

ГЛАДКОСТЬ РЕШЕНИЙ ЗАДАЧИ ОБ УСПОКОЕНИИ НЕСТАЦИОНАРНОЙ СИСТЕМЫ УПРАВЛЕНИЯ С ПОСЛЕДЕЙСТВИЕМ

© 2022 г. А. Ш. АДХАМОВА

Аннотация. Рассматривается задача об успокоении нестационарной системы управления, описываемой системой дифференциально-разностных уравнений нейтрального типа с гладкими матричными коэффициентами и несколькими запаздываниями. Эта задача эквивалентна краевой задаче для системы дифференциально-разностных уравнений второго порядка, которая имеет единственное обобщенное решение. Доказано, что гладкость этого решения может нарушаться на рассматриваемом интервале и сохраняется лишь на некоторых подынтервалах. Получены достаточные условия на начальную функцию, обеспечивающие гладкость обобщенного решения на всем интервале.

ОГЛАВЛЕНИЕ

1. Введение	14
2. Постановка задачи	15
3. Вариационная и краевая задачи	15
4. Свойства разностных операторов	18
5. Гладкость обобщенных решений на подынтервалах	20
Список литературы	22

1. ВВЕДЕНИЕ

Впервые задача об успокоении системы управления с последствием рассматривалась Н. Н. Красовским [5]. Поведение системы управления описывалось системой линейных дифференциально-разностных уравнений запаздывающего типа с постоянными коэффициентами и постоянным запаздыванием. В работах [9, 15] задача Н. Н. Красовского об успокоении системы управления с последствием была обобщена на случай, когда уравнение, описывающее управляемую систему, содержит также старшие члены с запаздыванием, т. е. имеет нейтральный тип. Многомерная система управления с постоянными матричными коэффициентами исследовалась в [7, 12], а многомерная нестационарная система управления нейтрального типа рассматривалась в [1, 2]. Системы управления с последствием запаздывающего типа изучались в [6, 8]. Отметим также работы, посвященные исследованию систем нейтрального типа с малыми коэффициентами при членах с запаздыванием [13, 14].

Настоящая работа посвящена исследованию гладкости обобщенных решений краевых задач для систем дифференциально-разностных уравнений нейтрального типа, к которым сводится задача об успокоении многомерных нестационарных систем управления нейтрального типа, рассмотренная в [1, 2]. Гладкость обобщенных решений этих краевых задач может нарушаться внутри интервала при сколь угодно гладкой начальной функции. Однако, как показано в данной статье, гладкость решений сохраняется на некоторых подынтервалах.

Публикация подготовлена при поддержке гранта РФФИ № 20-31-90119.



Статья построена следующим образом. В первом разделе содержится введение, а второй раздел посвящен постановке задачи об успокоении многомерной системы управления с последствием. В третьем разделе излагается связь между вариационной задачей, описывающей модель успокоения системы управления с последствием нейтрального типа, и краевой задачей для системы дифференциально-разностных уравнений второго порядка. В том же разделе сформулирована теорема об однозначной разрешимости рассматриваемой краевой задачи. Доказательство результатов, изложенных в третьем разделе, можно найти в работе [1]. В четвертом разделе содержатся свойства разностных операторов на конечном интервале. В пятом разделе изучается гладкость обобщенных решений на подынтервале. Отметим, что вопросы гладкости обобщенных решений второй краевой задачи для дифференциально-разностных уравнений рассматривались в работах [10, 11].

2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотрим линейную систему управления, описываемую системой дифференциально-разностных уравнений

$$\sum_{m=0}^M A_m(t)y'(t - m\tau) + \sum_{m=0}^M B_m(t)y(t - m\tau) = u(t), \quad 0 < t < T. \quad (2.1)$$

Здесь $y(t) = (y_1(t), \dots, y_n(t))^T$ — неизвестная вектор-функция, описывающая состояние системы, $u(t) = (u_1(t), \dots, u_n(t))^T$ — вектор-функция управления, $A_m(t) = \{a_{ij}^m(t)\}_{i,j=1,\dots,n}$, $B_m(t) = \{b_{ij}^m(t)\}_{i,j=1,\dots,n}$ — матрицы порядка $n \times n$ с элементами $a_{ij}^m(t)$, $b_{ij}^m(t)$, которые являются вещественными непрерывно дифференцируемыми функциями на \mathbb{R} , $\tau = const > 0$ — запаздывание.

Предыстория системы задается начальным условием

$$y(t) = \varphi(t), \quad t \in [-M\tau, 0]. \quad (2.2)$$

Здесь $\varphi(t) = (\varphi_1(t), \dots, \varphi_n(t))^T$ — некоторая вектор-функция.

Рассмотрим задачу о приведении системы (2.1) с начальным условием (2.2) в положение равновесия при $t \geq T$. Для этого мы найдем такое управление $u(t)$, $0 < t < T$, что:

$$y(t) = 0, \quad t \in [T - M\tau, T], \quad (2.3)$$

где $T > (M + 1)\tau$.

Будем искать управление, доставляющее минимум функционалу энергии

$$\int_0^T |u(t)|^2 dt \rightarrow \min,$$

где $|\cdot|$ — евклидова норма в \mathbb{R}^n . Таким образом, в силу (2.1) мы получаем вариационную задачу о минимуме функционала

$$J(y) := \int_0^T \left| \sum_{m=0}^M A_m(t)y'(t - m\tau) + \sum_{m=0}^M B_m(t)y(t - m\tau) \right|^2 dt \rightarrow \min. \quad (2.4)$$

3. ВАРИАЦИОННАЯ И КРАЕВАЯ ЗАДАЧИ

В этом разделе мы приведем без доказательства ряд результатов из [1, 2], необходимых нам в дальнейшем для изучения гладкости обобщенных решений.

Для того, чтобы установить взаимосвязь между вариационной задачей (2.4), (2.2), (2.3) и соответствующей краевой задачей для системы дифференциально-разностных уравнений, введем некоторые вспомогательные обозначения для различных вещественных функциональных пространств.

Обозначим через $C(\mathbb{R})$ пространство непрерывных и ограниченных на \mathbb{R} функций с нормой:

$$\|x(t)\|_{C(\mathbb{R})} = \sup_{t \in \mathbb{R}} |x(t)|.$$

Пусть $C^k(\mathbb{R})$, $k \in \mathbb{N}$, — пространство непрерывных и k раз непрерывно дифференцируемых функций на \mathbb{R} , ограниченных на \mathbb{R} вместе со всеми производными вплоть до k -го порядка, с нормой

$$\|x(t)\|_{C^k(\mathbb{R})} = \max_{0 \leq i \leq k} \sup_{t \in \mathbb{R}} |x^{(i)}(t)|.$$

Обозначим через $W_2^k(a, b)$ пространство абсолютно непрерывных на $[a, b]$ функций, имеющих производную k -го порядка из $L_2(a, b)$ со скалярным произведением

$$(v, w)_{W_2^k(a, b)} = \sum_{i=0}^k \int_a^b v^{(i)}(t) w^{(i)}(t) dt.$$

Пусть $\mathring{W}_2^k(a, b) = \{w \in W_2^k(a, b) : w^{(i)}(a) = w^{(i)}(b) = 0, i = 0, \dots, k-1\}$.

Введем пространства вектор-функций

$$L_2^n(a, b) = \prod_{i=1}^n L_2(a, b), \quad W_2^{k, n}(a, b) = \prod_{i=1}^n W_2^k(a, b), \quad \mathring{W}_2^{k, n}(a, b) = \prod_{i=1}^n \mathring{W}_2^k(a, b),$$

со скалярными произведениями

$$(v, w)_{L_2^n(a, b)} = \sum_{i=1}^n (v_i, w_i)_{L_2(a, b)},$$

$$(v, w)_{W_2^{k, n}(a, b)} = \sum_{i=1}^n (v_i, w_i)_{W_2^k(a, b)},$$

где $v = (v_1, \dots, v_n)^T$, $w = (w_1, \dots, w_n)^T$.

Покажем, что вариационная задача (2.2)–(2.4) эквивалента краевой задаче для системы дифференциально-разностных уравнений второго порядка.

Пусть $y \in W_2^{1, n}(-M\tau, T)$ — решение вариационной задачи (2.2)–(2.4), где $\varphi \in W_2^{1, n}(-M\tau, 0)$. Введем пространства

$$\tilde{L} = \{v \in L_2^n(-M\tau, T) : v(t) = 0, t \in (-M\tau, 0) \cup (T - M\tau, T)\},$$

$$\tilde{W} = \{v \in W_2^{1, n}(-M\tau, T) : v(t) = 0, t \in (-M\tau, 0) \cup (T - M\tau, T)\}.$$

Мы будем часто отождествлять пространство \tilde{L} с $L_2^n(0, T - M\tau)$, а пространство \tilde{W} с $\mathring{W}_2^{1, n}(0, T - M\tau)$, не оговаривая этого специально.

Пусть $v \in \tilde{W}$ — произвольная фиксированная функция. Тогда функция $y + sv \in W_2^{1, n}(-M\tau, T)$ и удовлетворяет краевым условиям (2.2), (2.3) для всех $s \in \mathbb{R}$.

Обозначим $J(y + sv) = F(s)$. Поскольку $J(y + sv) \geq J(y)$, $s \in \mathbb{R}$, мы имеем

$$\left. \frac{dF}{ds} \right|_{s=0} = 0, \quad (3.1)$$

$$B(y, v) := \int_0^T \left(\sum_{m=0}^M A_m(t) y'(t - m\tau) + \sum_{m=0}^M B_m(t) y(t - m\tau) \right)^T \times \\ \times \left(\sum_{l=0}^M A_l(t) v'(t - l\tau) + \sum_{l=0}^M B_l(t) v(t - l\tau) \right) dt. \quad (3.2)$$

Из равенства (3.1) следует, что

$$B(y, v) = 0, \quad v \in \tilde{W}. \quad (3.3)$$

Обозначим

$$B_{m, l}(y, v) = \int_0^T (A_m(t) y'(t - m\tau) + B_m(t) y(t - m\tau))^T (A_l(t) v'(t - l\tau) + B_l(t) v(t - l\tau)) dt. \quad (3.4)$$

Проведем преобразование слагаемых, полученных при раскрытии скобок в правой части (3.4). В слагаемых, содержащих $v(t - l\tau)$ или $v'(t - l\tau)$, сделаем замену переменной $\xi = t - l\tau$. Получим

$$B_{m,l}(y, v) = \int_{-l\tau}^{T-l\tau} (A_m(\xi + l\tau)y'(\xi + (l - m)\tau) + B_m(\xi + l\tau) \times \\ \times y(\xi + (l - m)\tau))^T (A_l(\xi + l\tau)v'(\xi) + B_l(\xi + l\tau)v(\xi)) d\xi.$$

Возвращаясь к старой переменной t , полагая $t = \xi$, и учитывая, что $v(t) = 0$ при $t \in (-M\tau, 0) \cup (T - M\tau, T)$, имеем

$$B_{m,l}(y, v) = \int_0^{T-M\tau} (A_m(t + l\tau)y'(t + (l - m)\tau) + B_m(t + l\tau) \times \\ \times y(t + (l - m)\tau))^T (A_l(t + l\tau)v'(t) + B_l(t + l\tau)v(t)) dt. \quad (3.5)$$

Из (3.2), (3.4) и (3.5) следует, что

$$B(y, v) = \int_0^{T-M\tau} \sum_{l,m=0}^M \{ (A_m(t + l\tau)y'(t + (l - m)\tau))^T (A_l(t + l\tau)v'(t) + \\ + [(A_m(t + l\tau)y'(t + (l - m)\tau))^T B_l(t + l\tau) - ((B_m(t + l\tau)y(t + (l - m)\tau))^T A_l(t + l\tau))' + \\ + (B_m(t + l\tau)y(t + (l - m)\tau))^T B_l(t + l\tau)]v(t) \} dt. \quad (3.6)$$

Из (3.6) и определения обобщенной производной следует, что

$$\sum_{l,m=0}^M A_l^T(t + l\tau)A_m(t + l\tau)y'(t + (l - m)\tau) \in W_2^{1,n}(0, T - M\tau). \quad (3.7)$$

Подставляя (3.6) в (3.3), в силу (3.7) мы можем произвести интегрирование по частям. Поскольку $v \in \dot{W}_2^{1,n}(0, T - M\tau)$ — произвольная функция, мы получим

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_R y := & - \left(\sum_{l,m=0}^M A_l^T(t + l\tau)A_m(t + l\tau)y'(t + (l - m)\tau) \right)' + \\ & + \sum_{l,m=0}^M B_l^T(t + l\tau)A_m(t + l\tau)y'(t + (l - m)\tau) - \left(\sum_{l,m=0}^M A_l^T(t + l\tau)B_m(t + l\tau)y(t + (l - m)\tau) \right)' + \\ & + \sum_{l,m=0}^M B_l^T(t + l\tau)B_m(t + l\tau)y(t + (l - m)\tau) = 0 \quad (t \in (0, T - M\tau)). \end{aligned} \quad (3.8)$$

Таким образом, вектор-функция $y \in W_2^{1,n}(-M\tau, T)$ удовлетворяет системе дифференциально-разностных уравнений (3.8) почти всюду на интервале $(0, T - M\tau)$.

Определение 3.1. Вектор-функция $y \in W_2^{1,n}(-M\tau, T)$ называется *обобщенным решением* задачи (3.8), (2.2), (2.3), если выполняется условие (3.7), $y(t)$ почти всюду на $(0, T - M\tau)$ удовлетворяет системе уравнений (3.8), а также краевым условиям (2.2), (2.3).

Очевидно, следующее определение обобщенного решения эквивалентно определению 3.1.

Определение 3.2. Вектор-функция $y \in W_2^{1,n}(-M\tau, T)$ называется *обобщенным решением* задачи (3.8), (2.2), (2.3), если она удовлетворяет интегральному тождеству

$$B(y, v) = \int_0^{T-M\tau} \sum_{l,m=0}^M (A_l^T(t + l\tau)A_m(t + l\tau)y'(t + (l - m)\tau))^T v'(t) dt +$$

$$\begin{aligned}
& + \int_0^{T-M\tau} \sum_{l,m=0}^M \{ (B_l^T(t+l\tau)A_m(t+l\tau)y'(t+(l-m)\tau))^T - \\
& \quad - ((A_l^T(t+l\tau)B_m(t+l\tau)y(t+(l-m)\tau))')^T + \\
& \quad + (B_l^T(t+l\tau)B_m(t+l\tau)y(t+(l-m)\tau))^T \} v(t) dt = 0 \quad (3.9)
\end{aligned}$$

для всех $v \in \mathring{W}_2^{1,n}(0, T - M\tau)$ и краевым условиям (2.2), (2.3).

Таким образом, мы доказали, что если вектор-функция $y \in W_2^{1,n}(-M\tau, T)$ является решением вариационной задачи (2.2)–(2.4), то она будет обобщенным решением краевой задачи (3.8), (2.2), (2.3).

Справедливо и обратное утверждение: если вектор-функция $y \in W_2^{1,n}(-M\tau, T)$ является обобщенным решением краевой задачи (3.8), (2.2), (2.3), то она будет решением вариационной задачи (2.2)–(2.4), см. [1]. Таким образом, справедливо следующее утверждение.

Теорема 3.1. Пусть $\varphi \in W_2^{1,n}(-M\tau, 0)$. Функционал (2.4) с краевыми условиями (2.2), (2.3) достигает минимума на некоторой функции тогда и только тогда, когда она является обобщенным решением краевой задачи (3.8), (2.2), (2.3).

Имеет место следующий результат, см. [1].

Лемма 3.1. Пусть $\det A_0(t) \neq 0$, $t \in \mathbb{R}$. Тогда для всех $w \in \widetilde{W}$

$$J_0(w) \geq c_1 \|w\|_{W_2^{1,n}(0, T-M\tau)}^2, \quad (3.10)$$

где $c_1 > 0$ — постоянная, не зависящая от w ,

$$J_0(v) := \int_0^T \left(\sum_{k=0}^M A_k(t) v'(t - k\tau) \right)' dt. \quad (3.11)$$

Используя лемму 3.1, можно доказать следующее утверждение, см. [1].

Теорема 3.2. Пусть $\det A_0(t) \neq 0$, $t \in \mathbb{R}$. Тогда для любой вектор-функции $\varphi \in W_2^{1,n}(-M\tau, 0)$ существует единственное обобщенное решение $y \in W_2^{1,n}(-M\tau, T)$ краевой задачи (3.8), (2.2), (2.3), при этом

$$\|y\|_{W_2^{1,n}(-M\tau, T)} \leq c \|\varphi\|_{W_2^{1,n}(-M\tau, 0)}, \quad (3.12)$$

где $c > 0$ — постоянная, не зависящая от φ .

4. СВОЙСТВА РАЗНОСТНЫХ ОПЕРАТОРОВ

Положим $d := T - M\tau$. Пусть $d = (N + \theta)\tau$, где $N \in \mathbb{N}$, $0 < \theta \leq 1$.

Введем некоторые дополнительные обозначения. Если $0 < \theta < 1$, обозначим $Q_{1s} = ((s-1)\tau, (s-1+\theta)\tau)$, $s = 1, \dots, N+1$ и $Q_{2s} = ((s-1+\theta)\tau, s\tau)$, $s = 1, \dots, N$. Если $\theta = 1$, обозначим $Q_{1s} = ((s-1)\tau, s\tau)$, $s = 1, \dots, N+1$. Таким образом, мы имеем два семейства непересекающихся интервалов, если $0 < \theta < 1$, и одно семейство, если $\theta = 1$; причем каждые два интервала одного семейства получаются друг из друга сдвигом на некоторое число.

Не ограничивая общности, будем предполагать $M = N$.

Введем оператор $R : L_2^n(0, d) \rightarrow L_2^n(0, d)$ по формуле

$$(Rx)(t) = \sum_{l,m=0}^M A_l^T(t+l\tau)A_m(t+l\tau)x(t+(l-m)\tau). \quad (4.1)$$

Лемма 4.1. Оператор $R : L_2^n(0, d) \rightarrow L_2^n(0, d)$ самосопряженный, т. е. для любых $x, y \in L_2(\mathbb{R})$ выполняется равенство

$$(Rx, y)_{L_2^n(\mathbb{R})} = (x, Ry)_{L_2^n(\mathbb{R})}.$$

Доказательство. Действительно, при любых $x, y \in L_2^n(\mathbb{R})$, делая замену $t' = t + (l - m)\tau$, получим

$$\begin{aligned} (Rx, y)_{L_2^n(\mathbb{R})} &= \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\sum_{l,m=0}^M A_l^T(t + l\tau) A_m(t + l\tau) x(t + (l - m)\tau) \right) y(t) dt = \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} x(t') \left(\sum_{l,m=0}^M A_m^T(t' + m\tau) A_l(t' + m\tau) y(t' + (m - l)\tau) \right) dt'. \end{aligned}$$

Обозначая t' через t и меняя местами индексы l, m , имеем

$$(Rx, y)_{L_2^n(\mathbb{R})} = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \left(\sum_{l,m=0}^M A_l^T(t + l\tau) A_m(t + l\tau) y(t + (l - m)\tau) \right) dt = (x, Ry)_{L_2^n(\mathbb{R})}.$$

□

Запишем оператор R в виде

$$(Ry)(t) := \sum_{s=-M}^M C_s(t) y(t + s\tau), \quad (4.2)$$

где

$$C_s(t) := \sum_{l,m:l-m=s} A_l^T(t + l\tau) A_m(t + l\tau) \quad (4.3)$$

— матрица порядка $n \times n$ с элементами $c_s^{ij}(t)$ ($i, j = 1, \dots, n$). По построению $c_s^{ij}(t)$ — непрерывно дифференцируемые функции на \mathbb{R} .

Обозначим $Q := (0, d)$. Введем ограниченные операторы $I_Q : L_2^n(Q) \rightarrow L_2^n(\mathbb{R})$ и $P_Q : L_2^n(\mathbb{R}) \rightarrow L_2^n(Q)$ следующим образом: $(I_Q x)(t) = x(t)$, ($t \in (0, d)$), $(I_Q x)(t) = 0$ ($t \notin (0, d)$) и $(P_Q y)(t) = y(t)$, ($t \in (0, d)$). Обозначим $R_Q = P_Q R I_Q$. Из леммы 4.1 вытекает следующий результат.

Лемма 4.2. *Оператор $R_Q : L_2^n(Q) \rightarrow L_2^n(Q)$ ограниченный и самосопряженный.*

Пусть $P_\alpha : L_2^n(Q) \rightarrow L_2^n(\bigcup_s Q_{\alpha s})$ — оператор ортогонального проектирования $L_2^n(Q)$ на $L_2^n(\bigcup_s Q_{\alpha s})$, где $L_2^n(\bigcup_s Q_{\alpha s}) = \{y \in L_2^n(Q) : y(t) = 0, t \in (0, d) \setminus \bigcup_s Q_{\alpha s}\}$, $\alpha = 1, 2$, если $\theta < 1$; $\alpha = 1$ и P_α — единичный оператор, если $\theta = 1$.

Очевидно следующее утверждение.

Лемма 4.3. *$L_2^n(\bigcup_s Q_{\alpha s})$ — инвариантное подпространство оператора R_Q .*

Введем оператор $U_\alpha : L_2(\bigcup_s Q_{\alpha s}) \rightarrow L_2^{N(\alpha)}(Q_{\alpha 1})$ по формуле

$$(U_\alpha y)_k(t) = y(t + k - 1), t \in Q_{\alpha 1}, \quad (4.4)$$

где $k = 1, \dots, N(\alpha)$; $N(\alpha) = M + 1$, если $\alpha = 1$; $N(\alpha) = M$, если $\alpha = 2$.

Введем теперь изометрический изоморфизм гильбертовых пространств $\tilde{U}_\alpha : L_2^n(\bigcup_s Q_{\alpha s}) \rightarrow L_2^{nM}(Q_{\alpha 1})$ по формуле

$$(\tilde{U}_\alpha y)(t) = ((U_\alpha y)_1)^T, \dots, (U_\alpha y_M)^T)^T(t), \quad (4.5)$$

где

$$y = (y_1, \dots, y_n)^T \in L_2^n(0, d), \quad (U_\alpha y_j)(t) = ((U_\alpha y_j)_1(t), \dots, (U_\alpha y_j)_M(t))^T.$$

Для каждого $\alpha = 1, 2$ рассмотрим блочную матрицу

$$R_\alpha(t) = \{R_{\alpha ij}(t)\}_{i,j=1}^n. \quad (4.6)$$

Здесь R_{1ij} — квадратные матрицы порядка $(M + 1) \times (M + 1)$ с элементами

$$r_{kl}^{1ij} = c_{l-k}^{ij}(t + k - 1), \quad k, l = 1, \dots, M + 1, \quad (4.7)$$

R_{2ij} — квадратные матрицы порядка $M \times M$ с элементами

$$r_{kl}^{2ij} = c_{l-k}^{ij}(t+k-1), \quad k, l = 1, \dots, M. \quad (4.8)$$

Лемма 4.4. *Оператор $R_{Q\alpha} = \tilde{U}_\alpha R_Q \tilde{U}_\alpha^{-1} : L_2^{nN(\alpha)}(Q_{\alpha 1}) \rightarrow L_2^{nN(\alpha)}(Q_{\alpha 1})$ является оператором умножения на симметричную матрицу $R_\alpha(t)$.*

Доказательство. Пусть $V \in L_2^{nN(\alpha)}(Q_{\alpha 1})$. Обозначим $v = \tilde{U}_\alpha^{-1}V \in L_2^n(\bigcup_l Q_{sl})$. В силу формулы (4.4) и определения оператора R_Q мы имеем

$$\begin{aligned} (R_{Q\alpha}V)_{(i-1)N(\alpha)+k}(t) &= (\tilde{U}_\alpha R_Q \tilde{U}_\alpha^{-1}V)_{(i-1)N(\alpha)+k}(t) = (\tilde{U}_\alpha R_Q v)_{(i-1)N(\alpha)+k}(t) = \\ &= \sum_{j=1}^n \sum_s C_s^{ij}(t+k-1)v_j(t+k-1+s) \quad (t \in Q_{\alpha 1}). \end{aligned} \quad (4.9)$$

Здесь мы суммируем по s таким, что $1 \leq k+s \leq N(\alpha)$.

Пусть $l := k+s$. Тогда из (4.9) и (4.8) следует, что

$$(R_{Q\alpha}V)_{(i-1)N(\alpha)+k}(t) = \sum_{j=1}^n \sum_{l=1}^{N(\alpha)} C_{l-k}^{ij}(t+k-1)v_j(t+l-1) = \sum_{j=1}^n \sum_{l=1}^{N(\alpha)} r_{kl}^{\alpha ij}(t)V_{(j-1)N(\alpha)+l}(t).$$

Таким образом, мы доказали, что оператор $R_{Q\alpha}$ является умножением на матрицу R_α в пространстве $L_2^{nN(\alpha)}(Q_{\alpha 1})$. Отсюда из леммы 4.2 следует симметричность матрицы R_α . \square

5. ГЛАДКОСТЬ ОБОБЩЕННЫХ РЕШЕНИЙ НА ПОДЫНТЕРВАЛАХ

Как известно [3, 4, 15], гладкость обобщенных решений краевых задач для дифференциально-разностных уравнений нейтрального типа может нарушаться внутри интервала, на котором определено решение. С другой стороны, гладкость обобщенных решений сохраняется на некоторых подынтервалах.

Теорема 5.1. *Пусть $\det A_0(t) \neq 0$, $t \in \mathbb{R}$, и пусть $\varphi \in W_2^{2,n}(-M\tau, 0)$. Тогда обобщенное решение задачи (3.8), (2.2), (2.3) $y \in W_2^{1,n}(-M\tau, T)$ обладает следующей гладкостью на подынтервалах интервала $(0, d)$:*

- $y \in W_2^{2,n}((j-1)\tau, j\tau)$ ($j = 1, \dots, M+1$), если $\theta = 1$;
- $y \in W_2^{2,n}((j-1)\tau, (j-1+\theta)\tau)$ ($j = 1, \dots, M+1$) и $y \in W_2^{2,n}((j-1+\theta)\tau, j\tau)$ ($j = 1, \dots, M$), если $\theta < 1$.

Доказательство.

1. По теореме о продолжении функций в пространстве Соболева для любой вектор-функции $\varphi \in W_2^{2,n}(-M\tau, 0)$ существует $\Phi \in W_2^{2,n}(-M\tau, T)$ такая, что $\Phi(t) = \varphi(t)$ при $t \in (-M\tau, 0)$, $\Phi(t) = 0$ при $t \in (T-M\tau, T)$ и

$$\|\Phi\|_{W_2^{2,n}(-M\tau, T)} \leq k_1 \|\varphi\|_{W_2^{2,n}(-M\tau, 0)}, \quad (5.1)$$

где константа $k_1 > 0$ не зависит от φ .

Введем вектор-функцию $x(t) = y(t) - \Phi(t) \in W_2^{1,n}(-M\tau, 0)$. Поскольку $\Phi \in W_2^{2,n}(-M\tau, T)$, в силу (3.7) $x(t)$ удовлетворяет условию

$$\sum_{l,m=0}^M A_l^T(t+l\tau)A_m(t+l\tau)x'(t+(l-m)\tau) \in W_2^{1,n}(0, T-M\tau). \quad (5.2)$$

Таким образом, вектор-функция $x(t)$ удовлетворяет почти всюду на интервале $(0, T-M\tau)$ системе дифференциально-разностных уравнений

$$\mathcal{A}_R^0 x := - \sum_{l,m=0}^M -(R_Q x')'(t) = F(t), \quad t \in (0, T-M\tau) \quad (5.3)$$

и краевым условиям

$$x(0) = x(T-M\tau) = 0. \quad (5.4)$$

Здесь

$$\begin{aligned}
 F(t) := & -\mathcal{A}_R \Phi - \sum_{l,m=0}^M B_l^T(t+l\tau) A_m(t+l\tau) y'(t+(l-m)\tau) + \\
 & + \left(\sum_{l,m=0}^M A_l^T(t+l\tau) B_m(t+l\tau) y(t+(l-m)\tau) \right)' - \\
 & - \sum_{l,m=0}^M B_l^T(t+l\tau) B_m(t+l\tau) y(t+(l-m)\tau) \in L_2^n(0, T-M\tau).
 \end{aligned}$$

2. Повторяя в обратном порядке выкладки раздела 3, сделанные при выводе системы дифференциально-разностных уравнений (3.8) из интегрального тождества (3.3), в силу леммы 3.1 мы получим неравенство

$$(\mathcal{A}_R^0 w, w)_{L_2^n(0, T-M\tau)} = J_0(w) \geq c_1 \|w\|_{W_2^{1,n}(0, T-M\tau)}^2 \quad (5.5)$$

для любых $w \in C_0^{\infty, n}(0, T-M\tau) := \prod_{j=1}^n C_0^\infty(0, T-M\tau)$.

Будем предполагать, что $\text{supp } w \subset \bigcup_s Q_{\alpha s}$. Обозначим $W_\alpha = \bigcup_s w$. Тогда из равенства (4.5) и лемм 4.2, 4.4 следует, что

$$-((R_\alpha W_\alpha')', W_\alpha)_{L_2^{nN(\alpha)}(Q_{\alpha 1})} \geq c_1 \|W_\alpha\|_{W_2^{1, nN(\alpha)}(Q_{\alpha 1})}^2. \quad (5.6)$$

Из (5.3) и формулы Лейбница следует, что вектор-функция $U_\alpha x \in W_2^{1, nN(\alpha)}(Q_{\alpha 1})$ удовлетворяет почти всюду в $Q_{\alpha 1}$ системы дифференциальных уравнений

$$-R_\alpha(t)(U_\alpha x)''(t) = F_0(t) \quad (t \in Q_{\alpha 1}), \quad (5.7)$$

где $F_0(t) = F(t) - R_\alpha'(t)(U_\alpha x)'(t) \in L_2^{nN(\alpha)}(Q_{\alpha 1})$.

Таким образом, чтобы доказать утверждение теоремы, достаточно убедиться, что $\det R_0(t) \neq 0$ для всех $t \in \overline{Q_{\alpha 1}}$, поскольку тогда из (5.7) мы получим $U_\alpha x \in W_2^{2, nN(\alpha)}(Q_{\alpha 1})$, т. е. $y = x - \Phi \in W_2^{2, n}(Q_{\alpha 1})$, $s = 1, \dots, N(\alpha)$.

Для доказательства того, что $\det R_0(t) \neq 0$ для всех $t \in \overline{Q_{\alpha 1}}$, мы используем неравенство (5.5).

3. Пусть $t^0 \in \overline{Q_{\alpha 1}}$ — произвольная точка. Выберем t^1 и r так, что $[t^1-r, t^1+r] \subset \overline{Q_{\alpha 1}} \cap (t^0-\delta, t^0+\delta)$, где $\delta > 0$ будет определено ниже. Предположим, что $W_\alpha \in C_0^{\infty, nN(\alpha)}(t^1-r, t^1+r)$. Из (5.6) следует, что

$$b_1 + b_2 \geq k_2 \|W_\alpha\|_{W_2^{1, nN(\alpha)}(Q_{\alpha 1})}^2, \quad (5.8)$$

где

$$\begin{aligned}
 b_1 &= (R_\alpha(t^0)W_\alpha', W_\alpha')_{L_2^{nN(\alpha)}(t^1-r, t^1+r)}, \\
 b_2 &= ((R_\alpha(t) - R_\alpha(t^0))W_\alpha', W_\alpha')_{L_2^{nN(\alpha)}(t^1-r, t^1+r)}.
 \end{aligned}$$

Поскольку коэффициенты матрицы $R_\alpha(t)$ равномерно непрерывны на $[0, T-M\tau]$, мы имеем

$$|b_2| \leq \varepsilon(\delta) \|W_\alpha\|_{W_2^{1, nN(\alpha)}(t^1-r, t^1+r)},$$

где $\varepsilon(\delta) \rightarrow 0$ при $\delta \rightarrow 0$. Выберем $\delta > 0$ так, что $\varepsilon(\delta) < k_2/2$. Тогда из (5.8) мы получим

$$(R_\alpha(t^0)W_\alpha', W_\alpha')_{L_2^{nN(\alpha)}(t^1-r, t^1+r)} \geq \frac{k_2}{2} \|W_\alpha\|_{W_2^{1, nN(\alpha)}(t^1-r, t^1+r)}^2.$$

Получим теперь соответствующую оценку для функции $V_\alpha \in C_0^{\infty, nN(\alpha)}(-R, R)$, где $\varkappa = R/r > 1$. Сделаем замену переменной $\eta = \varkappa(t - t^1)$. Обозначим $V_\alpha(\eta) = W_\alpha(t(\eta))$. Тогда из последнего неравенства мы получим

$$(R_\alpha(t^0)V_\alpha'(\eta), V_\alpha'(\eta))_{L_2^{nN(\alpha)}(-R, R)} = \varkappa^{-1} (R_\alpha(t^0)W_\alpha'(t), W_\alpha'(t))_{L_2^{nN(\alpha)}(t^1-r, t^1+r)} \geq$$

$$\geq \frac{k_2}{2} \varkappa^{-1} \|W'_\alpha(t)\|_{L_2^{nN(\alpha)}(t^1-r, t^1+r)}^2 = \frac{k_2}{2} \|V'_\alpha(\eta)\|_{L_2^{nN(\alpha)}(-R, R)}^2. \quad (5.9)$$

Предположим, что $V_\alpha = v_\alpha Y$, где $v_\alpha \in C_0^\infty(-R, R)$, $Y \in \mathbb{C}^{nN(\alpha)}$. Пусть функция v_α продолжена нулем в $\mathbb{R} \setminus (-R, R)$. Тогда, используя преобразование Фурье, из (5.9) в силу теоремы Планшереля мы получим

$$\int_{\mathbb{R}} (R_\alpha(t^0) \xi^2 Y, Y) |\hat{v}_\alpha(\xi)|^2 d\xi \geq \frac{k_2}{2} \int_{\mathbb{R}} \xi^2 |Y|^2 |\hat{v}_\alpha(\xi)|^2 d\xi. \quad (5.10)$$

Здесь

$$\hat{v}_\alpha(\xi) = (2\pi)^{-1/2} \int_{\mathbb{R}} v_\alpha(\eta) e^{-i\xi\eta} d\eta$$

— преобразование Фурье функции $v_\alpha(\eta)$.

Поскольку $C_0^\infty(\mathbb{R})$ всюду плотно в $L_2(\mathbb{R})$, из (5.10) следует, что

$$(R_\alpha(t^0) Y, Y) \geq \frac{k_2}{2} |Y|^2.$$

Таким образом, симметрическая матрица $R_\alpha(t^0)$ положительно определена для любого $t_0 \in \overline{Q_{\alpha 1}}$. Следовательно, $\det R_0(t) \neq 0$ для всех $t \in \overline{Q_{\alpha 1}}$. \square

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Адхамова А. Ш., Скубачевский А. Л. Об одной задаче успокоения нестационарной системы управления с последствием// Соврем. мат. Фундам. направл. — 2019. — 65, № 4. — С. 547–556.
2. Адхамова А. Ш., Скубачевский А. Л. Об успокоении системы управления с последствием нейтрального типа// Докл. РАН. — 2020. — 490, № 1. — С. 81–84.
3. Каменский А. Г. Краевые задачи для уравнений с формально симметричными дифференциально-разностными операторами// Дифф. уравн. — 1976. — 10, № 5. — С. 815–824.
4. Каменский Г. А., Мышкис А. Д. К постановке краевых задач для дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом и несколькими старшими членами// Дифф. уравн. — 1974. — 10, № 3. — С. 409–418.
5. Красовский Н. Н. Теория управления движением. — М.: Наука, 1968.
6. Кряжмский А. В., Максимов В. И., Осипов Ю. С. О позиционном моделировании в динамических системах// Прикл. мат. мех. — 1983. — 47, № 6. — С. 883–890.
7. Леонов Д. Д. К задаче об успокоении системы управления с последствием// Соврем. мат. Фундам. направл. — 2010. — 37. — С. 28–37.
8. Осипов Ю. С. О стабилизации управляемых систем с запаздыванием// Дифф. уравн. — 1965. — 1, № 5. — С. 605–618.
9. Скубачевский А. Л. К задаче об успокоении системы управления с последствием// Докл. РАН. — 1994. — 335, № 2. — С. 157–160.
10. Скубачевский А. Л., Иванов Н. О. Вторая краевая задача для дифференциально-разностных уравнений// Докл. РАН. — 2021. — 500, № 1. — С. 74–77.
11. Скубачевский А. Л., Иванов Н. О. Об обобщенных решениях второй краевой задачи для дифференциально-разностных уравнений с переменными коэффициентами// Соврем. мат. Фундам. направл. — 2021. — 67, № 3. — С. 576–595.
12. Adkhamova A. S., Skubachevskii A. L. Damping Problem for Multidimensional Control System with Delays// Distrib. Comput. Commun. Networks. — 2016. — 678. — С. 612–623.
13. Banks H. T., Kent G. A. Control of functional differential equations of retarded and neutral type to target sets in function space// SIAM J. Control. — 1972. — 10, № 4. — С. 567–593.
14. Kent G. A. A maximum principle for optimal control problems with neutral functional differential systems// Bull. Am. Math. Soc. — 1971. — 77, № 4. — С. 565–570.
15. Skubachevskii A. L. Elliptic functional differential equations and applications. — Basel—Boston—Berlin: Birkhauser, 1997.

А. Ш. Адхамова

Российский университет дружбы народов, Москва, Россия

E-mail: ami_adhamova@mail.ru

DOI: 10.22363/2413-3639-2022-68-1-14-24

UDC 517.929

Smoothness of Solutions to the Damping Problem for Nonstationary Control System with Delay

© 2022 A. Sh. Adkhamova

Abstract. We consider the damping problem for a nonstationary control system described by a system of differential-difference equations of neutral type with smooth matrix coefficients and several delays. This problem is equivalent to the boundary-value problem for a system of second-order differential-difference equations, which has a unique generalized solution. It is proved that the smoothness of this solution can be violated on the considered interval and is preserved only on some subintervals. Sufficient conditions for the initial function are obtained to ensure the smoothness of the generalized solution over the entire interval.

REFERENCES

1. A. Sh. Adkhamova and A. L. Skubachevskii, “Ob odnoy zadache uspokoeniya nestatsionarnoy sistemy upravleniya s posledeystviem” [On one damping problem for a non-stationary control system with aftereffect], *Sovrem. mat. Fundam. napravl.* [Contemp. Math. Fundam. Directions], 2019, **65**, No. 4, 547–556 (in Russian).
2. A. Sh. Adkhamova and A. L. Skubachevskii, “Ob uspokoении sistemy upravleniya s posledeystviem neytral’nogo tipa” [On damping of the control system with aftereffect of a neutral-type], *Dokl. RAN* [Rep. Russ. Acad. Sci.], 2020, **490**, No. 1, 81–84 (in Russian).
3. A. G. Kamenskii, “Kraevye zadachi dlya uravneniy s formal’no simmetrichnymi differentsial’no-raznostnymi operatorami” [Boundary-value problems for equations with formally symmetric differential-difference operators], *Diff. uravn.* [Differ. Equ.], 1976, **10**, No. 5, 815–824 (in Russian).
4. G. A. Kamenskii and A. D. Myshkis, “K postanovke kraevykh zadach dlya differentsial’nykh uravneniy s otklonyayushchimsya argumentom i neskol’kimi starshimi chlenami” [On the formulation of boundary-value problems for differential equations with deviating argument and several leading terms], *Diff. uravn.* [Differ. Equ.], 1974, **10**, No. 3, 409–418 (in Russian).
5. N. N. Krasovskii, *Teoriya upravleniya dvizheniem* [Theory of Motion Control], Nauka, Moscow, 1968 (in Russian).
6. A. V. Kryazhimskii, V. I. Maksimov, and Yu. S. Osipov, “O pozitsionnom modelirovanii v dinamicheskikh sistemakh” [On positional modeling in dynamical systems], *Prikl. mat. mekh.* [Appl. Math. Mech.], 1983, **47**, No. 6, 883–890 (in Russian).
7. D. D. Leonov, “K zadache ob uspokoении sistemy upravleniya s posledeystviem” [On a stabilization problem for a control system with aftereffect], *Sovrem. mat. Fundam. napravl.* [Contemp. Math. Fundam. Directions], 2010, **37**, 28–37 (in Russian).
8. Yu. S. Osipov, “O stabilizatsii upravlyaemykh sistem s zapazdyvaniem” [On stabilization of control systems with delay], *Diff. uravn.* [Differ. Equ.], 1965, **1**, No. 5, 605–618 (in Russian).
9. A. L. Skubachevskii, “K zadache ob uspokoении sistemy upravleniya s posledeystviem” [On the problem of damping a control system with aftereffect], *Dokl. RAN* [Rep. Russ. Acad. Sci.], 1994, **335**, No. 2, 157–160 (in Russian).
10. A. L. Skubachevskii and N. O. Ivanov, “Vtoraya kraevaya zadacha dlya differentsial’no-raznostnykh uravneniy” [The second boundary-value problem for differential-difference equations], *Dokl. RAN* [Rep. Russ. Acad. Sci.], 2021, **500**, No. 1, 74–77 (in Russian).
11. A. L. Skubachevskii and N. O. Ivanov, “Ob obobshchennykh resheniyakh vtoroy kraevoy zadachi dlya differentsial’no-raznostnykh uravneniy s peremennymi koefitsientami” [On generalized solutions of the



- second boundary-value problem for differential-difference equations with variable coefficients], *Sovrem. mat. Fundam. napravl.* [Contemp. Math. Fundam. Directions], 2021, **67**, No. 3, 576–595 (in Russian).
12. A. S. Adkhamova and A. L. Skubachevskii, “Damping Problem for Multidimensional Control System with Delays,” *Distrib. Comput. Commun. Networks*, 2016, **678**, 612–623.
 13. H. T. Banks and G. A. Kent, “Control of functional differential equations of retarded and neutral type to target sets in function space,” *SIAM J. Control*, 1972, **10**, No. 4, 567–593.
 14. G. A. Kent, “A maximum principle for optimal control problems with neutral functional differential systems,” *Bull. Am. Math. Soc.*, 1971, **77**, No. 4, 565–570.
 15. A. L. Skubachevskii, *Elliptic functional differential equations and applications*, Birkhauser, Basel—Boston—Berlin, 1997.

A. Sh. Adkhamova
RUDN University, Moscow, Russia
E-mail: ami_adhamova@mail.ru