерное векторное пространство, тогда представление ρ называется *конечномерным*.

Пусть $\mathcal{L}$ — алгебра Ли и $\rho : \mathcal{L} \to \mathfrak{gl}(V)$ — конечномерное представление $\mathcal{L}$. Тогда отображение $\tau : \mathcal{L} \times \mathcal{L} \to \mathbb{F}$, определенное формулой

$$\tau(x, y) = \mathrm{tr}(\rho(x)\rho(y)),$$

является симметричной билинейной формой на $\mathcal{L}$, которая называется *следом* на $\mathcal{L}$ относительно ρ, где tr обозначает след линейного оператора. В частности, для $V = \mathcal{L}$ и $\rho = \mathrm{ad}$ соответствующий след называется *формой Киллинга* и обозначается $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

Другое важное значение формы Киллинга состоит в следующем свойстве. Алгебра Ли $\mathcal{L}$ полупроста тогда и только тогда, когда ее форма Киллинга не вырождена, т. е. из того, что $\langle x, y \rangle = 0$ для всех $y \in \mathcal{L}$, следует, что $x = 0$.

Пусть $\mathbb{F}$ — поле нулевой характеристики и $\mathfrak{g}$ — $\mathbb{F}$-алгебра Ли, которая равна прямому произведению простых конечномерных алгебр Ли. Это означает, что $\mathfrak{g} = \varinjlim \mathfrak{g}_j$ — прямой предел семейства $(\mathfrak{g}_j)_{j \in \mathfrak{J}}$ конечномерных простых алгебр Ли $\mathfrak{g}_j$, которые являются подалгебрами $\mathcal{L}$, и прямой порядок $\leqslant$ множества индексов $\mathfrak{J}$ задается неравенством $j \leqslant k$, если $\mathfrak{g}_j \leqslant \mathfrak{g}_k$.

Определение 2.2. Алгебра Ли называется *локально конечномерной*, или, проще, *локально конечной*, если каждое ее конечное подмножество порождает конечномерную подалгебру.

Произведение матриц xy определено, если по крайней мере один множитель лежит в $\mathfrak{gl}_{\mathfrak{J}}(\mathbb{F})$, а другой в $M_{\mathfrak{J}}(F)$. В частности, $\mathfrak{gl}_{\mathfrak{J}}(\mathbb{F})$ наследует таким образом структуру локальной конечной алгебры Ли посредством формулы $[x, y] := xy - yx$ и

$$\mathfrak{sl}_{\mathfrak{J}}\mathbb{F} := \{x \in \mathfrak{gl}_{\mathfrak{J}}(F) : trx = 0\}$$

— гиперплоскостный идеал, который является простой алгеброй Ли.

Чтобы определить алгебры Ли $\mathfrak{o}_{\mathfrak{J},\mathfrak{J}}(\mathbb{F})$ и+ $\mathfrak{sp}_{\mathfrak{J}}(\mathbb{F})$, положим $2\mathfrak{J} := \mathfrak{J}\dot{\cup} - \mathfrak{J}$, где $-\mathfrak{J}$ обозначает копию $\mathfrak{J}$, чьи элементы обозначаются $-i, i \in \mathfrak{J}$, и рассмотрим $2\mathfrak{J} \times 2\mathfrak{J}$-матрицы

$$Q_1 := \sum_{i \in \mathfrak{J}} E_{i,-i} + E_{-i,i} \quad \text{и} \quad Q_2 := \sum_{i \in \mathfrak{J}} E_{i,-i} - E_{-i,i}.$$

Затем мы определим

$$\mathfrak{o}_{\mathfrak{J},\mathfrak{J}}(\mathbb{F}) := \{x \in \mathfrak{gl}_{2\mathfrak{J}}(\mathbb{F}) : \ x^\top Q_1 + Q_1 x = 0\}$$

и

$$\mathfrak{sp}_{\mathfrak{J}}(\mathbb{F}) := \{x \in \mathfrak{gl}_{2\mathfrak{J}}(\mathbb{F}) : \ x^\top Q_2 + Q_2 x = 0\}.$$

Пусть $\mathfrak{J}$ — множество, $M_{\mathfrak{J}}(\mathbb{F})_{rc-fin}$ — алгебра Ли $\mathfrak{J}\times\mathfrak{J}$-матриц с конечным числом строк и столбцов и $\mathbf{1} = (\delta_{ij})$ — единичная матрица [18]. Тогда

$$der(\mathfrak{sl}_{\mathfrak{J}}\mathbb{F}) \cong M_{\mathfrak{J}}(\mathbb{F})_{rc-fin}/\mathbb{F}\mathbf{1},$$
$$der(\mathfrak{o}_{\mathfrak{J},\mathfrak{J}}(\mathbb{F})) \cong \{x \in M_{\mathfrak{J}}(\mathbb{F})_{rc-fin} : x^{\top}Q_1 + Q_1 x = 0,\},$$
$$der(\mathfrak{sp}_{\mathfrak{J}}((F))) \cong \{x \in M_{\mathfrak{J}}(\mathbb{F})_{rc-fin} : x^{\top}Q_2 + Q_2 x = 0\}.$$

Через $\mathfrak{gl}(\mathfrak{J},\mathbb{F})$ обозначим алгебру Ли всех $\mathfrak{J}\times\mathfrak{J}$-матриц с конечным большим числом ненулевых элементов, которая натянута на элементарные матрицы $E_{jk} : \mathfrak{J}\times\mathfrak{J} \to \mathbb{F}$, $(l,m) \longmapsto \delta_{jl}\delta_{km}$ при $(j,k) \in \mathfrak{J}\times\mathfrak{J}$. Алгебра Ли $\mathfrak{g} = \mathfrak{gl}(\mathfrak{J},\mathbb{F})$ локально конечна и, очевидно, все ее подалгебры также локально конечны. Это дает нам следующее разложение по корням $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \bigoplus_{\alpha\in R} \mathfrak{g}_\alpha$ относительно подалгебры $\mathfrak{h} = span_{\mathbb{F}}\{E_{jj} : j \in \mathfrak{J}\}$ диагональных матриц. Если мы положим $\varepsilon_k : \mathfrak{h} \to \mathbb{F}$, $E_{jj} \longmapsto \delta_{jk}$, тогда корневая система будет $R = \{\varepsilon_j - \varepsilon_k : j,k \in \mathfrak{J}, j \neq k\}$ и корневые пространства $\mathfrak{g}_{\varepsilon_j-\varepsilon_k} = \mathbb{F}E_{jk}$.

Мы говорим, что алгебра Ли $\mathfrak{g}$ имеет *разложение по корням* относительно абелевой подалгебры $\mathfrak{h}$, если

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \bigoplus_{\alpha\in\mathfrak{R}} \mathfrak{g}_\alpha,$$

где $\mathfrak{g}_\alpha = \{x \in \mathfrak{g} : (\forall h \in \mathfrak{h})[h,x] = \alpha(h)x\}$ и $\mathfrak{R} := \mathfrak{R}(\mathfrak{g},\mathfrak{h}) := \{\alpha \in \mathfrak{h}^*\backslash 0 : \mathfrak{g}_\alpha \neq \{0\}\}$ — соответствующая корневая система и $\mathfrak{h}^*$ — пространство всех линейных функционалов на $\mathfrak{h}$. В этом случае $\mathfrak{h}$ называется *подалгеброй разбиения Картана* $\mathfrak{g}$, и $\mathfrak{g}$ относительно пары $(\mathfrak{g},\mathfrak{h})$ называется *разделенной* алгеброй Ли. Пусть тогда $\mathfrak{g} = \varinjlim \mathfrak{g}_i$ — прямой предел семейства $(\mathfrak{g}_i)_{i\in I}$ конечномерных простых алгебр Ли $\mathfrak{g}_i$. Через $\mathfrak{R}_I$ обозначим систему корней алгебры $\mathfrak{g}_I$ (см. [19]).

3. Локальные дифференцирования классических локально простых алгебр Ли

Основные результаты этого раздела заключены следующей теореме.

Теорема 3.1. *Пусть $\mathfrak{g}$ — локально простая алгебра Ли над полем нулевой характеристики. Тогда всякое локальное дифференцирование на $\mathfrak{g}$ является дифференцированием.*

Для доказательства этой теоремы нам потребуется несколько лемм.

Для конечного подмножества $I \subset \mathfrak{J}$ определим проекцию $p_I : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}_I$ следующим образом:

$$p_I(x) = \sum_{\alpha\in\mathfrak{R}_I} \lambda_\alpha e_\alpha,$$

где $x = \sum_{\alpha\in\mathfrak{R}} \lambda_\alpha e_\alpha \in \mathfrak{g}$.

Лемма 3.1.

$$p_I([x,y]) = [p_I(x), p_I(y)]$$

для всех $x, y \in \mathfrak{g}$.

Доказательство. Возьмем элементы $x = h_1 + \sum_{\alpha\in\mathfrak{R}} \lambda_\alpha e_\alpha$ и $y = h_2 + \sum_{\beta\in\mathfrak{R}} \mu_\beta e_\beta$ из $\mathfrak{g}$, где $h_1,\ h_2 \in \mathfrak{h}$ и $p_I(x) = \sum_{\alpha\in\mathfrak{R}_I} \lambda_\alpha e_\alpha$, $p_I(y) = \sum_{\beta\in\mathfrak{R}_I} \mu_\beta e_\beta$.

Достаточно рассмотреть следующие три случая.

Случай 1. Пусть $x = h_1 \in \mathfrak{h}$ и $y = h_2 \in \mathfrak{h}$. Тогда

$$p_I([x,y]) = p_I(0) = [p_I(x), p_I(y)].$$

Случай 2. Пусть $x = h_1 \in \mathfrak{h}_I$ и $y = \sum_{\beta\in\mathfrak{R}} \mu_\beta e_\beta$. Тогда

$$p_I([x,y]) = p_I\left(\left[h_1, \sum_{\beta\in\mathfrak{R}} \mu_\beta e_\beta\right]\right) = p_I\left(\sum_{\beta\in\mathfrak{R}} \mu_\beta [h_1, e_\beta]\right) = p_I\left(\sum_{\beta\in\mathfrak{R}} \mu_\beta \beta(h_1) e_\beta\right) = \sum_{\beta\in\mathfrak{R}_I} \mu_\beta \beta(h_1) e_\beta. \tag{3.1}$$

С другой стороны,

$$[p_I(x), p_I(y)] = \left[p_I(h_1), p_I\left(\sum_{\beta\in\mathfrak{R}} \mu_\beta e_\beta\right)\right] = \left[h_1, \sum_{\beta\in\mathfrak{R}_I} \mu_\beta e_\beta\right] = \sum_{\beta\in\mathfrak{R}_I} \mu_\beta \beta(h_1) e_\beta. \tag{3.2}$$

Сравнивая (3.1) и (3.2), мы получаем, что

$$p_I([x,y]) = [p_I(x), p_I(y)].$$

Случай 3. Пусть $x = \sum\limits_{\alpha\in\mathfrak{R}} \lambda_\alpha e_\alpha$ и $y = \sum\limits_{\beta\in\mathfrak{R}} \mu_\beta e_\beta$. Тогда

$$p_I([x,y]) = p_I\left(\left[\sum_{\alpha\in\mathfrak{R}} \lambda_\alpha e_\alpha, \sum_{\beta\in\mathfrak{R}} \mu_\beta e_\beta\right]\right) = p_I\left(\sum_{\alpha\in\mathfrak{R}}\sum_{\beta\in\mathfrak{R}} \lambda_\alpha\mu_\beta e_{\alpha+\beta}\right) = \sum_{\alpha\in\mathfrak{R}_I}\sum_{\beta\in\mathfrak{R}_I} \lambda_\alpha\mu_\beta e_{\alpha+\beta}. \tag{3.3}$$

С другой стороны,

$$[p_I(x), p_I(y)] = \left[p_I\left(\sum_{\alpha\in\mathfrak{R}} \lambda_\alpha e_\alpha\right), p_I\left(\sum_{\beta\in\mathfrak{R}} \mu_\beta e_\beta\right)\right] = \left[\sum_{\alpha\in\mathfrak{R}_I} \lambda_\alpha e_\alpha, \sum_{\beta\in\mathfrak{R}_I} \mu_\beta e_\beta\right] = \sum_{\alpha\in\mathfrak{R}_I}\sum_{\beta\in\mathfrak{R}_I} \lambda_\alpha\mu_\beta e_{\alpha+\beta}. \tag{3.4}$$

Далее нам нужно рассмотреть следующие частные случаи.

Случай 3.1. Пусть $\alpha+\beta\in\mathfrak{R}_I$. Сравнивая (3.3) и (3.4), мы получаем, что

$$p_I\left(\sum_{\alpha\in\mathfrak{R}_I}\sum_{\beta\in\mathfrak{R}_I} \lambda_\alpha\mu_\beta e_{\alpha+\beta}\right) = \sum_{\alpha\in\mathfrak{R}_I}\sum_{\beta\in\mathfrak{R}_I} \lambda_\alpha\mu_\beta e_{\alpha+\beta} = [p_I(x), p_I(y)].$$

Случай 3.2. Пусть $0\neq\alpha+\beta\notin\mathfrak{R}_I$. Сравнивая (3.3) и (3.4), мы получаем, что

$$p_I\left(\sum_{\alpha\in\mathfrak{R}_I}\sum_{\beta\in\mathfrak{R}_I} \lambda_\alpha\mu_\beta e_{\alpha+\beta}\right) = 0 = [p_I(x), p_I(y)].$$

Доказательство завершено. □

Лемма 3.2. *Пусть Δ — локальное дифференцирование на $\mathfrak{g}$. Тогда отображение Δ_I на $\mathfrak{g}_I$, определенное формулой*

$$\Delta_I(x) = p_I(\Delta(x)),\ x\in\mathfrak{g}_I,$$

является локальным дифференцированием.

Доказательство. Пусть $x\in\mathfrak{g}_I$ — произвольный элемент. Возьмем элемент $a_x\in\mathfrak{g}$ такой, что $\Delta(x) = [a_x, x]$. Тогда по лемме 3.1

$$\Delta_I(x) = p_I(\Delta(x)) = p_I([a_x, x]) = [p_I(a_x), p_I(x)] = [p_I(a_x), x].$$

□

Доказательство теоремы 3.1. Покажем, что любое локальное дифференцирование Δ на g является дифференцированием. Возьмем конечное подмножество I в $\mathfrak{J}$ такое, что x, y, $\Delta(x)$, $\Delta(y)$, $\Delta([x,y])\in\mathfrak{g}_I$. Тогда Δ_I — локальное дифференцирование $\mathfrak{g}_I$. Так как $\mathfrak{g}_I$ — конечномерная простая алгебра Ли, по теореме 2.1 Δ_I является дифференцированием. Следовательно,

$$\Delta([x,y]) = \Delta_I([x,y]) = [\Delta_I(x), y] + [x, \Delta_I(y)] = [\Delta(x), y] + [x, \Delta(y)].$$

Это означает, что Δ является дифференцированием. □

4. 2-локальные дифференцирования классических локально простых алгебр Ли

В этом разделе мы изучим 2-локальные дифференцирования классических локально простых алгебр Ли.

Представим следующие результаты из [18].

Предложение 4.1. *Каждая инвариантная симметрическая билинейная форма k на $\mathfrak{g}$ инвариантна относительно всех дифференцирований $\mathfrak{g}$.*

Предложение 4.2. *Существует невырожденная инвариантная симметрическая билинейная форма $k : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \to \mathbb{F}$.*

Основные результаты этого раздела содержатся в следующей теореме.

Теорема 4.1. *Пусть $\mathfrak{g}$ — локально простая алгебра Ли над полем нулевой характеристики. Тогда всякое 2-локальное дифференцирование на $\mathfrak{g}$ является дифференцированием.*

Поскольку каждое дифференцирование на локально простой алгебре Ли $\mathfrak{g}$ внутреннее, для алгебр, описанных выше, определение 2-локального дифференцирования переписывается следующим образом. Отображение $\nabla : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ называется *2-локальным дифференцированием* на $\mathfrak{g}$, если для любых двух элементов $x, y \in \mathfrak{g}$ существует элемент $a_{x,y} \in \mathfrak{g}$ (зависящий от x, y) такой, что

$$\nabla(x) = [a_{x,y}, x], \qquad \nabla(y) = [a_{x,y}, y].$$

Лемма 4.1. *Пусть ∇ — 2-локальное дифференцирование локально простой алгебры Ли $\mathfrak{g}$. Тогда ∇ линейно.*

Доказательство. Пусть $x, y, z \in \mathfrak{g}$ — произвольные элементы. Учитывая $ad\mathfrak{g}$-инвариантность формы Киллинга, мы получаем

$$\begin{aligned}\kappa(\nabla(x+y), z) &= \kappa(D_{x+y,z}(x+y), z) = -\kappa(x+y, D_{x+y,z}(z)) = -\kappa(x+y, \nabla(z)) = \\ &= -\kappa(x, \nabla(z)) - \kappa(y, \nabla(z)) = -\kappa(x, D_{x,z}(z)) - k(y, D_{y,z}(z)) = \\ &= \kappa(D_{x,z}(x), z) + \kappa(D_{y,z}, z) = \kappa(\nabla(x), z) + \kappa(\nabla(y), z) = \kappa(\nabla(x) + \nabla(y), z),\end{aligned}$$

т. е.

$$\kappa(\nabla(x+y), z) = \kappa(\nabla(x) + \nabla(y), z).$$

Поскольку форма Киллинга $\langle \cdot, \cdot \rangle$ невырождена, последнее равенство означает, что

$$\nabla(x+y) = \nabla(x) + \nabla(y) \quad \text{при } x, y \in \mathfrak{g}.$$

Далее,

$$\nabla(\lambda x) = D_{\lambda x, x}(\lambda x) = \lambda D_{\lambda x, x}(x) = \lambda \nabla(x).$$

Таким образом, ∇ линейно. □

Доказательство теоремы 4.1. Пусть ∇ — 2-локальное дифференцирование на $\mathfrak{g}$. В силу леммы 4.1 ∇ — локальное дифференцирование. По теореме 3.1 ∇ является дифференцированием. □

5. Локальные дифференцирования на борелевских подалгебрах

В этом разделе мы изучим локальные дифференцирования на борелевских подалгебрах.

Теорема 5.1. *Пусть $\mathfrak{b}$ — разделенная борелевская подалгебра. Тогда каждое локальное дифференцирование на $\mathfrak{b}$ является дифференцированием.*

Разделенная борелевская подалгебра множества $sl(\infty) \cong \varinjlim_{n \geqslant 2} sl(n)$ может быть определена как прямой предел $\mathfrak{b} = \varinjlim_{n \geqslant 2} \mathfrak{b}_n$ борелевских подалгебр $\mathfrak{b}_n \subset sl(n)$. Поскольку основная разделенная борелевская подалгебра множества $sl(\infty)$ сопряжена относительно $Aut(sl(\infty))$ с разделенной борелевской алгеброй, содержащей фиксированную разделенную подалгебру Картана $\mathfrak{h} \subset sl(\infty)$, мы рассмотрим только разделенные борелевские алгебры, содержащие $\mathfrak{h}$. Остальные борелевские подалгебры заданы следующей конструкцией. Мы говорим, что подмножество $\mathfrak{R}^+ \subset \mathfrak{R}$ — *подмножество положительных корней*, если:

1. для любого корня $\alpha \in \mathfrak{R}$ существуют единственные α и $-\alpha$ в $\mathfrak{R}^+$;
2. $\alpha,\ \beta \in \mathfrak{R}^+$ и $\alpha+\beta \in \mathfrak{R}$ влекут $\alpha+\beta \in \mathfrak{R}^+$.

Каждому положительному подмножеству корней $\mathfrak{R}^+$ поставим в соответствие борелевскую подалгебру $\mathfrak{b}(\mathfrak{R}^+) := \mathfrak{h} \bigoplus\limits_{\alpha\in\mathfrak{R}^+} sl_\alpha(\infty)$ множества $sl(\infty)$ и таким образом получим все разделенные борелевские подалгебры $sl(\infty)$, содержащие $\mathfrak{h}$ (см. [14]).

Для конечного подмножества $I \subset \mathfrak{J}$ определим проекцию $p_I : \mathfrak{b} \to \mathfrak{b}_I$ следующим образом:

$$p_I(x) = \sum_{\alpha\in\mathfrak{R}_I^+} \lambda_\alpha e_\alpha,$$

где $x = \sum\limits_{\alpha\in\mathfrak{R}^+} \lambda_\alpha e_\alpha \in \mathfrak{b}$.

Лемма 5.1. *Имеем*

$$p_I([x,y]) = [p_I(x), p_I(y)]$$

для всех $x, y \in \mathfrak{b}$.

Доказательство. Возьмем $x = h_1 + \sum\limits_{\alpha\in\mathfrak{R}^+} \lambda_\alpha e_\alpha$ и $y = h_2 + \sum\limits_{\beta\in\mathfrak{R}^+} \mu_\beta e_\beta$ из $\mathfrak{g}$, где $h_1,\ h_2 \in \mathfrak{h}$ и $p_I(x) = \sum\limits_{\alpha\in\mathfrak{R}_I^+} \lambda_\alpha e_\alpha$, $p_I(y) = \sum\limits_{\beta\in\mathfrak{R}_I^+} \mu_\beta e_\beta$.

Достаточно рассмотреть следующие три случая.

Случай 1. Пусть $x = h_1 \in \mathfrak{h}$ и $y = h_2 \in \mathfrak{h}$. Тогда

$$p_I([x,y]) = p_I(0) = [p_I(x), p_I(y)].$$

Случай 2. Пусть $x = h_1 \in \mathfrak{h}_I$ и $y = \sum\limits_{\beta\in\mathfrak{R}^+} \mu_\beta e_\beta$. Тогда

$$\begin{aligned} p_I([x,y]) &= p_I\left(\left[h_1, \sum_{\beta\in\mathfrak{R}^+} \mu_\beta e_\beta\right]\right) = p_I\left(\sum_{\beta\in\mathfrak{R}^+} \mu_\beta [h_1, e_\beta]\right) = p_I\left(\sum_{\beta\in\mathfrak{R}^+} \mu_\beta \beta(h_1) e_\beta\right) = \\ &= \sum_{\beta\in\mathfrak{R}_I^+} \mu_\beta \beta(h_1) e_\beta. \end{aligned} \tag{5.1}$$

С другой стороны,

$$[p_I(x), p_I(y)] = \left[p_I(h_1), p_I\left(\sum_{\beta\in\mathfrak{R}^+} \mu_\beta e_\beta\right)\right] = \left[h_1, \sum_{\beta\in\mathfrak{R}_I^+} \mu_\beta e_\beta\right] = \sum_{\beta\in\mathfrak{R}_I^+} \mu_\beta \beta(h_1) e_\beta. \tag{5.2}$$

Сравнивая (5.1) и (5.2), мы получим, что

$$p_I([x,y]) = [p_I(x), p_I(y)].$$

Случай 3. Пусть $x = \sum\limits_{\alpha\in\mathfrak{R}^+} \lambda_\alpha e_\alpha$ и $y = \sum\limits_{\beta\in\mathfrak{R}^+} \mu_\beta e_\beta$. Тогда

$$p_I([x,y]) = p_I\left(\left[\sum_{\alpha\in\mathfrak{R}^+} \lambda_\alpha e_\alpha, \sum_{\beta\in\mathfrak{R}^+} \mu_\beta e_\beta\right]\right) = p_I\left(\sum_{\alpha\in\mathfrak{R}^+} \sum_{\beta\in\mathfrak{R}^+} \lambda_\alpha \mu_\beta e_{\alpha+\beta}\right) = \sum_{\alpha\in\mathfrak{R}_I^+} \sum_{\beta\in\mathfrak{R}_I^+} \lambda_\alpha \mu_\beta e_{\alpha+\beta}. \tag{5.3}$$

С другой стороны,

$$\begin{aligned} [p_I(x), p_I(y)] &= \left[p_I\left(\sum_{\alpha\in\mathfrak{R}^+} \lambda_\alpha e_\alpha\right), p_I\left(\sum_{\beta\in\mathfrak{R}^+} \mu_\beta e_\beta\right)\right] = \left[\sum_{\alpha\in\mathfrak{R}_I^+} \lambda_\alpha e_\alpha, \sum_{\beta\in\mathfrak{R}_I^+} \mu_\beta e_\beta\right] = \\ &= \sum_{\alpha\in\mathfrak{R}_I^+} \sum_{\beta\in\mathfrak{R}_I^+} \lambda_\alpha \mu_\beta e_{\alpha+\beta}. \end{aligned} \tag{5.4}$$

Далее нам нужно рассмотреть следующие частные случаи.

Случай 3.1. Пусть $\alpha+\beta \in \mathfrak{R}_I^+$. Сравнивая (5.3) и (5.4), мы получим, что

$$p_I\left(\sum_{\alpha\in\mathfrak{R}_I}\sum_{\beta\in\mathfrak{R}_I}\lambda_\alpha\mu_\beta e_{\alpha+\beta}\right)=\sum_{\alpha\in\mathfrak{R}_I}\sum_{\beta\in\mathfrak{R}_I}\lambda_\alpha\mu_\beta e_{\alpha+\beta}=[p_I(x),p_I(y)].$$

Случай 3.2. Пусть $0\neq\alpha+\beta\notin\mathfrak{R}_I^+$. Сравнивая (5.3) и (5.4), мы получим, что

$$p_I\left(\sum_{\alpha\in\mathfrak{R}_I^+}\sum_{\beta\in\mathfrak{R}_I^+}\lambda_\alpha\mu_\beta e_{\alpha+\beta}\right)=0=[p_I(x),p_I(y)].$$

Доказательство завершено. □

Пусть Δ — локальное дифференцирование. Определим отображение $\Delta_I:\mathfrak{b}_I\to\mathfrak{b}_I$ формулой

$$\Delta_I(x)=p_I(\Delta(x)),\quad x\in\mathfrak{b}_I.$$

Лемма 5.2. *Пусть Δ — локальное дифференцирование на $\mathfrak{b}_I$. Тогда Δ_I является дифференцированием.*

Доказательство. Пусть $x\in\mathfrak{b}_I$ — произвольный элемент. Возьмем элемент $a_x\in\mathfrak{b}$ такой, что $\Delta(x)=[a_x,x]$. Тогда, по лемме 5.1

$$\Delta_I(x)=p_I(\Delta(x))=p_I([a_x,x])=[p_I(a_x),p_I(x)]=[p_I(a_x),x].$$

□

Доказательство теоремы 5.1. Покажем, что любое локальное дифференцирование Δ на $\mathfrak{b}$ является дифференцированием. Возьмем конечное подмножество I в $\mathfrak{J}$ такое, что x, y, $\Delta(x)$, $\Delta(y)$, $\Delta([x,y])\in\mathfrak{b}_I$. Тогда Δ_I — локальное дифференцирование на $\mathfrak{b}_I$. Поскольку $\mathfrak{b}_I$ — стандартная борелевская подалгебра, по теореме 2.3 Δ_I является дифференцированием. Следовательно,

$$\Delta([x,y])=\Delta_I([x,y])=[\Delta_I(x),y]+[x,\Delta_I(y)]=[\Delta(x),y]+[x,\Delta(y)].$$

Это означает, что Δ является дифференцированием. □

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Albeverio S., Ayupov Sh. A., Kudaybergenov K. K., Nurjanov B. O.* Local derivations on algebras of measurable operators// Commun. Cont. Math. — 2011. — *13*, № 4. — С. 643–657.
2. *Ayupov Sh. A., Khudoyberdiyev A. Kh.* Local derivations on Solvable Lie algebras// Linear Multilinear Algebra. — 2021. — *69*, № 7. — С. 1286–1301.
3. *Ayupov Sh. A., Khudoyberdiyev A. Kh., Yusupov B. B.* Local and 2-local derivations of solvable Leibniz algebras// ArXiv. — 2019. 1911.03733v1 [math.RA].
4. *Ayupov Sh. A., Kudaybergenov K. K.* 2-Local automorphisms on finite dimensional Lie algebras// Linear Algebra Appl. — 2016. — *507*. — С. 121–131.
5. *Ayupov Sh. A., Kudaybergenov K. K.* Local derivation on finite dimensional Lie algebras// Linear Algebra Appl. — 2016. — *493*. — С. 381–398.
6. *Ayupov Sh. A., Kudaybergenov K. K., Nurjanov B. O., Alauadinov A. K.* Local and 2-local derivations on noncommutative Arens algebras// Math. Slovaca. — 2014. — *64*, № 2. — С. 423–432.
7. *Ayupov Sh. A., Kudaybergenov K. K., Omirov A. B.* Local and 2-local derivations and automorphisms on simple Leibniz algebras// Bull. Malays. Math. Sci. Soc. (2). — 2020. — *43*. — С. 2199–2234.
8. *Ayupov Sh. A., Kudaybergenov K. K., Rakhimov I. S.* 2-Local derivations on finite-dimensional Lie algebras// Linear Algebra Appl. — 2015. — *474*. — С. 1–11.
9. *Ayupov Sh. A., Kudaybergenov K. K., Yusupov B. B.* 2-Local derivations on generalized Witt algebras// Linear Multilinear Algebra. — 2019. — *69*, № 16. — С. 3130–3140.
10. *Ayupov Sh. A., Yusupov B. B.* 2-local derivations on Virasoro algebras// Bull. Nat. Univ. Uzbekistan. Math. Natural Sci. — 2019. — *2*, № 4. — С. 217–230.
11. *Ayupov Sh. A., Yusupov B. B.* 2-local derivations of infinite-dimensional Lie algebras// J. Algebra Appl. — 2020. — *19*, № 5. — 2050100.

12. *Chen Z., Wang D.* 2-Local automorphisms of finite-dimensional simple Lie algebras// Linear Algebra Appl. — 2015. — *486.* — С. 335–344.
13. *Chen Y., Zhao K., Zhao Y.* Local derivations on Witt algebras// ArXiv. — 2019. — 1911.05.15v1 [math.RA].
14. *Dimitrov I., Penkov I.* Weight modules of direct limit Lie algebras// Int. Math. Res. Not. IMRN. — 1999. — *199*, № 5. — С. 223–249.
15. *Johnson B. E.* Local derivations on C^*-algebras are derivations// Trans. Moscow Math. Soc. — 2001. — *353.* — С. 313–325.
16. *Kadison R. V.* Local derivations// J. Algebra. — 1990. — *130.* — С. 494–509.
17. *Larson D. R., Sourour A. R.* Local derivations and local automorphisms of $B(X)$// В сб.: «Operator theory, operator algebras and applications. Proc. of the summer research institute, University of New Hampshire, Durham, USA, July 3–23, 1988». — Providence: Am. Math. Soc., 1990. — С. 187–194.
18. *Nebb K.-H.* Derivations of locally simple Lie algebras// J. Lie Theory. — 2005. — *15.* — С. 589–594.
19. *Neeb K.-H., Stumme N.* On the classification of locally finite split simple Lie algebras// J. Reine Angew. Math. — 2001. — *533.* — С. 25–53.
20. *Šemrl P.* Local automorphisms and derivations on $B(H)$// Proc. Am. Math. Soc. — 1997. — *125.* — С. 2677–2680.
21. *Yalong Yu., Chen Z.* Local derivations on Borel subalgebras of finite-dimensional simple Li algebras// Commun. Algebra. — 2019. — *48*, № 1. — С. 1–10.
22. *Yusupov B. B.* 2-Local derivations on Witt algebras// Uzbek Math. J. — 2018. — № 2. — С. 160–166.

Ш. А. Аюпов
Институт математики им. В. И. Романовского, Ташкент, Узбекистан;
Национальный университет Узбекистана им. М. Улугбека, Ташкент, Узбекистан
E-mail: sh_ayupov@mail.ru, shavkat.ayupov@mathinst.uz

К. К. Кудайбергенов
Каракалпакский государственный университет им. Бердаха, Нукус, Узбекистан
E-mail: karim2006@mail.ru

Б. Б. Юсупов
Национальный университет Узбекистана им. М. Улугбека, Ташкент, Узбекистан
E-mail: baxtiyor_yusupov_93@mail.ru

DOI: 10.22363/2413-3639-2022-68-1-59-69 UDC 512.554

Local and 2-Local Derivations of Locally Simple Lie Algebras

© 2022 **Sh. Ayupov, K. Kudaybergenov, B. Yusupov**

Abstract. In the present paper, we study local and 2-local derivations of the classical locally simple Lie algebras. Firstly, we prove that every local and 2-local derivations on classical locally simple Lie algebra is a derivation. Further, we show that every local derivation of Borel subalgebras of locally simple Lie algebras is a derivation.

REFERENCES

1. S. Albeverio, Sh. A. Ayupov, K. K. Kudaybergenov, and B. O. Nurjanov, “Local derivations on algebras of measurable operators,” *Commun. Cont. Math.*, 2011, **13**, No. 4, 643–657.

2. Sh. A. Ayupov and A. Kh. Khudoyberdiyev, “Local derivations on Solvable Lie algebras,” *Linear Multilinear Algebra*, 2021, **69**, No. 7, 1286–1301.
3. Sh. A. Ayupov, A. Kh. Khudoyberdiyev, and B. B. Yusupov, “Local and 2-local derivations of solvable Leibniz algebras,” *ArXiv*, 2019, 1911.03733v1 [math.RA].
4. Sh. A. Ayupov and K. K. Kudaybergenov, “2-Local automorphisms on finite dimensional Lie algebras,” *Linear Algebra Appl.*, 2016, **507**, 121–131.
5. Sh. A. Ayupov and K. K. Kudaybergenov, “Local derivation on finite dimensional Lie algebras,” *Linear Algebra Appl.*, 2016, **493**, 381–398.
6. Sh. A. Ayupov, K. K. Kudaybergenov, B. O. Nurjanov, and A. K. Alauadinov, “Local and 2-local derivations on noncommutative Arens algebras,” *Math. Slovaca*, 2014, **64**, No. 2, 423–432.
7. Sh. A. Ayupov, K. K. Kudaybergenov, and A. B. Omirov, “Local and 2-local derivations and automorphisms on simple Leibniz algebras,” *Bull. Malays. Math. Sci. Soc.* (2), 2020, **43**, 2199–2234.
8. Sh. A. Ayupov, K. K. Kudaybergenov, and I. S. Rakhimov, “2-Local derivations on finite-dimensional Lie algebras,” *Linear Algebra Appl.*, 2015, **474**, 1–11.
9. Sh. A. Ayupov, K. K. Kudaybergenov, and B. B. Yusupov, “2-Local derivations on generalized Witt algebras,” *Linear Multilinear Algebra*, 2019, **69**, No. 16, 3130–3140.
10. Sh. A. Ayupov and B. B. Yusupov, “2-local derivations on Virasoro algebras,” *Bull. Nat. Univ. Uzbekistan. Math. Natural Sci.*, 2019, **2**, No. 4, 217–230.
11. Sh. A. Ayupov and B. B. Yusupov, “2-local derivations of infinite-dimensional Lie algebras,” *J. Algebra Appl.*, 2020, **19**, No. 5, 2050100.
12. Z. Chen and D. Wang, “2-Local automorphisms of finite-dimensional simple Lie algebras,” *Linear Algebra Appl.*, 2015, **486**, 335–344.
13. Y. Chen, K. Zhao, and Y. Zhao, “Local derivations on Witt algebras,” *ArXiv*, 2019, 1911.05.15v1 [math.RA].
14. I. Dimitrov and I. Penkov, “Weight modules of direct limit Lie algebras,” *Int. Math. Res. Not. IMRN*, 1999, **199**, No. 5, 223–249.
15. B. E. Johnson, “Local derivations on C^*-algebras are derivations,” *Trans. Moscow Math. Soc.*, 2001, **353**, 313–325.
16. R. V. Kadison, “Local derivations,” *J. Algebra.* , 1990, **130**, 494–509.
17. D. R. Larson and A. R. Sourour, “Local derivations and local automorphisms of $B(X)$,” In: *Operator theory, operator algebras and applications. Proc. of the summer research institute, University of New Hampshire, Durham, USA, July* 3–23*,* 1988, Am. Math. Soc., Providence, 1990, pp. 187–194.
18. K.-H. Nebb, “Derivations of locally simple Lie algebras,” *J. Lie Theory*, 2005, **15**, 589–594.
19. K.-H. Neeb and N. Stumme, “On the classification of locally finite split simple Lie algebras,” *J. Reine Angew. Math.*, 2001, **533**, 25–53.
20. P. Šemrl, “Local automorphisms and derivations on $B(H)$,” *Proc. Am. Math. Soc.*, 1997, **125**, 2677–2680.
21. Yu. Yalong and Z. Chen, “Local derivations on Borel subalgebras of finite-dimensional simple Li algebras,” *Commun. Algebra*, 2019, **48**, No. 1, 1–10.
22. B. B. Yusupov, “2-Local derivations on Witt algebras,” *Uzbek Math. J.*, 2018, No. 2, 160–166.

Sh. Ayupov
Romanovskiy Institute of Mathematics, Tashkent, Uzbekistan;
National University of Uzbekistan, Tashkent, Uzbekistan
E-mail: sh_ayupov@mail.ru, shavkat.ayupov@mathinst.uz

K. Kudaybergenov
Karakalpak State University, Nukus, Uzbekistan
E-mail: karim2006@mail.ru

B. Yusupov
National University of Uzbekistan, Tashkent, Uzbekistan
E-mail: baxtiyor_yusupov_93@mail.ru