Современная математика. Фундаментальные направления. Том 68, № 1 (2022). С. 41–58
Contemporary Mathematics. Fundamental Directions. ISSN 2413-3639 (Print)

DOI: 10.22363/2413-3639-2022-68-1-41-58 УДК 517.55

МНОГОЧЛЕНЫ НА РЕГУЛЯРНЫХ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ МНОГООБРАЗИЯХ

© 2022 г. **А. А. АТАМУРАТОВ**

Аннотация. В данной работе мы рассматриваем регулярное параболическое многообразие X и многочлены на нем. Доказаны некоторые свойства регулярных параболических многообразий и описанных многочленов на дополнениях к алгеброидным множествам Вейерштрасса.

ОГЛАВЛЕНИЕ

1. Введение

Понятие «параболичности» введено в совместной работе П. Гриффитса, Дж. Кинга [10] и в работах В. Столла [17, 18], где параболические многообразия применялись к теории распределения значений Неванлинны в высших измерениях. Эти исследования в основном были сосредоточены на аффинных алгебраических подмногообразиях комплексных пространств. Этот тип многообразий был назван параболическим. В работе [2] А. Садуллаевым была изучена теория Неванлинны для отображения на параболическом многообразии.

В качестве дальнейшего развития параболических многообразий Штейна можно указать исследования А. Зариахи [20], А. Айтуна, Дж. Крон, Т. Терзиоглу [4], Дж. П. Демайлли [8], Р. Л. Фут [9], А. Айтуна и А. Садуллаева [5, 6], М. Калка, Г. Патрицио [11], А. С. Снабьярнарсон [16].

В данной работе мы используем следующие понятия (см. [5, 6]).

Определение 1.1. Многообразие Штейна X называется *параболическим*, если оно не обладает отличными от константы ограниченными сверху плюрисубгармоническими функциями.

Определение 1.2. Многообразие Штейна X называется *S-параболическим*, если существуют специальные плюрисубгармонические сюръективные функции $\rho(z) \in psh(X)$, максимальные вне компактного подмножества X. Кроме того, если $\rho(z)$ можно выбрать непрерывным, то будем говорить, что X является *S^*-параболическим*.

Известно, что для открытых римановых поверхностей понятия параболичности, S-параболичности и S^*-параболичности совпадают. При $\dim X > 1$ этот вопрос остается открытым.

Пусть X — S-параболическое многообразие, а $\rho(z)$ — специальная сюръективная функция.

Определение 1.3. Если для функции $f(z) \in O(X)$ существуют положительные числа c и d такие, что для каждого $z \in X$ выполняется неравенство

$$\ln|f(z)| \leqslant d \cdot \rho^+(z) + c, \tag{1.1}$$

где $\rho^+(z) = \max\{0,\ \rho(z)\}$, то функция $f(z)$ называется *ρ-многочленом* на X. Минимальное целочисленное значение d, которое удовлетворяет (1.1), называется *степенью* полинома (как показывают примеры, в общем случае минимальное значение d может быть нецелым).

Для каждого $d > 0$ обозначим через $\mathcal{P}^d_\rho(X)$ множество всех ρ-полиномов степени меньше или равной d, а через $\mathcal{P}_\rho(X) = \bigcup\limits_{d=0}^{\infty} \mathcal{P}^d_\rho(X)$ — множество всех ρ-полиномов на X. В работе А. Айтуна и А. Садуллаева [6] (см. также [17]) было доказано, что векторное пространство $\mathcal{P}^d_\rho(X)$ для S^*-параболического многообразия конечномерно и с оценкой сверху:

$$\dim \mathcal{P}^d_\rho(X) \leqslant Cd^n.$$

Класс полиномов на произвольных параболических многообразиях может быть очень бедным, даже пустым, $\mathcal{P}^d_\rho(X) = \{const\}$. Следующая теорема помогает построить S^*-параболическое многообразие без нетривиальных полиномов (см. [6]).

Теорема 1.1. *Существуют полярный компакт $K \subset \mathbb{C}$ и субгармоническая функция $u(z)$ на комплексной плоскости $\mathbb{C}$, гармоническая в $\mathbb{C}\backslash K$, такие, что $u|_K = -\infty$ и*

$$\lim_{z\to K} \frac{u(z)}{\ln dist(z,K)} = 0. \tag{1.2}$$

Пример 1.1. Рассмотрим многообразие $X = \bar{\mathbb{C}}\backslash K$, где K — компакт, как в теореме выше. В качестве специальной сюръективной функции положим $\rho(z) = -u(z)$. Тогда ρ является гармоническим на $X\backslash\{\infty\}$, $\rho(\infty) = -\infty$, и $\rho(z) \to \infty$ при $z \to K$. Следовательно, (X,ρ) является S^*-параболическим. Многочлены на X — это функции $f \in \mathcal{O}(X)$, для которых

$$\ln|f| \leqslant C + d\cdot\rho^+(z),\ d\in\mathbb{N}.$$

Доказано, что такого рода функции тривиальны, т. е. $f = const$. Отсюда следует, что на X нет нетривиальных многочленов.

Пример 1.2. Алгебраическое множество $A \subset \mathbb{C}^N$, $\dim A = n$. В этом случае по известной теореме В. Рудина [14], можно считать, что $A \subset \{w = (w', w'') = (w_1,\dots,w_n,w_{n+1},\dots,w_N) :\ \|w''\| < C(1+\|w'\|^k)\}$ (после соответствующего преобразования), где C, k — константы. Тогда, если мы положим $\rho(w) = \ln\|w'\|$, то сужение $\rho|_A$ может быть специальной сюръективной функцией для A. Ясно, что полиномы на A являются ограничениями полиномов $p(w',w'')$ в $\mathbb{C}^N$. Следовательно, $\mathcal{P}^d_\rho(A)$ плотно в $\mathcal{O}(A)$.

В этой статье мы сосредоточимся на специальном классе параболических многообразий, которые мы называем регулярными.

Определение 1.4 (А. Айтуна, А. Садуллаев, [6])**.** S-параболическое многообразие X называется *регулярным* в случае, если пространство всех ρ-многочленов $\mathcal{P}_\rho(X)$ плотно в $\mathcal{O}(X)$.

В данной работе мы рассматриваем свойства регулярных параболических многообразий, в частности, изучаем дополнения к алгеброидным множествам на комплексном пространстве. В разделах 1 и 2 мы делаем обзор свойств параболических многообразий и многочленов на параболических многообразиях. Основные результаты статьи приведены в разделах 3 и 4. В разделе 3 доказана регулярная параболичность декартовых произведений регулярных параболических многообразий Штейна. В разделе 4 мы рассматриваем дополнения алгеброидных множеств Вейерштрасса и многочлены на этих многообразиях.

Благодарности. Автор выражает благодарность профессорам А. Айтуна и А. Садуллаеву за неоднократное обсуждение результатов и полезные комментарии.

2. Предварительные результаты и свойства параболических многообразий

Следующие свойства параболических многообразий показывают, что мы можем конструировать широкие классы параболических многообразий помимо аффинно-алгебраических многообразий.

Теорема 2.1 (В. Столл, [17, теорема 10.12, с. 82]). *Некомпактная риманова поверхность X является S^*-параболической тогда и только тогда, когда каждая ограниченная (сверху) субгармоническая функция, определенная на X, сводится к константе.*

Теорема 2.2 (В. Столл, [17, теорема 10.13, с. 82]). *Пусть (X_1, ρ_1) и (X_2, ρ_2) являются S^*-параболическими многообразиями размерностей n и m, соответственно. Определим многообразие $M = X_1 \times X_2$ размерности $k = n + m$ и проекции $\pi_1 : M \to X_1$, $\pi_2 : M \to X_2$. Тогда $M = X_1 \times X_2$ является S^*-параболическим со специальной сюръективной функцией $\rho = \ln(e^{2\rho_1 \circ \pi_1} + e^{2\rho_2 \circ \pi_2})$.*

Отметим, что в качестве специальной сюръективной функции на $M = X_1 \times X_2$ мы можем рассматривать $\rho = \max\{\rho_1 \circ \pi_1, \rho_2 \circ \pi_2\}$.

Как показано в [5], S^*-параболические многообразия являются уточненной категорией многообразий Штейна в смысле пространств Фреше аналитических функций, заданных на них. Градуированное пространство Фреше — это набор $(Y, \|\cdot\|_s)$, где Y — пространство Фреше и $(\|\cdot\|_s)$ фиксированная система полунорм на Y, определяющая топологию.

Непрерывный линейный оператор T между двумя градуированными пространствами Фреше $(Y, \|\cdot\|_s)$ и $(Z, |\cdot|_k)$ называется *ручным*, если:

$$\exists A > 0 \ \forall k \ \exists C > 0 : |T(x)|_k \leqslant C \, \|x\|_{k+A} .$$

Два градуированных пространства Фреше называются *ручно изоморфными*, если существует взаимно однозначный ручной линейный оператор из одного в другое, обратный которому также ручной.

На многообразии Штейна X каждое исчерпание $(K_s)_{s=1}^{\infty}$ голоморфных выпуклых компактов таких, что $K_s \subset\subset intK_{s+1}$, $s = 1, 2, 3, \ldots$, индуцирует градуировку $\{\|\cdot\|_{K_s}\}$ на $\mathcal{O}(X)$, где $\|\cdot\|_{K_s}$ — нормы Чебышева на компактах K_s.

Теорема 2.3 (А. Айтуна, А. Садуллаев [5]). *Многообразие Штейна X размерности n является S^*-параболическим тогда и только тогда, когда существует исчерпание $(K_s)_{s=1}^{\infty}$ многообразия X такое, что градуированные пространства $(\mathcal{O}(X), \ \|\cdot\|_{K_s})$ и $(\mathcal{O}(\mathbb{C}^n), \ \|\cdot\|_{P_s})$ ручно изоморфны, где $P_s = \{z \in \mathbb{C}^n : \|z\| \leqslant e^s\}$, $s = 1, 2, \ldots$*

Этот результат в некотором смысле показывает сходство пространства аналитических функций на S^*-параболических многообразиях и пространства аналитических функций на комплексных евклидовых пространствах.

В [5] получен критерий параболичности в терминах известной P-меры. Каждое многообразие Штейна можно должным образом вложить в комплексное пространство $\mathbb{C}^{2n+1}$, где $n = \dim X$. Пусть $w \in \mathbb{C}^{2n+1}$ и $\sigma(z)$ — ограничение $\ln|w|$ на X. Тогда псевдошары $B_R = \{z \in X : \sigma(z) < \ln R\} \subset\subset X$. Без ограничения общности считаем, что $0 \notin X$ и $B_1 \neq \varnothing$. Как обычно, определим известную P-меру компакта $\bar{B}_1$ относительно области B_R:

$$\omega(z, \bar{B}_1, B_R) = \sup\{u(z) \in psh(B_R) : u|_{\bar{B}_1} \leqslant -1, \ u|_{B_R} \leqslant 0\}.$$

Пусть $\omega(z, \bar{B}_1) = \lim\limits_{R \to \infty} \omega(z, \bar{B}_1, B_R)$.

Теорема 2.4 (А. Айтуна, А. Садуллаев). *Многообразие Штейна X является параболическим тогда и только тогда, когда $\omega(z, \bar{B}_1) \equiv -1$.*

Установлена связь параболичности многообразий Штейна с некоторыми линейными топологическими свойствами пространств Фреше аналитических функций на X. Пусть $\mathcal{O}(X)$ — пространство аналитических функций на X. Топология на $\mathcal{O}(X)$ — это топология равномерной сходимости на компактных подмножествах X. Эта топология делает $\mathcal{O}(X)$ ядерным пространством Фреше. Пространства Фреше X обладают свойством ДН (доминируемой нормы) Фогта в случае, если для системы $(\|\cdot\|_k)$ полунорм, порождающих топологию из X, выполнено

$$\exists k_0 : \forall p \ \exists q, \ C > 0 : \|x\|_p \leqslant C \, \|x\|_{k_0}^{\frac{1}{2}} \, \|x\|_q^{\frac{1}{2}} , \forall x \in X.$$

Следующий результат принадлежит А. Айтуна [4].

Теорема 2.5. *Для n-мерного многообразия Штейна X следующие условия эквивалентны*:

- *X является параболическим*;
- *$\mathcal{O}(X)$ обладает свойством ДН*;
- *$\mathcal{O}(X)$ изоморфно как пространство Фреше к $\mathcal{O}(\mathbb{C}^n)$.*

Другая характеристическая теорема параболических многообразий в терминах операторов продолжения доказана Д. Фогтом (см. [19]). Здесь мы приводим этот результат в удобной (в смысле нашей терминологии) интерпретации. Многообразие Штейна является параболическим тогда и только тогда, когда всякий раз, когда оно вкладывается в многообразие Штейна как замкнутое подмногообразие, оно допускает непрерывный линейный оператор продолжения.

3. Многочлены на параболических многообразиях

В этом разделе рассмотрены некоторые свойства регулярных параболических многообразий и многочленов.

Пусть X — S-параболическое многообразие и $\rho(z)$ — специальная сюръективная функция psh. Через $psh(X)$ обозначим пространство всех плюрисубгармонических функций на X. Рассмотрим класс функций $u \in psh(X)$, удовлетворяющих условию

$$u(z) \leqslant c_u + \rho^+(z),\ z \in X,$$

с некоторой константой c_u, зависящей от функции u. Класс всех таких функций обозначим через $\mathfrak{A}_\rho(X)$. Этот класс называется *классом Лелонга* плюрисубгармонических функций. На компакте $E \subset\subset X$ определим функцию

$$V_\rho(z, E) = \sup\left\{u(z) : u \in \mathfrak{A}_\rho(X),\ u|_E \leqslant 0\right\}.$$

Верхняя регуляризация $V_\rho^*(z, E) = \overline{\lim_{w\to z}} V_\rho(w, E)$ называется *верхней ρ-функцией Грина* компакта E. Заметим, что для псевдошара $\bar{B}_r = \{z \in X : \rho(z) \leqslant \ln r\}$ функция Грина равняется

$$V_\rho(z, \bar{B}_r) = \max\left\{\rho(z) - \ln r,\, 0\right\}. \tag{3.1}$$

Для функции Грина либо $V_\rho \in psh\,(X)$, либо $V_\rho \equiv +\infty$. Более того, множество $E \subset X$ плюриполярно тогда и только тогда, когда $V_\rho^*(z, E) \equiv +\infty$.

Если $\ln|f\,(z)| \leqslant c + d\rho^+\,(z)$, то функция f называется *полиномиальной*. При этом $[\min d]$ есть $\deg f$. Для каждого многочлена $f(z) \in \mathcal{P}_\rho^d(X)$ и для произвольного компакта $E \subset X$ выполнено неравенство Бернштейна—Уолша

$$|f(z)| \leqslant \|f\|_E \cdot e^{d\cdot V_\rho(z,E)},\ z \in X, \tag{3.2}$$

где $\|f\|_E = \sup\limits_{z\in E}|f(z)|$ — норма Чебышева.

Действительно, если мы рассмотрим функцию $u(z) = \dfrac{1}{d}\ln\dfrac{|f(z)|}{\|f\|_E}$, тогда $u \in \mathfrak{A}_\rho(X)$, так как

$$u(z) = \frac{1}{d}\ln\frac{|f(z)|}{\|f\|_E} \leqslant \frac{1}{d}\ln\frac{c(1 + e^{\rho(z)})^d}{\|f\|_E} \leqslant c_u + \rho^+(z)$$

и $u(z)|_E \leqslant 0$. Следовательно, $u(z) = \dfrac{1}{d}\ln\dfrac{|f(z)|}{\|f\|_E} \leqslant V_\rho(z, E)$.

Следующая теорема является аналогом теоремы Столла 2.2 для регулярных параболических многообразий.

Теорема 3.1. *Пусть (X_1, ρ_1) и (X_2, ρ_2) — регулярные параболические многообразия размерности n и m, соответственно. Определим многообразие $X = X_1 \times X_2$ размерности $k = n + m$ и проекции $\pi_1 : M \to X_1$, $\pi_2 : M \to X_2$. Тогда $X = X_1 \times X_2$ — регулярное параболическое многообразие со специальной сюръективной функцией $\rho = \ln(e^{2\rho_1\circ\pi_1} + e^{2\rho_2\circ\pi_2})$.*

Следствие 3.1. *Пусть (X_1, ρ_1), (X_2, ρ_2), (X_k, ρ_k) — регулярные параболические многообразия с размерностями $m_1, m_2, \ldots, m_k$. Определим многообразие $X = X_1 \times X_2 \times \ldots \times X_k$ размерности*

$n = m_1 + m_2 + \ldots + m_k$ и проекции $\pi_1 : M \to X_1$, $\pi_2 : M \to X_2$, $\pi_k : M \to X_k$. Тогда X — регулярное параболическое многообразие со специальной сюръективной функцией

$$\rho = \ln(e^{2\rho_1 \circ \pi_1} + e^{2\rho_2 \circ \pi_2} + \ldots + e^{2\rho_k \circ \pi_k}).$$

Доказательство теоремы 3.1. Пусть $(X_1, \rho_1(z))$, $(X_2, \rho_2(w))$ — регулярные параболические многообразия размерности n и m, соответственно. Параболичность многообразия $X = X_1 \times X_2$ со специальной сюръективной функцией $\rho(z,w) = \ln\left(e^{2\rho_1(z)} + e^{2\rho_2(w)}\right)$ следует из теоремы 2.2. Рассмотрим многочлены на $X = X_1 \times X_2$ и докажем, что всякая аналитическая функция может быть приближена ρ-многочленами.

Сначала мы выразим ρ-многочлены через ρ_1- и ρ_2-многочлены. Пусть $f(z,w) \in \mathcal{O}(X)$ является ρ-многочленом степени $d > 0$, т. е. удовлетворяет условию

$$\ln|f(z,w)| \leqslant d \cdot \ln^+(e^{2\rho_1(z)} + e^{2\rho_2(w)}) + C.$$

Таким образом, если мы зафиксируем $z \in X_1$, то $f(z,w)$ — ρ_2-многочлен на X_2, и обратно, для всякой фиксированной $w \in X_2$ функция $f(z,w)$ — ρ_1-многочлен на X_1. Так как векторное пространство $\mathcal{P}^d_{\rho_2}(X_2)$ конечномерно, существует линейно независимые ρ_2-многочлены $Q_1(w), Q_2(w), \ldots, Q_s(w)$ такие, что

$$f(z,w) = c_1(z) \cdot Q_1(w) + c_2(z) \cdot Q_2(w) + \ldots + c_s(z)Q_s(w). \tag{3.3}$$

Покажем, что коэффициенты $c_j(z)$ выражения (3.3) являются ρ_1-многочленами на X_1. Поскольку $\det(Q_j(w))_{\substack{j=\overline{1,s}\\ k=\overline{1,s}}} \equiv 0$, существуют точки $w^1, w^2, \ldots, w^s \in X_2$ такие, что $\det(Q_j(w^k))_{\substack{j=\overline{1,s}\\ k=\overline{1,s}}} \neq 0$.

Следовательно, система

$$\begin{array}{l} f(z,w^1) = c_1(z) \cdot Q_1(w^1) + c_2(z) \cdot Q_2(w^1) + \ldots + c_s(z)Q_s(w^1), \\ f(z,w^2) = c_1(z) \cdot Q_1(w^2) + c_2(z) \cdot Q_2(w^2) + \ldots + c_s(z)Q_s(w^2), \\ \ldots \\ f(z,w^s) = c_1(z) \cdot Q_1(w^s) + c_2(z) \cdot Q_2(w^s) + \ldots + c_s(z)Q_s(w^s) \end{array} \tag{3.4}$$

имеет единственное решение $\{c_1(z), c_2(z), \ldots, c_s(z)\} \subset \mathcal{O}(X)$.

Коэффициенты $c_j(z)$ представляют собой линейную комбинацию ρ_1-многочленов $f(z,w^1)$, $f(z,w^2), \ldots, f(z,w^s)$, поэтому $c_j(z)$ являются ρ_1-многочленами. Следовательно, каждый ρ-многочлен на $X = X_1 \times X_2$ допускает конечное разложение по многочленам на X_1 и X_2:

$$f(z,w) = P_1(z) \cdot Q_1(w) + P_2(z) \cdot Q_2(w) + \ldots + P_s(z)Q_s(w). \tag{3.5}$$

Теперь покажем, что каждая аналитическая функция на X может быть приближена ρ-многочленами на компактных подмножествах X. Доказательство проведем в три этапа.

Этап 1. Пусть функция $f(z,w) \in \mathcal{O}(X)$ — ρ_2-многочлен относительно w на X_2 для каждого фиксированного $z \in X_1$. В этом случае мы имеем выражение

$$f(z,w) = c_1(z) \cdot Q_1(w) + c_2(z) \cdot Q_2(w) + \ldots + c_s(z)Q_s(w),$$

где коэффициенты $c_j(z)$ — аналитические на X_1. Таким образом, если мы зафиксируем компакт $K = K_1 \times K_2 \subset X$ и положим

$$M_j = \sup_{K_2} |Q_j(w)|,$$

то для любого $\varepsilon > 0$ существуют ρ_1-многочлены $P_j(z)$ такие, что

$$\|c_j(z) - P_j(z)\|_{K_1} < \frac{\varepsilon}{sM_j}.$$

Следовательно,

$$\|f(z,w) - (P_1(z) \cdot Q_1(w) + P_2(z) \cdot Q_2(w) + \ldots + P_s(z) \cdot Q_s(w))\|_K < \varepsilon,$$

т. е. каждый квазиполином на X может быть приближен ρ-полиномами.

Этап 2. Пусть $(Y, \rho(\xi))$ — регулярное параболическое многообразие. Так как размерность пространства $\mathcal{P}^d_\rho(Y)$ конечна, $\dim \mathcal{P}^d_\rho(Y) < \infty$, оно имеет конечный базис. Отсюда следует, что пространство $\mathcal{P}_\rho(Y)$ всех многочленов сепарабельно и имеет счетную всюду плотную в $\mathcal{P}_\rho(Y)$ систему $\{q_j(\xi)\}_{j=1,2,\ldots} \subset \mathcal{P}_\rho(Y)$. Предположим, что $q_j(\xi) \not\equiv 0$.

Зафиксируем компакт $K \subset Y$ и псевдошар $B \supset K$. Возьмем замыкание $\mathcal{O}(Y)$ $L_2(\partial B)$ по норме $\|\cdot\|_{L_2(\partial B)}$. Так как $(Y, \rho(\xi))$ регулярно, замыкание системы $\{q_j(\xi)\}_{j=1,2,\ldots}$ совпадает с $\mathcal{O}(Y)$. Ортонормируем систему $\{q_j(\xi)\}_{j=1,2,\ldots}$ в $L_2(\partial B)$: $Q_j(\xi) = a_{j1}q_1(\xi) + a_{j2}q_2(\xi) + \ldots + a_{jj}q_j(\xi)$, $\int\limits_{\partial B} Q(\xi)_j \bar{Q}_k(\xi)\, d\sigma(\xi) = \delta_{jk}$.

Тогда произвольное $f(\xi) \in \mathcal{O}(Y)$ может быть выражено (в $L_2(\partial B)$) следующим образом:

$$f(\xi) = \sum_{j=1}^{\infty} c_j Q_j(\xi)\,, \;\; c_j = \int\limits_{\partial B} f(\xi)\, \bar{Q}_j(\xi)\, d\sigma(\xi)\,, \; j = 1, 2, \ldots \tag{3.6}$$

Ряд в (3.6) сходится в $L_2(\partial B)$, следовательно, он равномерно сходится в B. В частности, он равномерно сходится на $K \subset B$. Более того, выполняется равенство Парсеваля

$$\sum_{j=1}^{\infty} c_j \bar{c}_j = \|f\|^2_{L_2(\partial B)}\,. \tag{3.7}$$

Этап 3. Зафиксируем компакт $K = K_1 \times K_2 \subset X_1 \times X_2$ и псевдошары $B_1 \supset K_1$, $B_2 \supset K_2$. Составим также две полиномиальные системы $\{P_k(z)\}_{k=1,2,\ldots}$ и $\{Q_j(w)\}_{j=1,2,\ldots}$ в $L_2(\partial B_1)$ и $L_2(\partial B_2)$, соответственно. Поскольку $(X_2, \rho_2(w))$ регулярно, для любого фиксированного $z \in X_1$ функция $f(z, w)$ может быть выражена как

$$f(z,w) = \sum_{j=1}^{\infty} c_j(z)\, Q_j(w)\,, \;\; c_j(z) = \int\limits_{\partial B_2} f(z,w)\, \bar{Q}_j(w)\, d\sigma(w)\,, \; j = 1, 2, \ldots \tag{3.8}$$

Из (3.7) следует, что $c_j(z) \in \mathcal{O}(X)\,,\; j = 1, 2, \ldots$ В силу этапа 1 псевдомногочлен $\sum\limits_{j=1}^{N} c_j(z)\, Q_j(w)$ равномерно приближается многочленами $P(z,w) \in \mathcal{P}_\rho(X)$ на каждом компакте $F \subset X$, в частности, на $K = K_1 \times K_2$.

С другой стороны,

$$\left\| f(z,w) - \sum_{j=1}^{N} c_j(z)\, Q_j(w) \right\|^2_{L_2(\partial B_2)} = \left\| \sum_{j=N+1}^{\infty} c_j(z)\, Q_j(w) \right\|^2_{L_2(\partial B_2)} =$$

$$= \int\limits_{\partial B_2} \sum_{j=N+1}^{\infty} c_j(z)\, Q_j(w) \sum_{j=N+1}^{\infty} \bar{c}_j(z)\, \bar{Q}_j(w)\; d\sigma(\partial B_2) =$$

$$= \sum_{j=N+1}^{\infty} c_j(z)\, \bar{c}_j(z) \int\limits_{\partial B_2} \sum_{j=N+1}^{\infty} Q_j(w)\; \bar{Q}_j(w)\, d\sigma(\partial B_2) = \sum_{j=N+1}^{\infty} \|c_j(z)\|^2\,,$$

и при $N \to \infty$ сумма стремится к нулю для любого фиксированного $z \in \partial B_1$, а по теореме Леви

$$\lim_{N\to\infty} \int\limits_{\partial B_1} \left\| f(z,w) - \sum_{j=1}^{N} c_j(z)\, Q_j(w) \right\|^2_{L_2(\partial B_2)} d\sigma(\partial B_1) = \lim_{N\to\infty} \int\limits_{\partial B_1} \sum_{j=N+1}^{\infty} \|c_j(z)\|^2\, d\sigma(\partial B_1) = 0.$$

Это означает, что при $N \to \infty$ сумма $\sum\limits_{j=1}^{N} c_j(z)\, Q_j(w)$ сходится к $f(z,w)$ в пространстве $L_2(\partial B_1) \times L_2(\partial B_2)$. Тогда эта сумма равномерно сходится на каждом компакте в $B_1 \times B_2$, в частности, на $K = K_1 \times K_2 \subset X_1 \times X_2$. Теорема доказана. $\square$

4. Полнота алгеброидного множества Вейерштрасса

В этом разделе мы обсудим важный пример параболических многообразий и многочленов на этих многообразиях.

4.1. Пусть в комплексном пространстве $\mathbb{C}^n$ задано полиномиальное множество Вейерштрасса

$$A = \left\{z = ('z, z_n) \in \mathbb{C}^n : F(z) =: z_n^m + f_{m-1}('z)z_n^{m-1} + \ldots + f_1('z)z_n + f_0('z) = 0\right\},$$

где $f_j('z),\ j = 0, 1, 2, \ldots, m-1$ — целые функции переменной $z' = (z_1, z_2, \ldots, z_{n-1}) \in \mathbb{C}^{n-1}$. Тогда $X = \mathbb{C}^n \backslash A$ — S^*-параболическое с сюръективной функцией $\rho(z) = \dfrac{1}{2}\ln\left(|'z|^2 + \left|F(z) + \dfrac{1}{F(z)}\right|^2\right)$.

Очевидно, что $\rho(z) \in psh(X)$ и достигает максимума вне конечного множества $Q = \{F('0, z_n) = 0\}$. Остается доказать, что эта функция сюръективна на X, т. е. мы должны показать, что

$$E_r = \{\rho(z) < r\} \subset\subset X,\ \forall r \in \mathbb{R}. \tag{4.1}$$

Действительно, если $F(z) = 0$, то $\rho(z) = +\infty$, так что $\rho(z)|_A = +\infty$. Когда все коэффициенты $f_j('z),\ j = 0, 1, 2, \ldots, m-1$ являются константами, (4.1) тривиально. Поэтому предположим, что хотя бы одна из функций $f_j('z),\ j = 0, 1, 2, \ldots, m-1$ не является константой. Тогда $M_r = \max\limits_{|'z| \leqslant r}\{|f_0(z)|, \ldots, |f_{m-1}(z)|\} \to +\infty$ при $r \to +\infty$.

При $|'z| = r,\ |z_n| = M_r^2$ имеем

$$\rho(z) = \frac{1}{2}\ln\left(|'z|^2 + \left|F(z) + \frac{1}{F(z)}\right|^2\right) \geqslant \ln\frac{|F^2(z) + 1|}{|F(z)|} \geqslant$$

$$\geqslant \ln\frac{M_r^{4m} - C\left(M_r^{4m-1} + \ldots + M_r^2 + 1\right)}{M_r^{2m} + M_r^{2m-1} + \ldots M_r} = \ln M_r^{2m}(1 + \alpha_m(r)),$$

где $C = \mathrm{const}$ и $\alpha_m(r) \to 0$ при $r \to +\infty$. Если мы положим $U_r = \{|'z| \leqslant r,\ |z_n| \leqslant M_r^2\}$, то получим, что $\rho|_{\partial U_r} \to +\infty$ при $r \to +\infty$. Теперь рассмотрим множество $B_c = \{\rho(z) < c\}$, где c — константа. Это множество открыто, и если выбрать r достаточно большим, выполняются следующие неравенства:

$$\ln r \geqslant c, \quad \ln M_r^{2m}(1 + \alpha_m(r)) \geqslant c.$$

Тогда $B_c \subset\subset U_r$, так как B_c не имеет компонент на $X \backslash U_r$, поскольку $\rho(z)$ достигает максимума вне конечного множества $Q = \{F('0, z_n) = 0\}$.

Изучим структуру многочленов на X. Начнем со следующего интересного примера, предложенного А. Айтуной.

Пример 4.1. Если $F : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}$ определена как $F(z) = z_2 - e^{z_1}$, тогда $f(z) = z_2$ не является многочленом на X. Действительно, предположим, что $f(z) = z_2$ является многочленом, т. е. существуют константы d, c такие, что

$$|z_2| \leqslant c\left(1 + \sqrt{|z_1|^2 + \frac{|z_2 - e^{z_1} + 1|^2}{|z_2 - e^{z_1}|^2}}\right)^d, (z_1, z_2) \in X.$$

В частности, если $z = (\ln(k), k+1)$ для некоторого $k \in \mathbb{N}$, будем иметь

$$k + 1 \leqslant c\left(1 + \sqrt{\overset{2}{\ln}(k) + 4}\right)^d, \quad k \in \mathbb{N},$$

что невозможно. Хотя фукция $f(z) = z_2$ — не многочлен, она может быть приближена многочленами.

Основной результат статьи представлен в виде следующей теоремы.

Теорема 4.1. *Пусть в комплексном пространстве $\mathbb{C}^n$ задано алгеброидное множество Вейерштрасса*

$$A = \left\{ z = (`z, z_n) \in \mathbb{C}^n : F(z) =: z_n^m + f_{m-1}(`z) z_n^{m-1} + \ldots + f_1(`z) z_n + f_0(`z) = 0 \right\},$$

где все коэффициенты $f_j(`z)$, $j = 0, 1, 2, \ldots, m-1$, — целые функции переменной $z' = (z_1, z_2, \ldots, z_{n-1}) \in \mathbb{C}^{n-1}$ и хотя бы один из них не является многочленом. Если $X = \mathbb{C}^n \backslash A$ — S^*-параболическое многообразие Штейна со специальной сюръективной функцией $\rho(z) = \dfrac{1}{2} \ln \left(|`z|^2 + \left| F(z) + \frac{1}{F(z)} \right|^2 \right)$, то функция $f \in \mathcal{O}(X)$ — ρ-многочлен степени d тогда и только тогда, когда она допускает конечное разложение

$$f(z) = \sum_{k=0}^{d} P_{k,1}('z) \left(F(z) + \frac{1}{F(z)} \right)^k + \sum_{k=0}^{d-1} P_{k,2}('z) \frac{1}{F(z)} \left(F(z) + \frac{1}{F(z)} \right)^k, \tag{4.2}$$

где $P_{k,1}('z)$ и $P_{k,2}('z)$ — обыкновенные полиномы в $\mathbb{C}^{n-1}$ степени $(d-k)$ и $(d-k-1)$, соответственно.

4.2. В доказательстве теоремы 4.1 мы часто используем разложение Якоби—Хартогса по секциональным лемнискатам. Напомним некоторые результаты из теории рядов Якоби—Хартогса (подробнее см. [3]. Нам будет удобно использовать переменные [3] из разложения Якоби—Хартогса для изучения рядов рациональных функций).

Пусть $Q(z)$ — рациональная функция $\mathbb{C}$, $Q(\infty) = \infty$. Через G_R обозначим объединение нескольких связных компонент открытого множества $\{z \in \mathbb{C} : |Q(z)| < R\}$ в комплексной плоскости, которое называется *рациональной лемнискатой*. Если функция $f(z)$ голоморфна в окрестности $\overline{G_R}$, тогда функция

$$F(z, w) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\partial G_R} \frac{f(\xi)}{Q(\xi) - w} \cdot \frac{Q(\xi) - Q(z)}{\xi - z} d\xi$$

голоморфна в области $G_R \times \{|w| < R\}$. Согласно интегральной формуле Коши, $F(z, Q(z)) \equiv f(z)$, $z \in G_R$. Разложим $F(z, w)$ в ряд Хартогса по переменной w:

$$F(z, w) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k(z) w^k. \tag{4.3}$$

Если мы положим $w = Q(z)$, то

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k(z) Q^k(z), \quad z \in G_R, \tag{4.4}$$

а ряд (4.3) называется рядом Якоби—Хартогса функции $f(z)$.

Коэффициенты в (4.4) могут быть определены по формуле

$$c_k(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\partial G_R} f(\xi) \frac{Q(\xi) - Q(z)}{Q^{k+1}(\xi)\,(\xi - z)} d\xi \quad (z \in G_R,\ k = 0, 1, 2, \ldots). \tag{4.5}$$

Действительно,

$$\frac{1}{Q(\xi) - w} = \frac{1}{Q(\xi)} \cdot \frac{1}{1 - \frac{w}{Q(\xi)}} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{w^k}{(Q(\xi))^{k+1}}.$$

Таким образом,

$$F(z, w) = \sum_{k=0}^{+\infty} \left[\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\partial G_R} f(\xi) \cdot \frac{Q(\xi) - Q(z)}{Q^{k+1}(\xi)(\xi - z)} d\xi \right] \cdot w^k.$$

Это доказывает формулу (4.5). По интегральной формуле Коши контур ∂G_R может быть заменен любым контуром $\partial G_{R'}$, $R' < R$.

Если мы рассмотрим рациональную функцию $Q(z) = \dfrac{p_m(z)}{q_m(z)}$, где $p_m(z),\ q_m(z)$ — полиномы ($\deg p_m \leqslant m,\ \deg q_m \leqslant m$), то в силу (4.5)

$$c_k(z) = \frac{1}{q_m(z)} \cdot \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\partial G_R} \frac{f(\xi)\, q_m^k(\xi)}{p_m^{k+1}(\xi)} \cdot \frac{p_m(\xi) \cdot q_m(z) - p_m(z) \cdot q_m(\xi)}{\xi - z} d\xi.$$

Следовательно, коэффициенты $c_k(z) = \tilde{p}_{m-1}^{(k)}/q_m$ также являются рациональными функциями и $\deg c_k \leqslant m \quad (k = 0, 1, 2, \ldots)$:

$$c_k(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\partial G_R} f(\xi) \frac{Q(\xi) - Q(z)}{Q^{k+1}(\xi)\,(\xi - z)} d\xi = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\partial G_r} \frac{f(\xi)}{Q^{k+1}(\xi)} \frac{Q(\xi) - Q(z)}{\xi - z}\, d\xi =$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\partial G_R} \frac{f(\xi)}{Q^{k+1}(\xi)} \frac{1}{q_m(\xi) q_m(z)} \frac{p_m(\xi) \cdot q_m(z) - p_m(z) \cdot q_m(\xi)}{\xi - z}\, d\xi =$$

$$= \frac{1}{2\pi i q_m(z)} \int\limits_{\partial G_R} \frac{f(\xi)}{Q^{k+1}(\xi) q_m(\xi)} \frac{p_m(\xi) \cdot q_m(z) - p_m(z) \cdot q_m(\xi)}{\xi - z}\, d\xi;$$

т. е. $c_k\,(z)\, q_m\,(z)$ — полином по z_n степени $\deg = (m-1)$. Если $Q\,(z) = P\,(z)$, то

$$c_k(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\partial G_R} f(\xi) \frac{P(\xi) - P(z)}{P^{k+1}(\xi)\,(\xi - z)}\, d\xi = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\partial G_R} \frac{f(\xi)}{P^{k+1}(\xi)} \frac{P(\xi) - P(z)}{\xi - z}\, d\xi,$$

$$|c_k(z)| \leqslant \frac{1}{2\pi} \frac{M_f\,(R)}{R^{k+1}} \int\limits_{\partial G_R} \left| \frac{P(\xi) - P(z)}{\xi - z} \right| d\,|\xi| \qquad (z \in G_R,\ k = 0, 1, 2, \ldots).$$

Лемма 4.1. *Для любого монического многочлена $P(z)$ на комплексной плоскости выполняется неравенство*

$$\int\limits_{|P(\xi)| = R} \left| \frac{P(\xi) - P(z)}{\xi - z} \right| d\,|\xi| \leqslant C \cdot R \quad (|P(z)| < R).$$

Доказательство. Пусть $P\,(z) = z^m + a_{m-1} z^{m-1} + \ldots + a_1 z + a_0$ — монический многочлен. По разложению в ряд Тейлора получим

$$\frac{P(\xi) - P(z)}{\xi - z} = P'(z) + \frac{P''(z)}{2!}(\xi - z) + \ldots + \frac{P^{(m)}(z)}{m!}(\xi - z)^{m-1}$$

и рассмотрим интеграл

$$\int\limits_{|P(\xi)| = R} \left| \frac{P(\xi) - P(z)}{\xi - z} \right| d\,|\xi|\,.$$

Разделим интеграл на две части:

$$\int\limits_{\substack{|P(\xi)| = R \\ |\xi - z| \geqslant \sqrt[m]{R}}} \left| \frac{P(\xi) - P(z)}{\xi - z} \right| d\,|\xi| + \int\limits_{\substack{|P(\xi)| = R \\ |\xi - z| < \sqrt[m]{R}}} \left| \frac{P(\xi) - P(z)}{\xi - z} \right| d\,|\xi| \leqslant$$

$$\leqslant \int\limits_{\substack{|P(\xi)| = R \\ |\xi - z| \geqslant \sqrt[m]{R}}} \left| \frac{P(\xi) - P(z)}{\xi - z} \right| |d\xi| + \int\limits_{\substack{|P(\xi)| = R \\ |\xi - z| < \sqrt[m]{R}}} \left(\left|P'(z)\right| + \left| \frac{P''(z)}{2!} \right| \left|(\xi - z)\right| + \ldots + \left| \frac{P^{(m)}(z)}{m!} \right| \left|(\xi - z)^{m-1}\right| \right) |d\xi| \leqslant$$

$$\leqslant \int\limits_{\substack{|P(\xi)| = R \\ |\xi - z| \geqslant \sqrt[m]{R}}} \frac{2R}{\sqrt[m]{R}}\, |d\xi| + \int\limits_{\substack{|P(\xi)| = R \\ |\xi - z| < \sqrt[m]{R}}} \left(\left|P'(z)\right| + \left| \frac{P''(z)}{2!} \right| \sqrt[m]{R} + \ldots + \left| \frac{P^{(m)}(z)}{m!} \right| \left(\sqrt[m]{R} \right)^{(m-1)} \right) |d\xi|\,.$$

В работе В. И. Данченко [1] доказана следующая оценка длины лемнискат:

$$\int\limits_{|P(\xi)|=R} |d\xi| \leqslant 2\pi m \sqrt[m]{R}.$$

Таким образом, получаем

$$\int\limits_{|P(\xi)|=R} \left|\frac{P(\xi)-P(z)}{\xi - z}\right| d\,|\xi| \leqslant 4\pi m R + 2\pi m \sqrt[m]{R}\left(\left|P'(z)\right| + \left|\frac{P''(z)}{2!}\right| \sqrt[m]{R} + \ldots + \left|\frac{P^{(m)}(z)}{m!}\right| \left(\sqrt[m]{R}\right)^{m-1}\right). \tag{4.6}$$

Теперь мы используем следующую теорему Померенко [12] для оценки производной многочлена $P_m(\xi)$, $m = \deg P_m$:

Пусть E — связное и замкнутое множество с положительной гармонической емкостью $\operatorname{cap} E > 0$. Если на E выполняется неравенство $|P_m(\xi)| \leqslant 1$, тогда для всех $z \in E$ верна оценка

$$\left|P'_m(\xi)\right| \leqslant \frac{e \cdot m^2}{2\operatorname{cap}(E)}.$$

Последовательно используя эту оценку для производных полиномиальных лемнискат $\bar{G}_R = \{|P_m(z)| \leqslant R\}$ и учитывая равенство $\operatorname{cap}(G_R) = \sqrt[m]{R}$, получаем

$$\left|P_m^{(j)}(z)\right| \leqslant \frac{e^j m^2(m-1)^2 \ldots (m-j+1)^2}{2^j \sqrt[m]{R^j}} R = L(m,j) \cdot R^{\frac{m-j}{m}}, \quad |P_m(z)| < R,$$

где $L(m,j)$ — константы, которые зависят только от степени многочлена и порядка производной j. Применяя оценки производных к (4.6), мы завершаем доказательство. $\square$

Теорема 4.2 (см. [3]). *Область сходимости ряда* (4.4) *является лемнискатой* $\{|g(z)| < R\}$, *где R определено формулой*

$$R = \frac{1}{\overline{\lim\limits_{k\to\infty}} \sqrt[k]{\|c_k\|_E}},$$

где E — любое фиксированное неполярное множество, отделенное от множества полярных точек рациональной функции $Q(z)$.

Случай $'D \times \mathbb{C} \subset \mathbb{C}^n$.

Пусть теперь $Q('z, z_n) = \dfrac{a_0('z)\, z_n^m + \ldots + a_m('z)}{b_0('z)\, z_n^k + \ldots + b_k('z)}$, $m > k \geqslant 0$, $a_j, b_s \in \mathcal{O}('D)$ — произвольная псевдорациональная функция на $'D \times \mathbb{C} \subset \mathbb{C}^n$. Зафиксируем $'z \in' D$. Рассмотрим $G_{'z,r} = \{z_n \in \mathbb{C}_{z_n},\ |Q('z, z_n)| < R\}$. Это множество состоит из конечного числа областей.

Тогда, если функция $f('z, z_n)$ голоморфна в области $'D \times G_{'z,r}$, она может быть разложена в ряд Якоби—Хартогса:

$$f('z, z_n) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k('z, z_n) \cdot g^k(z_n), \tag{4.7}$$

где $c_k('z, z_n) = \dfrac{1}{2\pi i} \displaystyle\int\limits_{\partial G_r} f('z, \xi_n) \cdot \frac{Q('z, \xi_n) - Q('z, z_n)}{Q^{k+1}(\xi_n)(\xi_n - z_n)} d\xi_n$.

Очевидно, что коэффициенты $c_k('z, z_n)$ — рациональные функции по z_n, коэффициенты которых голоморфны в $'D$.

Теорема 4.3 (см. [3]). *Ряд Якоби—Хартогса* (4.7) *равномерно сходится на компактных подмножествах открытого множества*

$$\left\{('z, z_n) \in' D \times \mathbb{C} : \left|Q('z, z_n)\right| < R_*('z)\right\},$$

где $R('z) = 1/(\overline{\lim\limits_{k\to\infty}} \sqrt[k]{\|c_k('z, z_n)\|_E})$, $E \subset G_{'z,r} \in \mathbb{C}$ — любое фиксированное неплюриполярное множество, и $R_*('z) = \underline{\lim\limits_{'\xi\to'z}} R('\xi)$. (Заметим, что $R('z)$ не зависит от $E \subset G_{'z,r}$.) Более того, *функция* $u('z) = -\ln R_*('z)$ *плюрисубгармонична в* $'D$*, и множество* $\{'z \in D;\ R_*('z) < R('z)\}$ *плюриполярно.*

Прежде чем мы перейдем к доказательству основной теоремы этого раздела, докажем еще одну лемму о свойствах многочленов на рассматриваемых многообразиях.

Лемма 4.2. *Пусть задано алгеброидное множество Вейерштрасса в комплексном пространстве* $\mathbb{C}^n$

$$A = \left\{z = ('z, z_n) \in \mathbb{C}^n : F(z) =: z_n^m + f_{m-1}('z) z_n^{m-1} + \ldots + f_1('z) z_n + f_0('z) = 0t\right\},$$

где все коэффициенты $f_j('z)$, $j = 0, 1, 2, \ldots, m-1,$ — *целые функции переменной* $'z = (z_1, z_2, \ldots, z_{n-1}) \in \mathbb{C}^{n-1}$ *и хотя бы одна из них не является многочленом. Если* $X = \mathbb{C}^n \backslash A$ — S^**-параболическое многообразие Штейна со специальной сюръективной функцией* $\rho(z) = \dfrac{1}{2} \ln \left(|'z|^2 + \left|F(z) + \frac{1}{F(z)}\right|^2\right)$*, тогда каждый многочлен*

$$P('z) = \sum_{k_1 + \ldots + k_{n-1} \leqslant s} a_{k_1 \ldots k_{n-1}} z_1^{k_1} \ldots z_{n-1}^{k_{n-1}}$$

степени s *в то же время является* ρ*-многочленом степени* s *на* $X = \mathbb{C}^n \backslash A$ *и произведение* $P('z)$ *на* ρ*-многочлен вида* $\phi(z) = \left(F('z, z_n) + \dfrac{1}{F('z, z_n)}\right)^q$ *является* ρ*-многочленом степени* $\deg_{(X,\rho)} P('z)\phi(z) = s + q.$

Доказательство. Неравенства $\deg_{(X,\rho)} P('z) \leqslant s$ и $\deg_{(X,\rho)} P('z)\phi(z) \leqslant s + q$ тривиальны. Достаточно показать, что $\deg_{(X,\rho)} P('z)\phi(z) = s + q$. Предположим противное, т. е. что выполняется неравенство

$$\deg_{(X,\rho)} P('z)\phi(z) \leqslant s + q - \varepsilon$$

для достаточно малого действительного числа $\varepsilon > 0$. Тогда выполняется неравенство

$$\ln\left|P('z) \cdot \phi(z)\right| = M + (s+q-\varepsilon) \cdot \rho^+(z) \leqslant M + (s+q-\varepsilon) \cdot \frac{1}{2} \ln\left(1 + \left|'z\right|^2 + \left(F(z) + \frac{1}{F(z)}\right)^2\right). \quad (4.8)$$

Перепишем многочлен в виде суммы однородных многочленов:

$$P('z) = \sum_{k=0}^{s} P_s('z).$$

Так как $\deg P('z) = s$, $P_s('z) \not\equiv 0$ и, следовательно, существует $'w = (w_1, w_2, \ldots, w_{n-1}) \in \mathbb{C}^{n-1}$, $|'w| = 1$ такое, что $P_s('w) \neq 0$. Рассмотрим комплексную прямую $\ell :\ 'z = {'w} \cdot \lambda,\ \lambda \in \mathbb{C}$ и ограничение

$$g(\lambda) = P('z)\big|_\ell = P('w \cdot \lambda) = P_s('w) \cdot \lambda^s + P_{s-1}('w) \cdot \lambda^{s-1} + \ldots + P_0$$

Если мы положим $\lambda = R$, тогда

$$\left|P('w \cdot R)\right| = \left|P_s('w)\right| \cdot R^s (1 + P_{s-1}('w)\frac{1}{R} + o(\frac{1}{R})) \quad (4.9)$$

для достаточно большого числа $R > 0$. Если в оценке (4.7) положить $|z_1| = |w_1| \cdot R, \ldots, |z_{n-1}| = |w_{n-1}| \cdot R$ и $\left|F(z) + \dfrac{1}{F(z)}\right| = R$, тогда мы получим

$$\left|P('z) \cdot \phi(z)\right| \leqslant C \cdot \left(1 + \sqrt{2R^2}\right)^{s+q-\varepsilon} \leqslant 3C \cdot R^{s+q-\varepsilon}.$$

Последняя оценка остается верной и в случае ограничения $P('z) \cdot \phi(z)\big|_\ell = P('w\lambda) \cdot \phi('w\lambda, z_n)$, и мы будем иметь

$$\left|P_s('z) \cdot \phi(z)\big|_\ell\right| \leqslant 3C \cdot R^{s+q-\varepsilon}$$

Объединяя последнее неравенство с (4.8), мы получаем

$$3C \cdot R^{s+q-\varepsilon} \geqslant \left|P('wR) \cdot \phi('w\lambda, z_n)\right| = \left|P_s('w)\right| \cdot R^s (1 + P_{s-1}('w)\frac{1}{R} + o(\frac{1}{R})) R^q =$$

$$= \left|P_s('w)\right| \cdot (1 + P_{s-1}('w)\frac{1}{R} + o(\frac{1}{R}))R^{s+q},$$

$$R^{\varepsilon}(1 + \frac{P_{s-1}('w)}{R}1 + o(\frac{1}{R})) \leqslant \frac{3C}{\left|P_s('w)\right|}.$$

Последнее неравенство противоречит произвольности R. Таким образом, наше предположение неверно. Лемма 4.2 доказана. □

Доказательство теоремы 4.1.

I. *Достаточность*. Пусть задана функция вида

$$f('z, z_n) = \sum_{k=0}^{d} P_{k,1}('z) \cdot Q^k('z, z_n) + \frac{1}{F('z, z_n)} \sum_{k=0}^{d-1} P_{k,2}('z) \cdot Q^k('z, z_n),$$

где $P_{k,1}('z)$ и $P_{k,2}('z)$ — полиномы в $\mathbb{C}^{n-1}_{'z}$ степени $\deg P_{k,1}('z) \leqslant d-k$, $\deg P_{k,2}('z) \leqslant d-k-1$. Тогда мы оцениваем слагаемые

$$\ln\left|P^{k,1}('z)\right|\left|F(z) + \frac{1}{F(z)}\right|^k \leqslant \ln\left|P^{k,1}('z)\right| + \ln\left|F(z) + \frac{1}{F(z)}\right|^k \leqslant$$

$$\leqslant (d-k)\ln\left|'z\right| + k\ln\left|F(z) + \frac{1}{F(z)}\right| + C \leqslant (d-k)\rho^+(z) + k\rho^+(z) + C = d\rho^+(z) + C$$

и

$$\ln\left[\left|\frac{1}{F(z)}\right|\left|P^{k,1}('z)\right|\left|F(z) + \frac{1}{F(z)}\right|^k\right] = \ln\left|\frac{1}{F(z)}\right| + \ln\left|P^{k,1}('z)\right| + \ln\left|F(z) + \frac{1}{F(z)}\right|^k \leqslant$$

$$\leqslant \rho^+(z) + (d-k-1)\cdot\rho^+(z) + k\cdot\rho^+(z) + C = d\cdot\rho^+(z) + C.$$

Следовательно, каждое слагаемое в f — многочлен на X и $\deg_{(X,\rho)} f('z, z_n) \leqslant d$.

II. *Необходимость*. Докажем необходимость, т. е. что каждый ρ-многочлен в X допускает конечное разложение (4.1), в несколько этапов.

Этап 1. Пусть функция $f \in O(X)$ — ρ-многочлен степени d. Рассмотрим следующую рациональную функцию переменной z_n:

$$Q('z, z_n) = F('z, z_n) + \frac{1}{F('z, z_n)} = \frac{F^2('z, z_n) + 1}{F('z, z_n)},\ ('z, z_n) \in \mathbb{C}^n,\ \ Q('z, \infty) = \infty.$$

Зафиксируем $'z \in \mathbb{C}^{n-1}$ и рассмотрим рациональную лемнискату

$$G_{'z,R} = \left\{z_n \in \mathbb{C} :\ \left|Q('z, z_n)\right| < R\right\},\ R \geqslant 1.$$

Граница этой лемнискаты $\gamma_{'z,R}('z) = \left\{\left|Q('z, z_n)\right| = R\right\}$ состоит из конечного числа гладких кривых для почти всех значений $R \in \mathbb{R}_+$. Очевидно, $\forall R > 0$, $\forall 'z \in \mathbb{C}^{n-1}$, $G_{'z,R} \subset\subset X$. Разложим функцию $f('z, z_n)$ в ряд Якоби—Хартогса по степеням рациональной функции $Q('z, z_n)$:

$$f('z, z_n) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k('z, z_n) \cdot Q^k('z, z_n). \tag{4.10}$$

Коэффициенты ряда (4.10) определяются интегральной формулой

$$c_k('z, z_n) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma_{'z,R}} \frac{f('z, \xi_n)}{Q^{k+1}('z, \xi_n)} \cdot \frac{Q('z, \xi_n) - Q('z, z_n)}{(\xi_n - z_n)} d\xi_n. \tag{4.11}$$

При $Q('z, z_n) = F('z, z_n) + \dfrac{1}{F('z, z_n)}$ интегрирование по $\gamma_{'z,R}$ в (4.11) может быть заменено на разницу интегралов по полиномиальным лемнискатам:

$$\Gamma_{'z,\frac{R}{4}} = \left\{\left|F('z, \xi_n)\right| = \frac{R}{4}\right\},\quad \Gamma_{'z,\frac{4}{R}} = \left\{\left|F('z, \xi_n)\right| = \frac{4}{R}\right\}.$$

Заметим, что

$$\frac{Q('z,\xi_n)-Q('z,z_n)}{\xi_n-z_n}=\frac{1}{\xi_n-z_n}\cdot\left[F\left('z,\,\xi_n\right)+\frac{1}{F\left('z,\,\xi_n\right)}-F\left('z,\,z_n\right)-\frac{1}{F\left('z,\,z_n\right)}\right]=$$

$$=\frac{F\left('z,\,\xi_n\right)-F\left('z,\,z_n\right)}{\xi_n-z_n}\cdot\left[1-\frac{1}{F\left('z,\,\xi_n\right)F\left('z,\,z_n\right)}\right].$$

Соответственно, мы получаем

$$c_k('z,z_n)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma_{'z,\frac{R}{4}}}\frac{f('z,\xi_n)}{Q^{k+1}('z,\xi_n)}\cdot\frac{F\left('z,\,\xi_n\right)-F\left('z,\,z_n\right)}{(\xi_n-z_n)}d\xi_n-$$

$$-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma_{'z,\frac{4}{R}}}\frac{f('z,\xi_n)}{Q^{k+1}('z,\xi_n)}\cdot\frac{F\left('z,\,\xi_n\right)-F\left('z,\,z_n\right)}{(\xi_n-z_n)}d\xi_n-$$

$$-\frac{1}{F\left('z,\,z_n\right)}\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma_{'z,\frac{R}{4}}}\frac{f('z,\xi_n)}{Q^{k+1}('z,\xi_n)F\left('z,\,\xi_n\right)}\cdot\frac{F\left('z,\,\xi_n\right)-F\left('z,\,z_n\right)}{(\xi_n-z_n)}d\xi_n+$$

$$+\frac{1}{F\left('z,\,z_n\right)}\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma_{'z,\frac{4}{R}}}\frac{f('z,\xi_n)}{Q^{k+1}('z,\xi_n)F\left('z,\,\xi_n\right)}\cdot\frac{F\left('z,\,\xi_n\right)-F\left('z,\,z_n\right)}{(\xi_n-z_n)}d\xi_n=$$

$$=P^{k,1}_{m-1}\left('z,z_n\right)-P^{k,2}_{m-1}\left('z,z_n\right)\cdot\frac{1}{F\left('z,\,z_n\right)},$$

и все коэффициенты ряда (4.10) являются рациональными функциями z_n степени $\leqslant 2m-1$ с голоморфными коэффициентами, т. е. $\deg_{z_n}\left[c_k('z,z_n)F\left('z,z_n\right)\right]\leqslant 2m-1$.

Этап 2. Так как $f('z,z_n)$ — ρ-многочлен степени d, то

$$\ln\left|f('z,z_n)\right|\leqslant c+d\rho^+(z),\quad \rho(z)=\frac{1}{2}\ln\left(\left|'z\right|^2+\left|Q('z,z_n)\right|^2\right).$$

Из неравенства

$$\rho^+(z)\leqslant\frac{1}{2}\ln\left(1+\left|'z\right|^2+\left|Q('z,z_n)\right|^2\right)$$

получаем

$$\left|f('z,z_n)\right|\leqslant C\cdot\left(1+\left|'z\right|^2+R^2\right)$$

при $z_n\in\gamma_{'z,R}$ и, таким образом, для $R>4$ мы получаем оценки

$$\left|P^{k,1}_{m-1}\left('z,z_n\right)\right|=$$

$$=\frac{1}{2\pi}\left|\int\limits_{\Gamma_{'z,\frac{R}{4}}}\frac{f('z,\xi_n)}{Q^{k+1}('z,\xi_n)}\frac{F\left('z,\,\xi_n\right)-F\left('z,\,z_n\right)}{(\xi_n-z_n)}d\xi_n-\int\limits_{\Gamma_{'z,\frac{4}{R}}}\frac{f('z,\xi_n)}{Q^{k+1}('z,\xi_n)}\frac{F\left('z,\,\xi_n\right)-F\left('z,\,z_n\right)}{(\xi_n-z_n)}d\xi_n\right|\leqslant$$

$$\leqslant\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\Gamma_{'z,\frac{R}{4}}}\left|\frac{f('z,\xi_n)}{Q^{k+1}('z,\xi_n)}\right|\cdot\left|\frac{F\left('z,\,\xi_n\right)-F\left('z,\,z_n\right)}{(\xi_n-z_n)}\right||d\xi_n|+$$

$$+\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\Gamma_{'z,\frac{4}{R}}}\left|\frac{f('z,\xi_n)}{Q^{k+1}('z,\xi_n)}\right|\cdot\left|\frac{F\left('z,\,\xi_n\right)-F\left('z,\,z_n\right)}{(\xi_n-z_n)}\right||d\xi_n|\leqslant$$

$$\leqslant\frac{C\left[\left(1+|'z|^2+R^2\right)\right]^{d/2}}{2\pi}\frac{1}{\left(\frac{R}{4}-\frac{4}{R}\right)^{k+1}}\left[\int\limits_{\Gamma_{'z,\frac{R}{4}}}\left|\frac{F\left('z,\,\xi_n\right)-F\left('z,\,z_n\right)}{(\xi_n-z_n)}\right||d\xi_n|+\right.$$

$$+\int\limits_{\Gamma_{'z,\frac{4}{R}}}\left|\frac{F('z,\,\xi_n)-F('z,\,z_n)}{(\xi_n-z_n)}\right||d\xi_n|\Bigg];$$

$$\left|P_{m-1}^{k,2}('z,z_n)\right|\leqslant\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\Gamma_{'z,\frac{R}{4}}}\left|\frac{f('z,\xi_n)}{Q^{k+1}('z,\xi_n)F('z,\,\xi_n)}\right|\cdot\left|\frac{F('z,\,\xi_n)-F('z,\,z_n)}{(\xi_n-z_n)}\right||d\xi_n|+$$

$$+\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\Gamma_{'z,\frac{4}{R}}}\left|\frac{f('z,\xi_n)}{Q^{k+1}('z,\xi_n)F('z,\,\xi_n)}\right|\cdot\left|\frac{F('z,\,\xi_n)-F('z,\,z_n)}{(\xi_n-z_n)}\right||d\xi_n|\leqslant$$

$$\leqslant\frac{C\left[\left(1+|`z|^2+R^2\right)\right]^{d/2}}{2\pi}\frac{1}{\left(\frac{R}{4}-\frac{4}{R}\right)^{k+1}}\frac{4}{R}\int\limits_{\Gamma_{'z,\frac{R}{4}}}\left|\frac{F('z,\,\xi_n)-F('z,\,z_n)}{(\xi_n-z_n)}\right||d\xi_n|+$$

$$+\frac{C\left[\left(1+|`z|^2+R^2\right)\right]^{d/2}}{2\pi}\frac{1}{\left(\frac{R}{4}-\frac{4}{R}\right)^{k+1}}\frac{R}{4}\int\limits_{\Gamma_{'z,\frac{4}{R}}}\left|\frac{F('z,\,\xi_n)-F('z,\,z_n)}{(\xi_n-z_n)}\right||d\xi_n|.$$

Таким образом, в силу леммы 4.1 для всех $\forall 'z\in\mathbb{C}^{n-1}$ и $\forall z_n\in\Omega_{'z,R}=\left\{\dfrac{4}{R}<|F('z,z_n)|<\dfrac{R}{4}\right\}$ мы получаем

$$\left|P_{m-1}^{k,1}('z,z_n)\right|\leqslant C_1\left[\left(1+\left|'z\right|^2+R^2\right)\right]^{d/2}R^{-k},$$
$$\left|P_{m-1}^{k,2}('z,z_n)\right|\leqslant C_2\left[\left(1+\left|'z\right|^2+R^2\right)\right]^{d/2}R^{-k-1}. \tag{4.12}$$

Следовательно, в силу произвольности R

$$P_{m-1}^{k,1}('z,z_n)\equiv 0\ \forall k>d,\ \ P_{m-1}^{k,2}('z,z_n)\equiv 0\ \forall k>d-1,$$

т. е.

$$f('z,z_n)=\sum_{k=0}^{d}P_{m-1}^{k,1}('z,z_n)\cdot Q^k('z,z_n)+\frac{1}{F('z,z_n)}\sum_{k=0}^{d-1}P_{m-1}^{k,2}('z,z_n)\cdot Q^k('z,z_n). \tag{4.13}$$

Этап 3. На этом этапе мы покажем, что псевдомногочлены $P_{m-1}^{k,1}('z,z_n)$, $P_{m-1}^{k,2}('z,z_n)$ не зависят от z_n. Для этого мы воспользуемся леммой Картана об оценке модуля многочленов.

Лемма (лемма Картана, см. [13]). *Для любого действительного числа $\varepsilon>0$ и для каждого многочлена $p(\lambda)=(\lambda-\alpha_1)\ldots(\lambda-\alpha_n)$ существует система дисков на комплексной плоскости с общей суммой радиусов ε такая, что вне этих дисков выполняется неравенство*

$$|p(\lambda)|=|(\lambda-\alpha_1)\ldots(\lambda-\alpha_n)|>\left(\frac{\varepsilon}{e}\right)^n.$$

Следствие. *Для любого $\varepsilon>0$ существует действительное число $\alpha(\varepsilon)>0$ и радиусы $r_j>0$ такие, что $\sum r_j<\varepsilon$ и для всех многочленов вида $p(\lambda)=1+{}_1\lambda+\ldots+c_n\lambda^n$ существуют диски $B_j=\{|\lambda-b_j|<r_j\}$ в диске $|\xi|<1$ такие, что вне всех этих дисков выполняется неравенство $|p(\lambda)|>\alpha(\varepsilon)>0$.*

Предположим, что $P_{m-1}^{k,1}('z,z_n)$ представляется в виде

$$P_{m-1}^{k,1}('z,z_n)=a_0('z)+a_1('z)z_n+\ldots+a_s('z)z_n^s,$$

где коэффициенты $a_j('z)$, $j=0,1,\ldots,s$, $s\geqslant 0$, $a_s('z)\not\equiv 0$, — целые функции переменной $z=(z_1,z_2,\ldots,z_{n-1})\in\mathbb{C}^{n-1}$. Из (4.12) имеем

$$\left|P_{m-1}^{k,1}('z,z_n)\right|\leqslant C_1\left[\left(1+\left|'z\right|^2+R^2\right)\right]^{d/2}R^{-k},\ z\in\mathbb{C}^{n-1},\ \frac{4}{R}<\left|F('z,z_n)\right|<\frac{R}{4}.$$

Мы показали, что эта оценка противоречит нашему предположению. Зафиксируем положительное большое число $L \in \mathbb{N}$ и положим $G_{'z} = \left\{ \frac{4}{R} < |F('z, z_n)| < \frac{R}{4},\ |z_n| > \|'z\|^L \right\}$. Так как F не является многочленом (по $'z$), для каждого фиксированного L множество $G_{'z}$ — достаточно большое. Но для $|z_n| > 1$, $|a_s('z)| > \delta > 0$ (заметим, что мы предположили $a_s('z) \not\equiv 0$) имеем

$$\left|P^{k,1}_{m-1}('z, z_n)\right| = \left|a_0('z) + \ldots + a_s('z)\, z_n^s\right| =$$

$$= \left|a_s('z)\right| |z_n^s| \left|1 + d_1('z)\frac{1}{z_n} + \ldots + d_s('z)\frac{1}{z_n^s}\right| > \delta\, |z_n^s| \left|1 + d_1('z)\frac{1}{z_n} + \ldots + d_s('z)\frac{1}{z_n^s}\right|.$$

Если мы положим $\zeta_n = \dfrac{1}{z_n}$ и зафиксируем достаточно малое число $\varepsilon > 0$, тогда по следствию из леммы Картана существуют диски $B_j('z) \subset \{|\zeta| < 1\}$, зависящие от $'z$ и такие, что $\sum r_j < \varepsilon$ и выполняется

$$\left|1 + d_1('z)\zeta_n + \ldots + d_s('z)\zeta_n^s\right| \geqslant \alpha(\varepsilon), \ \ \zeta \notin B_j.$$

Следовательно, для $z_n \in G_{'z},\ |a_s('z)| > \delta,\ z_n \notin B'_j('z)$, где $B'_j('z)$ — образ шара $B_j('z) \subset \{|\zeta| < 1\}$ при отображении $\zeta_n = \dfrac{1}{z_n}$,

$$\left|P^{k,1}_{m-1}('z, z_n)\right| > \delta \left|'z\right|^{s\cdot L} \alpha(\varepsilon), \quad z_n \notin B'_j('z).$$

Если мы выберем L и R достаточно большим, то $G_{'z} \setminus \bigcup\limits_j B'_j('z) \neq \varnothing$ и, таким образом,

$$\delta\left|'z\right|^{s\cdot L}\alpha(\varepsilon) < C_1\left[\left(1 + \left|'z\right|^2 + R^2\right)\right]^{d/2} R^{-k}.$$

Это противоречит нашему предположению при $s \neq 0$. Таким образом, $P^{k,1}_{m-1}('z, z_n)$ не зависит от z_n и по оценкам является многочленом по $'z$ степени $\leqslant d$, т. е.

$$P^{k,1}_{m-1}('z, z_n) = P_{k,1}('z).$$

Аналогично, мы можем показать, что $P^{k,2}_{m-1}('z, z_n)$ так же не зависит от z_n и является многочленом по $'z$ степени $\leqslant d$, т. е. $P^{k,2}_{m-1}('z, z_n) = P_{k,1}('z)$. Таким образом,

$$f('z, z_n) = \sum_{k=0}^{d} P_{k,1}('z) \cdot Q^k('z, z_n) + \frac{1}{F('z, z_n)} \sum_{k=0}^{d-1} P_{k,2}('z) \cdot Q^k('z, z_n). \tag{4.14}$$

Завершим доказательство теоремы 4.1, уточнив степени многочленов $P_{k,1}('z), P_{k,2}('z)$.

Итак, имеет место разложение (4.14) и, поскольку в левой части равенства стоит ρ-многочлен f степени d, то степень каждого слагаемого в левой части должна быть меньше или равна d (поскольку при фиксированном $'z$ функции $Q^k('z, z_n)$ линейно независимы). Следовательно, мы получаем неравенства

$$\deg P^{k,1}('z) \leqslant d - k, \ \ \deg P^{k,2}('z) \leqslant d - k - 1.$$

В противном случае по лемме 4.2 в правой части равенства стоит ρ-многочлен высшей степени. Теорема 4.1 доказана. □

Пример 4.2. Для $A = \left\{z_2^2 - e^{z_1} = 0\right\} \subset \mathbb{C}^2$ многообразие $X = \mathbb{C}^2 \setminus A$ не регулярно. Функция $F(z) = z_2$ разделяет точки $(0, +2)$, $(0, -2)$. Но многочлены

$$\sum_{k=0}^{d} P_{k,1}(z_1)\left(z_2^2 - e^{z_1} + \frac{1}{z_2{}^2 - e^{z_1}}\right)^k + \sum_{k=0}^{d-1} P_{k,2}(z_1)\frac{1}{z_2{}^2 - e^{z_1}}\left(z_2{}^2 - e^{z_1} + \frac{1}{z_2{}^2 - e^{z_1}}\right)^k$$

не разделяют их.

Пример 4.3. Если $A = \{z_n - \varphi('z) = 0\} \subset \mathbb{C}^n$ является графом, то многообразие $X = \mathbb{C}^n \setminus A$ регулярно, потому что в этом случае $f(z) = z_n$ можно аппроксимировать полиномами на $X = \mathbb{C}^n \setminus A$. В самом деле, если мы обозначим через $T_k : \mathbb{C}^{n-1} \to \mathbb{C}$ многочлен Тейлора степени k для $\varphi('z)$, то легко убедиться, что $P_k(z) = F(z) - T_k('z)$ — полином на X и $P_k(z)$ аппроксимирует z_n на компактных подмножествах X.

Пример 4.4. Если $A = \{P(z) = 0\} \subset \mathbb{C}^n$ является алгебраическим, то многообразие $X = \mathbb{C}^2 \backslash A$ регулярно. Рассмотрим правильное погружение X в пространство $\mathbb{C}^{n+1} = \mathbb{C}^n_z \times \mathbb{C}_w$ по формуле $z \to \left(z, \dfrac{1}{P(z)}\right)$. Тогда X реализуется как алгебраическое множество $X = \{w \cdot P(z) = 1\}$. Теперь мы можем использовать технику примера 4.3: после соответствующего унитарного преобразования $U : ('z, z_n, w) \to ('\xi, \xi_n, \xi_{n+1})$ будем иметь $X \subset \{('\xi, \xi_n, \xi_{n+1}) \in \mathbb{C}^{n+1} : \ \|\xi_{n+1}\| < C(1 + (|'\xi|^2 + |\xi_n|^2)^k)\}$, где C, k — константы. Тогда, если мы положим $\rho(w) = \dfrac{1}{2}\ln\left(|'\xi|^2 + |\xi_n|^2\right)$, то сужение $\rho|_A$ — специальная сюръективная функция для X. Ясно, что многочлены на A являются сужениями многочленов $p('\xi, \xi_n, \xi_{n+1})$ в $\mathbb{C}^{n+1}$. Следовательно, $\mathcal{P}^d_\rho(X)$ плотно в $\mathcal{O}(X)$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Данченко В. И.* Длины лемнискат. Вариации рациональных функций// Мат. сб. — 2007. — *198*, № 8. — С. 1111–1117.
2. *Садуллаев А. С.* Дефектные дивизоры в смысле Валирона// Мат. сб. — 1979. — *108*, № 4. — С. 567–580.
3. *Садуллаев А. С., Чирка Е. М.* О продолжении функций с полярными особенностями// Мат. сб. — 1987. — *132*, № 3. — С. 383–390.
4. *Aytuna A., Krone J., Terzioglu T.* Complemented infinite type power series subspaces of nuclear Frechet spaces// Math. Ann. — 1989. — *283*, № 2. — С. 193–202.
5. *Aytuna A., Sadullaev A.* Parabolic Stein manifolds// Math. Scand. — 2014. — *114*, № 1. — С. 86–109.
6. *Aytuna A., Sadullaev A.* Polynomials on parabolic manifolds// В сб.: «Topics in several complex variables. First USA–Uzbekistan conference on analysis and mathematical physics, California State University, Fullerton, CA, USA, May 20–23, 2014. Proceedings». — Providence: Am. Math. Soc., 2016. — С. 1–22.
7. *Bedford E., Kalka M.* Foliations and complex Monge—Ampere equations// Commun. Pure Appl. Math. — 1977. — *30*. — С. 543–571.
8. *Demailly J. P.* Mesures de Monge—Ampere et caractrisation geometrique des variets algebriques// Mem. Soc. Math. Fr. (N.S.). — 1985. — *19*. — С. 1–124.
9. *Foote R. E.* Homogeneous complex Monge—Ampere equations and algebraic embeddings of parabolic manifolds// Indiana Univ. Math. J. — 1990. — *39*, № 4. — С. 1245–1273.
10. *Griffits P., King J.* Nevanlinna theory and holomorphic mappings between algebraic varieties// Acta Math. — 1973. — *130*. — С. 145–220.
11. *Kalka M., Patrizio G.* Splitting parabolic manifolds// ArXiv. — 2014. — 1409.3972v1 [mathCV].
12. *Pomerenko Ch.* On derivative of a polynomial// Michigan Math. J. — 1959. — *6*, № 4. — С. 373–375.
13. *Poppenberg M.* Tame subspaces of power series spaces// В сб.: «Functional analysis. Proceedings of the first international workshop held at Trier University, Germany, September 26 – October 1, 1994». — Berlin: de Gruyter, 1996. — С. 365-375.
14. *Rudin W.* A geometric criterion for algebraic varieties// J. Math. Mech. — 1968. — *17*. — С. 671–683.
15. *Shabat B. V.* Introduction to complex analysis. Part II: Functions of several variables. — Providence: Am. Math. Soc., 1992.
16. *Snaebjarnarson A. S.* Rapid polynomial approximation on Stein manifolds// ArXiv. — 2016. — 1612.06173v1 [math.CV].
17. *Stoll W.* Value distribution on parabolic spaces. — Berlin—Heidelberg—New York: Springer, 1977.
18. *Stoll W.* The characterization of strictly parabolic manifolds// Ann. Sc. Norm. Super. Pisa Cl. Sci. (4). — 1980. — *7*. — С. 87–154.
19. *Vogt D.* Charakterisierung der Unterräume von (s)// Math. Z. — 1977. — *155*, № 2. — С. 109–111.
20. *Zeriahi A.* Function de Green pluricomplex a pole a l'infini sur un espace de Stein parabolique// Math. Scand. — 1991. — *69*. — С. 89–126.

А. А. Атамуратов
Ургенчский государственный университет им. Аль-Хорезми, Ургенч, Узбекистан
E-mail: alimardon01@mail.ru

DOI: 10.22363/2413-3639-2022-68-1-41-58 UDC 517.55

Polynomials on Regular Parabolic Manifolds

© 2022 **A. A. Atamuratov**

Abstract. In this work, we consider the regular parabolic manifold X and polynomials on it. We prove some properties of regular parabolic manifolds and describe polynomials on complements of Weierstrass algebroidal sets.

REFERENCES

1. V. I. Danchenko, "Dliny lemniskat. Variatsii ratsional'nykh funktsiy" [Lengths of lemniscates. Variations of rational functions], *Mat. sb.* [Math. Digest], 2007, **198**, No. 8, 1111–1117 (in Russian).
2. A. S. Sadullaev, "Defektnye divizory v smysle Valirona" [Deficient divisors in the Valiron sense], *Mat. sb.* [Math. Digest], 1979, **108**, No. 4, 567–580 (in Russian).
3. A. S. Sadullaev and E. M. Chirka, "O prodolzhenii funktsiy s polyarnymi osobennostyami" [On the continuation of functions with polar singularities], *Mat. sb.* [Math. Digest], 1987, **132**, No. 3, 383–390 (in Russian).
4. A. Aytuna, J. Krone, and T. Terzioglu, "Complemented infinite type power series subspaces of nuclear Frechet spaces," *Math. Ann.*, 1989, **283**, No. 2, 193–202.
5. A. Aytuna and A. Sadullaev, "Parabolic Stein manifolds," *Math. Scand.*, 2014, **114**, No. 1, 86–109.
6. A. Aytuna and A. Sadullaev, "Polynomials on parabolic manifolds," In: *Topics in several complex variables. First USA–Uzbekistan conference on analysis and mathematical physics, California State University, Fullerton, CA, USA, May* 20–23, 2014. *Proceedings*, Am. Math. Soc., Providence, 2016, pp. 1–22.
7. E. Bedford and M. Kalka, "Foliations and complex Monge—Ampere equations," *Commun. Pure Appl. Math.*, 1977, **30**, 543–571.
8. J. P. Demailly, "Mesures de Monge—Ampere et caractrisation geometrique des variets algebriques," *Mem. Soc. Math. Fr. (N.S.)*, 1985, **19**, 1–124.
9. R. E. Foote, "Homogeneous complex Monge—Ampere equations and algebraic embeddings of parabolic manifolds," *Indiana Univ. Math. J.*, 1990, **39**, No. 4, 1245–1273.
10. P. Griffits and J. King, "Nevanlinna theory and holomorphic mappings between algebraic varieties," *Acta Math.*, 1973, **130**, 145–220.
11. M. Kalka and G. Patrizio, "Splitting parabolic manifolds," *ArXiv*, 2014, 1409.3972v1 [mathCV].
12. Ch. Pomerenko, "On derivative of a polynomial," *Michigan Math. J.*, 1959, **6**, No. 4, 373–375.
13. M. Poppenberg, "Tame subspaces of power series spaces," In: *Functional analysis. Proceedings of the first international workshop held at Trier University, Germany, September* 26 – *October* 1*, 1994*, de Gruyter, Berlin, 1996, pp. 365-375.
14. W. Rudin, "A geometric criterion for algebraic varieties," *J. Math. Mech.*, 1968, **17**, 671–683.
15. B. V. Shabat, *Introduction to complex analysis. Part II: Functions of several variables*, Am. Math. Soc., Providence, 1992.
16. A. S. Snaebjarnarson, "Rapid polynomial approximation on Stein manifolds," *ArXiv*, 2016, 1612.06173v1 [math.CV].
17. W. Stoll, *Value distribution on parabolic spaces*, Springer, Berlin—Heidelberg—New York, 1977.
18. W. Stoll, "The characterization of strictly parabolic manifolds," *Ann. Sc. Norm. Super. Pisa Cl. Sci. (4)*, 1980, **7**, 87–154.
19. D. Vogt, "Charakterisierung der Unterräume von (s)," *Math. Z.*, 1977, **155**, No. 2, 109–111.
20. A. Zeriahi, "Function de Green pluricomplex a pole a l'infini sur un espace de Stein parabolique," *Math. Scand.*, 1991, **69**, 89–126.

A. A. Atamuratov
Urgench State University, Urgench, Uzbekistan
E-mail: alimardon01@mail.ru