Современная математика. Фундаментальные направления. Том 68, № 1 (2022). С. 1–13
Contemporary Mathematics. Fundamental Directions. ISSN 2413-3639 (Print)

DOI: 10.22363/2413-3639-2022-68-1-1-13 УДК 519.2

ОБОБЩЕНИЕ СТЕПЕННОЙ ОЦЕНОЧНОЙ ФУНКЦИИ ОТНОСИТЕЛЬНОГО РИСКА ПРИ ЗАВИСИМЫХ СЛУЧАЙНО ЦЕНЗУРИРОВАННЫХ ДАННЫХ

© 2022 г. **А. А. АБДУШУКУРОВ**

Аннотация. В статье изучается задача оценки условной функции выживания по правой случайной модели цензурирования с учетом ковариантa. Предложена новая оценочная функция условной функции выживания, которая является обобщением степенной оценочной функции относительного риска независимого цензурирования, и изучены ее свойства большой выборки. Доказана асимптотическая нормальность с тем же предельным гауссовским процессом, как и для копула-графической оценочной функции.

ОГЛАВЛЕНИЕ

1. Введение

В таких прикладных областях, как биомедицина, инженерия, страхование и гуманитарные науки, исследователи заинтересованы в положительных величинах, которые выражаются как время до наступления определенного события. Например, время выживания индивида в биомедицине, а в промышленных испытаниях время работоспособности механизма удобно рассматривать как неотрицательные случайные величины (СВ). Но на практике в таких случаях данные могут быть неполными. Так, например, в медицине может рассматриваться событие смерти по заданной причине, а событие смерти по другой причине являться цензурирующим случаем. В промышленных исследованиях может получиться так, что часть оборудования будет отключена (то есть цензурирована) из-за наличия некоторых признаков скорой поломки. В анализе выживаемости рассматриваются неотрицательные СВ, обозначающие время смерти биологических организмов или отказа механического оборудования. Трудность в анализе выживаемости состоит в том, что время выживания может быть подвергнуто случайному цензурированию другими неотрицательными СВ, и в таком случае наблюдаемые данные будут неполными.

Существуют разные типы цензурирующих механизмов. Оценка функции распределения (ФР) времени жизни и ее функционалов по неполным данным является основной целью статистики в анализе выживаемости. В этой статье рассматривается только модель правого цензурирования. Для данных наблюдений известна только нижняя граница времени выживания, и поэтому такие данные называются цензурированными справа.

Оценка функции выживаемости с цензурированными данными активно изучается на протяжении последних десятилетий. Дополнительная трудность, с которой часто сталкиваются на практике и которая будет изучена в настоящей работе, состоит в том, что совместно с выживаемостью в

© Российский университет дружбы народов, 2022
Эта работа доступна по лицензии Creative Commons 4.0 International
https://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/4.0/deed.ru

каждом наблюдении также измеряется другая переменная. Тогда на изучаемую СВ (время жизни или время до поломки) и цензурированную СВ влияет другая величина, которая называется *прогностическим фактором*, или *ковариантом*. В медицине дозировка лекарства, а в инженерии какие-либо условия окружающей среды (температура, давление и др.) влияют на наблюдаемые величины. Главная задача состоит в оценке распределения времени жизни по таким зависимым цензурированным данным. Цель настоящей работы заключается в рассмотрении этой задачи в рамках модели правого случайного цензурирования с учетом ковариантa, предполагая, что зависимость описывается некоторой известной копулой. В случае независимого цензурирования мы рассматриваем задачу оценки функции выживаемости и *средней функции остаточной жизни* (СФОЖ). Для функции выживаемости мы используем степенную оценочную функцию относительного риска, полученную автором, и ее обобщение на случай зависимого цензурирования.

2. Оценка средней функции остаточной жизни и ее свойства

2.1. Случай независимого цензурирования. Пусть $\{(X_i, Y_i)\,,\ i \geqslant 1\}$ — последовательность независимых и одинаково распределенных пар положительных СВ, где X_i и Y_i предполагаются независимыми с общими абсолютно непрерывными ФР $F(t) = P(X_i \leqslant t)$ и $G(t) = P(Y_i \leqslant t)$, $F(0) = G(0) = 0,\ t \in \mathbb{R}^+ = [0, \infty)$. Здесь X_i обозначает время жизни, а Y_i — время цензурирования справа. Полученные данные состоят из выборки пар

$$C^{(n)} = \{(Z_i, \delta_i)\,,\ 1 \leqslant i \leqslant n\}$$

таких, что $Z_i = \min(X_i, Y_i)$, $\delta_i = I(X_i \leqslant Y_i)$, где $I(A)$ — индикатор события A. Пусть $S^X(t) = 1 - F(t)$ — функция выживаемости. Задача состоит в оценке главного функционала S^X, т. е. СФОЖ тестируемого объекта в предложении $\mu = EX_1 < \infty$:

$$\mu(t) = (S^X(t))^{-1} \int\limits_t^{T_F} S^X(u)du,\ t \in [0, T_F). \tag{2.1}$$

Здесь $\mu(0) = \mu$ и $T_F = \inf\{t \in \mathbb{R}^+ :\ S^X(t) = 0\} \leqslant \infty$. В случае цензурирования многими авторами используется оценочная функция предела произведения Каплана—Мейера [9] для оценки S^X в (2.1). Мы же для функции выживаемости используем степенную оценочную функцию относительного риска, предложенную в [2, 3], которая имеет некоторые особенности по сравнению с оценочной функцией предела произведения Каплана—Мейера (см. также [1]).

Заметим, что СВ Z_i имеют общую абсолютно непрерывную ФР $H(t) = 1 - S^X(t)S^Y(t),\ t \in \mathbb{R}^+$, где $S^Y(t) = 1 - G(t)$. Автором в работах [2, 3] предложена следующая оценочная функция для $S^X(t)$ степенного вида:

$$1 - F_n(t) = S_n^X(t) = \begin{cases} 0, & t < Z_{(1)}, \\ \left(\dfrac{n-j}{n}\right)^{R_n(t)}, & Z_{(j)} \leqslant t < Z_{(j+1)}, \quad 1 \leqslant j \leqslant n-1, \\ 1, & t \geqslant Z_{(n)}, \end{cases} \tag{2.2}$$

где $Z_{(1)} \leqslant \ldots \leqslant Z_{(n)}$ — порядковые статистики $Z_i,\ i = \overline{1, n}$,

$$R_n(t) = \frac{\sum\limits_{j=1}^{n} \frac{\delta_{(j)} I(Z_{(j)} \leqslant t)}{n-j+1}}{\sum\limits_{j=1}^{n} \frac{I(Z_{(j)} \leqslant t)}{n-j+1}},$$

— оценочная функция относительного риска, а $\delta_{(j)}$ соответствует $Z_{(j)}$. Каплан и Мейер [9] были первыми, кто предложил оценочную функцию предела произведения F_n^{PL}, определенную как

$$F_n^{PL}(t) = \begin{cases} 1 - \prod\limits_{\{j: Z_{(j)} \leqslant t\}} (1 - \frac{\delta_{(j)}}{n-j+1}), & t \leqslant Z_{(n)}, \\ 1, & t > Z_{(n)},\ \delta_{(n)} = 1, \\ \text{не определено}, & t > Z_{(n)},\ \delta_{(n)} = 0. \end{cases}$$

Как видим, оценочная функция F_n^{PL} неопределена для любых порядковых статистик. Следовательно, если $G_n^{PL}(t)$, оценочная функция предела произведения для цензурирующей ФР $G(t)$ получается из $F_n^{PL}(t)$ заменой индикатора $\delta_{(j)}$ на $1-\delta_{(j)}$. Тогда

$$(1-G_n^{PL}(t))(1-F_n^{PL}(t)) = 1-H_n(t), \text{ если } t \leqslant Z_{(n-1)},$$

где $H_n(t)$ — эмпирическая оценочная функция ФР $H(t)$. Но для соответствующей степенной оценочной функции относительного риска $G_n(t) = 1-(1-H_n(t))^{1-R_n(t)}$ для ФР $G(t)$ мы имеем

$$(1-G_n(t))(1-F_n(t)) = 1-H_n(t) \text{ для всех } t \in \mathbb{R}^+,$$

т. е. оценочная функция относительного риска определима для модели правого случайного цензурирования. Таким образом, в этой статье мы рассмотрим только эту оценочную функцию и ее обобщения. В [1–3] для оценочной функции (2.2) автором были получены некоторые асимптотические результаты (при $n \to \infty$). Пусть

$$\left\{U_n(t) = \frac{n^{1/2}(F_n(t)-F(t))}{1-F(t)},\ t \in [\alpha,\beta],\ n \geqslant 1\right\}$$

— нормированная эмпирическая последовательность процессов, где

$$\alpha > \tau_H = \sup\{t \in \mathbb{R}^+ : H(t) = 0\},$$

$$\beta < \tau_H = \inf\{t \in \mathbb{R}^+ : H(t) = 1\}.$$

Ясно, что $\tau_H = \max(\tau_F, \tau_G) \geqslant 0$ и $T_H = \min(T_F, T_G) \leqslant \infty$. Пусть $D[\alpha,\beta]$ — пространство Скорохода кадлаг-функций.

Теорема 2.1 (см. [3]). *Предположим, что выполнены следующие условия*:

(C1) $0 < P(X_1 \leqslant Y_1) < 1$;
(C2) $\min(H(\alpha), 1-H(\beta)) \geqslant \gamma$ *для некоторого* $\gamma \in (0,1)$;
(C3) $\gamma(t) = \displaystyle\int_0^t \frac{dF(u)}{(1-F(u))^2(1-G(u))} < \infty$ *при* $t < T_H$.

Тогда при $n \to \infty$

$$U_n(t) \overset{D}{\Rightarrow} w(t) \text{ в } D[\alpha,\beta], \tag{2.3}$$

где $w(t)$ — *центрированный гауссовский случайный процесс с функцией ковариации*

$$Ew(t)w(s) = \gamma(\min(t,s)), \quad t,s \in [\alpha,\beta].$$

В [1] автором были получены более сильные результаты о состоятельности и о гауссовской аппроксимации в слабой и сильной форме вплоть до статистики некоторого высокого порядка в выборке, со скоростью аппроксимации, зависящей от порядка статистики. Чтобы выбрать порядковые статистики, мы возьмем последовательность $\{k_n\}$ целых чисел таких, что $1 \leqslant k_n < n$.

Теорема 2.2 (см. [1]).

(A) *Если* $\sqrt{n} = o(k_n)$, *тогда при* $n \to \infty$

$$\sup_{t \leqslant Z_{(n-k_n)}} \frac{|F_n(t)-F(t)|}{1-F(t)} = \begin{cases} O_p(k_n^{-1/2}+k_n^{-2}n) = o_p(1), \\ O((k_{2n}^{-1}\ln n)+k_n^{-2}n) = o(1) \text{ п.н.} \end{cases} \tag{2.4}$$

(B) *Пусть условие* (C3) *выполнено и* $n^{3/4} = o(k_n)$. *Тогда существует последовательность* $\{W_n(\cdot),\ n \geqslant 1\}$ *винеровских процессов такая, что*

$$\sup_{t \leqslant Z_{(n-k_n)}} |U_n(t) - W_n(\gamma(t))| = \begin{cases} O_p(k_n^{-1}n^{1/2}\ln n + k_n^{-2}n^{3/2}) = o_p(1), \\ O((k_{2n}^{-1}\ln n) + k_n^{-2}n^{3/2}) = o(1) \text{ п.н.} \end{cases} \tag{2.5}$$

Заметим, что для $W_n(\gamma(t)) \stackrel{D}{=} w(t)$ любого n.

Используя теоремы 2.1 и 2.2, мы исследуем соответствующие свойства для следующей оценочный функции СФОЖ:

$$\mu_n(t) = (S_n^X(t))^{-1} \int\limits_t^{\beta_n} S_n^X(u)du,$$

полагая, что

(C4) $\beta_n \to \infty,\ n^{1/2} \int\limits_{\beta_n}^{\infty} S^X(t)dt \to 0$ при $n \to \infty$.

Введем функцию $\chi(t) = \int\limits_t^{\infty} S^X(u)du$ и ее оценочную функцию $\chi_n(t) = \int\limits_t^{\infty} S_n^X(u)du$. Тогда

$$\mu_n(t) = (S_n^X(t))^{-1} \left(-\int\limits_t^{\beta_n} d\chi_n(u) \right). \tag{2.6}$$

Слабая сходимость для СФОЖ доказана в следующей теореме.

Теорема 2.3. *Пусть выполняются условия* (C1)–(C4) *и*

(C5) $\int\limits_0^{\infty} \chi^2(t)d\gamma(t) < \infty$.

Тогда при $n \to \infty$

$$V_n(t) = n^{1/2}\left(\mu_n(t) - \mu(t)\right) \stackrel{D}{\Rightarrow} Q(t) \text{ в } D[\alpha, \beta], \tag{2.7}$$

где $Q(t)$ — *центрированный гауссовский процесс с функцией ковариации при* $t, s \in [\alpha, \beta]$:

$$EQ(t)Q(s) = (S^X(t)S^X(s))^{-1} \int\limits_{\min(t,s)}^{\infty} \chi^2(u)d\gamma(u).$$

Доказательство. Нетрудно получить представление

$$V_n(t) = U_n(t)\mu_n(t) + (S^X(t))^{-1}A_n(t) + n^{1/2}(S^X(t))^{-1} \int\limits_{\beta_n}^{\infty} S^X(u)du, \tag{2.8}$$

где $A_n(t) = \int\limits_t^{\beta_n} U_n(u)d\chi(u)$. Тогда асимптотическое распределение последовательности процесса (2.8) эквивалентно асимптотическому распределению последовательности

$$V_n^*(t) = U_n(t)\mu(t) + (S^X(t))^{-1}A_n(t)$$

при условии (C4). В силу теоремы 2.1 и теоремы Крамера—Вольда последовательность двумерных процессов $(U_n(t), A_n(t))$ слабо сходится при $n \to \infty$ в пространстве Скорохода $D([\alpha, \beta] \times [\alpha, \beta])$ к процессу $(w(t), A(t))$, где

$$A(t) = \int\limits_t^{\infty} w(u)d\chi(u).$$

Следовательно, но теореме Слуцкого мы получаем, что процесс $V_n^*(t)$ при условии (C5) слабо сходится в $D([\alpha, \beta])$ к процессу

$$Q(t) = w(t)\mu(t) + (S^X(t))^{-1} \int\limits_t^{\infty} w(u)d\chi(u).$$

□

Теперь мы докажем состоятельность оценочной функции СФОЖ $\mu_n(t)$.

Теорема 2.4. *При* $\sqrt{n} = o(k_n)$ *и* $(n\beta_n)^{2/3} = o(k_n)$

$$\sup_{t \leqslant Z_{(n-k_n)}} |\mu_n(t) - \mu(t)| = O_p(1), \quad n \to \infty. \tag{2.9}$$

Доказательство. В силу представления (2.8)

$$\mu_n(t) - \mu(t) = \frac{|F_n(t) - F(t)|}{1 - F(t)} \cdot \frac{\int_t^{\beta_n} (1 - F_n(u))du}{1 - F_n(t)} + \frac{1}{1 - F(t)} \cdot \int_t^{\beta_n} \frac{(F_n(u) - F(u))}{1 - F(u)} d\chi(u) +$$

$$+ \frac{1}{1 - F(t)} \cdot \int_{\beta_n}^{\infty} (1 - F(u))du = M_{1n}(t) + M_{2n}(t) + M_{3n}(t). \tag{2.10}$$

Легко видеть, что $1 - F(t) \geqslant 1 - H(t)$, $1 - F_n(t) \geqslant 1 - H_n(t)$ для всех $t \in \mathbb{R}^+$. В силу [7, неравенство (4.3)] для достаточно больших n существуют положительные константы $c_1 > 1$ и $c_2 < 1$ такие, что:

$$H^{-1}(1 - c_1 \frac{k_n}{n}) \leqslant Z_{(n-k_n)} = H^{-1}(1 - \frac{k_n}{n}) \leqslant H^{-1}(1 - c_2 \frac{k_n}{n}) \text{ п.н.}$$

Следовательно,

$$\sup_{t \leqslant Z_{(n-k_n)}} (1 - F(t))^{-1} \leqslant \sup_{t \leqslant Z_{(n-k_n)}} (1 - H(t))^{-1} = O_p(\frac{k_n}{n})$$

и

$$\sup_{t \leqslant Z_{(n-k_n)}} (1 - F_n(t))^{-1} \leqslant \sup_{t \leqslant Z_{(n-k_n)}} (1 - H_n(t))^{-1} \leqslant$$

$$\leqslant \sup_{t \leqslant Z_{(n-k_n)}} (\frac{1 - H(t)}{1 - H_n(t)}) \cdot \sup_{t \leqslant Z_{(n-k_n)}} (1 - H_n(t))^{-1} = O_p(1) \cdot \frac{n}{k_n} = O_p\left(\frac{n}{k_n}\right). \tag{2.11}$$

С другой стороны, с вероятностью 1

$$0 \leqslant \int_t^{\beta_n} (1 - F_n(u))du \leqslant 2\beta_n, \tag{2.12}$$

а в силу (2.4) при $n \to \infty$

$$\sup_{t \leqslant Z_{(n-k_n)}} M_{1n}(t) \leqslant \sup_{t \leqslant Z_{(n-k_n)}} \frac{|F_n(t) - F(t)|}{1 - F(t)} 2\beta_n \sup_{t \leqslant Z_{(n-k_n)}} (1 - F_n(t))^{-1} = O_p\left(\frac{\beta_n n}{k_n^{3/2}} + \frac{n^2 \beta_n}{k_n^3}\right) = o_p(1),$$

$$\sup_{t \leqslant Z_{(n-k_n)}} M_{2n}(t) \leqslant \sup_{t \leqslant Z_{(n-k_n)}} (1 - F(t))^{-1} \sup_{t \leqslant Z_{(n-k_n)}} \int_t^{\beta_n} \frac{(F_n(u) - F(u))}{1 - F(u)} d\chi(u) = O_p\left(\frac{\beta_n n}{k_n^{3/2}} + \frac{n^2 \beta_n}{k_n^3}\right) = o_p(1),$$

$$\sup_{t \leqslant Z_{(n-k_n)}} M_{3n}(t) \leqslant \sup_{t \leqslant Z_{(n-k_n)}} (1 - F(t))^{-1} \int_{\beta_n}^{\infty} S^X(t)dt = O_p\left(\frac{n}{k_n} \int_{\beta_n}^{\infty} S^X(t)dt\right) = o_p(1). \tag{2.13}$$

Таким образом, (2.9) следует из (2.10)–(2.13). Доказательство завершено. □

Оценка СФОЖ при зависимых цензурированных справа данных представлена в следующем разделе.

2.2. Случай зависимого цензурирования. Теперь мы не требуем независимости от последовательностей $\{X_i,\ i \geqslant 1\}$ и $\{Y_i,\ i \geqslant 1\}$. Пусть $S(t,s) = P(X_i > t, Y_i > s),\ (t,s) \in \mathbb{R}^{+2} = \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$ — совместная функция выживаемости для пар (X_i, Y_i). Тогда по теореме Скляра (см. [10]) $S(t,s)$ представляется выражением через копулы выживаемости $C(u,v),\ u,v \in [0,1]$:

$$S(t,s) = C(S^X(t), S^Y(s)),\ (t,s) \in \mathbb{R}^{+2},$$

где $S^X(t)$ и $S^Y(t)$ — маргинальные функции выживаемости для X_i и Y_i. В случае, когда $C(u,v)$ — архимедова копула, т. е.

$$C(u,v) = \varphi^{-1}[\varphi(u) + \varphi(v)],\ (u,v) \in [0,1]^2,$$

где $\varphi : [0,1] \to \mathbb{R}^+$ — сильная производящая функция ($\varphi(0) = \infty$) и φ^{-1} — обратная к ней, в работе [4] было предложено следующее обобщение оценочной функции (2.2) для $S^X(t)$ с зависимыми цензурированными данными $C^{(n)}$:

$$\widetilde{S}_n^X(t) = \varphi^{-1}\left[\varphi(S_n^Z(t))\frac{(-\int\limits_0^t I(J_n(u) > 0)\varphi'(\frac{J_n(u)}{n})d\overline{N}_n(u))}{(-\int\limits_0^t I(J_n(u) > 0)\varphi'(\frac{J_n(u)}{n})d\overline{N}_n^Z(u))}\right], \tag{2.14}$$

где

$$\varphi(S_n^Z(t)) = -\int\limits_0^t I(J_n(s) > 0)[\varphi(\frac{J_n(s)}{n}) - \varphi(\frac{J_n(s)}{n} - \frac{1}{n})]d\overline{N}_n^Z(s),$$

$$S_n^Z(t) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n I(Z_i > t), \quad J_n(t) = nS_n^Z(t-),$$

$$\overline{N}_n(t) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n I(Z_i \leqslant t, \delta_i = 1), \quad \overline{N}_n^Z(t) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n I(Z_i \leqslant t).$$

В работе [4] показано, что оценочная функция (2.14) есть обобщение (2.2), что следует из (2.14) при $C(u,v) = uv,\ u,v \in [0,1]$, т. е. $\varphi(u) = -\ln u,\ u \in [0,1]$. Была доказана состоятельность оценочной функции (2.14) и предложена следующая оценочная функция для СФОЖ $\mu(t)$:

$$\widetilde{\mu}_n(t) = \begin{cases} 0, & t \geqslant Z_{(n)}, \\ \left(\widetilde{S}_n^X(t)\right)^{-1} \int\limits_t^\infty \widetilde{S}_n^X(u)du, & t \in [0, Z_{(n)}). \end{cases}$$

Рассмотрим следующие условия:

(C6) *Функция $\varphi(\cdot)$ строго убывает на $(0,1]$ и первые две производные $\varphi(t)$ и $\Psi(t) = -t\varphi'(t)$ ограничены при $t \in [\varepsilon, 1]$ для прозвольного $\varepsilon > 0$. Более того, первая производная φ' отделена от нуля на $[0,1]$;*

(C7) $0 < \int\limits_0^{T*} [\Psi(S^Z(t))]^m d\Lambda^*(t) < \infty$ *при* $m = 1,2$,

где

$$T^* = \sup\{t \in R^+ : S^Z(t) > 0\},$$

$\Lambda^*(t)$ *обозначает сразу* $\Lambda_H(t) = -\ln S^Z(t)$ *и*

$$\Lambda(t) = \int\limits_0^t \frac{dP(Z_i \leqslant s, \delta_i = 1)}{S^Z(s)};$$

(C8) $\int\limits_0^{T^*} \left|\Psi'(S^Z(t))\right| d\Lambda^*(t) < \infty.$

Чтобы сформулировать результаты о состоятельности $\widetilde{\mu}_n(t)$ с весовой функцией $q(\cdot) : [0,1] \to \mathbb{R}^+$, мы также предполагаем выполненными следующие условия:

(C9) *Функция* $q(\cdot):\ [0,1]\to[0,\infty]$ *измерима для всех* $\eta>0$,

$$\sup_{u\in[0,1-\eta]}\{q(u)\}<\infty;$$

(C10) *Функция* $q(u)(1-u)^{-1}$ — *неубывающая в окрестности* $u=1$;

(C11) $\int\limits_0^{T_F}\left\{(S^X(t))^{-1}\int\limits_t^{T_F}q(F(s))ds\right\}dF(t)<\infty.$

Заметим, что условия (C6)–(C8) выполняются, например, для генераторов копулы Клейтона—Франка.

Теорема 2.5 (см. [4]). *Пусть* $\mu=EX_1<\infty$ *и выполнены условия* (C6)–(C11). *Тогда при* $n\to\infty$

$$\varepsilon_n(F)=\sup_{t<T^*}q(F(t))\,|\widetilde{\mu}_n(t)-\mu(t)|\xrightarrow{p}0.$$

(Подробное доказательство можно найти в [4].)

В случае зависимого цензурирования Зенг и Клейн [12], а также Ривест и Уэллс [11] исследовали копула-графические оценочные функции:

$$\hat{S}_n^X(t)=\varphi^{-1}[\int\limits_0^t I(J_n(u)>0)(\varphi(\frac{J_n(u)-1}{n})-\varphi(\frac{J_n(u)}{n}))]d\overline{N}_n(u),$$

$$\breve{S}_n^X(t)=\varphi^{-1}[-\frac{1}{n}\int\limits_0^t I(J_n(u)>0)\varphi'(\frac{J_n(u)}{n})d\overline{N}_n(u).$$

Было доказано, что эти оценочные функции равномерно состоятельны и асимптотически нормальны. В случае независимого цензурирования эти копулы эквивалентны, соответственно, оценочной функции экспоненциальной опасности Альтшулера—Бреслоу и оценочной функции предела произведения Каплана—Мейера:

$$\hat{S}_n^X(t)=\exp\left\{-\int\limits_0^t\frac{I(J_n(u)>0)}{J_n(u)}d\overline{N}_n(u)\right\},$$

$$\breve{S}_n^X(t)=\prod_{1\leqslant x}\left\{1-\frac{d\overline{N}_n(u)}{J_n(u)}\right\}.$$

Легко доказать, что из (2.14) мы получаем степенную оценочную функцию относительного риска Абдушукурова (см. (2.2)).

3. Зависимое цензурирование с ковариантом

Рассмотрим случай, когда носитель ковarианта C есть интервал $[0,1]$, и сформулируем наши результаты о фиксированных точках проектирования $0\leqslant x_1\leqslant x_2\leqslant\ldots\leqslant x_n\leqslant 1$, в которых мы рассматриваем отклики (время выживаемости или отказа) $X_1,\ldots,X_n$ и время цензурированния $Y_1,\ldots,Y_n$ идентичных объектов, которые являются объектами исследования. Эти отклики являются независимыми и неотрицательными СВ с условной ФР $F_{x_i}(t)=P(X_i\leqslant t/C_i=x_i)$ в точках x_i. Они подвергаются случайному цензурированию справа, т. е. для X_i существует цензурирующая переменная Y_i с условной ФР $G_{x_i}(t)=P(Y_i\leqslant t/C_i=x_i)$, и на n-м шаге эксперимента наблюдаемые данные

$$S^{(n)}=\{(Z_i,\delta_i,C_i),1\leqslant i\leqslant n\},$$

где $Z_i=min(X_i,Y_i),\delta_i=I(X_i\leqslant Y_i)$, а $I(A)$ обозначает индикатор события A. Заметим, что в выборке $S^{(n)}$ СВ X_i наблюдается только при $\delta_i=1$. Обычно в анализе выживаемости независимость СВ X_i и Y_i зависит от ковarианта C_i. Но в некоторых случаях на практике это предположение не выполняется. В этой статье мы рассмотрим зависимость, которая описывается копулой. Итак, пусть

$$S_x(t_1,t_2)=P(X_x>t_1,Y_x>t_2),\quad(t_1,t_2)\in\mathbb{R}^{+2}$$

— совместная функция выживаемости для отклика X_x и цензурирующей величины Y_x в x. Тогда маргинальные функции выживаемости ${S_x}^X(t) = 1 - F_x(t) = S_x(t,0)$ и ${S_x}^Y(t) = 1 - G_x(t) = S_x(0,t), t \geqslant 0$. Предположим, что маргинальные ФР F_x и G_x абсолютно непрерывны. Тогда, в силу теоремы Скляра (см. [10]), совместная функция выживаемости $S_x(t_1,t_2)$ может быть записана как

$$S_x(t_1,t_2) = C_x(S_x^X(t_1), S_x^Y(t_2)), \quad (t_1,t_2) \in \mathbb{R}^{+2}, \tag{3.1}$$

где $C_x(u,v)$ — известная копула, зависящая от x, S_x^X и S_x^Y в общем случае. Необходимо отметить, что случай отсутствия коварианта был рассмотрен М. Зенгом и Дж. П. Клейном [12], которые предложили копула-графическую оценочную функцию. Л. П. Ривест и М. Т. Уэллс [11] исследовали копула-графическую оценочную функцию и выделили замкнутую форму оценочной функции, где совместная функция выживаемости (3.1) была смоделирована как архимедова копула. Как было показано, копула-графическая оценочная функция является равномерно состоятельной и асимптотически нормальной. Р. Брейкерс и Н. Веравербеке [6] обобщили копула-графическую оценочную функцию для случая регрессии фиксированного проектирования и показали, что оценочная функция имеет асимптотическое представление и гауссов предел. Мы рассмотрим другую оценочную функцию ФР F_x, которая также является обобщением оценочной функции (2.14) и эквивалентна степенной оценочной функции относительного риска (2.2) автора [1–3] в случае независимого цензурирования. Мы изучим свойства большой выборки предложенной оценочной функции и покажем равномерную нормальность с тем же предельным гауссовым процессом, что и для копула-графической оценочной функции.

Предположим, что при значении фиксированного проектирования $x \in (0,1)$ функция C_x в (3.1) — архимедова копула, т. е.

$$S_x(t_1,t_2) = \varphi_x^{[-1]}(\varphi_x(S_x^X(t_1)) + \varphi_x(S_x^Y(t_2))),\ t_1,t_2 \in \mathbb{R}^{+2}, \tag{3.2}$$

где при каждом x известная функция $\varphi_x : [0,1] \to [0,+\infty]$ — непрерывная, выпуклая и строго убывающая, причем $\varphi_x(1) = 0$. Функция $\varphi_x^{[-1]}$ — псевдо-обратная к φ_x (см. [10]) и задается формулой

$$\varphi_x^{[-1]}(s) = \begin{cases} \varphi_x^{-1}(s), & 0 \leqslant s \leqslant \varphi_x(0), \\ 0, & \varphi_x(0) \leqslant s \leqslant \infty. \end{cases}$$

Мы предполагаем, что производящая функция копулы φ_x строгая, т. е. $\varphi_x(0) = \infty$, следовательно, $\varphi_x^{[-1]} = \varphi_x^{-1}$. Из (3.1) следует, что

$$P(Z_x > t) = 1 - H_x(t) = \overline{H_x(t)} = {S_x}^Z(t) = S_x(t,t) = \varphi_x^{-1}(\varphi_x(S_x^X(t)) + \varphi_x(S_x^Y(t))), \quad t \in \mathbb{R}^+. \tag{3.3}$$

Пусть $H_x^{(1)}(t) = P(Z_x \leqslant t, \delta_x = 1)$ — функция подраспределения $\Lambda_x(t)$ — сырая функция рисков СВ X_x, подвергнутая цензурированию величиной Y_x, тогда (см. [8]) мы имеем

$$\Lambda_x(dt) = \frac{P(X_x \in dt, X_x \leqslant Y_x)}{P(X_x \geqslant t, Y_x \geqslant t)} = \frac{H_x^{(1)}(dt)}{S_x^Z(t-)}. \tag{3.4}$$

Из (3.4) можно получить следующее выражение функции выживаемости S_x^X:

$$S_x^X(t) = \varphi_x^{-1}[-\int_0^t S_x^Z(u-)\varphi_x'(S_x^Z(u))d\Lambda_x(u)] = \varphi_x^{-1}[-\int_0^t \varphi_x'(S_x^Z(u))dH_x^{(1)}(u)],\ t \in \mathbb{R}^+. \tag{3.5}$$

Чтобы построить оценочную функцию для S_x^X согласно выражению (3.5), мы введем некоторые сглаженные оценочные функции для $S_x^Z, H_x^{(1)}$ и выпишем условия регулярности для них. Аналогично [6], мы используем веса Гассера—Мюллера

$$w_{ni}(x,h_n) = \frac{1}{q_n(x,h_n)} \int_{x_{i-1}}^{x_i} \frac{1}{h_n}\pi(\frac{x-z}{h_n})dz,\ i = 1,\dots,n, \tag{3.6}$$

где

$$q_n(x,h_n) = \int_0^{x_n} \frac{1}{h_n}\pi(\frac{x-z}{h_n})dz,$$

$x_0 = 0$, π — известная функция плотности вероятности (ядро), а $\{h_n, n \geqslant 1\}$ — последовательность положительных констант, сходящихся к нулю при $n \to \infty$, которая называется последовательностью пропускной способности. Введем взвешенные оценочные функции для H_x, S_x^Z и $H_x^{(1)}$, соответственно, в виде

$$\begin{aligned} &H_{xh}(t) = \sum_{i=1}^{n} w_{ni}(x, h_n) I(Z_i \leqslant t), \\ &S_{xh}^Z(t) = 1 - H_{xh}(t), \\ &H_{xh}^{(1)}(t) = \sum_{i=1}^{n} w_{ni}(x, h_n) I(Z_i \leqslant t, \delta_i = 1). \end{aligned} \tag{3.7}$$

Тогда, подставляя в (3.5) оценочные функции (3.7), в работе [5] мы предложили следующую оценочную функцию для S_x^X:

$$S_{xh}^X(t) = 1 - F_{xh}(t) = \varphi_x^{-1}[-\int_0^t \varphi_x'(S_x^Z(u)) dH_x^{(1)}(u)], \quad t \in R^+. \tag{3.8}$$

В случае отсутствия коварианта оценочная функция (3.8) сводится к оценочной функции (2.14), которая впервые была получена нами в [4], которая, в свою очередь, в случае независимой копулы $\varphi(y) = -\ln y$, сводится к оценочной функции экспоненциальной опасности. Также хорошо известно, что в случае независимого цензурирования оценочная функция предельного произведения Каплана—Мейера и оценочная функция экспоненциальной опасности асимптотически эквивалентны. Таким образом, в [5] мы показали, что оценочная функция (3.8) и копула-графическая оценочная функция Брейкерса и Веравербеке имеют одинаковое асимптотическое поведение.

В данной работе мы также предлагаем следующее обобщение степенной оценочной функции относительного риска, предложенное в [2, 3]:

$$\widehat{S}_{xh}^Z(t) = \varphi_x^{-1}[\varphi_x(\widehat{S}_{xh}^Z(t)) \cdot \mu_{xh}(t)] = 1 - \widehat{F}_{xh}(t), \tag{3.9}$$

где

$$\mu_{xh}(t) = \varphi_x(S_{xh}^X(t)) / \varphi_x(\widetilde{S}_{xh}^Z(t)),$$

$$\varphi_x(S_{xh}^X(t)) = -\int_0^t \varphi_x'(S_{xh}^Z(u)) dH_{xh}^{(1)}(u),$$

$$\varphi_x\left(\hat{S}_{xh}^Z(t)\right) = -\int_0^t n\left[\varphi_x\left(S_{xh}^Z(u)\right) - \varphi_x\left(S_{xh}^Z(u) - \frac{1}{n}\right)\right] dH_{xh}^{(1)}(u),$$

и

$$\varphi_x(\widetilde{S}_{xh}^Z(t)) = -\int_0^t \varphi_x'(S_{xh}^Z(u)) dH_{xh}(u).$$

Чтобы исследовать оценку (3.9), введем некоторые условия. Для точек проектирования $x_1, \ldots, x_n$ обозначим

$$\underline{\Delta_n} = \min_{1 \leqslant i \leqslant n} (x_i - x_{i-1}), \quad \overline{\Delta_n} = \max_{1 \leqslant i \leqslant n} (x_i - x_{i-1}).$$

Пусть для ядра π выполнено

$$\|\pi\|_2^2 = \int_{-\infty}^{\infty} \pi^2(u) du, \ m_\nu(\pi) = \int_{-\infty}^{\infty} u^\nu \pi(u) du, \ \nu = 1, 2, \ \|\pi\|_\infty = \sup_{u \in \mathbb{R}} \pi(u).$$

Кроме того, мы используем следующие предположения для проектирования и для ядра:

(A1) *При* $n \to \infty$, $x_n \to 1$, $\underline{\Delta_n} = O\left(\frac{1}{n}\right)$, $\overline{\Delta_n} - \underline{\Delta_n} = o\left(\frac{1}{n}\right)$;

(A2) π — *функция плотности вероятности с компактным носителем* $[-M, M]$ *для некоторого* $M > 0$, *причем* $m_1(\pi) = 0$ *и* $|\pi(u) - \pi(u')| \leqslant C(\pi)|u - u'|$, *где* $C(\pi)$ — *некоторая константа.*

Пусть $T_{H_x} = inf\{t \geqslant 0 : H_x(t) = 1\}$. Тогда $T_{H_x} = min(T_{F_x}, T_{G_x})$. Для наших результатов нам понадобятся следующие условия гладкости функций $H_x(t)$ и $H_x^{(1)}(t)$. Мы сформулируем их для общей функции (под)распределения $N_x(t), 0 \leqslant x \leqslant 1, t \in \mathbb{R}$ при фиксированном $T > 0$:

(A3) $\dfrac{\partial}{\partial x} N_x(t) = \dot{N}_x(t)$ *существует и непрерывна на* $(x,t) \in [0,1] \times [0,T]$;

(A4) $\dfrac{\partial}{\partial t} N_x(t) = N_x^{'}(t)$ *существует и непрерывна на* $(x,t) \in [0,1] \times [0,T]$;

(A5) $\dfrac{\partial^2}{\partial x^2} N_x(t) = \ddot{N}_x(t)$ *существует и непрерывна на* $(x,t) \in [0,1] \times [0,T]$;

(A6) $\dfrac{\partial^2}{\partial t^2} N_x(t) = N_x^{''}(t)$ *существует и непрерывна на* $(x,t) \in [0,1] \times [0,T]$;

(A7) $\dfrac{\partial^2}{\partial x \partial t} N_x(t) = \dot{N}'_x(t)$ *существует и непрерывна на* $(x,t) \in [0,1] \times [0,T]$;

(A8) $\dfrac{\partial \varphi_x(u)}{\partial u} = \varphi_x^{'}(u)$ *и* $\dfrac{\partial^2 \varphi_x(u)}{\partial u^2} = \varphi_x^{''}(u)$ *липшицева в направлении x с ограниченной константой Липшица и производная* $\dfrac{\partial^3 \varphi_x(u)}{\partial u^3} = \varphi_x^{'''}(u)$ *существует и непрерывна на* $(x,u) \in [0,1] \times (0,1]$.

Отсюда вытекает следующая теорема.

Теорема 3.1. *Пусть выполнены условия (A1) и (A2), $H_x(t)$ и $H_x^{(1)}(t)$ удовлетворяют (A5)–(A7) на $[0,T]$ при $T < T_{H_x}$, φ_x удовлетворяет (A8), а также $h_n \to 0$, $\dfrac{\ln n}{nh_n} \to 0$, $\dfrac{nh_n^5}{\ln n} = O(1)$. Тогда при $n \to \infty$*

$$\widehat{F}_{xh}(t) - F_x(t) = \sum_{i=1}^{n} w_{ni}(x,h_n) \Psi_{tx}(Z_i, \delta_i) + r_n(t),$$

где

$$\Psi_{tx}(Z_i,\delta_i) = \frac{-1}{\varphi_x^{'}(S_x^X(t))}\Big[\int_0^t \varphi_x^{''}(S_x^Z(u))(I(Z_i \leqslant u) - H_x(u))dH_x^{(1)}(u) -$$

$$- \varphi_x^{'}(S_x^Z(t))(I(Z_i \leqslant t, \delta_i = 1) - H_x^{(1)}(t)) - \int_0^t \varphi_x^{''}(S_x^Z(u))(I(Z_i \leqslant u, \delta_i = 1) - H_x^{(1)}(u))dH_x(u)\Big],$$

и

$$\sup_{0 \leqslant t \leqslant T} |r_n(t)| \overset{п.н.}{=} O\left(\left(\frac{\ln n}{nh_n}\right)^{3/4}\right).$$

Следующая теорема посвящена слабой сходимости эмпирического процесса $(nh_n)^{1/2}\{\widehat{F}_{xh}(\cdot) - F_x(\cdot)\}$ в пространстве $l^\infty[0,T]$ равномерно ограниченных функций на $[0,T]$, снабженная равномерной топологией.

Теорема 3.2. *Пусть выполнены условия* (A1) *и* (A2)*, $H_x(t)$ и $H_x^{(1)}(t)$ удовлетворяют* (A5)–(A7) *на $[0,T]$ при $T < T_{H_x}$, и φ_x удовлетворяет* (A8).

(I) *Если $nh_n^5 \to 0$ и $\dfrac{(\ln n)^3}{nh_n} \to 0$, тогда при $n \to \infty$*

$$(nh_n)^{1/2}\{\widehat{F}_{xh}(\cdot) - F_x(\cdot)\} \Rightarrow \boldsymbol{W}_x(\cdot) \text{ на } l^\infty[0,T].$$

(II) *Если $h_n = Cn^{-1/5}$ для некоторого $C > 0$, тогда при $n \to \infty$*

$$(nh_n)^{1/2}\{\widehat{F}_{xh}(\cdot) - F_x(\cdot)\} \Rightarrow \boldsymbol{W}_x^{*}(\cdot) \text{ на } l^\infty[0,T],$$

где $\boldsymbol{W}_x(\cdot)$ и $\boldsymbol{W}_x^{*}(\cdot)$ — гауссовы процессы со средними

$$E\boldsymbol{W}_x(t) = 0, \quad E\boldsymbol{W}_x^{*}(t) = a_x(t),$$

и одинаковой ковариацией

$$Cov(\boldsymbol{W}_x(t), \boldsymbol{W}^*_x(s)) = Cov(\boldsymbol{W}^*_x(t), \boldsymbol{W}^*_x(s)) = \Gamma_x(t,s),$$

причем

$$a_x(t) = \frac{-C^{5/2}m_2(\pi)}{2\varphi'_x(S^X_x(t))}\int_0^t [\varphi''_x(S^Z_x(u))\ddot{H}_x(u)dH^{(1)}_x(u) - \varphi'_x(S^Z_x(u))d\ddot{H}^{(1)}_x(u)],$$

и

$$\Gamma_x(t,s) = \frac{\|\pi\|^2_2}{\varphi'_x(S^X_x(t))\varphi'_x(S^X_x(s))}\Bigg\{\int_0^{\min(t,s)} \left(\varphi'_x(S^Z_x(z))\right)^2 dH^{(1)}_x(z) +$$

$$+\int_0^{\min(t,s)} [\varphi''_x(S^Z_x(w))S^Z_x(w) + \varphi'_x(S^Z_x(w))]\int_0^w \varphi''_x(S^Z_x(y))dH^{(1)}_x(y)dH^{(1)}_x(w) +$$

$$+\int_0^{\min(t,s)} \varphi''_x(S^Z_x(w)) \int_w^{\max(t,s)} (\varphi''_x(S^Z_x(y))S^Z_x(y) + \varphi'_x(S^Z_x(y)))dH^{(1)}_x(y)dH^{(1)}_x(w) -$$

$$-\int_0^t [\varphi''_x(S^Z_x(y))S^Z_x(y) + \varphi'_x(S^Z_x(y))]dH^{(1)}_x(y)\int_0^s [\varphi''_x(S^Z_x(w))S^Z_x(w) + \varphi'_x(S^Z_x(w))]dH^{(1)}_x(w)\Bigg\}.$$

Ясно, что для существования правой части выражения (3.5) мы должны потребовать выполнения условий (A4) для функций $H_x(t)$ и $H^{(1)}_x(t)$ на $[0,1]\times[0,T]$ при $T < T_{H_x}$ и существования $\varphi'_x(u)$ на $[0,1]\times(0,1]$.

В работе [5] нами доказаны аналоги теорем 3.1 и 3.2 для оценочной функции (3.8). Таким образом, нам достаточно доказать асимптотическую эквивалентность оценочных функций (3.8) и (3.9). Это сделано в следующей лемме.

Лемма 3.1. *Пусть выполнены условия* (A1) *и* (A2), $H_x(t)$ *и* $H^{(1)}_x(t)$ *удовлетворяют* (A5)–(A7) *на* $[0,T]$ *при* $T < T_x$, φ_x *удовлетворяет* (A8). *Тогда при* $n\to\infty$

$$\sup_{0\leqslant t\leqslant T}\left|\hat{S}^X_{xh}(t) - S^X_{xh}(t)\right| \overset{п.н.}{=} O\left(\frac{1}{n}\right). \tag{3.10}$$

Доказательство. При всех $(x;t)\in[0,1]\times(0,T]$ имеем

$$\hat{S}^X_{xh}(t) - S^X_{xh}(t) = \varphi_x^{-1}\left[\varphi_x\left(\hat{S}^Z_{xh}(t)\right)\mu_{xh}(t)\right] - \varphi_x^{-1}\left[-\int_0^t \varphi'_x\left(S^Z_{xh}(u)\right)dH^{(1)}_{xh}(u)\right] =$$

$$= -\frac{1}{\varphi'_x(\zeta_{xh}(t))}\left[\varphi_x\left(\hat{S}^Z_{xh}(t)\mu_{xh}(t) - \varphi_x\left(S^X_{xh}(t)\right)\right)\right] = \frac{\mu_{xh}(t)}{\varphi'_x(\varsigma_{xh}(t))}\left[\varphi_x\left(\hat{S}^Z_{xh}(t)\right) - \varphi_x\left(\tilde{S}^Z_{xh}(t)\right)\right],$$

где $\varsigma_{xh}(t)\in\left(\min\left\{\varphi_x\left(\hat{S}^Z_{xh}(t)\right)\mu_{xh}(t), S^X_{xh}(t)\right\}, \max\left\{\varphi_x\left(\hat{S}^Z_{xh}(t)\right)\mu_{xh}(t), S^X_{xh}(t)\right\}\right)$. Нетрудно видеть, что для всех $(x,t)\in[0,1]\times(0,T]$ и $n\geqslant 1$

$$0\leqslant \mu_{xh}(t)\leqslant 1,$$

следовательно,

$$\sup_{0\leqslant t\leqslant T}\left|\hat{S}^X_{xh}(t) - S^X_{xh}(t)\right| \leqslant \sup_{0\leqslant t\leqslant T}\left|\varphi'_x(\varsigma_{xh}(t))\right|^{-1}\sup_{0\leqslant t\leqslant T}\left|\varphi_x\left(\hat{S}^Z_{xh}(t)\right) - \varphi_x\left(\tilde{S}^Z_{xh}(t)\right)\right|. \tag{3.11}$$

Но

$$\sup_{0\leqslant t\leqslant T}\left|\varphi_x\left(\hat{S}^Z_{xh}(t)\right) - \varphi_x\left(\tilde{S}^Z_{xh}(t)\right)\right| \leqslant$$

$$\leqslant \sup_{0\leqslant t\leqslant T}\int\limits_0^T \left| n\left[\varphi_x\left(S^Z_{xh}(u)\right)-\varphi_x\left(S^Z_{xh}(u)-\frac{1}{n}\right)-\varphi_x'\left(S^Z_{xh}(u)\right)\right]\right| dH_{xh}(u)\leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{2n}\sup_{0\leqslant t\leqslant T}\left|\varphi_x'\left(\theta_{xh}(t)\right)\right| \overset{\text{п.н.}}{=} O\left(\frac{1}{n}\right), \quad (3.12)$$

где

$$\theta_{xh}(t)\in\left(\min\left\{S^Z_{xh}(t), S^Z_{xh}(t)-\frac{1}{n}\right\}, \max\left\{S^Z_{xh}(t), S^Z_{xh}(t)-\frac{1}{n}\right\}\right).$$

Теперь из (3.11) и (3.12) следует (3.10). Лемма доказана. □

Таким образом, для всех $(x,t)\in[0,1]\times(0,T]$

$$\hat{F}_{xh}(t)-F_x(t)=F_{xh}(t)-F_x(t)+q_n(t), \quad (3.13)$$

где $q_n(t)=\hat{F}_{xh}(t)-F_{xh}(t)$ и в силу леммы $\sup\limits_{0\leqslant t\leqslant T}|q_n(t)| \overset{\text{п.н.}}{=} O\left(\frac{1}{n}\right)$. Более того, из [5, теорема 1.1] будем иметь

$$F_{xh}(t)-F_x(t)=\sum_{i=1}^n w_{ni}(x,h_n)\,\Psi_{tx}(Z_i,\delta_i)+r_n(t), \quad (3.14)$$

где слагаемые правой части определены так же, как в теореме 3.1. Следовательно, теорема 3.1 следует из соотношений (3.13)-(3.14).

Необходимо отметить, что выполненное почти наверное соотношение теоремы 3.1 играет ключевую роль в исследовании оценочной функции (3.9) и, в частности, является базовым инструментом для получения слабой сходимости в теореме 3.2. Но главные слагаемые Ψ_{tx} в этом выражении такие же, как и в случае копула-графической оценочной функции из [6] (см. (3.14)). Тогда доказательство теоремы 3.2 может быть получено аналогично доказательству [5, теорема 1.2] и потому здесь опущено. Таким образом, копула-графическая оценочная функция из [6] асимптотически эквивалентна оценочным функциям (3.8) и (3.9).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Абдушукуров А. А.* Статистика неполных наблюдений. — Ташкент: Университет, 2009.
2. *Abdushukurov A. A.* Nonparametric estimation of distribution function based on relative risk function// Commun. Statist. Theory Methods — 1998. — *27*, № 8. — С. 1991–2012.
3. *Abdushukurov A. A.* On nonparametric estimation of reliability indices by censored samples// Theory Probab. Appl. — 1999. — *43*, № 1. — С. 3–11.
4. *Abdushukurov A. A., R. Muradov S.* Estimation of survival and mean residual life functions from dependent random censored data// New Trends Math. Sci. — 2014. — *2*, № 1. — С. 35–48.
5. *Abdushukurov A. A., Muradov R. S.* On estimation of conditional distribution function under dependent random right censored data// Журн. СФУ. Сер. матем. и физ. — 2014. — *7*, № 4. — С. 409–416.
6. *Breakers R., Veraverbeke N.* A copula-graphic estimator for the conditional survival function under dependent censoring// Canad. J. Statist. — 2005. — *33*, № 3. — С. 429–447.
7. *Csörgő S.* Universal Gaussian approximations under random censorship// Ann. Statist. — 1996. — *24*, № 6. — С. 2744–2778.
8. *Fleming T. R., Harrington D. P.* Counting Processes and Survival Analysis. — New York: Wiley, 1991.
9. *Kaplan E. L., Meier P.* Nonparametric estimation from incomplete observations// J. Am. Statist. Assoc. — 1958. — *53*. — С. 457–481.
10. *Nelsen R. B.* An Introduction to Copulas. — New York: Springer, 1999.
11. *Rivest L. P., Wells M. T.* A martingall approach to the copula-graphic estimator for the survival function under dependent censoring// J. Multivariate Anal. — 2001. — *79*. — С. 138–155.
12. *Zeng M., Klein J. P.* Estimates of marginal survival for dependent competing risks based on an assumed copula// Biometrika — 1995. — *82*. — С. 127–138.

А. А. Абдушукуров

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, Ташкентский филиал, Ташкент, Узбекистан

E-mail: a_abdushukurov@rambler.ru

DOI: 10.22363/2413-3639-2022-68-1-1-13 UDC 519.2

Extension of Relative-Risk Power Estimator under Dependent Random Censored Data

© 2022 **A. A. Abdushukurov**

Abstract. In this paper, the considered problem consists in estimation of conditional survival function by right random censoring model in the presence of a covariate. We propose a new estimator of conditional survival function which is extension of relative-risk power estimator of independent censoring and study its large sample properties. We present result of asymptotic normality with the same limiting Gaussian process as for copula-graphic estimator.

REFERENCES

1. A. A. Abdushukurov, *Statistika nepolnykh nablyudeniy* [Statistics of Incomplete Observation], Universitet, Tashkent, 2009 (in Russian).
2. A. A. Abdushukurov, “Nonparametric estimation of distribution function based on relative risk function,” *Commun. Statist. Theory Methods*, **27**, No. 8, 1991–2012, 1998.
3. A. A. Abdushukurov, “On nonparametric estimation of reliability indices by censored samples,” *Theory Probab. Appl.*, **43**, No. 1, 3–11, 1999.
4. A. A. Abdushukurov and R. S. Muradov, “Estimation of survival and mean residual life functions from dependent random censored data,” *New Trends Math. Sci.*, **2**, No. 1, 35–48, 2014.
5. A. A. Abdushukurov and R. S. Muradov, “On estimation of conditional distribution function under dependent random right censored data,” *Zhurn. SFU. Ser. matem. i fiz.* [J. Sib. Fed. Univ. Math. Phys.], **7**, No. 4, 409–416, 2014.
6. R. Breakers and N. Veraverbeke, “A copula-graphic estimator for the conditional survival function under dependent censoring,” *Canad. J. Statist.*, **33**, No. 3, 429–447, 2005.
7. S. Csörgő, “Universal Gaussian approximations under random censorship,” *Ann. Statist.*, **24**, No. 6, 2744–2778, 1996.
8. T. R. Fleming and D. P. Harrington, *Counting Processes and Survival Analysis*, Wiley, New York, 1991.
9. E. L. Kaplan and P. Meier, “Nonparametric estimation from incomplete observations,” *J. Am. Statist. Assoc.*, **53**, 457–481, 1958.
10. R. B. Nelsen, *An Introduction to Copulas*, Springer, New York, 1999.
11. L. P. Rivest and M. T. Wells, “A martingale approach to the copula-graphic estimator for the survival function under dependent censoring,” *J. Multivariate Anal.*, **79**, 138–155, 2001.
12. M. Zeng and J. P. Klein, “Estimates of marginal survival for dependent competing risks based on an assumed copula,” *Biometrika*, **82**, 127–138, 1995.

A. A. Abdushukurov
Tashkent Branch of Lomonosov Moscow State University, Tashkent, Uzbekistan
E-mail: a_abdushukurov@rambler.ru

© Peoples’ Friendship University of Russia, 2022
This work is licensed under a Creative Commons 4.0 International License
https://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/4.0/