Современная математика. Фундаментальные направления. Том 68, № 1 (2022). С. 25–40
Contemporary Mathematics. Fundamental Directions. ISSN 2413-3639 (Print)

DOI: 10.22363/2413-3639-2022-68-1-25-40 УДК 519.63

АЛГЕБРАИЧЕСКОЕ УСЛОВИЕ ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНОЙ УСТОЙЧИВОСТИ ПРОТИВОПОТОЧНОЙ РАЗНОСТНОЙ СХЕМЫ ДЛЯ ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ СИСТЕМ

© 2022 г. **Р. Д. АЛАЕВ, Д. Е. НЕМАТОВА**

Аннотация. В работе исследуется вопрос о получении алгебраического условия экспоненциальной устойчивости численного решения противопоточной разностной схемы для смешанной задачи, поставленной для одномерных симметричных t-гиперболических систем с постоянными коэффициентами и с диссипативными граничными условиями. Получена априорная оценка численного решения краевой разностной задачи. Эта оценка позволяет установить экспоненциальную устойчивость численного решения. Доказана теорема об экспоненциальной устойчивости численного решения краевой разностной задачи. Даны легко проверяемые алгебраические условия экспоненциальной устойчивости численного решения. Доказана сходимость численного решения.

ОГЛАВЛЕНИЕ

1. Введение 25
2. Экспоненциальная устойчивость решения дифференциальной задачи 26
3. Разностная схема 28
4. Пример численного расчета 36
5. Заключение 38
Список литературы 38

1. Введение

В данной работе рассматривается смешанная задача для одномерной линейной гиперболической системы с диссипативными краевыми условиями в случае постоянных коэффициентов [3]. Устойчивость решений одномерных гиперболических систем изучалась в [10]. Основной идеей данной работы было исследование устойчивости решения гиперболических систем путем построения функции Ляпунова и получения для нее априорных оценок в различных функциональных пространствах.

В настоящей работе исследуются вопросы построения и исследования разностной схемы численного расчета устойчивых решений для одномерной линейной гиперболической системы с диссипативными краевыми условиями в случае постоянных коэффициентов. Следует отметить, что решению этой проблемы посвящено множество работ [2,4,6,11]. Однако во всех этих работах техника построения интегралов диссипативной энергии использовалась для построения разностных схем и исследования их устойчивости. Полученные в этих работах априорные оценки численного решения начально-краевых задач для гиперболических систем не позволяют делать утверждения об экспоненциальной устойчивости численного решения.

В настоящей работе исследуется противопоточная разностная схема для численного расчета устойчивых решений одномерной линейной гиперболической системы с диссипативными граничными условиями в случае постоянных коэффициентов. Построен дискретный аналог функции Ляпунова и получена для него априорная оценка. Полученная априорная оценка позволяет установить экспоненциальную устойчивость численного решения. Следовательно, это дает нам возможность доказать сходимость численного решения. Получены легко проверяемые алгебраические условия экспоненциальной устойчивости численного решения разностной краевой задачи.

2. Экспоненциальная устойчивость решения дифференциальной задачи

Определение 2.1. Система

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + C\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x} = 0, \tag{2.1}$$

состоящая из n уравнений для n неизвестных функций $\mathbf{u} = (u_1, u_2, \ldots, u_n)$ с матрицами $\mathbf{C} = \|c_{ik}\|$, называется *гиперболической*, если все корни характеристического уравнения $\det\|\mathbf{C} - k\mathbf{E}\| = 0$ (здесь $\mathbf{E}$ — единичная матрица) вещественны и различны.

В работе [3] показано, что система (2.1) может быть приведена к специальному каноническому виду

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{K}\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x} = 0, \tag{2.2}$$

где $\mathbf{K}$ — диагональная матрица, и при некоторой невырожденной матрице $\mathbf{Z}$ выполнено $\mathbf{v} = \mathbf{Z}^{-1}\mathbf{u}$.

Предположим, что элементы матрицы $\mathbf{K}$ упорядочены следующим образом:

$$\mathbf{K} = \begin{pmatrix} \mathbf{K}^+ & 0 \\ 0 & -\mathbf{K}^- \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{K}^+ = \begin{pmatrix} a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & a_m \end{pmatrix}, \quad \mathbf{K}^- = \begin{pmatrix} a_{m+1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{m+2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & a_n \end{pmatrix},$$

где $a_i > 0$, $i = 1, \ldots, n$.

Рассмотрим в области $0 < x < L$, $t > 0$ смешанную задачу для системы (2.2) с граничными условиями при $x = 0$:

$$\mathbf{v}^{\mathrm{I}} = \mathbf{s}\mathbf{v}^{\mathrm{II}}, \tag{2.3}$$

и при $x = l$:

$$\mathbf{v}^{\mathrm{II}} = \mathbf{r}\mathbf{v}^{\mathrm{I}}. \tag{2.4}$$

Начальные условия для этой задачи задаются в виде:

$$v_i(x, 0) = \varphi_i(x), \quad 0 \leqslant x \leqslant L \quad (i = 1, \ldots, n). \tag{2.5}$$

Здесь $\mathbf{v}^{\mathrm{I}} = (v_1, v_2, \ldots, v_m)^{\mathrm{T}}$, $\mathbf{v}^{\mathrm{II}} = (v_{m+1}, v_{m+2}, \ldots, v_n)^{\mathrm{T}}$, $\mathbf{s}$ — прямоугольная матрица порядка $(n - m) \times m$, $\mathbf{r}$ — прямоугольная матрица порядка $m \times (n - m)$:

$$\mathbf{s} = \|s_{pq}\|, \quad p = 1, \ldots n - m, \ q = 1, \ldots m; \quad \mathbf{r} = \|r_{qp}\|, \quad p = 1, \ldots, n - m, \quad q = 1, \ldots, m.$$

Определение 2.2 (экспоненциальная устойчивость [10])**.** Система (2.2) с граничными условиями (2.3)-(2.4) *экспоненциально устойчива* по норме L^2, если существуют $\nu > 0$ и $C > 0$ такие, что для любого начального условия $\phi \in \mathrm{L}^2((0, l), \mathbb{R}^n)$ L^2-решение смешанной задачи (2.2)–(2.5) удовлетворяет неравенству

$$\|\mathbf{v}(t, \cdot)\|_{\mathrm{L}^2((0,L),\mathbb{R}^n)} \leqslant Ce^{-\nu t}\|\phi\|_{\mathrm{L}^2((0,L),\mathbb{R}^n)}, \quad t \geqslant 0. \tag{2.6}$$

Введем понятие слабого решения смешанной задачи (2.2)–(2.5) в $L^2((0, L); \mathbb{R}^n)$. Для этого умножим (2.2) слева на $\psi^T \in C^1([0, T] \times [0, L]; \mathbb{R}^n)$, где T — заданное положительное число. Тогда мы получаем уравнение

$$\psi^T\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \psi^T\mathbf{K}\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x} = 0.$$

Проинтегрируем обе части этого тождества по области $(0, T) \times (0, L)$. Пока предположим, что решения $\mathbf{v}$ принадлежат классу C^1 относительно t и x. Используя формулы интегрирования по частям и начальные условия (2.5), имеем:

$$
\begin{aligned}
0 = \int_0^L \int_0^T \left[\psi^T \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \psi^T \mathbf{K} \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x}\right] dt dx = \int_0^L \psi^T(T,x)\mathbf{v}(T,x) - \int_0^L \psi^T(0,x)\mathbf{v}(0,x) + \\
+ \int_0^T \left[\left(\psi^{\mathrm{I}}(t,L)\right)^T \mathbf{K}^+ \mathbf{v}^{\mathrm{I}}(t,L) - \left(\psi^{\mathrm{II}}\right)^T (t,L)\mathbf{K}^- \mathbf{v}^{\mathrm{II}}(t,L)\right] dt - \\
- \int_0^T \left[\left(\psi^{\mathrm{I}}(t,0)\right)^T \mathbf{K}^+ \mathbf{v}^{\mathrm{I}}(t,0) - \left(\psi^{\mathrm{II}}\right)^T (t,0)\mathbf{K}^- \mathbf{v}^{\mathrm{II}}(t,0)\right] dt - \int_0^L \int_0^T \left[\frac{\partial \psi^T}{\partial t}\mathbf{v} + \frac{\partial \psi^T}{\partial x}\mathbf{K}\mathbf{v}\right] dt dx.
\end{aligned}
$$

Тогда, используя граничные условия (2.3)-(2.4) и начальные условия (2.5), мы получаем

$$
\begin{aligned}
0 = \int_0^L \psi^T(T,x)\mathbf{v}(T,x) - \int_0^L \psi^T(0,x)\phi(x) + \\
+ \int_0^T \left[\left(\psi^{\mathrm{I}}(t,L)\right)^T \mathbf{K}^+ \mathbf{v}^{\mathrm{I}}(t,L) - \left(\psi^{\mathrm{II}}\right)^T (t,L)\mathbf{K}^- \mathbf{s}\mathbf{v}^{\mathrm{I}}(t,L)\right] dt - \\
- \int_0^T \left[\left(\psi^{\mathrm{I}}(t,0)\right)^T \mathbf{K}^+ \mathbf{r}\mathbf{v}^{\mathrm{II}}(t,0) - \left(\psi^{\mathrm{II}}\right)^T (t,0)\mathbf{K}^- \mathbf{v}^{\mathrm{II}}(t,0)\right] dt - \\
- \int_0^L \int_0^T \left[\frac{\partial \psi^T}{\partial t}\mathbf{v} + \frac{\partial \psi^T}{\partial x}\mathbf{K}\mathbf{v}\right] dt dx = \int_0^L \psi^T(T,x)\mathbf{v}(T,x) - \int_0^L \psi^T(0,x)\phi(x) + \\
+ \int_0^T \left(\mathbf{v}^{\mathrm{I}}(t,L), \left[\mathbf{K}^+\psi^{\mathrm{I}}(t,L) - \mathbf{s}^T\mathbf{K}^-\psi^{\mathrm{II}}(t,L)\right]\right) dt + \\
+ \int_0^T \left(\mathbf{v}^{\mathrm{II}}(t,0), \left[\mathbf{K}^-\psi^{\mathrm{II}}(t,0) - \mathbf{r}^T\mathbf{K}^+\psi^{\mathrm{I}}(t,0)\right]\right) dt - \int_0^L \int_0^T \left[\frac{\partial \psi^T}{\partial t}\mathbf{v} + \frac{\partial \psi^T}{\partial x}\mathbf{K}\mathbf{v}\right] dt dx.
\end{aligned}
$$

Теперь, если функции ψ выбраны так, что

$$
\begin{pmatrix} \psi^{\mathrm{I}}(t,L) \\ \psi^{\mathrm{II}}(t,0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \left(\mathbf{K}^+\right)^{-1}\mathbf{s}^T K^- \\ \left(\mathbf{K}^-\right)^{-1}\mathbf{r}^T\mathbf{K}^+ & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi^{\mathrm{I}}(t,0) \\ \psi^{\mathrm{II}}(t,L) \end{pmatrix}, \tag{2.7}
$$

мы получили

$$
0 = \int_0^L \psi^T(T,x)\mathbf{v}(T,x) - \int_0^L \psi^T(0,x)\phi(x) - \int_0^L \int_0^T \left[\frac{\partial \psi^T}{\partial t}\mathbf{v} + \frac{\partial \psi^T}{\partial x}\mathbf{K}\mathbf{v}\right] dt dx. \tag{2.8}
$$

Ключевым моментом здесь является то, что хотя последнее уравнение было выведено в предположении, что функции $\mathbf{v}$ принадлежат классу C^1 относительно t и x, по-видимому, оно остается верным, даже если функции $\mathbf{v}$ не являются дифференцируемыми, поэтому их можно рассматривать как «слабые» решения системы. Тогда L^2-решения определяются как функции $\mathbf{v}$, удовлетворяющие (2.8) для всех ψ, удовлетворяющих (2.7), когда начальные условия принадлежат L^2. Дадим определение L^2-решения в следующем виде.

Определение 2.3. Пусть $\phi \in \mathrm{L}^2((0,L);\mathbb{R}^n)$. Отображение $\mathbf{v} : [0,+\infty) \times (0,L) \to \mathbb{R}^n$ является L^2-*решением* смешанной задачи (2.2)–(2.5), если для любых $T \in [0,+\infty)$ и $\psi \in C^1([0,T] \times [0,L];\mathbb{R}^n)$, удовлетворяющих условиям (2.7), функции $\mathbf{v} \in C^0([0,+\infty);\ \mathrm{L}^2((0,L);\mathbb{R}^n))$ удовлетворяют (2.8) (см. [10]).

В качестве функции Ляпунова рассмотрим функцию

$$V(t) \triangleq \int\limits_0^L \left\{ \sum_{i=1}^m \frac{\mu_i}{a_i} \exp\left(-\frac{\nu x}{a_i}\right) [v_i(t,x)]^2 + \sum_{i=m+1}^n \frac{\mu_i}{a_i} \exp\left(-\frac{\nu x}{a_i}\right) [v_i(t,x)]^2 \right\} dx =$$

$$= \int\limits_0^L \left[\left(\left[\mathbf{v}^{\mathrm{I}}\right]^T \left(\mathbf{K}^+\right)^{-1} \mu^+(\nu x)\, \mathbf{v}^{\mathrm{I}} \right) + \left(\left[\mathbf{v}^{\mathrm{II}}\right]^T \left(\mathbf{K}^-\right)^{-1} \mu^-(\nu x)\, \mathbf{v}^{\mathrm{II}} \right) \right] dx =$$

$$= \int\limits_0^L \left[\left(\mathbf{v}^T \left(|\mathbf{K}|\right)^{-1} \mu(\nu x)\, \mathbf{v} \right) \right] dx, \quad (2.9)$$

где

$$|\mathbf{K}| = \begin{pmatrix} \mathbf{K}^+ & 0 \\ 0 & \mathbf{K}^- \end{pmatrix}, \quad \mu(\nu x) = \begin{pmatrix} \mu^+(\nu x) & 0 \\ 0 & \mu^-(\nu x) \end{pmatrix};$$

$$\mu^+(\nu x) = diag\left(\mu_1 \exp\left(-\frac{\nu x}{a_1}\right), \ldots, \mu_m \exp\left(-\frac{\nu x}{a_m}\right) \right), \qquad \mu_i > 0, \quad (2.10)$$

$$\mu^-(\nu x) = diag\left(\mu_{m+1} \exp\left(+\frac{\nu x}{a_{m+1}}\right), \ldots, \mu_n \exp\left(+\frac{\nu x}{a_n}\right) \right), \qquad \mu_i > 0. \quad (2.11)$$

Чтобы сформулировать условие устойчивости, сначала для любой вещественной квадратичной матрицы A порядка $n \times n$ введем функцию ρ_2 (см. [10]), определенную следующим образом:

$$\rho_2(A) \triangleq \inf \left\{ \left\| DAD^{-1} \right\|_2, \ D = diag(d_1, d_2, \ldots, d_n) \right\},$$

где $d_i > 0$ обозначает множество строго положительных действительных чисел, и

$$\|A\|_2 \triangleq \max_{\|\xi\|_2=1} \|A\zeta\|_2 \qquad \|\zeta\|_2 \triangleq \left[\sum_{i=1}^n |\zeta_i|^2 \right]^{\frac{1}{2}}, \quad \zeta \triangleq (\zeta_1, \ldots, \zeta_n)^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^n.$$

Теорема 2.1 (экспоненциальная устойчивость, см. [10]). *Система* (2.2) *с граничными условиями* (2.3)-(2.4) *экспоненциально устойчива по норме* L^2, *если* $\rho_2(R) < 1$, *где* $R = \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{s} \\ \mathbf{r} & 0 \end{pmatrix}$.

3. Разностная схема

Построим в области $G = \{(t,x) : 0 \leqslant t \leqslant T, 0 \leqslant x \leqslant L\}$ разностную сетку с шагами Δt в направлении t и Δx в направлении x. Обозначим через (t^κ, x_j) узловые точки разностной сетки (имеется в виду пересечение прямых $t = t^\kappa \triangleq \kappa \Delta t$ и $x = x_j \triangleq j\Delta x$). Далее обозначим через G_h множество узловых точек разностной схемы, т. е.

$$G_h \triangleq \left\{ (t^\kappa, x_j) : \ \kappa = 0, \ldots, \mathrm{K}; \ j = 0, \ldots, J \right\},$$

а через

$$(v_i)_j^\kappa = v_i(t^\kappa, x_j), \ i = 1, \ldots, n, \ \kappa = 0, \ldots, \mathrm{K}, \ j = 0, \ldots, J,$$

обозначим значения численного решения в узловых точках.

Подберем шаги разностной сетки Δt, Δx так, чтобы выполнялись равенства $\mathrm{K}\Delta t = T$ и $J\Delta x = L$.

Для нахождения численного решения смешанной задачи (2.2)–(2.5) на разностной сетке G_h предлагается следующая противопоточная разностная схема:

$$\left\{ \begin{array}{ll} (v_i)_j^{\kappa+1} = (v_i)_j^\kappa - a_i \dfrac{\Delta t}{\Delta x} \left[(v_i)_j^\kappa - (v_i)_{j-1}^\kappa \right], \ \ i = 1, \ldots, m, \ \ j = 1, \ldots, J; \\ (v_i)_j^{\kappa+1} = (v_i)_j^\kappa - a_i \dfrac{\Delta t}{\Delta x} \left[(v_i)_j^\kappa - (v_i)_{j+1}^\kappa \right], \ \ i = m+1, \ldots, n, \ \ j = 0, \ldots, J-1; \end{array} \right. \quad \kappa = 0, \ldots, \mathrm{K}-1. \quad (3.1)$$

Начальные условия (2.5) аппроксимируются в виде

$$(v_i)_j^0 = (v_{i0})_j, \ \ i = 1, \ldots, n; \ \ j = 0, \ldots, J. \quad (3.2)$$

Граничные условия (2.3)-(2.4) аппроксимируются следующим образом:

$$\begin{cases} (v_i)_0^\kappa = \sum\limits_{l=m+1}^{n} s_{il}\,(v_l)_0^\kappa, \quad i = 1,\dots,m; \\ (v_i)_J^\kappa = \sum\limits_{l=1}^{m} r_{il}\,(v_l)_0^\kappa, \ i = m+1,\dots,n; \end{cases} \qquad \kappa = 1,\dots,\mathrm{K}. \tag{3.3}$$

Введем в рассмотрение матрицы:

$$\mathbf{s} = \begin{pmatrix} s_{1m+1} & s_{1m+2} & \cdots & s_{1n} \\ s_{2m+1} & s_{2m+2} & \cdots & s_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ s_{mm+1} & s_{mm+2} & \cdots & s_{mn} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{r} = \begin{pmatrix} r_{m+1,1} & r_{m+1,2} & \cdots & r_{m+1,m} \\ r_{m+2,1} & r_{m+2,2} & \cdots & r_{m+2,m} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ r_{n,1} & r_{n,2} & \cdots & r_{n,m} \end{pmatrix}.$$

Иногда для удобства расчетов будем использовать матричную форму записи разностной начально-краевой задачи (3.1)–(3.3):

$$\begin{cases} \left(\mathbf{v^I}\right)_j^{\kappa+1} = \left(\mathbf{v^I}\right)_j^\kappa - \dfrac{\Delta t}{\Delta x}\mathbf{K}^+ \left[\left(\mathbf{v^I}\right)_j^\kappa - \left(\mathbf{v^I}\right)_{j-1}^\kappa\right], \quad j = 1,\dots,J, \\ \left(\mathbf{v^{II}}\right)_j^{\kappa+1} = \left(\mathbf{v^{II}}\right)_j^\kappa - \dfrac{\Delta t}{\Delta x}\mathbf{K}^- \left[\left(\mathbf{v^{II}}\right)_j^\kappa - \left(\mathbf{v^{II}}\right)_{j+1}^\kappa\right], \ j = 0,\dots,J-1, \end{cases} \quad \kappa = 0,\dots,\mathrm{K}-1; \tag{3.4}$$

$$(\mathbf{v})_j^0 = (v_0)_j\,, \quad j = 0,\dots,J; \tag{3.5}$$

$$\begin{cases} \left(\mathbf{v}^I\right)_0^\kappa = \mathbf{s}\left(\mathbf{v}^{II}\right)_0^\kappa, \\ \left(\mathbf{v}^{II}\right)_J^\kappa = \mathbf{r}\left(\mathbf{v}^{II}\right)_J^\kappa, \end{cases} \qquad \kappa = 1,\dots,\mathrm{K}. \tag{3.6}$$

Предположим, что шаги разностной сетки удовлетворяют условию Куранта—Фридрихса—Леви (КФЛ):

$$\frac{\Delta t}{\Delta x}\max_{1\leqslant i\leqslant n}|a_i| \leqslant 1.$$

Теперь исследуем вопрос об экспоненциальной устойчивости численного решения разностной задачи (3.1)–(3.3). Сначала определим это понятие.

Определение 3.1. Решение разностной схемы (3.1), удовлетворяющее граничным условиям (3.2)-(3.3), называется *экспоненциально устойчивым*, если существуют такие положительные константы $\eta > 0$ и $c > 0$, что для любой начальной функции $(v_0)_j \in \mathrm{L}^2\left(\{x_j\}\,,\ j = 0,\dots J; \mathbb{R}^n\right)$ решение разностной начально-краевой задачи (3.4)–(3.6) удовлетворяет неравенству:

$$\begin{gathered} \Delta x \sum_{j=1}^{J}\left(\left(\mathbf{v}^I\right)_j^\kappa, \left(\mathbf{v}^I\right)_j^\kappa\right) + \Delta x \sum_{j=0}^{J-1}\left(\left(\mathbf{v}^{\mathrm{II}}\right)_j^\kappa, \left(\mathbf{v}^{\mathrm{II}}\right)_j^\kappa\right) \leqslant \\ \leqslant c e^{-\eta t_\kappa}\left[\Delta x \sum_{j=1}^{J}\left(\left(\mathbf{v}_0^I\right)_j, \left(\mathbf{v}_0^I\right)_j\right) + \Delta x \sum_{j=0}^{J-1}\left(\left(\mathbf{v}_0^{II}\right)_j, \left(\mathbf{v}_0^{II}\right)_j\right)\right], \quad \kappa = 1,\dots,N. \end{gathered}$$

Рассмотрим разностную начально-краевую задачу (3.4)–(3.6) со стационарным решением

$$v_j^\kappa = 0, \quad \kappa = 0,\dots,N; \quad j = 0,\dots,J.$$

Для доказательства экспоненциальной устойчивости разностной начально-краевой задачи (3.4)–(3.6) в качестве дискретной функции Ляпунова (2.9) возьмем следующую функцию:

$$V(\kappa\Delta) = V^\kappa = W_1^\kappa + W_2^\kappa,$$

где

$$W_1^\kappa = \sum_{i=1}^{m} V_i^\kappa, \quad W_2^\kappa = \sum_{i=m+1}^{n} V_i^\kappa,$$

$$V_i^\kappa \triangleq \Delta x \frac{\mu_i}{a_i}\sum_{j=1}^{J}\left[(u_i)_j^\kappa\right]^2 \exp\left(-\frac{\nu x_j}{a_i}\right), \quad i = 1,2,\dots,m;$$

$$V_i^\kappa \triangleq \Delta x \frac{\mu_i}{a_i} \sum_{j=0}^{J-1} \left[(u_i)_j^\kappa \right]^2 \exp(\frac{\nu x_j}{a_i}), \quad i = m+1, m+2, \ldots, n;$$

$$V^\kappa = \Delta x \sum_{j=1}^{J} \left(\left(\mathbf{K}^+ \right)^{-1} \mu^+ (\nu x_j) \left(\mathbf{v}^I \right)_j^\kappa, \left(\mathbf{v}^I \right)_j^\kappa \right) + \Delta x \sum_{j=0}^{J-1} \left(\left(\mathbf{K}^- \right)^{-1} \mu^- (\nu x_j) \left(\mathbf{v}^{\mathrm{II}} \right)_j^\kappa, \left(\mathbf{v}^{\mathrm{II}} \right)_j^\kappa \right) \quad (3.7)$$

Теорема 3.1. *Пусть* $T > 0$ *и дискретные функции определены с помощью* (3.7). *Если шаги разностной сетки удовлетворяют условию КФЛ*

$$\frac{\Delta t}{\Delta x} \max_{1 \leqslant i \leqslant n} |a_i| \leqslant 1$$

а параметры r, s *граничных условий* (3.3) *подчиняются неравенству* $\rho_2(R) < 1$, *то численное решение* v_j^κ *разностной начально-краевой задачи* (3.4)–(3.6) *экспоненциально устойчиво по* L^2*-норме.*

Для доказательства теоремы 3.1 нам понадобятся некоторые леммы.

Лемма 3.1. *Пусть выполнены условия теоремы* 3.1. *Тогда имеет место неравенство*:

$$\frac{V_i^{\kappa+1} - V_i^\kappa}{\Delta t} \leqslant \mu_i \sum_{j=1}^{J} \exp\left(-\frac{\nu x_j}{a_i} \right) \left\{ \left[(u_i)_{j-1}^\kappa \right]^2 - \left[(u_i)_j^\kappa \right]^2 \right\}, \quad i = 1, 2, \ldots, m.$$

Доказательство. Обозначим через ρ_{ij} число Куранта $(a_i)_j \dfrac{\Delta t}{\Delta x}$ для i-го разностного уравнения системы (3.1). Тогда i-е разностное уравнение системы (3.1) принимает вид:

$$(u_i)_j^{\kappa+1} = (u_i)_j^\kappa - \rho_i \left[(u_i)_j^\kappa - (u_i)_{j-1}^\kappa \right].$$

Учитывая такую форму записи первого разностного уравнения системы (3.1), получаем следующее выражение для $\dfrac{V_i^{\kappa+1} - V_i^\kappa}{\Delta t}$:

$$\frac{V_i^{\kappa+1} - V_i^\kappa}{\Delta t} = \frac{\Delta x}{\Delta t} \frac{\mu_i}{a_i} \sum_{j=1}^{J} \exp\left(-\frac{\nu x_j}{a_i} \right) \left\{ \left[(u_i)_j^{\kappa+1} \right]^2 - \left[(u_i)_j^\kappa \right]^2 \right\} =$$

$$= \frac{\mu_i}{\rho_i} \sum_{j=1}^{J} \exp\left(-\frac{\nu x_j}{a_i} \right) \left\{ \left[(u_i)_j^{\kappa+1} \right]^2 - \left[(u_i)_j^\kappa \right]^2 \right\} =$$

$$= \frac{\mu_i}{\rho_i} \sum_{j=1}^{J} \exp\left(-\frac{\nu x_j}{a_i} \right) \left\langle \left\{ (u_i)_j^\kappa - \rho_i \left[(u_i)_j^\kappa - (u_i)_{j-1}^\kappa \right] \right\}^2 - \left\{ (u_i)_j^\kappa \right\}^2 \right\rangle =$$

$$= \frac{\mu_i}{\rho_i} \sum_{j=1}^{J} \exp\left(-\frac{\nu x_j}{a_i} \right) \left\{ \left[(u_i)_j^\kappa \right]^2 - \left[(u_i)_j^\kappa \right]^2 - 2\rho_i (u_i)_j^\kappa \left[(u_i)_j^\kappa - (u_i)_{j-1}^\kappa \right] + \rho_i^2 \left[(u_i)_j^\kappa - (u_i)_{j-1}^\kappa \right]^2 \right\} =$$

$$= \frac{\mu_i}{\rho_i} \sum_{j=1}^{J} \exp\left(-\frac{\nu x_j}{a_i} \right) \left\{ \begin{array}{l} -2\rho_i \left[(u_i)_j^\kappa \right]^2 + 2\rho_i (u_i)_j^\kappa (u_i)_{j-1}^\kappa + \\ +\rho_i^2 \left[(u_i)_j^\kappa \right]^2 + \rho_i^2 \left[(u_i)_{j-1}^\kappa \right]^2 - 2\rho_i^2 (u_i)_j^\kappa (u_i)_{j-1}^\kappa \end{array} \right\} =$$

$$= \frac{\mu_i}{\rho_i} \sum_{j=1}^{J} \exp\left(-\frac{\nu x_j}{a_i} \right) \left\{ \left(\rho_i^2 - 2\rho_i \right) \left[(u_i)_j^\kappa \right]^2 + 2\rho_i (1 - \rho_i) (u_i)_j^\kappa (u_i)_{j-1}^\kappa + \rho_i^2 \left[(u_1)_{j-1}^\kappa \right]^2 \right\}.$$

Согласно условию КФЛ в теореме 3.1, неравенство $1 - \rho_{ij} > 0$ выполняется. Следовательно, справедливо неравенство $\rho_{ij} (1 - \rho_{ij}) > 0$. Используя алгебраическое неравенство $2ab \leqslant a^2 + b^2$, имеем

$$2\rho_i (1 - \rho_i) (u_i)_j^\kappa (u_i)_{j-1}^\kappa \leqslant \rho_i (1 - \rho_i) \left[(u_i)_j^\kappa \right]^2 + \rho_i (1 - \rho_i) \left[(u_i)_{j-1}^\kappa \right]^2.$$

Применяя это неравенство к выражению $\dfrac{V_i^{\kappa+1}-V_i^{\kappa}}{\Delta t}$, получаем вместо равенства следующее неравенство:

$$\frac{V_i^{\kappa+1}-V_i^{\kappa}}{\Delta t}\leqslant\frac{\mu_i}{\rho_i}\sum_{j=1}^{J}\exp\left(-\frac{\nu x_j}{a_i}\right)\left\{\begin{array}{l}\left(\rho_i^2-2\rho_i\right)\left[(u_i)_j^{\kappa}\right]^2+\rho_i\left(1-\rho_i\right)\left[(u_i)_j^{\kappa}\right]^2+\\ \rho_i\left(1-\rho_i\right)\left[(u_i)_{j-1}^{\kappa}\right]^2+\rho_i^2\left[(u_i)_{j-1}^{\kappa}\right]^2\end{array}\right\}=$$

$$=\frac{\mu_i}{\rho_i}\sum_{j=1}^{J}\exp\left(-\frac{\nu x_j}{a_i}\right)\left\{\rho_i\left[(u_i)_{j-1}^{\kappa}\right]^2-\rho_i\left[(u_i)_j^{\kappa}\right]^2\right\}=\mu_i\sum_{j=1}^{J}\exp\left(-\frac{\nu x_j}{a_i}\right)\left\{\left[(u_i)_{j-1}^{\kappa}\right]^2-\left[(u_i)_j^{\kappa}\right]^2\right\}.$$

Лемма 3.1 доказана. □

Лемма 3.2. *Пусть выполнены условия теоремы* 3.1. *Тогда имеет место неравенство*:

$$\frac{V_i^{\kappa+1}-V_i^{\kappa}}{\Delta t}\leqslant\mu_i\sum_{j=0}^{J-1}\exp\left(\frac{\nu x_j}{a_i}\right)\left\{\left[(u_i)_{j+1}^{\kappa}\right]^2-\left[(u_i)_j^{\kappa}\right]^2\right\},\quad i=m+1,m+2,\ldots,n.$$

Доказательство. Доказательство этой леммы проводится аналогично доказательству леммы 3.1. □

Лемма 3.3. *Выполняются следующие тождества*:

$$\sum_{j=1}^{J}\exp\left(-\frac{\nu x_j}{a_i}\right)\left\{\left[(u_i)_{j-1}^{\kappa}\right]^2-\left[(u_i)_j^{\kappa}\right]^2\right\}=$$

$$=\left[\exp\left(-\frac{\nu\Delta x}{a_i}\right)-1\right]\sum_{j=1}^{J}\exp\left(-\frac{\nu x_j}{a_i}\right)\left[(u_i)_j^{\kappa}\right]^2+\exp\left(-\frac{\nu\Delta x}{a_i}\right)\left[(u_i)_0^{\kappa}\right]^2-$$

$$-\exp\left(-\frac{\nu\left(L+\Delta x\right)}{a_i}\right)\left[(u_i)_J^{\kappa}\right]^2,\quad i=1,2,\ldots,m;$$

$$\sum_{j=0}^{J-1}\exp\left(\frac{\nu x_j}{a_2}\right)\left\{\left[(u_2)_{j+1}^{\kappa}\right]^2-\left[(u_2)_j^{\kappa}\right]^2\right\}=$$

$$=\left[\exp\left(-\frac{\nu\Delta x}{a_2}\right)-1\right]\sum_{j=0}^{J-1}\exp\left(\frac{\nu x_j}{a_2}\right)\left[(u_2)_j^{\kappa}\right]^2-\exp\left(-\frac{\nu\Delta x}{a_2}\right)\left[(u_2)_0^{\kappa}\right]^2+\exp\left(\frac{\nu\left(L+\Delta x\right)}{a_2}\right)\left[(u_2)_J^{\kappa}\right]^2.$$

Доказательство. Начнем с доказательства первого тождества:

$$\sum_{j=1}^{J}\exp\left(-\frac{\nu x_j}{a_i}\right)\left\{\left[(u_i)_{j-1}^{\kappa}\right]^2-\left[(u_i)_j^{\kappa}\right]^2\right\}=$$

$$=\sum_{j=1}^{J}\exp\left(-\frac{\nu x_j}{a_i}\right)\left[(u_i)_{j-1}^{\kappa}\right]^2-\sum_{j=1}^{J}\exp\left(-\frac{\nu x_j}{a_i}\right)\left[(u_i)_j^{\kappa}\right]^2=$$

$$=\sum_{j=1}^{J}\exp\left(-\frac{\nu\Delta x}{a_i}\right)\exp\left(-\frac{\nu\left(-\Delta x\right)}{a_i}\right)\exp\left(-\frac{\nu x_j}{a_i}\right)\left[(u_i)_{j-1}^{\kappa}\right]^2-\sum_{j=1}^{J}\exp\left(-\frac{\nu x_j}{a_i}\right)\left[(u_i)_j^{\kappa}\right]^2=$$

$$=\exp\left(-\frac{\nu\Delta x}{a_i}\right)\sum_{j=1}^{J}\exp\left(-\frac{\nu x_{j-1}}{a_i}\right)\left[(u_i)_{j-1}^{\kappa}\right]^2-\sum_{j=1}^{J}\exp\left(-\frac{\nu x_j}{a_i}\right)\left[(u_i)_j^{\kappa}\right]^2=$$

$$=\exp\left(-\frac{\nu\Delta x}{a_i}\right)\sum_{j=0}^{J-1}\exp\left(-\frac{\nu x_j}{a_i}\right)\left[(u_i)_j^{\kappa}\right]^2-\sum_{j=1}^{J}\exp\left(-\frac{\nu x_j}{a_i}\right)\left[(u_i)_j^{\kappa}\right]^2=$$

$$=\exp\left(-\frac{\nu\Delta x}{a_i}\right)\sum_{j=1}^{J}\exp\left(-\frac{\nu x_j}{a_i}\right)\left[(u_i)_j^{\kappa}\right]^2-\sum_{j=1}^{J}\exp\left(-\frac{\nu x_j}{a_i}\right)\left[(u_i)_j^{\kappa}\right]^2+$$

$$+\exp\left(-\frac{\nu\Delta x}{a_i}\right)\exp\left(-\frac{\nu x_0}{a_i}\right)[(u_i)_0^\kappa]^2-\exp\left(-\frac{\nu\Delta x}{a_i}\right)\exp\left(-\frac{\nu x_J}{a_i}\right)[(u_i)_J^\kappa]^2=$$

$$=\left[\exp\left(-\frac{\nu\Delta x}{a_i}\right)-1\right]\sum_{j=1}^{J}\exp\left(-\frac{\nu x_j}{a_i}\right)\left[(u_i)_j^\kappa\right]^2+$$

$$+\exp\left(-\frac{\nu\Delta x}{a_i}\right)[(u_i)_0^\kappa]^2-\exp\left(-\frac{\nu\left(L+\Delta x\right)}{a_i}\right)[(u_i)_J^\kappa]^2.$$

Аналогично доказывается второе тождество:

$$\sum_{j=0}^{J-1}\exp\left(\frac{\nu x_j}{a_i}\right)\left\{\left[(u_i)_{j+1}^\kappa\right]^2-\left[(u_i)_j^\kappa\right]^2\right\}=$$

$$=\sum_{j=0}^{J-1}\exp\left(\frac{\nu x_j}{a_i}\right)\left[(u_i)_{j+1}^\kappa\right]^2-\sum_{j=0}^{J-1}\exp\left(\frac{\nu x_j}{a_i}\right)\left[(u_i)_j^\kappa\right]^2=$$

$$=\sum_{j=0}^{J-1}\exp\left(-\frac{\nu\Delta x}{a_i}\right)\exp\left(\frac{\nu\Delta x}{a_i}\right)\exp\left(\frac{\nu x_j}{a_i}\right)\left[(u_i)_{j+1}^\kappa\right]^2-\sum_{j=0}^{J-1}\exp\left(\frac{\nu x_j}{a_i}\right)\left[(u_i)_j^\kappa\right]^2=$$

$$=\exp\left(-\frac{\nu\Delta x}{a_i}\right)\sum_{j=0}^{J-1}\exp\left(\frac{\nu x_{j+1}}{a_i}\right)\left[(u_i)_{j+1}^\kappa\right]^2-\sum_{j=0}^{J-1}\exp\left(\frac{\nu x_j}{a_i}\right)\left[(u_i)_j^\kappa\right]^2=$$

$$=\exp\left(-\frac{\nu\Delta x}{a_i}\right)\sum_{j=0}^{J-1}\exp\left(\frac{\nu x_j}{a_i}\right)\left[(u_i)_j^\kappa\right]^2-\sum_{j=0}^{J-1}\exp\left(\frac{\nu x_j}{a_i}\right)\left[(u_i)_j^\kappa\right]^2-$$

$$-\exp\left(-\frac{\nu\Delta x}{a_i}\right)\exp\left(\frac{\nu x_0}{a_i}\right)[(u_i)_0^\kappa]^2+\exp\left(-\frac{\nu\Delta x}{a_i}\right)\exp\left(\frac{\nu x_J}{a_i}\right)[(u_i)_J^\kappa]^2=$$

$$=\left[\exp\left(-\frac{\nu\Delta x}{a_i}\right)-1\right]\sum_{j=0}^{J-1}\exp\left(\frac{\nu x_j}{a_i}\right)\left[(u_i)_j^\kappa\right]^2-\exp\left(-\frac{\nu\Delta x}{a_i}\right)[(u_i)_0^\kappa]^2+\exp\left(\frac{\nu\left(L-\Delta x\right)}{a_i}\right)[(u_i)_J^\kappa]^2.$$

Лемма 3.3 доказана. □

Согласно лемме 3.1, для каждого V_i^κ, $i=1,2,\ldots,m$, справедливо следующее неравенство:

$$\frac{V_i^{\kappa+1}-V_i^\kappa}{\Delta t}\leqslant\mu_i\sum_{j=1}^{J}\exp\left(-\frac{\nu x_j}{a_i}\right)\left\{\left[(u_i)_{j-1}^\kappa\right]^2-\left[(u_i)_j^\kappa\right]^2\right\},\quad i=1,2,\ldots,m.$$

Суммируя соответствующие левую и правую части этих неравенств, получаем:

$$\frac{W_1^{\kappa+1}-W_1^\kappa}{\Delta t}\leqslant\sum_{i=1}^{m}\mu_i\sum_{j=1}^{J}\exp\left(-\frac{\nu x_j}{a_i}\right)\left\{\left[(u_i)_{j-1}^\kappa\right]^2-\left[(u_i)_j^\kappa\right]^2\right\}=$$

$$=\sum_{j=1}^{J}\left[\left(\mu^+\left(\nu x_j\right)\left(\mathbf{v}^I\right)_{j-1}^\kappa,\left(\mathbf{v}^I\right)_{j-1}^\kappa\right)-\left(\mu^+\left(\nu x_j\right)\left(\mathbf{v}^I\right)_j^\kappa,\left(\mathbf{v}^I\right)_j^\kappa\right)\right].\quad(3.8)$$

Аналогично, применяя лемму 3.2 для каждого V_i^κ, $i=m+1,m+2,\ldots,n$, получаем следующее неравенство:

$$\frac{V_i^{\kappa+1}-V_i^\kappa}{\Delta t}\leqslant\mu_i\sum_{j=0}^{J-1}\exp\left(\frac{\nu x_j}{a_i}\right)\left\{\left[(u_i)_{j+1}^\kappa\right]^2-\left[(u_i)_j^\kappa\right]^2\right\},\quad i=m+1,m+2,\ldots,n.$$

Суммируя соответствующие левую и правую части этих неравенств, получаем:

$$\frac{W_2^{\kappa+1}-W_2^\kappa}{\Delta t}\leqslant\sum_{i=m+1}^{n}\mu_i\sum_{j=0}^{J-1}\exp\left(\frac{\nu x_j}{a_i}\right)\left\{\left[(u_i)_{j+1}^\kappa\right]^2-\left[(u_i)_j^\kappa\right]^2\right\}=$$

$$= \sum_{j=1}^{J} \left[\left(\mu^{-}(\nu x_j) \left(\mathbf{v}^{II}\right)_{j+1}^{\kappa}, \left(\mathbf{v}^{II}\right)_{j+1}^{\kappa} \right) - \left(\mu^{-}(\nu x_j) \left(\mathbf{v}^{II}\right)_{j}^{\kappa}, \left(\mathbf{v}^{II}\right)_{j}^{\kappa} \right) \right] \quad (3.9)$$

Согласно первому тождеству леммы 3.3, имеет место равенство

$$\sum_{j=1}^{J} \exp\left(-\frac{\nu x_j}{a_i}\right) \left\{ \left[(u_i)_{j-1}^{\kappa}\right]^2 - \left[(u_i)_{j}^{\kappa}\right]^2 \right\} =$$

$$= \left[\exp\left(-\frac{\nu \Delta x}{a_i}\right) - 1\right] \sum_{j=1}^{J} \exp\left(-\frac{\nu x_j}{a_i}\right) \left[(u_i)_{j}^{\kappa}\right]^2 + \exp\left(-\frac{\nu \Delta x}{a_i}\right) [(u_i)_0^{\kappa}]^2 -$$

$$- \exp\left(-\frac{\nu (L+\Delta x)}{a_i}\right) [(u_i)_J^{\kappa}]^2, \quad i = 1, 2, \ldots, m.$$

Умножим каждое из предыдущих неравенств на μ_i и просуммируем по i от 1 до m. Тогда выполняется неравенство

$$\frac{W_1^{\kappa+1} - W_1^{\kappa}}{\Delta t} \leqslant \sum_{i=1}^{m} \mu_i \left[\exp\left(-\frac{\nu \Delta x}{a_i}\right) - 1\right] \sum_{j=1}^{J} \exp\left(-\frac{\nu x_j}{a_i}\right) \left[(u_i)_{j}^{\kappa}\right]^2 +$$

$$+ \sum_{i=1}^{m} \mu_i \exp\left(-\frac{\nu \Delta x}{a_i}\right) [(u_i)_0^{\kappa}]^2 - \sum_{i=1}^{m} \mu_i \exp\left(-\frac{\nu (L+\Delta x)}{a_i}\right) [(u_i)_J^{\kappa}]^2 =$$

$$= \sum_{j=1}^{J} \left(\left[\left[\mu^{+}(0)\right]^{-1} \mu^{+}(\nu x_1) - E \right] \mu^{+}(\nu x_j) \left(\mathbf{v}^{I}\right)_{j}^{\kappa}, \left(\mathbf{v}^{I}\right)_{j}^{\kappa} \right) +$$

$$+ \left(\mu^{+}(\nu x_1) \left(\mathbf{v}^{I}\right)_{0}^{\kappa}, \left(\mathbf{v}^{I}\right)_{0}^{\kappa} \right) - \left(\mu^{+}(\nu x_{J+1}) \left(\mathbf{v}^{I}\right)_{J}^{\kappa}, \left(\mathbf{v}^{I}\right)_{J}^{\kappa} \right).$$

Аналогично, согласно второму тождеству леммы 3.2, выполняется равенство

$$\sum_{j=0}^{J-1} \exp\left(\frac{\nu x_j}{a_2}\right) \left\{ \left[(u_2)_{j+1}^{\kappa}\right]^2 - \left[(u_2)_{j}^{\kappa}\right]^2 \right\} =$$

$$= \left[\exp\left(-\frac{\nu \Delta x}{a_2}\right) - 1\right] \sum_{j=0}^{J-1} \exp\left(\frac{\nu x_j}{a_2}\right) \left[(u_2)_{j}^{\kappa}\right]^2 - \exp\left(-\frac{\nu \Delta x}{a_2}\right) [(u_2)_0^{\kappa}]^2 + \exp\left(\frac{\nu (L+\Delta x)}{a_2}\right) [(u_2)_J^{\kappa}]^2.$$

Умножая каждое из этих неравенств на μ_i и суммируя их по i от $m+1$ до n, получаем следующее неравенство:

$$\frac{W_2^{\kappa+1} - W_2^{\kappa}}{\Delta t} \leqslant \sum_{i=m+1}^{n} \mu_i \left[\exp\left(-\frac{\nu \Delta x}{a_i}\right) - 1\right] \sum_{j=0}^{J-1} \exp\left(\frac{\nu x_j}{a_i}\right) \left[(u_i)_{j}^{\kappa}\right]^2 -$$

$$- \sum_{i=m+1}^{n} \mu_i \exp\left(-\frac{\nu \Delta x}{a_i}\right) [(u_i)_0^{\kappa}]^2 + \sum_{i=m+1}^{n} \mu_i \exp\left(\frac{\nu (L+\Delta x)}{a_i}\right) [(u_i)_J^{\kappa}]^2 =$$

$$= \sum_{j=0}^{J-1} \left(\left\{ \left[\mu^{-}(0)\right]^{-1} \mu^{-}(\nu x_{-1}) - E \right\} \mu^{-}(\nu x_j) \left(\mathbf{v}^{II}\right)_{j}^{\kappa}, \left(\mathbf{v}^{II}\right)_{j}^{\kappa} \right) -$$

$$- \left(\mu^{-}(\nu x_{-1}) \left(\mathbf{v}^{II}\right)_{0}^{\kappa}, \left(\mathbf{v}^{II}\right)_{0}^{\kappa} \right) + \left(\mu^{-}(\nu x_{J+1}) \left(\mathbf{v}^{II}\right)_{J}^{\kappa}, \left(\mathbf{v}^{II}\right)_{J}^{\kappa} \right).$$

Лемма 3.4. *Пусть выполнены условия теоремы* 3.1. *Тогда имеет место неравенство*

$$\frac{V^{\kappa+1} - V^{\kappa}}{\Delta t} < -\nu V^{\kappa}.$$

Доказательство. Используя неравенства для квадратичных форм W_1^κ, W_2^κ, имеем:

$$\frac{V^{\kappa+1}-V^\kappa}{\Delta t}=\frac{W_1^{\kappa+1}-W_1^\kappa}{\Delta t}+\frac{W_2^{\kappa+1}-W_2^\kappa}{\Delta t}\leqslant$$
$$\leqslant\sum_{j=1}^{J}\left(\Big[\left[\mu^+(0)\right]^{-1}\mu^+(\nu x_1)-E\Big]\mu^+(\nu x_j)\left(\mathbf{v}^I\right)_j^\kappa,\left(\mathbf{v}^I\right)_j^\kappa\right)+$$
$$+\left(\mu^+(\nu x_1)\left(\mathbf{v}^I\right)_0^\kappa,\left(\mathbf{v}^I\right)_0^\kappa\right)-\left(\mu^+(\nu x_{J+1})\left(\mathbf{v}^I\right)_J^\kappa,\left(\mathbf{v}^I\right)_J^\kappa\right)+$$
$$+\sum_{j=0}^{J-1}\left(\Big\{\left[\mu^-(0)\right]^{-1}\mu^-(\nu x_{-1})-E\Big\}\mu^-(\nu x_j)\left(\mathbf{v}^{II}\right)_j^\kappa,\left(\mathbf{v}^{II}\right)_j^\kappa\right)-$$
$$-\left(\mu^-(\nu x_{-1})\left(\mathbf{v}^{II}\right)_0^\kappa,\left(\mathbf{v}^{II}\right)_0^\kappa\right)+\left(\mu^-(\nu x_{J+1})\left(\mathbf{v}^{II}\right)_J^\kappa,\left(\mathbf{v}^{II}\right)_J^\kappa\right)=V_\nu^\kappa+W^\kappa.$$

Здесь

$$V_\nu^\kappa=\sum_{j=1}^{J}\left(\Big[\left[\mu^+(0)\right]^{-1}\mu^+(\nu x_1)-E\Big]\mu^+(\nu x_j)\left(\mathbf{v}^I\right)_j^\kappa,\left(\mathbf{v}^I\right)_j^\kappa\right)+$$
$$+\sum_{j=0}^{J-1}\left(\Big\{\left[\mu^-(0)\right]^{-1}\mu^-(\nu x_{-1})-E\Big\}\mu^-(\nu x_j)\left(\mathbf{v}^{II}\right)_j^\kappa,\left(\mathbf{v}^{II}\right)_j^\kappa\right),$$

$$W^\kappa=\left(\mu^+(\nu x_1)\left(\mathbf{v}^I\right)_0^\kappa,\left(\mathbf{v}^I\right)_0^\kappa\right)-\left(\mu^+(\nu x_{J+1})\left(\mathbf{v}^I\right)_J^\kappa,\left(\mathbf{v}^I\right)_J^\kappa\right)-$$
$$-\left(\mu^-(\nu x_{-1})\left(\mathbf{v}^{II}\right)_0^\kappa,\left(\mathbf{v}^{II}\right)_0^\kappa\right)+\left(\mu^-(\nu x_{J+1})\left(\mathbf{v}^{II}\right)_J^\kappa,\left(\mathbf{v}^{II}\right)_J^\kappa\right).$$

С учетом формулы Тейлора справедливо следующее равенство:

$$\frac{\exp\left(-\frac{\nu\Delta x}{a_i}\right)-1}{\Delta x}=-\frac{\nu}{a_i}+O(\Delta x).$$

Тогда, применяя эти тождества к коэффициентам квадратичной формы V_ν^κ, имеем с точностью до Δx :

$$V_\nu^\kappa\leqslant-\nu\left[\begin{array}{c}\Delta x\sum\limits_{j=1}^{J}\left((\mathbf{K}^+)^{-1}\mu^+(\nu x_j)\left(\mathbf{v}^{\mathrm{I}}\right)_j^\kappa,\left(\mathbf{v}^{\mathrm{I}}\right)_j^\kappa\right)+\\+\Delta x\sum\limits_{j=0}^{J-1}\left((\mathbf{K}^-)^{-1}\mu^-(\nu x_j)\left(\mathbf{v}^{\mathrm{II}}\right)_j^\kappa,\left(\mathbf{v}^{\mathrm{II}}\right)_j^\kappa\right)\end{array}\right]=-\nu V^\kappa.$$

Так как по предположению $\rho_2(R)<1$, то существуют строго положительно определенные матрицы $D_0,\ D_1$ размерности m и $n-m$, соответственно, такие, что

$$\left\|\Delta R\Delta^{-1}\right\|<1\ \text{ где }\ \Delta\overset{\Delta}{=}\operatorname{diag}\{D_0,\ D_1\}.\tag{3.10}$$

Параметры μ_i выбираются такими, что $\mu^+(\nu x_1)=D_0^2$ и $\mu^-(\nu x_{-1})=D_1^2$. Тогда с учетом этих определений относительно W^κ как функции $\mathbf{v}$ имеем для векторов $\mathbf{v}_j^\kappa$, удовлетворяющих краевым условиям (3.3):

$$W^\kappa(\nu)=\left(\mu^+(\nu x_1)\,\mathbf{s}\left(\mathbf{v}^{II}\right)_0^\kappa,\mathbf{s}\left(\mathbf{v}^{II}\right)_0^\kappa\right)-\left(\mu^+(\nu x_{J+1})\left(\mathbf{v}^I\right)_J^\kappa,\left(\mathbf{v}^I\right)_J^\kappa\right)-$$
$$-\left(\mu^-(\nu x_{-1})\left(\mathbf{v}^{II}\right)_0^\kappa,\left(\mathbf{v}^{II}\right)_0^\kappa\right)+\left(\mu^-(\nu x_{J+1})\,\mathbf{r}\left(\mathbf{v}^I\right)_J^\kappa,\mathbf{r}\left(\mathbf{v}^I\right)_J^\kappa\right)=$$
$$=-\left(\mu^+(\nu\left[L+\Delta x\right])\left(\mathbf{v}^I\right)_J^\kappa,\left(\mathbf{v}^I\right)_J^\kappa\right)-\left(D_1^2\left(\mathbf{v}^{II}\right)_0^\kappa,\left(\mathbf{v}^{II}\right)_0^\kappa\right)+$$
$$+\left(\mathbf{r}^T\mu^-(\nu\left[L+\Delta x\right])\,\mathbf{r}\left(\mathbf{v}^I\right)_J^\kappa,\left(\mathbf{v}^I\right)_J^\kappa\right)+\left(\mathbf{s}^TD_0^2\mathbf{s}\left(\mathbf{v}^{II}\right)_0^\kappa,\left(\mathbf{v}^{II}\right)_0^\kappa\right)=$$
$$=-\left(\begin{pmatrix}\mu^+(\nu\left[L+\Delta x\right])D_0^{-2} & 0\\ 0 & E\end{pmatrix}\begin{pmatrix}D_0\left(\mathbf{v}^I\right)_J^\kappa\\ D_1\left(\mathbf{v}^{II}\right)_0^\kappa\end{pmatrix},\begin{pmatrix}D_0\left(\mathbf{v}^I\right)_J^\kappa\\ D_1\left(\mathbf{v}^{II}\right)_0^\kappa\end{pmatrix}\right)+$$

$$+\left(\begin{pmatrix} 0 & D_0\mathbf{s}D_1^{-1} \\ D_1\mathbf{r}D_0^{-1} & 0 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} 0 & D_0\mathbf{s}D_1^{-1} \\ \mu^-(\nu[L+\Delta x])D_1^{-1}\mathbf{r}D_0^{-1} & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} D_0\left(\mathbf{v}^I\right)_J^\kappa \\ D_1\left(\mathbf{v}^{II}\right)_0^\kappa \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} D_0\left(\mathbf{v}^I\right)_J^\kappa \\ D_1\left(\mathbf{v}^{II}\right)_0^\kappa \end{pmatrix}\right),$$

или

$$W^\kappa(\nu) = -\left(\Omega(\nu)\begin{pmatrix} D_0\left(\mathbf{v}^I\right)_J^\kappa \\ D_1\left(\mathbf{v}^{II}\right)_0^\kappa \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} D_0\left(\mathbf{v}^I\right)_J^\kappa \\ D_1\left(\mathbf{v}^{II}\right)_0^\kappa \end{pmatrix}\right),$$

где

$$\Omega(\nu) \triangleq \begin{pmatrix} \mu^+(\nu[L+\Delta x])D_0^{-2} & 0 \\ 0 & E \end{pmatrix} -$$

$$-\begin{pmatrix} 0 & D_0\mathbf{s}D_1^{-1} \\ D_1\mathbf{r}D_0^{-1} & 0 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} 0 & D_0\mathbf{s}D_1^{-1} \\ \mu^-(\nu[L+\Delta x])D_1^{-1}\mathbf{r}D_0^{-1} & 0 \end{pmatrix},$$

а для $\nu = 0$:

$$W^\kappa(0) = -\left(\Omega(0)\begin{pmatrix} D_0\left(\mathbf{v}^I\right)_J^\kappa \\ D_1\left(\mathbf{v}^{II}\right)_0^\kappa \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} D_0\left(\mathbf{v}^I\right)_J^\kappa \\ D_1\left(\mathbf{v}^{II}\right)_0^\kappa \end{pmatrix}\right) =$$

$$= -\left(\left(\mathbf{I} - (\Delta R\Delta^{-1})^T(\Delta R\Delta^{-1})\right)\begin{pmatrix} D_0\left(\mathbf{v}^I\right)_J^\kappa \\ D_1\left(\mathbf{v}^{II}\right)_0^\kappa \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} D_0\left(\mathbf{v}^I\right)_J^\kappa \\ D_1\left(\mathbf{v}^{II}\right)_0^\kappa \end{pmatrix}\right).$$

Так как $\left\|\Delta R\Delta^{-1}\right\| < 1$, получаем, что $\mathbf{W}(0)$ — строго отрицательно определенная квадратичная форма относительно $\left(\mathbf{v}^I\right)_J^\kappa$ и $\left(\mathbf{v}^{II}\right)_0^\kappa$. Тогда в силу непрерывности $W(\nu)$ остается строго отрицательно определенной квадратичной формой при достаточно малых $\nu > 0$. Следовательно, имеем

$$\frac{V^{\kappa+1} - V^\kappa}{\Delta t} \leqslant V_\nu^\kappa + W^\kappa \leqslant -\nu V^\kappa$$

на решениях системы (3.1)–(3.3), или

$$\frac{V^{\kappa+1} - V^\kappa}{\Delta t} \leqslant -\nu V^\kappa, \quad \kappa = 0, \ldots, N-1.$$

□

Лемма 3.5. *Пусть для V^κ выполняется цепочка неравенств*

$$\frac{V^{\kappa+1} - V^\kappa}{\Delta t} \leqslant -\nu V^\kappa, \quad \kappa = 0, \ldots, N-1.$$

Тогда существует положительная константа C такая, что для решения $\mathbf{v}_j^\kappa$ разностной краевой задачи справедлива оценка:

$$\|\mathbf{v}^\kappa\|^2 \leqslant Ce^{-\nu t_\kappa}\left\|\mathbf{v}^0\right\|^2, \quad \kappa = 1, \ldots, N.$$

Здесь

$$\|\mathbf{v}^\kappa\|^2 = \Delta x\sum_{j=1}^{J}\left(\left(\mathbf{v}^I\right)_j^\kappa, \left(\mathbf{v}^I\right)_j^\kappa\right) + \Delta x\sum_{j=0}^{J-1}\left(\left(\mathbf{v}^{\mathrm{II}}\right)_j^\kappa, \left(\mathbf{v}^{\mathrm{II}}\right)_j^\kappa\right).$$

Доказательство. Рекурсивно применяя неравенства $\dfrac{V^{\kappa+1} - V^\kappa}{\Delta t} \leqslant -\nu V^\kappa$, получаем

$$V^{\kappa+1} < (1 - \Delta t\nu)^{\kappa+1}V^0 \leqslant e^{-\nu\Delta t(\kappa+1)}V^0 = e^{-\nu t_{\kappa+1}}V^0, \quad \kappa = 0, \ldots, N-1.$$

Введем в рассмотрение положительные постоянные:

$$C_1 = \min_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 0 \leqslant j \leqslant J}}\left\{\lambda_{ij} : \left||\mathbf{K}|^{-1}\mu_j - \lambda_{ij}\mathbf{E}\right| = 0\right\}, \quad C_2 = \max_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 0 \leqslant j \leqslant J}}\left\{\lambda_{ij} : \left||\mathbf{K}|^{-1}\mu_j - \lambda_{ij}\mathbf{E}\right| = 0\right\},$$

Тогда $C_1\mathbf{E} \leqslant \mu_j \leqslant C_2\mathbf{E}, \quad j = 0, \ldots, J$. Отсюда следует, что

$$C_1\left\{\Delta x\sum_{j=1}^{J}\left(\left(\mathbf{v}^I\right)_j^\kappa, \left(\mathbf{v}^I\right)_j^\kappa\right) + \Delta x\sum_{j=0}^{J-1}\left(\left(\mathbf{v}^{\mathrm{II}}\right)_j^\kappa, \left(\mathbf{v}^{\mathrm{II}}\right)_j^\kappa\right)\right\} \leqslant V^\kappa \leqslant e^{-\nu t_\kappa}V^0 \leqslant$$

$$\leqslant C_2 e^{-\nu t_\kappa}\left\{\Delta x\sum_{j=1}^{J}\left(\left(\mathbf{v}_0^I\right)_j,\left(\mathbf{v}_0^I\right)_j\right)+\Delta x\sum_{j=0}^{J-1}\left(\left(\mathbf{v}_0^{II}\right)_j,\left(\mathbf{v}_0^{II}\right)_j\right)\right\},$$

$$\Delta x\sum_{j=1}^{J}\left(\left(\mathbf{v}^I\right)_j^\kappa,\left(\mathbf{v}^I\right)_j^\kappa\right)+\Delta x\sum_{j=0}^{J-1}\left(\left(\mathbf{v}^{\mathrm{II}}\right)_j^\kappa,\left(\mathbf{v}^{\mathrm{II}}\right)_j^\kappa\right)\leqslant$$
$$\leqslant Ce^{-\nu t_\kappa}\left\{\Delta x\sum_{j=1}^{J}\left(\left(\mathbf{v}_0^I\right)_j,\left(\mathbf{v}_0^I\right)_j\right)+\Delta x\sum_{j=0}^{J-1}\left(\left(\mathbf{v}_0^{II}\right)_j,\left(\mathbf{v}_0^{II}\right)_j\right)\right\},\quad \kappa=1,\ldots,N;\quad C=C_2/C_1.$$

Таким образом, численное решение $\mathbf{v}_j^\kappa$ смешанной задачи экспоненциально устойчиво в L^2-норме. Лемма 3.5 доказана. □

Следовательно, если $\rho_2(R)<1$, решения сходятся в L^2-норме, а равновесное решение экспоненциально устойчиво. Теорема 3.1 доказана.

4. Пример численного расчета

Рассмотрим в области $G=\{(x,t):\ 0\leqslant x\leqslant l;\ 0\leqslant t\leqslant T\}$ следующую систему гиперболических уравнений:

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial t}-\dfrac{\partial v}{\partial x}=0,\\ \dfrac{\partial v}{\partial t}-\dfrac{\partial u}{\partial x}=0,\end{cases}$$

с граничными условиями

$$\begin{cases}3u(0,t)-v(0,t)=0,\\ u(l,t)+3v(l,t)=0.\end{cases}$$

Здесь l, T — некоторые положительные константы.

Приводим исходную систему к каноническому виду, т. е. переписываем ее с учетом инвариантов Римана. Для этого вычтем второе уравнение исходной системы из первого и примем результат за первое уравнение канонической формы системы. Затем сложим первое уравнение исходной системы со вторым и примем результат как второе уравнение канонической формы системы. Тогда в результате имеем следующее:

$$\begin{cases}\dfrac{\partial\,(u-v)}{\partial t}+\dfrac{\partial\,(u-v)}{\partial x}=0,\\ \dfrac{\partial\,(u+v)}{\partial t}-\dfrac{\partial\,(u+v)}{\partial x}=0.\end{cases}$$

В качестве инвариантов Римана возьмем следующие функции:

$$\begin{cases}u_1(x,t)=u(x,t)-v(x,t),\\ u_2(x,t)=u(x,t)+v(x,t).\end{cases}$$

Исходная система примет следующий вид в римановых координатах:

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u_1}{\partial t}+\dfrac{\partial u_1}{\partial x}=0,\\ \dfrac{\partial u_2}{\partial t}-\dfrac{\partial u_2}{\partial x}=0,\end{cases}\tag{4.1}$$

с соответствующими граничными условиями

$$\begin{cases}u_1(0,t)=\dfrac{1}{2}u_2(0,t),\\ u_2(l,t)=\dfrac{1}{2}u_1(l,t).\end{cases}\tag{4.2}$$

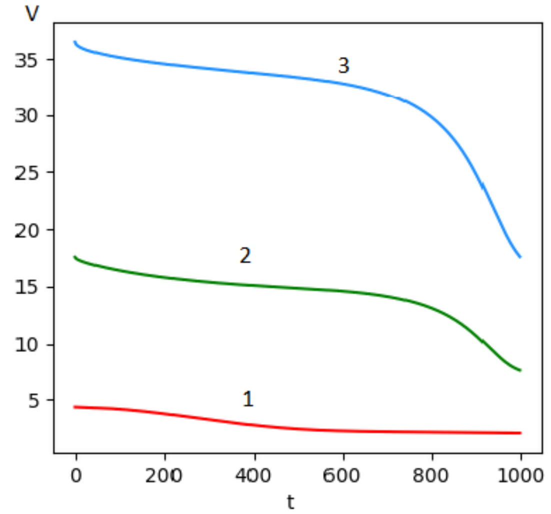

Рис. 1. Зависимость дискретной функции Ляпунова от времени при различных начальных данных

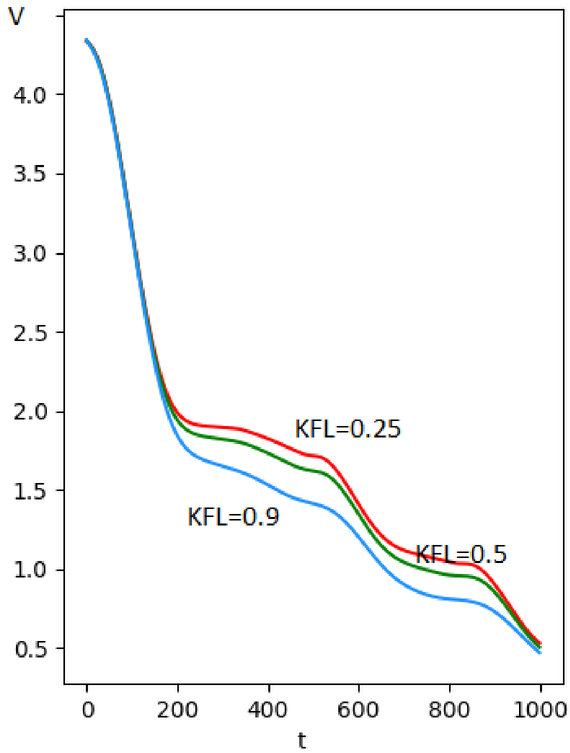

Рис. 2. Влияние условия КФЛ на функцию Ляпунова для начальной функции 1

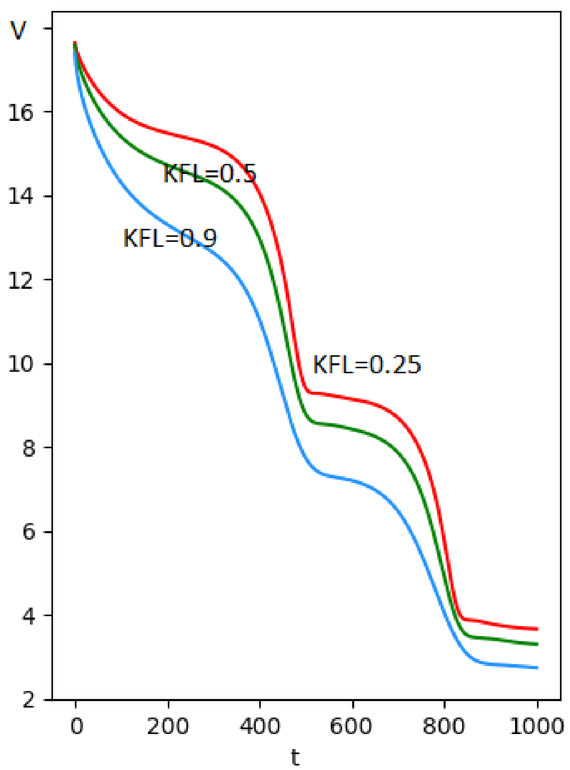

Рис. 3. Влияние условия КФЛ на функцию Ляпунова для начальной функции 2

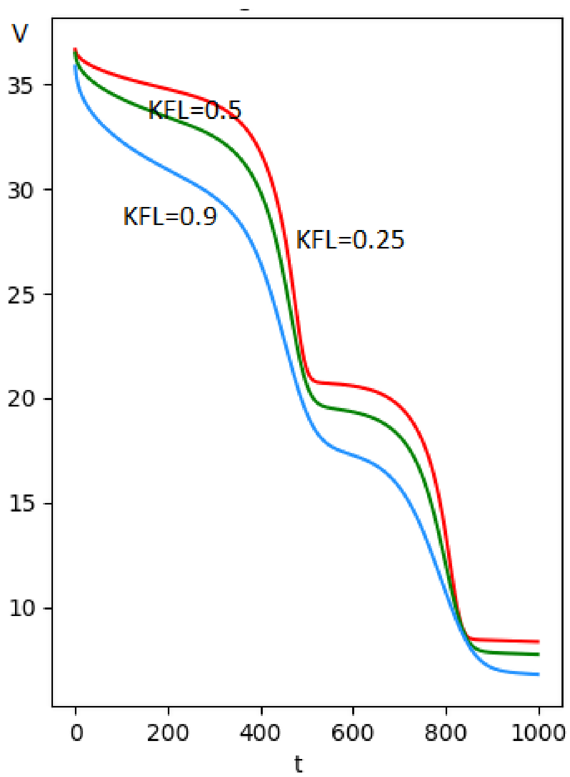

Рис. 4. Влияние условия КФЛ на функцию Ляпунова для начальной функции 3

В качестве значения параметров граничных условий принимаем $r = 0{,}5,\ s = 0{,}5$. Тогда $\rho_2(R) = \dfrac{1}{\sqrt{2}} < 1$. Мы решили систему разностных уравнений (4.1)-(4.2) с начальными данными

$$a_1 = 1,\ a_2 = 1, \quad L = 1,\ T = 1, \quad r = 0{,}5,\ s = 0{,}5.$$

В качестве параметров разностной сетки были заданы следующие значения:

$$J = 900, \quad K = 1000, \quad \Delta x = \frac{1}{J}, \quad \Delta t = \frac{1}{K}.$$

Кривые дискретных функций Ляпунова	Соответствующие начальные данные для u_1	Соответствующие начальные данные для u_2
1	$x^2 \cdot \sin(x)$	$\cos(x)$
2	$-x^2 + 0{,}2$	$x^3 - 1{,}3$
3	$\sqrt[3]{x^2 + \sin(x)}$	$0{,}3 + x \cdot e^x$

Таблица 1: Начальные функции для соответствующих функций u_1, u_2

5. Заключение

В заключение отметим, что в настоящей работе исследуется устойчивость противопоточной разностной схемы для численного расчета устойчивых решений смешанной задачи для линейной гиперболической системы с диссипативными граничными условиями. Построен дискретный аналог функции Ляпунова для численного значения устойчивых решений смешанной задачи. Получена априорная оценка дискретного аналога функции Ляпунова. Полученная априорная оценка позволяет констатировать экспоненциальную устойчивость численного решения. Доказаны теоремы об экспоненциальной устойчивости решения как для дифференциальной задачи, так и для разностной схемы в соответствующих нормах. Таким образом, это позволяет нам доказать сходимость устойчивого численного решения к устойчивому решению дифференциальной задачи. Приведен пример численного расчета, подтверждающий полученные теоретические результаты.

Благодарности. Работа была поддержана грантом UZB-Ind-2021-87 «Анализ симметрий Ли, моделирование и анализ устойчивости по Ляпунову гиперболических систем». Авторы благодарят за спонсорство и финансовую поддержку Министерство инновационного развития Республики Узбекистан.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Алаев Р. Д., Худайберганов М. У.* Дискретный аналог функции Ляпунова для гиперболических систем// Соврем. мат. Фундам. направл. — 2018. — *64*, № 4. — С. 591–602.
2. *Блохин А. М., Алаев Р. Д.* Интегралы энергии и их приложения к исследованию устойчивости разностных схем. — Новосибирск: Изд-во Новосибирского гос. ун-та, 1993.
3. *Годунов С. К.* Уравнения математической физики. — М.: Наука, 1979.
4. *Aloev R. D., Blokhin A. M., Hudayberganov M. U.* One class of stable difference schemes for hyperbolic system// Am. J. Numer. Anal. — 2014. — *2*, № 1. — С. 85–89.
5. *Aloev R. D., Davlatov Sh. O., Eshkuvatov Z. K., Nik Long N. M. A.* Uniqueness solution of the finite elements scheme for symmetric hyperbolic systems with variable coefficients// Malays. J. Math. Sci. — 2016. — *10*. — С. 49–60.
6. *Aloev R. D., Eshkuvatov Z. K., Davlatov Sh. O., Nik Long N. M. A.* Sufficient condition of stability of finite element method for symmetric t-hyperbolic systems with constant coefficients// Comput. Math. Appl. — 2014. — *68*. — С. 1194–1204.
7. *Aloev R. D., Eshkuvatov Z. K., Khudoyberganov M. U., Nematova D. E.* The difference splitting scheme for hyperbolic systems with variable coefficients// Math. Statist. — 2019. — *7*. — С. 82–89.
8. *Aloev R. D., Eshkuvatov Z. K., Khudayberganov M. U., Nik Long N. M. A.* A discrete analogue of energy integral for a difference scheme for quasilinear hyperbolic systems// Appl. Math. — 2018. — *9*. — С. 789–805.

9. *Aloev R. D., Khudoyberganov M. U., Blokhin A. M.* Construction and research of adequate computational models for quasilinear hyperbolic systems// Numer. Algebra Control Optim. — 2018. — *8*, № 3. — С. 287–299.
10. *Bastin G., Coron J.-M.* Stability and boundary stabilization of 1-D hyperbolic systems. — Basel: Birkhäuser, 2016.
11. *Göttlich S., Schillen P.* Numerical Discretization of Boundary Control Problems for Systems of Balance Laws: Feedback Stabilization// Eur. J. Control. — 2017. — *35.* — С. 11–18.

Р. Д. Алаев
Национальный университет Узбекистана им. М. Улугбека, Ташкент, Узбекистан
E-mail: aloevr@mail.ru

Д. Е. Нематова
Национальный университет Узбекистана им. М. Улугбека, Ташкент, Узбекистан
E-mail: nematova_dilfuza@mail.ru

DOI: 10.22363/2413-3639-2022-68-1-25-40 UDC 519.63

An Algebraic Condition for the Exponential Stability of an Upwind Difference Scheme for Hyperbolic Systems

© 2022 **R. D. Aloev, D. E. Nematova**

Abstract. In the paper, we investigate the question of obtaining the algebraic condition for the exponential stability of the numerical solution of the upwind difference scheme for the mixed problem posed for one-dimensional symmetric t-hyperbolic systems with constant coefficients and with dissipative boundary conditions. An a priori estimate for the numerical solution of the boundary-value difference problem is obtained. This estimate allows us to state the exponential stability of the numerical solution. A theorem on the exponential stability of the numerical solution of the boundary-value difference problem is proved. Easily verifiable algebraic conditions for the exponential stability of the numerical solution are given. The convergence of the numerical solution is proved.

REFERENCES

1. R. D. Aloev and M. U. Khudayberganov, “Diskretnyy analog funktsii Lyapunova dlya giperbolicheskikh sistem” [A discrete analog of the Lyapunov function for hyperbolic systems], *Sovrem. mat. Fundam. napravl.* [Contemp. Math. Fundam. Directions], 2018, **64**, No. 4, 591–602 (in Russian).
2. A. M. Blokhin and R. D. Aloev, *Integraly energii i ikh prilozheniya k issledovaniyu ustoychivosti raznostnykh skhem* [Energy Integrals and Their Applications to the Study of the Stability of Difference Schemes], Novosibirsk. gos. univ., Novosibirsk, 1993 (in Russian).
3. S. K. Godunov, *Uravneniya matematicheskoy fiziki* [Equations of Mathematical Physics], Nauka, Moscow, 1979 (in Russian).
4. R. D. Aloev, A. M. Blokhin, and M. U. Hudayberganov, “One class of stable difference schemes for hyperbolic system,” *Am. J. Numer. Anal.*, 2014, **2**, No. 1, 85–89.
5. R. D. Aloev, Sh. O. Davlatov, Z. K. Eshkuvatov, and N. M. A. Nik Long, “Uniqueness solution of the finite elements scheme for symmetric hyperbolic systems with variable coefficients,” *Malays. J. Math. Sci.*, 2016, **10**, 49–60.

6. R. D. Aloev, Z. K. Eshkuvatov, Sh. O. Davlatov, and N. M. A. Nik Long, "Sufficient condition of stability of finite element method for symmetric t-hyperbolic systems with constant coefficients," *Comput. Math. Appl.*, 2014, **68**, 1194–1204.
7. R. D. Aloev, Z. K. Eshkuvatov, M. U. Khudoyberganov, and D. E. Nematova, "The difference splitting scheme for hyperbolic systems with variable coefficients," *Math. Statist.*, 2019, **7**, 82–89.
8. R. D. Aloev, Z. K. Eshkuvatov, M. U. Khudayberganov, and N. M. A. Nik Long, "A discrete analogue of energy integral for a difference scheme for quasilinear hyperbolic systems," *Appl. Math.*, 2018, **9**, 789–805.
9. R. D. Aloev, M. U. Khudoyberganov, and A. M. Blokhin, "Construction and research of adequate computational models for quasilinear hyperbolic systems," *Numer. Algebra Control Optim.*, 2018, **8**, No. 3, 287–299.
10. G. Bastin and J.-M. Coron, *Stability and boundary stabilization of 1-D hyperbolic systems*, Birkhäuser, Basel, 2016.
11. S. Göttlich and P. Schillen, "Numerical Discretization of Boundary Control Problems for Systems of Balance Laws: Feedback Stabilization," *Eur. J. Control*, 2017, **35**, 11–18.

R. D. Aloev
National University of Uzbekistan, Tashkent, Uzbekistan
E-mail: aloevr@mail.ru

D. E. Nematova
National University of Uzbekistan, Tashkent, Uzbekistan
E-mail: nematova_dilfuza@mail.ru