Современная математика. Фундаментальные направления. Том 67, № 4 (2021). С. 783–794
Contemporary Mathematics. Fundamental Directions. ISSN 2413-3639 (Print)

DOI: 10.22363/2413-3639-2021-67-4-783-794 УДК 517.98

КВАДРАТИЧНЫЕ СТОХАСТИЧЕСКИЕ ОПЕРАТОРЫ ВОЛЬТЕРРОВСКОГО ТИПА С ОДНОРОДНЫМ ТУРНИРОМ

© 2021 г. **М. А. ТАДЖИЕВА, Д. Б. ЭШМАМАТОВА, Р. Н. ГАНИХОДЖАЕВ**

Аннотация. Как известно [1], каждый квадратичный стохастический оператор вольтерровского типа, заданный на конечномерном симплексе, определяет некий турнир, свойства которого позволяют изучить асимптотическое поведение траекторий этого вольтерровского оператора. В работе вводится понятие однородного турнира и изучаются динамические свойства вольтерровских операторов, соответствующих однородным турнирам в симплексе S^4.

ОГЛАВЛЕНИЕ

1. Канонический вид квадратичных стохастических операторов вольтерровского типа

Пусть $\mathbb{R}^m$ — m-мерное евклидово пространство, и $B(\cdot,\cdot) : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ — симметричный билинейный оператор. Тогда квадратичный оператор $V : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ определяется равенством

$$V(x) = B(x,x), \quad x \in \mathbb{R}^m.$$

Очевидно, поляризационное равенство

$$4B(x,y) = V(x+y) - V(x-y) \tag{1.1}$$

устанавливает взаимно однозначное соотношение между квадратичными и симметричными билинейными операторами.

Также ясно, что равенство

$$B(x,y) = x \circ y$$

определяет в $\mathbb{R}^m$ коммутативное, но, вообще говоря, не ассоциативное умножение. Таким образом, $\mathbb{R}^m$ превращается в коммутативную, но не ассоциативную алгебру.

Пусть $e_i = (\delta_{i1}, \delta_{i2}, \dots, \delta_{im})$, $i = \overline{1,m}$ — стандартный базис в $\mathbb{R}^m$ и

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 0 \text{ при } i \neq j, \\ 1 \text{ при } i = j \end{cases} \text{— символ Кронекера.}$$

Положим

$$B(e_i, e_j) = e_i \circ e_j = \sum_{k=1}^{m} P_{ij,k} e_k, \tag{1.2}$$

где $P_{ij,k} = P_{ji,k}$ — структурные константы билинейного оператора в стандартном базисе.

Далее вместо $x = \sum_{i=1}^{m} x_i e_i$ будем писать $x = (x_1, \ldots, x_m)$.

При этих обозначениях квадратичный оператор определяется равенством

$$Vx = (\sum_{i,j=1}^{m} P_{ij,1} x_i x_j, \sum_{i,j=1}^{m} P_{ij,2} x_i x_j, \ldots, \sum_{i,j=1}^{m} P_{ij,m} x_i x_j). \tag{1.3}$$

Определение 1.1. Квадратичный оператор (1.3) называется *стохастическим*, если структурные константы $\{P_{ij,k}\}$ удовлетворяют условиям

$$P_{ij,k} = P_{ji,k} \geqslant 0 \quad \text{и} \quad \sum_{k=1}^{m} P_{ij,k} = 1. \tag{1.4}$$

Напомним, что $(m-1)$-мерный стандартный симплекс определяется равенством

$$S^{m-1} = \{x = (x_1, \ldots, x_m) : x_i \geqslant 0, \sum_{i=1}^{m} x_i = 1\}.$$

Ясно, что S^{m-1} — выпуклый, замкнутый и ограниченный многогранник в $\mathbb{R}^m$.

Из условий (1.4) легко следует, что $V : S^{m-1} \to S^{m-1}$.

Точку $x \in S^{m-1}$ можно рассматривать как распределение вероятностей. Таким образом, квадратичный стохастический оператор переводит распределение вероятностей некоторой системы также в распределение вероятностей. Квадратичные операторы часто встречаются в физических и биологических моделях.

В биологии $V : S^{m-1} \to S^{m-1}$ описывает эволюцию биологической системы, состоящей из m видов.

Классификации и изучению асимптотического поведения траекторий квадратичных стохастических операторов посвящены работы фон Неймана, С. Улама, Г. Х. Харди, С. Бернштейна, Ю. И. Любича и других.

Поскольку $V : S^{m-1} \to S^{m-1}$ непрерывен, а S^{m-1} — выпуклый компакт, то согласно теореме Боля—Брауэра, множество неподвижных точек V непусто, т. е.

$$X = \{x \in S^{m-1} : Vx = x\} \neq \varnothing.$$

Если $x^0 \in S^{m-1}$, то последовательность $\{x^{(n)}\} \subset S^{m-1}$, определяемая рекуррентной формулой

$$x^{(n+1)} = Vx^{(n)}, \quad n = 0, 1, \ldots,$$

называется *траекторией*, начинающейся из точки x^0.

Через $\omega(x^0) = \{x^0, x^{(1)}, \ldots\}'$ обозначим множество предельных точек данной траектории. Очевидно, $\omega(x^0)$ — непустое замкнутое и инвариантное подмножество S^{m-1}, т. е. $V(\omega(x^0)) \subset \omega(x^0)$.

Если $\omega(x^0)$ состоит из одной точки, то траектория сходится. В случае $1 < |\omega(x^0)| < \infty$ траектория называется *периодической*.

Определение 1.2. Квадратичный стохастический оператор называется *вольтерровским*, если

$$P_{ij,k} = 0 \quad \text{при} \quad k \notin \{i, j\}. \tag{1.5}$$

Из (1.5) следует, что

$$P_{ik,k} + P_{ik,i} = 1 \quad \text{для любых} \quad i, k = \overline{1, m}.$$

Поэтому, полагая

$$a_{ki} = \begin{cases} 2P_{ik,k} - 1, & \text{если } i \neq k, \\ 0, & \text{если } \ i = k, \end{cases} \tag{1.6}$$

вольтерровский квадратичный стохастический оператор можно переписать в виде

$$Vx = (x_1(1 + \sum_{i=1}^{m} a_{1i} x_i), \quad x_2(1 + \sum_{i=1}^{m} a_{2i} x_i), \ldots, x_m(1 + \sum_{i=1}^{m} a_{mi} x_i)). \tag{1.7}$$

Пусть $Vx = (x_1^{'}, x_2^{'}, \dots, x_m^{'})$. Следовательно,

$$x_k^{'} = x_k(1 + \sum_{i=1}^{m} a_{ki}x_i), \quad k = \overline{1,m}. \tag{1.8}$$

Соотношение (1.8) называется *каноническим видом* вольтерровского оператора на симплексе S^{m-1}.

Заметим, что из (1.6) следует, что

$$a_{ki} = -a_{ik} \text{ и } |a_{ki}| \leqslant 1.$$

Таким образом, вольтерровский оператор на симплексе однозначно определяется заданием кососимметрической матрицы

$$A = (a_{ki}), \quad k, i = \overline{1,m} \text{ с условием } |a_{ki}| \leqslant 1.$$

Теорема 1.1 (см. [14]). *Отображение $V : S^{m-1} \to S^{m-1}$, определяемое* (1.8)*, является гомеоморфизмом, а при $|a_{ki}| < 1$ при всех $k, i = \overline{1,m}$ будет диффеоморфизмом симплекса S^{m-1}.*

Так как V — гомеоморфизм при $|a_{ki}| \leqslant 1$, то для любого $x^0 \in S^{m-1}$ существует отрицательная траектория $\{x^{(-n)}\}$, определяемая рекуррентным соотношением

$$x^{(-n-1)} = V^{-1}(x^{(-n)}), \quad n = 0, 1, \dots$$

В работе [8] доказано, что любая отрицательная траектория всегда сходится к одной из неподвижных точек.

Известно также (см. [2]), что вольтерровские квадратичные стохастические операторы не имеют периодических орбит на симплексе. Следовательно, либо траектория сходится, либо $\omega(x^0)$ — бесконечное множество.

Определение 1.3. Кососимметрическая матрица $A = (a_{ki})$ называется матрицей *общего положения*, если все главные миноры четного порядка отличны от нуля.

Как известно (см. [13]), кососимметрические матрицы общего положения образуют открытое и всюду плотное подмножество в множестве всех кососимметрических матриц.

Пусть V — вольтерров оператор с кососимметрической матрицей общего положения.

Тогда $a_{ki} \neq 0$ при $k \neq i$. Действительно, главный минор второго порядка матрицы A есть

$$\begin{vmatrix} 0 & a_{ki} \\ a_{ik} & 0 \end{vmatrix} \neq 0.$$

Так как, $a_{ki} = -a_{ik}$, то отсюда следует, что $a_{ki} \neq 0$ при $k \neq i$.

Теорема 1.2 (см. [7]). *Если V — вольтерров оператор с матрицей общего положения, то множество неподвижных точек на симплексе S^{m-1} всегда конечно.*

Замечание. Если A не является матрицей общего положения, то множество неподвижных точек, вообще говоря, бесконечно.

2. Однородные турниры

Определение 2.1. Граф называется *полным*, если любая пара (различных) вершин соединена дугой. Граф называется *ориентированным*, если в каждой дуге указано направление.

Определение 2.2. Полный ориентированный граф называется *турниром*.

Например, два турнира на рис. 1 называются, соответственно, транзитивным турниром с тремя вершинами и циклическим турниром с тремя вершинами [18].

Пусть все вершины турнира пронумерованы числами $1, 2, \dots, m$.

Определение 2.3. Два турнира с m вершинами называются *изоморфными*, если существует биекция вершин одного турнира на другой, сохраняющая смежность вершин.

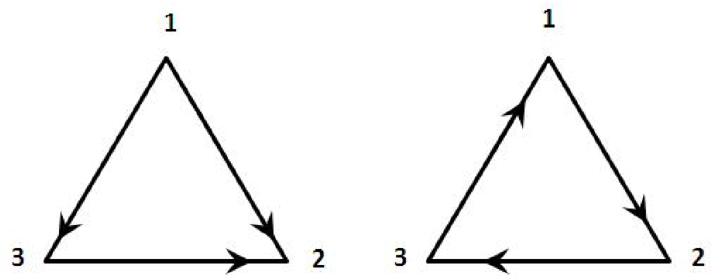

Рис. 1. Транзитивный турнир с тремя вершинами и циклический турнир с тремя вершинами.

Турнир называется *сильным*, если из любой вершины можно попасть в любую другую, следуя ориентации дуг.

Как известно [18], если турнир сильный, то существует гамильтонов цикл, содержащий все вершины данного турнира.

Турнир, не содержащий сильных подтурниров, называется *транзитивным*.

Определение 2.4. Турнир называется *однородным*, если его любой подтурнир является либо сильным, либо транзитивным.

Легко заметить, что это определение равносильно тому, что полустепени исхода и захода одинаковы для всех вершин [18, 23].

Ясно, что при $m \leqslant 3$ все турниры с m вершинами являются однородными.

Например, два турнира с четырьмя вершинами на рис. 2 не являются однородными.

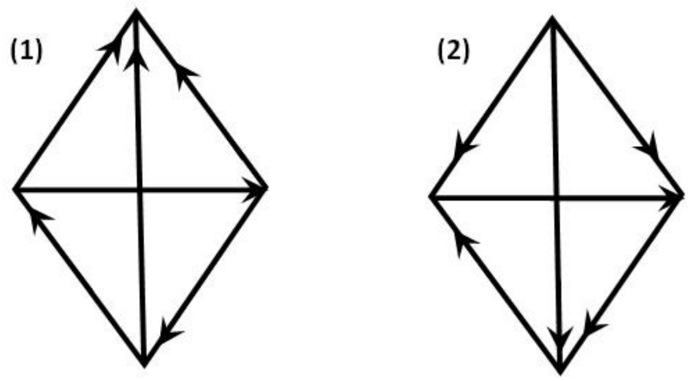

Рис. 2

Теорема 2.1. *Турнир является однородным тогда и только тогда, когда он не содержит подтурниров, изоморфных одному из указанных на рис.* 2.

Доказательство. Турниры, указанные на рис. 2, не являются ни сильными, ни транзитивными. Следовательно, любой турнир, содержащий подтурнир, изоморфный одному из них, по определению не может быть однородным.

Обратно, если турнир содержит подтурнир, который не является ни сильным, ни транзитивным, то согласно [18] множество его вершин можно разбить на два непустых и не пересекающихся класса I и II так, что все дуги, выходящие из класса I и идущие в класс II, направлены из I в II, причем подтурнир, состоящий из вершин одного из этих классов, является сильным.

Всякий сильный подтурнир содержит хотя бы одну циклическую тройку. Добавив к этой циклической тройке любую вершину из другого класса, получим один из турниров из рис. 2. Следовательно, неоднородный турнир всегда содержит подтурнир, изоморфный одному из указанных на рис. 2. Теорема 2.1 доказана. $\square$

Пусть $A = (a_{ki})$, $|a_{ki}| \leqslant 1$ — кососимметрическая матрица общего положения, соответствующая вольтерровскому оператору V.

На плоскости возьмем m пронумерованных точек $1, 2, \ldots, m$ и точку с номером k соединим с точкой i дугой, направленной из k в i, если $a_{ki} < 0$ $(k \neq i)$, и обратным направлением, если $a_{ki} > 0$. Полученный турнир обозначим через T_m. Далее будем предполагать, что T_m — однородный турнир, а A — кососимметрическая матрица общего положения.

3. Неподвижные точки и функции Ляпунова

Теорема 3.1. *Любая неподвижная точка отображения $V : S^{m-1} \to S^{m-1}$ имеет только лишь нечетное число ненулевых координат.*

Доказательство. Заметим, что сужение вольтерровского оператора на любую грань симплекса S^{m-1} также является вольтерровским. Пусть $\Gamma \subset S^{m-1}$ — грань симплекса, содержащая четное число вершин симплекса, и $x \in \Gamma$ — неподвижная точка с четным числом ненулевых координат. Далее, V_Γ и A_Γ — соответствующие сужения V и A на Γ. Тогда из

$$Vx = x$$

следуют равенства

$$V_\Gamma x = x \quad \text{и} \quad A_\Gamma x = 0. \tag{3.1}$$

Так как A — матрица общего положения, то определитель A_Γ отличен от нуля, т. е. равенство $A_\Gamma x = 0$ возможно только лишь при $x = 0$. Однако $x = 0$ не принадлежит симплексу S^{m-1}. Теорема 3.1 доказана. □

Носителем точки $x \in \mathbb{R}^m$ называется

$$\operatorname{supp} x = \{i : x_i \neq 0\}.$$

Теорема 3.2. *Вольтерровский квадратичный стохастический оператор не может содержать двух неподвижных точек с равными носителями.*

Доказательство. Если x и y — две различные неподвижные точки с равными носителями, то отрезок

$$\lambda x + (1 - \lambda) y \quad (0 \leqslant \lambda \leqslant 1)$$

также состоит из неподвижных точек оператора V, что противоречит конечности множества неподвижных точек.

Таким образом, теорема 3.2 позволяет обозначать неподвижную точку только лишь указанием номеров ненулевых координат, например, $x(2, 4, 5)$ — неподвижная точка с условиями на координаты $x_2 > 0$, $x_4 > 0$, $x_5 > 0$, все остальные координаты которой равны нулю. Теорема 3.2 доказана. □

Лемма 3.1. *Если $A = (a_{ki})$ — кососимметрическая матрица общего положения с условием $|a_{ki}| \leqslant 1$, то система линейных неравенств*

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ki} x_i \geqslant 0, \quad k = \overline{1, m} \tag{3.2}$$

имеет единственное решение в симплексе S^{m-1}.

Доказательство. Пусть $I = \{1, 2, \ldots, m\}$, $\alpha \subset I$ — непустое подмножество. Через Γ_α обозначим выпуклую оболочку базисных векторов e_i, где $i \in \alpha$, и будем называть $(|\alpha| - 1)$-*мерной гранью* симплекса S^{m-1}.

Пусть $F_k = \{x \in S^{m-1} : \sum\limits_{i=1}^{m} a_{ki} x_i \geqslant 0, \}$, $k = \overline{1, m}$. Тогда F_k — замкнутые множества, причем для любого $\alpha \subset I$ имеем

$$\bigcup_{k \in \alpha} F_k \supset \Gamma_\alpha, \tag{3.3}$$

что легко следует из кососимметричности матрицы A. Согласно комбинаторной лемме Шпернера [10] из (3.3) следует, что $\bigcap\limits_{k=1}^{m} F_k \neq \varnothing$, т. е. (3.2) имеет хотя бы одно решение в S^{m-1}.

Любое решение (3.2) есть неподвижная точка для вольтерровского оператора V, так как

$$x_k' = x_k(1 + \sum_{i=1}^{m} a_{ki}x_i) \geqslant x_k \quad \text{при всех} \quad k = \overline{1,m}. \tag{3.4}$$

Поскольку $\sum\limits_{k=1}^{m} x_k' = \sum\limits_{k=1}^{m} x_k = 1$, то из (3.4) следует $Vx = x$.

С другой стороны, множество решений неравенств (3.2) в S^{m-1} — выпуклое множество. Так как A — матрица общего положения, то множество неподвижных точек конечно. Следовательно, решение (3.2) в симплексе единственно. Лемма 3.1 доказана. □

Аналогично доказывается, что

$$\{x \in S^{m-1} : \sum_{i=1}^{m} a_{ki}x_i \leqslant 0\} \neq \varnothing$$

и единственно при тех же условиях.

Определение 3.1. Непрерывный функционал $\varphi : S^{m-1} \to \mathbb{R}$ называется *функцией Ляпунова* для оператора $V : S^{m-1} \to S^{m-1}$, если

$$\varphi(Vx) \leqslant \varphi(x) \quad \text{для всех} \quad x \in S^{m-1}.$$

Таким образом, функция Ляпунова монотонно не возрастает вдоль любой траектории, определяемой отображением V.

Пусть $p = (p_1, \ldots, p_m) \in S^{m-1}$ — решение неравенств (3.2).

Теорема (см. [7, 8]). *Функция*

$$\varphi(x) = x_1^{p_1} \cdot x_2^{p_2} \cdot \ldots \cdot x_m^{p_m}$$

является функцией Ляпунова для квадратичного стохастического оператора Вольтерра.

Следствие 3.1. *Для любого $x^0 \neq Vx^0$ множество предельных точек траектории, начинающейся в x^0, лежит на границе симплекса S^{m-1}, т. е.*

$$\omega(x^0) \subset \partial S^{m-1}.$$

Следствие 3.2. *Для любой начальной точки отрицательные траектории сходятся к одной из неподвижных точек.*

4. Карта неподвижных точек вольтерровских операторов с однородным турниром в симплексе S^4

Как было отмечено выше, любая грань S^{m-1} инвариантна относительно вольтерровского оператора V, причем сужение V на эту грань также является оператором вольтерровского вида.

Пусть Γ_α — некоторая грань S^{m-1}, V_α — сужение V на Γ_α и A_α — кососимметрическая матрица, которая получается из A заменой всех a_{ki} нулями при $(k, i) \notin \alpha \times \alpha$.

Введем обозначения:

$$P_\alpha = \{x \in \Gamma_\alpha : A_\alpha x \leqslant 0\}, \qquad Q_\alpha = \{x \in \Gamma_\alpha : A_\alpha x \geqslant 0\}.$$

Согласно доказанной выше лемме, P_α и Q_α состоят из единственной неподвижной точки, причем возможны случаи, когда $P_\alpha = Q_\alpha$.

Пример. В случае транзитивного турнира с тремя вершинами (см. рис. 3) имеем:

1) если $\alpha = \{1, 2\}$, то $P_\alpha = e_1, Q_\alpha = e_2$;
2) если $\alpha = \{1, 2, 3\}$, то $P_\alpha = e_1$, $Q_\alpha = e_3$;
3) если $\alpha = \{3\}$, то $P_\alpha = Q_\alpha = e_3$ при любых коэффициентах a_{ki}.

В случае циклического турнира с тремя вершинами (см. рис. 4) имеем:

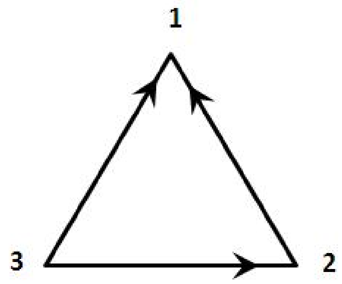

Рис. 3

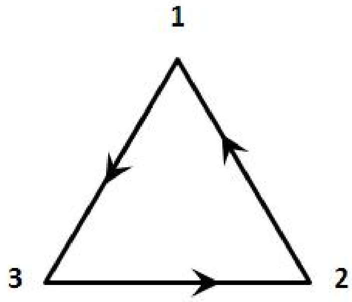

Рис. 4

1) если $\alpha = \{2,3\}$, то $P_\alpha = e_2, Q_\alpha = e_3$;
2) если $\alpha = \{1,2,3\}$, то $P_\alpha = Q_\alpha$ есть внутренняя неподвижная точка.

Множество всех неподвижных точек $\{x \in S^{m-1} : Vx = x\}$ оператора V изобразим в виде точек на плоскости, затем для каждого $\alpha \subset I$ неподвижную точку P_α соединим дугой с неподвижной точкой Q_α, направленной из P_α в Q_α. Полученный ориентированный граф назовем *картой неподвижных точек* оператора V и обозначим через G_V.

Легко заметить, что в случае транзитивных турниров карта неподвижных точек G_V совпадает с исходным турниром. Содержательные примеры карт неподвижных точек начинаются с $m \geqslant 5$.

Далее мы изучим случай, когда $m = 5$.

Как известно (см. [18]), при $m = 5$ существуют 12 попарно неизоморфных турниров, причем 6 из них являются сильными.

Однородных турниров с 5 вершинами существуют 4, причем один из них является транзитивным. В случае транзитивных турниров любая траектория вольтерровского оператора сходится к одной из вершин симплекса.

Рассмотрим оставшиеся три однородных турнира с 5 вершинами. Пусть T_5 имеет вид, как на рис. 5. Тогда соответствующий вольтерровский оператор представляется равенствами:

$$\begin{cases} x_1' = x_1(1 - a_1x_2 - a_2x_3 - a_3x_4 + a_4x_5), \\ x_2' = x_2(1 + a_1x_1 - a_5x_3 - a_6x_4 - a_7x_5), \\ x_3' = x_3(1 + a_2x_3 + a_5x_2 - a_8x_4 - a_9x_5), \\ x_4' = x_4(1 + a_3x_1 + a_6x_2 + a_8x_3 - a_{10}x_5), \\ x_5' = x_5(1 - a_4x_1 + a_7x_2 + a_9x_3 + a_{10}x_4), \end{cases}$$

где коэффициенты $a_k > 0$ и $a_k \leqslant 1$.

Как видно из рис. 5, T_5 имеет три циклические тройки $\overline{125}$, $\overline{135}$, $\overline{145}$.

Пусть $\alpha = \{1,2,5\}$, $\beta = \{1,3,5\}$, $\gamma = \{1,4,5\}$. Они определяют следующие неподвижные точки:

$$x(\alpha) = \frac{1}{a_1 + a_4 + a_7}(a_7, a_4, 0, 0, a_1), \quad x(\beta) = \frac{1}{a_2 + a_4 + a_9}(a_9, 0, a_4, 0, a_2),$$

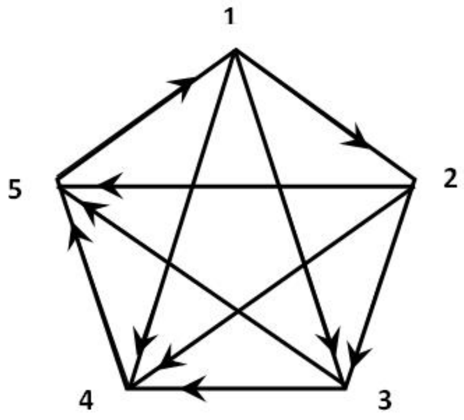

Рис. 5

$$x(\gamma) = \frac{1}{a_3 + a_4 + a_{10}}(a_{10}, 0, 0, a_4, a_3).$$

Для этих неподвижных точек строим функции

$$\varphi_\alpha(x) = (x_1^{a_7} \cdot x_2^{a_4} \cdot x_5^{a_1})^{\frac{1}{a_1+a_4+a_7}}, \quad \varphi_\beta(x) = (x_1^{a_9} \cdot x_3^{a_4} \cdot x_5^{a_2})^{\frac{1}{a_2+a_4+a_9}},$$

$$\varphi_\gamma(x) = (x_1^{a_{10}} \cdot x_4^{a_4} \cdot x_5^{a_3})^{\frac{1}{a_3+a_4+a_{10}}}.$$

Следующее неравенство

$$c_1^{p_1} \cdot c_2^{p_2} \cdot \ldots \cdot c_m^{p_m} \leqslant \sum_{k=1}^{m} c_k \cdot p_k,$$

где

$$c_k \geqslant 0, \quad p_k \geqslant 0 \quad \text{и} \quad \sum_{k=1}^{m} p_k = 1,$$

называется *неравенством Юнга* [11].

Используя неравенство Юнга, получим следующие оценки:

$$\varphi_\alpha(Vx) \leqslant \varphi_\alpha(x)(1 - \delta_\alpha \Delta_1 x_3 - \delta_\alpha \Delta_2 x_4),$$

$$\varphi_\beta(Vx) \leqslant \varphi_\beta(x)(1 + \delta_\beta \Delta_1 x_2 - \delta_\beta \Delta_3 x_4),$$

$$\varphi_\gamma(Vx) \leqslant \varphi_\gamma(x)(1 + \delta_\gamma \Delta_2 x_2 + \delta_\gamma \Delta_3 x_3),$$

для всех $x \in S^4$, где

$$\delta_\alpha = \frac{1}{a_1 + a_4 + a_7}, \quad \delta_\beta = \frac{1}{a_2 + a_4 + a_9}, \quad \delta_\gamma = \frac{1}{a_3 + a_4 + a_{10}},$$

$$\Delta_1 = a_2 a_7 + a_4 a_5 - a_1 a_9, \quad \Delta_2 = a_3 a_7 + a_4 a_6 - a_1 a_{10}, \quad \Delta_3 = a_3 a_9 + a_4 a_8 - a_2 a_{10}.$$

Карта неподвижных точек имеет вид, как на рис. 6.

Направления на дугах, соединяющих неподвижные точки $x(\alpha)$, $x(\beta)$ и $x(\gamma)$, определяются знаками чисел Δ_1, Δ_2, Δ_3. Отметим, что Δ_1^2, Δ_2^2, Δ_3^2 суть миноры четвертого порядка матрицы A.

Так как A — кососимметрическая матрица общего положения, то Δ_1, Δ_2, $\Delta_3 \neq 0$.

Например, если $\Delta_1 > 0$, $\Delta_2 > 0$, то $\varphi_\alpha(x)$ является функцией Ляпунова для оператора V.

Если $\Delta_1 \cdot \Delta_2 < 0$, $\Delta_1 \cdot \Delta_3 > 0$, $\Delta_2 \cdot \Delta_3 < 0$, то V имеет еще одну неподвижную точку внутри симплекса S^4.

Вообще говоря, асимптотическое поведение траекторий оператора V и расположение множества предельных точек $\omega(x^0)$ зависят от знаков Δ_1, Δ_2 и Δ_3.

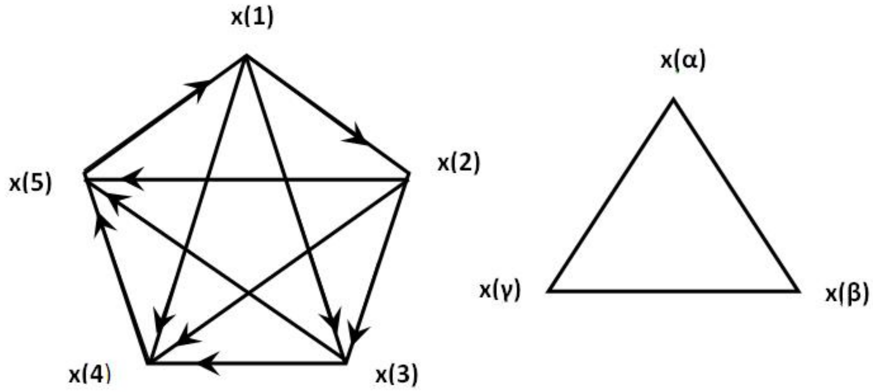

Рис. 6

В рассматриваемом случае либо одна и только одна из функций φ_α, φ_β, φ_γ является функцией Ляпунова для вольтерровского оператора, либо существует неподвижная точка, являющаяся внутренней для S^4, которая порождает функцию Ляпунова.

Следующие два однородных турнира с 5 вершинами имеют вид, как на рис. 7. В случае рис. 7.а) существуют 4 циклические тройки, а в случае рис. 7.б) — 5 циклических троек.

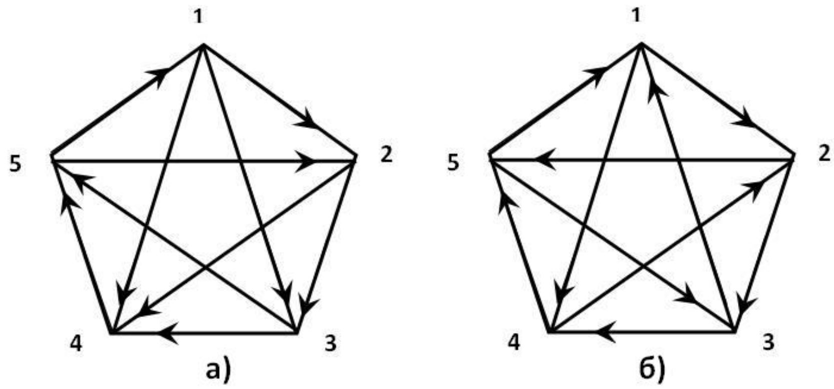

Рис. 7

Построение карты неподвижных точек проводится аналогичным образом.

Отметим свойства карт неподвижных точек вольтерровских операторов с однородным турниром:

1) Существует только лишь одна вершина (=неподвижная точка), в которую нет входящих дуг, причем она определяет функцию Ляпунова.
2) В карте неподвижных точек могут быть соединены дугой только лишь неподвижные точки с одинаковым числом ненулевых координат.

В настоящее время следующие задачи остаются нерешенными:

1) Если подтурнир, соответствующий трем вершинам S^{m-1}, является сильным, то грань, натянутая на эти вершины, имеет внутреннюю неподвижную точку. Однако имеются примеры, когда T_5 — сильный, но соответствующая грань не имеет внутренних неподвижных точек. Известно [18], что если T_{2k+1} — сильный, то существует подтурнир T_{2k-1}, который также является сильным. Верно ли, что из существования неподвижной точки с $2k+1$ ненулевыми координатами следует существование неподвижной точки с $2k-1$ ненулевыми координатами?
2) Для вольтерровских операторов, как правило, множество предельных точек траектории бесконечно. Верно ли, что из $|\omega(x^0)| = \infty$ следует, что предел средних по Чезаро

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} V^k(x_0)$$

не существует?

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Ганиходжаев Р. Н.* Исследование по теории квадратичных стохастических операторов// Дисс. д.ф.-м.н. — Ташкент: ИМ АН РУз, 1993.
2. *Ганиходжаев Р. Н., Абдурахманова Р. Э.* Описание квадратичных автоморфизмов конечно-мерного симплекса// Узб. мат. ж. — 2002. — № 1. — С. 7–16.
3. *Ганиходжаев Р. Н., Журабоев А. М.* Множество равновестных состояний квадратичных стохастических операторов типа V_π// Узб. мат. ж. — 1998. — № 3. — С. 23–27.
4. *Ганиходжаев Р. Н., Каримов А. З.* О числе вершин множества бистохастических операторов// Узб. мат. ж. — 1999. — № 6. — С. 29–35.
5. *Ганиходжаев Р. Н., Сабуров М. Х.* Обобщенная модель нелинейных операторов вольтерровского типа и функции Ляпунова// Журн. СФУ. Сер. Мат. Физ. — 2008. — *1*, № 2. — С. 188–196.
6. *Ганиходжаев Р. Н., Саримсаков А. Т.* Математическая модель каолиции биологических систем// Докл. АН УзССР. — 1992. — № 3. — С. 14–17.
7. *Ганиходжаев Р. Н., Таджиева М. А., Эшмаматова Д. Б.* Динамические свойства квадратичных гомеоморфизмов конечномерного симплекса// Итоги науки и техн. Соврем. мат. и ее прилож. — 2018. — *144*. — С. 104–109.
8. *Ганиходжаев Р. Н., Эшмаматова Д. Б.* Квадратичные автоморфизмы симплекса и асимптотическое поведение их траекторий// Владикавказ. мат. ж. — 2006. — *8*, № 2. — С. 12–28.
9. *Ганиходжаев Р. Н., Эшниязов А. И.* Бистохастические квадратичные операторы// Узб. мат. ж. — 2004. — № 3. — С. 29–34.
10. *Канторович Л. В., Акилов Г. П.* Функциональный анализ. — М.: Наука, 1984.
11. *Харди Г. Х., Литтльвуд Д. И., Полиа Г.* Неравенства. — М.: Мир, 1948.
12. *Ferchichi M. R., Yousfi A.* On some attractors of a two-dimensional quadratic map// Int. J. Dyn. Syst. Differ. Equ. — 2019. — *9*, № 1. — С. 87–103.
13. *Ganikhodzhaev R. N.* Quadratic stochastic operators, Lyapunov function and tournaments// Sb. Math. — 1993. — *76*, № 2. — С. 489–506.
14. *Ganikhodzhaev R. N.* A chart of fixed points and Lyapunov functions for a class of discrete dynamical systems// Math. Notes. — 1994. — *56*, № 5-6. — С. 1125–1131.
15. *Ganikhodzhaev R. N., Mukhamedov F. M., Rozikov U. A.* Quadratic stochastic operators: Results and open problems// Infin. Dimens. Anal. Quantum. Probab. Relat. — 2011. — *14*, № 2. — С. 279–335.
16. *Galor O.* Discrete dynamical systems. — Berlin: Springer, 2007.
17. *Gard T. C., Hallam T. G.* Persistence in food webs. I. Lotka—Volterra food chains// Bull. Math. Biol. — 1979. — *41*, № 6. — С. 877–891.
18. *Harary F.* Graph theory. — Reading, etc.: Addison-Wesley, 1969.
19. *Hofbauer J., Sigmund K.* The theory of evolution and dynamical systems: Mathematical aspects of selection. — Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1988.
20. *Hofbauer J., Sigmund K.* Evolutionary games and population dynamics. — Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1998.
21. *Jamilov U. U.* The dynamics of Lotka—Volterra operators on S^2// Abst. Conf. «New Results of Mathematics and Their Applications», Samarkand, May 14-15, 2018. — С. 108–110.
22. *Jenks R. D.* Homogeneous multidimensional differential systems for mathematical models// J. Differ. Equ. — 1968. — *4*, № 4. — С. 549–565.
23. *Moon J. W.* Topics on tournaments. — New York, etc.: Holt, Rinehart and Winston, 1968.

М. А. Таджиева
Национальный университет Узбекистана им. М. Улугбека, Ташкент, Узбекистан
E-mail: mohbonut@mail.ru

Д. Б. Эшмаматова
Национальный университет Узбекистана им. М. Улугбека, Ташкент, Узбекистан
E-mail: 24dil@mail.ru

Р. Н. Ганиходжаев
Национальный университет Узбекистана им. М. Улугбека, Ташкент, Узбекистан

DOI: 10.22363/2413-3639-2021-67-4-783-794 UDC 517.98

Volterra-type Quadratic Stochastic Operators with a Homogeneous Tournament

© 2021 **M. A. Tadzhieva, D. B. Eshmamatova, R. N. Ganikhodzhaev**

Abstract. As is known [1], each quadratic stochastic operator of Volterra type acting on a finite-dimensional simplex defines a certain tournament, the properties of which make it possible to study the asymptotic behavior of the trajectories of this Volterra operator. In this paper, we introduce the concept of a homogeneous tournament and study the dynamic properties of Volterra operators corresponding to homogeneous tournaments in the simplex S^4.

REFERENCES

1. R. N. Ganikhodzhaev, "Issledovanie po teorii kvadratichnykh stokhasticheskikh operatorov" [Research on the theory of quadratic stochastic operators] *Doctoral Thesis*, IM AN RUz, Tashkent, 1993.
2. R. N. Ganikhodzhaev and R. E. Abdurakhmanova, "Opisanie kvadratichnykh avtomorfizmov konechnomernogo simpleksa" [Description of quadratic automorphisms of a finite-dimensional simplex], *Uzb. mat. zh.* [Uzb. Math. J.], 2002, No. 1, 7–16 (in Russian).
3. R. N. Ganikhodzhaev and A. M. Zhuraboev, "Mnozhestvo ravnovestnykh sostoyaniy kvadratichnykh stokhasticheskikh operatorov tipa V_π" [The set of equilibrium states of quadratic stochastic operators of type V_π], *Uzb. mat. zh.* [Uzb. Math. J.], 1998, No. 3, 23–27 (in Russian).
4. R. N. Ganikhodzhaev and A. Z. Karimov, "O chisle vershin mnozhestva bistokhasticheskikh operatorov" [On the number of vertices of the set of bistochastic operators], *Uzb. mat. zh.* [Uzb. Math. J.], 1999, No. 6, 29–35 (in Russian).
5. R. N. Ganikhodzhaev and M. Kh. Saburov, "Obobshchennaya model' nelineynykh operatorov vol'terrovskogo tipa i funktsii Lyapunova" [Generalized model of nonlinear Volterra-type operators and Lyapunov functions], *Zhurn. SFU. Ser. Mat. Fiz.* [J. SFU. Ser. Math. Phys.], 2008, **1**, No. 2, 188–196 (in Russian).
6. R. N. Ganikhodzhaev and A. T. Sarimsakov, "Matematicheskaya model' kaolitsii biologicheskikh sistem" [Mathematical model of the caolition of biological systems], *Dokl. AN UzSSR* [Rep. Acad. Sci. Uzb. SSR], 1992, No. 3, 14–17 (in Russian).
7. R. N. Ganikhodzhaev, M. A. Tadzhieva, and D. B. Eshmamatova, "Dinamicheskie svoystva kvadratichnykh gomeomorfizmov konechnomernogo simpleksa" [Dynamical properties of quadratic homeomorphisms of a finite-dimensional simplex], *Itogi nauki i tekhn. Sovrem. mat. i ee prilozh.* [Totals Sci. Tech. Contemp. Math. Appl.], 2018, **144**, 104–109 (in Russian).
8. R. N. Ganikhodzhaev and D. B. Eshmamatova, "Kvadratichnye avtomorfizmy simpleksa i asimptoticheskoe povedenie ikh traektoriy" [Quadratic simplex automorphisms and asymptotic behavior of their trajectories], *Vladikavkaz. mat. zh.* [Vladikavkaz. Math. J.], 2006, **8**, No. 2, 12–28 (in Russian).
9. R. N. Ganikhodzhaev and A. I. Eshniyazov, "Bistokhasticheskie kvadratichnye operatory" [Bistochastic quadratic operators], *Uzb. mat. zh.* [Uzb. Math. J.], 2004, No. 3, 29–34 (in Russian).
10. L. V. Kantorovich and G. P. Akilov, *Funktsional'nyy analiz* [Functional Analysis], Nauka, Moscow, 1984 (in Russian).
11. G. H. Hardy, J. E. Littlewood, and G. Pólya, *Neravenstva* [Inequalities], Mir, Moscow, 1948 (Russian translation).
12. M. R. Ferchichi and A. Yousfi, "On some attractors of a two-dimensional quadratic map," *Int. J. Dyn. Syst. Differ. Equ.*, 2019, **9**, No. 1, 87–103.
13. R. N. Ganikhodzhaev, "Quadratic stochastic operators, Lyapunov function and tournaments," *Sb. Math.*, 1993, **76**, No. 2, 489–506.

14. R. N. Ganikhodzhaev, "A chart of fixed points and Lyapunov functions for a class of discrete dynamical systems," *Math. Notes*, 1994, **56**, No. 5-6, 1125–1131.
15. R. N. Ganikhodzhaev, F. M. Mukhamedov, and U. A. Rozikov, "Quadratic stochastic operators: Results and open problems," *Infin. Dimens. Anal. Quantum. Probab. Relat.*, 2011, **14**, No. 2, 279–335.
16. O. Galor, *Discrete dynamical systems*, Springer, Berlin, 2007.
17. T. C. Gard and T. G. Hallam, "Persistence in food webs. I. Lotka–Volterra food chains," *Bull. Math. Biol.*, 1979, **41**, No. 6, 877–891.
18. F. Harary, *Graph theory*, Addison-Wesley, Reading, etc., 1969.
19. J. Hofbauer and K. Sigmund, *The theory of evolution and dynamical systems: Mathematical aspects of selection*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1988.
20. J. Hofbauer and K. Sigmund, *Evolutionary games and population dynamics*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1998.
21. U. U. Jamilov, "The dynamics of Lotka–Volterra operators on S^2," *Abst. Conf. New Results of Mathematics and Their Applications, Samarkand, May* 14-15, 2018, pp. 108–110.
22. R. D. Jenks, "Homogeneous multidimensional differential systems for mathematical models," *J. Differ. Equ.*, 1968, **4**, No. 4, 549–565.
23. J. W. Moon, *Topics on tournaments*, Holt, Rinehart and Winston, New York, etc., 1968.

M. A. Tadzhieva
National University of Uzbekistan named after M. Ulugbek, Tashkent, Uzbekistan
E-mail: mohbonut@mail.ru

D. B. Eshmamatova
National University of Uzbekistan named after M. Ulugbek, Tashkent, Uzbekistan
E-mail: 24dil@mail.ru

R. N. Ganikhodzhaev
National University of Uzbekistan named after M. Ulugbek, Tashkent, Uzbekistan