

МЕТОД ФОКАСА ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ НА МЕТРИЧЕСКИХ ГРАФАХ

© 2021 г. **З. А. СОБИРОВ, М. Р. ЭШИМБЕТОВ**

Аннотация. В работе дан метод построения решений начально-краевых задач для уравнения теплопроводности на простых метрических графах, таких как звездообразный граф, дерево и треугольник с тремя сходящимися ребрами. Решения задач построены так называемым методом Фокаса, который является обобщением метода преобразования Фурье. При этом задача сведена к системе алгебраических уравнений относительно преобразования Фурье неизвестных значений решения в вершинах графа.

ОГЛАВЛЕНИЕ

1. Введение	766
2. Постановка задачи и предварительные результаты	767
3. Основные результаты	774
4. Заключение и выводы	779
Список литературы	779

1. ВВЕДЕНИЕ

Известно, что краевые задачи для уравнений с частными производными на метрических графах используются для моделирования процесса диффузии и распространения волн в разветвленных структурах для многих проблем физики, химии и биологии [4, 6]. При этом в точках разветвления графа используется обобщенное условие локального сохранения потока, т. е. условие Кирхгоффа, которое в самом простом случае состоит из условий непрерывности решения на вершине графа и равенства нулю суммы исходящих односторонних производных решения на вершине.

Граф состоит из точек, называемыми *вершинами*, и из отрезков, концы которых лежат в вершинах графа [5]. Эти отрезки называются *ребрами* графа. Мы будем рассматривать только связные графы, т. е. графы, в которых из любой точки можно попасть в другую по ребрам графа. Изометрическим сопоставлением каждого ребра графа числовому интервалу мы получаем так называемый метрический граф. Метрика здесь понимается в смысле геодезической метрики, т. е. как кратчайшее расстояние по ребрам графа между двумя точками графа. Понятно, что такая структура является одномерной, в то время как реалистические разветвленные структуры — двумерные (например, графеновые нанотрубки) или трехмерные. Поэтому возникает вопрос о целесообразности моделирования реальных проблем техники и физики с помощью метрических графов. В работах [7, 19] исследована краевая задача для стационарного уравнения Шредингера в тонких (с малыми поперечными сечениями) разветвленных областях. Доказано, что в случае стремления к нулю диаметра поперечного сечения решение рассматриваемой задачи стремится к решению краевой задачи на соответствующем квантовом (метрическом) графе. При этом из уравнения Шредингера в малой области точки разветвления, которая переходит в вершину графа при пределе,

получаются условия Кирхгоффа. Этот результат остается справедливым и в случае уравнения теплопроводности в силу того, что уравнение теплопроводности с помощью преобразования Лапласа по времени переходит в стационарное уравнение Шредингера.

Еще одно обоснование моделирования процесса теплопроводности в разветвленных областях посредством метрических графов можно найти в работе [17]. Также в этой работе методом Фокаса получено решение начально-краевой задачи для уравнения теплопроводности на компактном звездообразном графе.

В данной работе мы обобщаем метод унифицированного преобразования Фокаса [8–10, 16–18] для решения уравнения теплопроводности на случай некоторых других простых метрических графов. Основной целью работы является демонстрация преимущества и простоты использования вышеуказанного метода для решения начально-краевых задач на метрических графах. В начале мы приводим постановку задачи и некоторые предварительные результаты, полученные в работах [15, 16, 18]. В следующих разделах работы приведены наши новые результаты. Мы даем метод построения решения начально-краевых задач для уравнения теплопроводности на графах в виде дерева и графа с циклом, состоящего из треугольной части и имеющего исходящие из вершин дополнительные ребра. Заметим, что разрешимость начально-краевых задач на метрических графах исследована в работах [1, 2].

2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ И ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Пусть $\Gamma = E \cup V$ — связный метрический граф, где $E = \{b_j\}_{j=1}^n$ — множество его ребер, а $V = \{v_j\}_{j=1}^m$ — множество вершин [5]. Определим координаты x_j на ребрах графа с помощью изометрического отображения этих ребер на интервалы $(0, L_j)$, $j = 1, 2, \dots, n$.

Будем говорить, что вершина v *соприкасается* с ребром b_j , если она является концом данного ребра, и обозначать это $b_j \sim v$. Количество элементов множества $\{b : b \sim v, b \in E\}$ назовем *валентностью* вершины v . Если валентность вершины равна единице, то она называется *граничной*. Пусть $\{\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_{m_1}\} = \partial\Gamma \subset V$ — граничные вершины графа. Далее, не нарушая общности, будем использовать x вместо x_j .

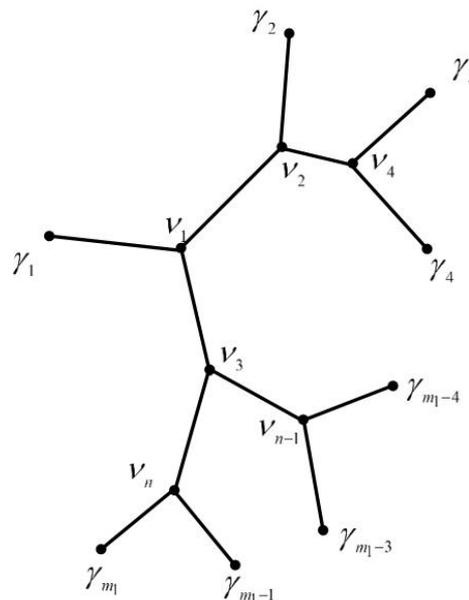


Рис. 2.1. Метрический граф Γ .

На каждом ребре графа рассмотрим уравнение теплопроводности

$$u_t^{(j)}(x, t) = u_{xx}^{(j)}(x, t), \quad x \in b_j, \quad t > 0, \quad j = 1, 2, \dots, n. \tag{2.1}$$

Потребуем, чтобы решение уравнения (2.1) удовлетворяло начальному условию

$$u^{(j)}(x, 0) = u_0^{(j)}(x), \quad j = 1, 2, \dots, n. \quad (2.2)$$

В точках разветвления (т. е. во внутренних вершинах) графа решение должно удовлетворять следующим *условиям склеивания*:

- а) значения на вершине ν всех функций $u^{(j)}$, для которых $b_j \sim \nu$, одинаковы;
- б) сумма односторонних производных на каждой вершине ν всех функций $u^{(j)}$, для которых $b_j \sim \nu$, равна нулю:

$$\sum_{b_j \sim \nu} \left. \frac{\partial u^{(j)}(x, t)}{\partial x} \right|_{\nu} = 0, \quad \nu \in V \setminus \partial\Gamma, \quad t \in [0, T]. \quad (2.3)$$

Первое из этих условий называется *условием непрерывности* решения на вершине, а второе — *условием сохранения потока*. Эти условия еще называются *условиями Кирхгоффа*, а иногда *условиями типа δ* на вершине.

На граничных вершинах графа потребуем выполнения следующих граничных условий:

$$\begin{aligned} u^{(j)}(x, t)|_{\nu} &= g_0^{(j)}(t), \quad \text{если } x_j = 0 \text{ на вершине } \nu, \\ u^{(j)}(x, t)|_{\nu} &= h_0^{(j)}(t), \quad \text{если } x_j = L_j \text{ на вершине } \nu, \quad b_j \sim \nu. \end{aligned} \quad (2.4)$$

Начальные данные $u_0^{(j)}$, $j = \overline{1, n}$, удовлетворяют условиям склеивания на неграничных вершинах графа и условиям согласования на граничных вершинах.

Далее в этом разделе мы рассмотрим несколько примеров использования метода унифицированного преобразования Фокаса. Начнем с простого случая, приведенного в работе [10].

2.1. Уравнение теплопроводности на полупрямой. Рассмотрим начально-краевую задачу для уравнения (2.1) на полупрямой (см. [10]). Требуется найти регулярное решение уравнения $u_t = u_{xx} + f(x, t)$ в области $E = \{(x, t) : x > 0, 0 < t \leq T\}$, $T > 0$, непрерывное в замыкании этой области, удовлетворяющее начальному условию $u(x, 0) = u_0(x)$, $x \geq 0$, краевому условию $u(0, t) = g_0(t)$ и асимптотическому условию $\lim_{x \rightarrow \infty} u(x, t) = 0$, $0 \leq t \leq T$. Предполагается, что начальные и граничные данные — достаточно гладкие функции, и $u_0(0) = g_0(0)$, $f(x, t) \in C^1(\bar{E})$, функции $f(x, t)$ и $u_0(x)$ стремятся к нулю при $x \rightarrow +\infty$, являются абсолютно интегрируемыми функциями в $(0, +\infty)$ по переменной x для всех $0 \leq t \leq T$ и имеют ограниченные производные в своих областях определения.

Метод Фокаса состоит из трех этапов. Первый этап идентичен процедуре, используемой для реализации обычных преобразований. Второй требует использования теоремы Коши и леммы Жордана. Третий включает в себя только алгебраические преобразования.

1. Глобальным соотношением назовем уравнение, которое связывает неизвестное решение с его значениями и значениями его производных на границе области.

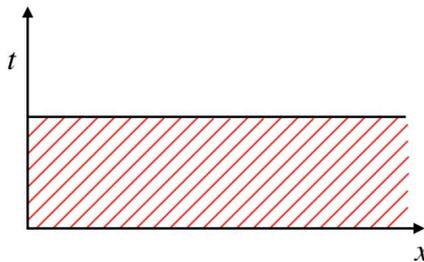


Рис. 2.2

В нашем случае это соотношение получается умножением уравнения на $e^{i(\lambda x + wt)}$, интегрированием по области и дальнейшим применением формулы Грина. Здесь диффузионное соотношение имеет вид $w = \lambda^2$. После несложных преобразований легко получим

$$e^{\lambda^2 t} \widehat{u}(-i\lambda, t) = \widehat{u}_0(-i\lambda) - \widetilde{g}_1(\lambda^2, t) - i\lambda \widetilde{g}_0(\lambda^2, t), \quad \text{Im } \lambda \leq 0, \tag{2.5}$$

где

$$\widehat{u}(-i\lambda, t) = \int_0^\infty e^{-i\lambda x} u(x, t) dx, \quad 0 \leq t \leq T, \quad \text{Im } \lambda \leq 0, \tag{2.6}$$

$$\widehat{u}_0(-i\lambda) = \int_0^\infty e^{-i\lambda x} u_0(x) dx, \quad \text{Im } \lambda \leq 0, \tag{2.7}$$

$$\widetilde{g}_0(\lambda, t) = \int_0^t e^{\lambda \tau} g_0(\tau) d\tau, \quad \widetilde{g}_1(\lambda, t) = \int_0^t e^{\lambda \tau} g_1(\tau) d\tau, \quad 0 \leq t \leq T, \quad \lambda \in \mathbb{C}, \tag{2.8}$$

$$g_1(t) = u_x(0, t), \quad g_0(t) = u(0, t), \quad 0 < t \leq T. \tag{2.9}$$

Отметим, что

$$|e^{-i\lambda x}| = |e^{-i\lambda_R x + \lambda_I x}| = e^{\lambda_I x}.$$

Таким образом, эти выражения ограничены при $x \rightarrow \infty$ для всех $\lambda_I \leq 0$.

Функции \widetilde{g}_0 и \widetilde{g}_1 определены для всех комплексных значений λ , тогда как \widehat{u} и \widehat{u}_0 определены для $\text{Im } \lambda \leq 0$, поэтому глобальное соотношение (2.5) справедливо для $\text{Im } \lambda \leq 0$.

Заметим, что глобальное соотношение (2.5) можно также получить, используя преобразование Лапласа, определенное по формуле (2.6).

2. На этом этапе мы должны получить интегральное представление решения.

Для уравнения теплопроводности, определенного на полуоси, это интегральное представление имеет вид

$$u(x, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty e^{i\lambda x - \lambda^2 t} \widehat{u}_0(-i\lambda) d\lambda - \frac{1}{2\pi} \int_{\partial D^+} e^{i\lambda x - \lambda^2 t} [\widetilde{g}_1(\lambda^2, t) + i\lambda \widetilde{g}_0(\lambda^2, t)] d\lambda, \tag{2.10}$$

где контур ∂D^+ является границей области D^+ , определенной как $D^+ = \{\text{Im } \lambda \geq 0, \text{Re } \lambda^2 < 0\}$ (см. рис. 2.3).

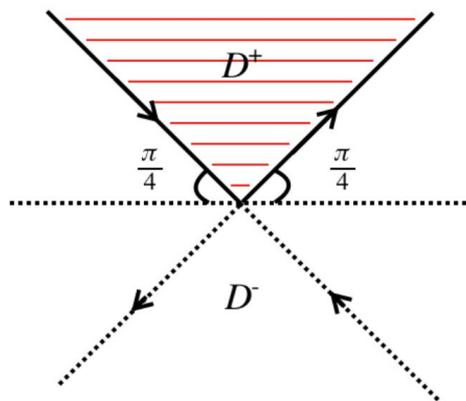


Рис. 2.3

Действительно, решая глобальное соотношение (2.5) относительно $\widehat{u}(-i\lambda, t)$, а затем используя формулу обратного преобразования Фурье, мы находим выражение, похожее на (2.10), но с

контуром интегрирования вдоль вещественной оси вместо ∂D^+ . Чтобы перейти от интеграла по вещественной оси к ∂D^+ , используем теорему Коши и лемму Жордана.

Сначала рассмотрим функцию

$$e^{i\lambda x - \lambda^2 t} \tilde{g}_1(\lambda^2, t) = e^{i\lambda x} \int_0^t e^{-\lambda^2(t-\tau)} g_1(\tau) d\tau,$$

которая является голоморфной функцией λ . Последнее равенство включает в себя две экспоненты

$$e^{i\lambda x} = e^{i\lambda_R x - \lambda_I x}, \quad e^{-\lambda^2(t-\tau)} = e^{-\operatorname{Re}(\lambda^2)(t-\tau) - i \operatorname{Im}(\lambda^2)(t-\tau)}.$$

Поскольку $x \geq 0$ и $t - \tau \geq 0$, вышеуказанные экспоненты ограничены при $\operatorname{Im} \lambda \geq 0$ и $\operatorname{Re} \lambda^2 \geq 0$. Кроме того, при выполнении этих условий, используя формулу интегрирования по частям, легко получить, что указанная выше функция имеет порядок $O\left(\frac{1}{\lambda^2}\right)$ при $\lambda \rightarrow \infty$:

$$e^{-\lambda^2 t} \int_0^t e^{\lambda^2 \tau} g_1(\tau) d\tau \sim \frac{g_1(t)}{\lambda^2}, \quad \lambda \rightarrow \infty.$$

Таким образом, из теоремы Коши для области, ограниченной линией $|\operatorname{Re}(\lambda)| = R$ и ∂D^+ , с использованием леммы Жордана при $R \rightarrow +\infty$ легко следует, что интеграл по вещественной прямой может быть заменен на интеграл по контуру ∂D^+ .

Аналогичные утверждения верны для интеграла от функции $i\lambda e^{i\lambda x - \lambda^2 t} \tilde{g}_0(\lambda^2, t)$.

3. На этом этапе, используя заданные граничные условия, глобальное соотношение, а также некоторые инвариантные преобразования, надо исключить из вышеприведенного интегрального представления неизвестные граничные значения.

Наше глобальное соотношение определено в $\operatorname{Im} \lambda \leq 0$, но при этом нам надо найти \tilde{g}_1 при $\lambda \in \partial D^+$, в котором $\operatorname{Im} \lambda \geq 0$.

Заметим, что замена λ на $-\lambda$ имеет следующие два свойства: во-первых, при этом отображении множество $\operatorname{Im} \lambda \leq 0$ переходит в множество $\operatorname{Im} \lambda \geq 0$, а во-вторых, выражения $\tilde{g}_0(\lambda^2, t)$ и $\tilde{g}_1(\lambda^2, t)$ при этом не меняются. Воспользовавшись этой заменой, имеем

$$\tilde{g}_1(\lambda^2, t) = i\lambda \tilde{g}_0(\lambda^2, t) + \hat{u}_0(i\lambda) - e^{\lambda^2 t} \hat{u}(i\lambda, t), \quad \operatorname{Im} \lambda \geq 0. \quad (2.11)$$

При подстановке в интегральное представление (2.10) слагаемое $e^{\lambda^2 t} \hat{u}(i\lambda, t)$ дает нам интеграл

$$-\frac{1}{2\pi} \int_{\partial D^+} e^{i\lambda x} \hat{u}(i\lambda, t) d\lambda, \quad 0 < x < \infty, \quad t > 0.$$

Функции $e^{\lambda x}$ и $\hat{u}(i\lambda, t)$ обе ограничены и голоморфны в верхней полуплоскости, и

$$\hat{u}(i\lambda, t) = \int_0^\infty e^{i\lambda x} u(x, t) dx \sim -\frac{u(0, t)}{i\lambda}, \quad \lambda \rightarrow \infty.$$

Тогда, согласно теореме Коши и лемме Жордана, этот интеграл равен нулю.

Таким образом, из (2.10) и (2.11) получим решение нашей задачи в виде

$$u(x, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty e^{i\lambda x - \lambda^2 t} \hat{u}_0(-i\lambda) d\lambda - \frac{1}{2\pi} \int_{\partial D^+} e^{i\lambda x - \lambda^2 t} [2i\lambda \tilde{g}_0(\lambda^2, t) + \hat{u}_0(i\lambda)] d\lambda. \quad (2.12)$$

2.2. Решение уравнения теплопроводности на конечном интервале методом Фокаса. Теперь покажем применение метода Фокаса для уравнения теплопроводности на конечном интервале $0 < x < L$. Приступим к реализации этапов 1, 2 и 3, приведенных в предыдущем разделе.

1. Аналогичными действиями, как показано выше, имеем следующее глобальное соотношение:

$$e^{\lambda^2 t} \hat{u}(-i\lambda, t) = \hat{u}_0(-i\lambda) - \tilde{g}_1(\lambda^2, t) - i\lambda \tilde{g}_0(\lambda^2, t) + e^{-i\lambda L} [\tilde{h}_1(\lambda^2, t) + i\lambda \tilde{h}_0(\lambda^2, t)], \quad \lambda \in \mathbb{C}, \quad (2.13)$$

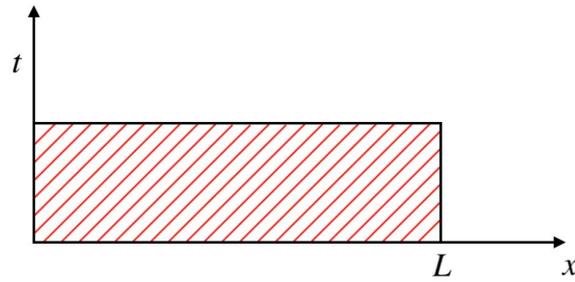


Рис. 2.4

где \hat{u} и \hat{u}_0 — «преобразования Фурье на конечном интервале» [3] для функций $u(x, t)$ и $u_0(x)$, определенные как

$$\hat{u}(-i\lambda, t) = \int_0^L e^{-i\lambda x} u(x, t) dx, \quad \hat{u}_0(-i\lambda) = \int_0^L e^{-i\lambda x} u_0(x) dx, \quad \lambda \in \mathbb{C}, \quad (2.14)$$

\tilde{g}_1, \tilde{g}_0 определены в (2.9), а \tilde{h}_1 и \tilde{h}_0 определяются как

$$\tilde{h}_0(\lambda, t) = \int_0^t e^{\lambda\tau} h_0(\tau) d\tau, \quad \tilde{h}_1(\lambda, t) = \int_0^t e^{\lambda\tau} h_1(\tau) d\tau, \quad t > 0, \quad \lambda \in \mathbb{C}, \quad (2.15)$$

где $h_0(t) = u(L, t)$, $h_1(t) = u_x(L, t)$, $t > 0$.

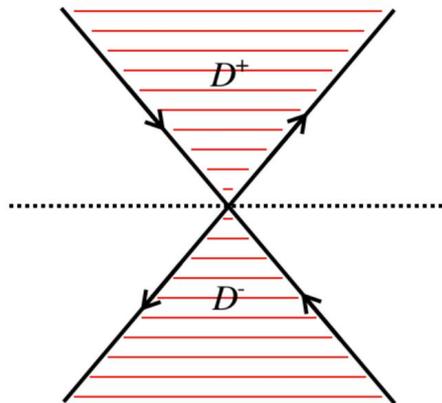


Рис. 2.5. Области D^+ и D^- для уравнения теплопроводности.

2. Из соотношения (2.13) для $\hat{u}(-i\lambda, t)$ с использованием формулы обратного преобразования Фурье (см. [9, гл. 6–8], [3, гл. 7]), а также переходом из интегрирования по действительной оси к интегралам по контуру ∂D^+ в интеграле, включающем \tilde{g}_1, \tilde{g}_0 , и по контуру ∂D^- в интеграле, включающем \tilde{h}_1, \tilde{h}_0 , находим

$$u(x, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda x - \lambda^2 t} \hat{u}_0(-i\lambda) d\lambda - \frac{1}{2\pi} \int_{\partial D^+} e^{i\lambda x - \lambda^2 t} [\tilde{g}_1 + i\lambda \tilde{g}_0] d\lambda - \frac{1}{2\pi} \int_{\partial D^-} e^{-i\lambda(L-x) - \lambda^2 t} [\tilde{h}_1 + i\lambda \tilde{h}_0] d\lambda, \quad (2.16)$$

где D^- — область, симметричная области D^+ относительно вещественной оси (см. рис. 2.5).

3. Преобразование $\lambda \rightarrow -\lambda$ вместе с глобальным соотношением (2.13) дает два уравнения. Поскольку существуют четыре неизвестных граничных значения (по два на каждом конце области), нам нужны два граничных условия. Известно, что согласно теории начально-краевых задач для дифференциальных уравнений с частными производными эти граничные условия можно задавать разными способами.

В качестве примера рассмотрим первую краевую задачу с граничными условиями:

$$u(0, t) = g_0(t), \quad u(L, t) = h_0(t), \quad t \geq 0.$$

Глобальное соотношение (2.13) перепишем в виде

$$e^{\lambda^2 t} \widehat{u}(-i\lambda, t) = G(\lambda, t) - \widetilde{g}_1 + e^{-i\lambda L} \widetilde{h}_1, \quad (2.17)$$

где G — известная функция, определенная как

$$G(\lambda, t) = \widehat{u}_0(-i\lambda) - i\lambda \widetilde{g}_0(\lambda^2, t) + i\lambda e^{-i\lambda L} \widetilde{h}_0(\lambda^2, t). \quad (2.18)$$

Заменяя в (2.17) λ на $-\lambda$, получим

$$e^{\lambda^2 t} \widehat{u}(i\lambda, t) = G(-\lambda, t) - \widetilde{g}_1 + e^{i\lambda L} \widetilde{h}_1. \quad (2.19)$$

Из (2.17) и (2.19) имеем

$$\widetilde{g}_1 = \frac{1}{e^{i\lambda L} - e^{-i\lambda L}} \left\{ e^{i\lambda L} G(\lambda, t) - e^{-i\lambda L} G(-\lambda, t) + e^{\lambda^2 t} \left[e^{-i\lambda L} \widehat{u}(i\lambda, t) - e^{i\lambda L} \widehat{u}(-i\lambda, t) \right] \right\}, \quad (2.20)$$

$$\widetilde{h}_1 = \frac{1}{e^{i\lambda L} - e^{-i\lambda L}} \left\{ G(\lambda, t) - G(-\lambda, t) + e^{\lambda^2 t} \left[\widehat{u}(i\lambda, t) - \widehat{u}(-i\lambda, t) \right] \right\}. \quad (2.21)$$

Далее, подставим полученные выражения для \widetilde{g}_1 и \widetilde{h}_1 в (2.16). При этом интегралы, содержащие $\widehat{u}(\pm i\lambda, t)$, в полученном выражении обращаются в нуль. Покажем, что это действительно так.

Пусть $\text{Im } \lambda \geq 0$. Тогда, согласно правилу Лопиталья, выражение

$$\frac{e^{-i\lambda L} \widehat{u}(i\lambda, t) - e^{i\lambda L} \widehat{u}(-i\lambda, t)}{e^{i\lambda L} - e^{-i\lambda L}}$$

эквивалентно выражению

$$-\widehat{u}(i\lambda, t) + e^{i\lambda L} \int_0^L e^{i\lambda(L-x)} u(x, t) dx$$

при $\lambda \rightarrow \infty$ по любому направлению в $\text{Im } \lambda \geq 0$, которое является ограниченным.

Аналогично, в случае $\text{Im } \lambda \leq 0$ выражение

$$\frac{\widehat{u}(-i\lambda, t) - \widehat{u}(i\lambda, t)}{e^{i\lambda L} - e^{-i\lambda L}}$$

эквивалентно ограниченному выражению

$$\int_0^L e^{-i\lambda(L-x)} u(x, t) dx - e^{-i\lambda L} \widehat{u}(i\lambda, t)$$

при $\lambda \rightarrow \infty$ по любому направлению в $\text{Im } \lambda \leq 0$.

Также заметим, что знаменатель этих выражений $e^{i\lambda L} - e^{-i\lambda L}$ имеет только действительные нули и, соответственно, не имеет нулей в D^\pm , кроме $\lambda = 0$. Но эта сингулярность является устранимой, так что мы можем считать, что эти выражения ограничены в D^+ и D^- , соответственно. Это и доказывает наше утверждение.

Таким образом, мы получаем решение задачи в виде

$$u(x, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda x - \lambda^2 t} \widehat{u}_0(\lambda) d\lambda - \frac{1}{2\pi} \int_{\partial D^+} e^{i\lambda x - \lambda^2 t} \left[i\lambda \widetilde{g}_0(\lambda^2, t) + \frac{e^{i\lambda L} G(\lambda, t) - e^{-i\lambda L} G(-\lambda, t)}{e^{i\lambda L} - e^{-i\lambda L}} \right] d\lambda -$$

$$-\frac{1}{2\pi} \int_{\partial D^-} e^{i\lambda x - \lambda^2 t} \left[i\lambda \tilde{h}_0(\lambda^2, t) + \frac{G(\lambda, t) - G(-\lambda, t)}{e^{i\lambda L} - e^{-i\lambda L}} \right] d\lambda. \quad (2.22)$$

2.3. Звездообразный граф с конечными и полубесконечными ребрами. В этом пункте мы приведем наш результат для звездообразного графа из работы [15]. Рассмотрим метрический граф, который состоит из n конечных ребер b_1, b_2, \dots, b_n и m полубесконечных ребер $b_{n+1}, b_{n+2}, \dots, b_{n+m}$, имеющих общую вершину O , называемую вершиной графа. Координаты на каждом ребре определяем следующими соотношениями: $b_j \sim (0, L_j)$ для $j = \overline{1, n}$ и $B_r \sim (0, +\infty)$ для $r = \overline{n+1, n+m}$. Здесь вершина графа соответствует 0 на каждом ребре графа (рис. 2.6).

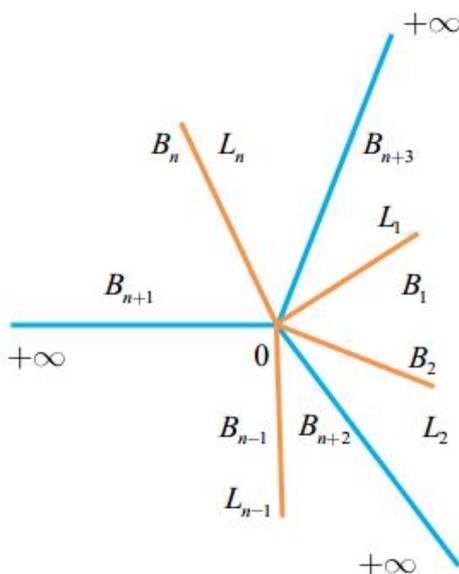


Рис. 2.6

В полубесконечных ребрах потребуем выполнения асимптотических условий

$$\lim_{x \rightarrow \infty} u^{(r)}(x, t) = 0, \quad 0 < t \leq T, \quad r = \overline{n+1, n+m}. \quad (2.23)$$

В этом случае глобальное соотношение для каждого решения будет таким же, как и в выше рассмотренных случаях. С учетом граничных условий, начального условия и условий на вершине из глобальных соотношений мы получим систему из $2n + m$ уравнений относительно $2n + m$ граничных значений. Основная матрица этой системы уравнений имеет нули действительной оси, кроме $\lambda = 0$, который приведет к устранимой особенности в интегральном выражении и может не учитываться. Далее, аналогичными действиями, как и выше, можно найти решение задачи. Подробности можно найти в работе [15].

Теорема 2.1 (см. [15]). *Решение исследуемой начально-краевой задачи имеет вид*

$$u^{(j)}(x, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ikx - kt} u_0^{(j)}(k) dk - \frac{1}{2\pi} \int_{\partial D_R^-} e^{ikx - ikL_j - kt} \frac{\hat{u}_0^{(j)}(k) - \hat{u}_0^{(j)}(-k) - 2ik\sigma^2 \tilde{g}_0(w, t)}{A_j} dk -$$

$$-\frac{1}{2\pi} \int_{\partial D_R^+} e^{ikx-wt} \frac{e^{ikL_j} \widehat{u}_0^{(j)}(k) - e^{-ikL_j} \widehat{u}_0^{(j)}(-k) + 2ik\sigma^2 h_0^{(j)}(w, t)}{A_j} dk, \quad j = \overline{1, n}, \quad (2.24)$$

$$u^{(r)}(x, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ikx-wt} \widehat{u}_0^{(r)}(k) dk - \frac{1}{2\pi} \int_{\partial D^+} e^{ikx-wt} \widehat{u}_0^{(r)}(-k) dk - \\ - \frac{1}{\pi} \int_{\partial D^+} e^{ikx-wt} ik\sigma^2 \widetilde{g}_0(w, t) dk, \quad (r = \overline{n+1, n+m}). \quad (2.25)$$

Здесь

$$ik\sigma^2 \widetilde{g}_0(w, t) = \frac{1}{\sum_{j=1}^n \delta_j^2 \frac{B_j}{A_j} + \sum_{r=n+1}^{n+m} \delta_r^2} \times \\ \times \left[\sum_{j=1}^n \frac{\delta_j^2}{A_j} \left[e^{ikL_j} \widehat{u}_0^{(j)}(k) - e^{-ikL_j} \widehat{u}_0^{(j)}(-k) + 2ik\sigma^2 h_0^{(j)}(w, t) \right] + \sum_{r=n+1}^{n+m} \delta_r^2 \widehat{u}_0^{(r)}(k) \right], \\ A_j = e^{ikL_j} - e^{-ikL_j}, \quad B_j = e^{ikL_j} + e^{-ikL_j} \quad (j = \overline{1, n}).$$

Аналогичный результат в случае нестационарного уравнения Шредингера получен в работе [14].

3. ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Теперь перейдем к основным результатам нашей работы. В этом разделе мы применим метод Фокаса для решения начально-краевой задачи (2.1)–(2.4) в случае более общих графов. Начнем с графа, который состоит из треугольной части и имеет по одному прикрепленному ребру на каждой вершине этого треугольника (см. рис. 3.1).

3.1. Граф в виде треугольника с прикрепленными исходящими ребрами на каждой вершине. В этом случае количество ребер $n = 6$, а количество вершин $m = 6$. Мы здесь изложим метод построения решения более подробно.

Начнем с выполнения стандартных шагов по применению метода Фокаса (см. [8–10, 16–18]). Перепишем уравнение в виде

$$\left(e^{-ikx+wt} u^{(j)}(x, t) \right)_t = \left(e^{-ikx+wt} \left(u_x^{(j)}(x, t) + ik u^{(j)}(x, t) \right) \right)_x, \quad (3.1)$$

где $w(k) = k^2$, $j = 1, 2, \dots, 6$.

Интегрируя по области $(0, L_j) \times (0, t)$, $j = 1, 2, \dots, 6$, и применяя формулу Грина, находим

$$\int_0^{L_j} e^{-ikx+wt} u^{(j)}(x, t) dx - \int_0^{L_j} e^{-ikx} u^{(j)}(x, 0) dx = \\ = \int_0^t e^{-ikL_j+ws} \left(u_x^{(j)}(L_j, s) + ik u^{(j)}(L_j, s) \right) ds - \int_0^t e^{ws} \left(u_x^{(j)}(0, s) + ik u^{(j)}(0, s) \right) ds, \quad (3.2)$$

где $k \in \mathbb{C}$, $j = 1, 2, \dots, 6$.

Для $k \in \mathbb{C}$ введем следующие обозначения:

$$\widehat{u}^{(j)}(k, t) = \int_0^{L_j} e^{-ikx} u^{(j)}(x, t) dx; \quad \widehat{u}_0^{(j)}(k) = \int_0^{L_j} e^{-ikx} u_0^{(j)}(x) dx; \\ \widehat{h}_1^{(j)}(w, t) = \int_0^t e^{ws} u_x^{(j)}(L_j, s) ds; \quad \widehat{h}_0^{(j)}(w, t) = \int_0^t e^{ws} u^{(j)}(L_j, s) ds;$$

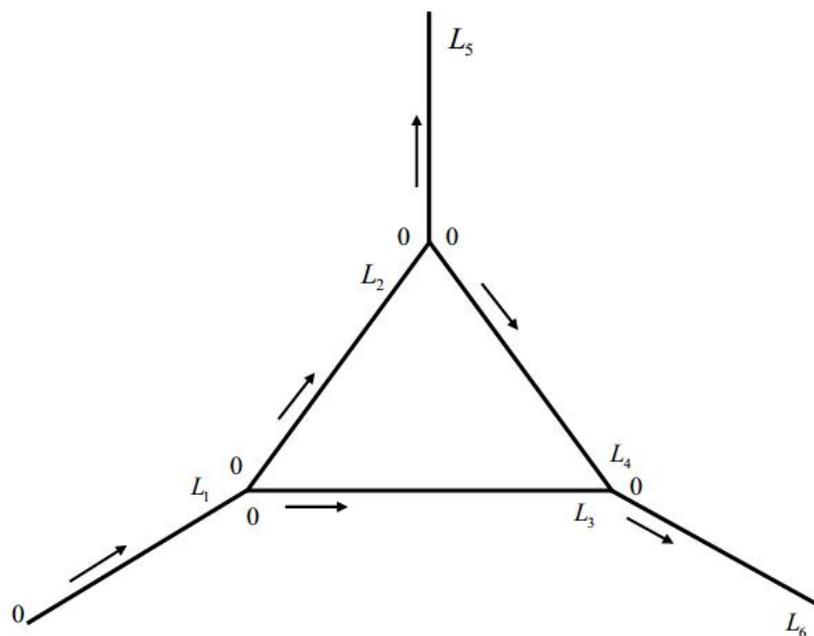


Рис. 3.1. Метрический граф Γ_1 .

$$\widehat{g}_1^{(j)}(w, t) = \int_0^t e^{ws} u_x^{(j)}(0, s) ds; \widehat{g}_0^{(j)}(w, t) = \int_0^t e^{ws} u^{(j)}(0, s) ds, \quad j = 1, 2, \dots, 6.$$

Согласно этим обозначениям мы можем записать равенство (3.2), т. е. глобальное соотношение, в форме

$$e^{wt} \widehat{u}^{(j)}(k, t) - \widehat{u}_0^{(j)}(k) = e^{-ikL_j} (\widehat{h}_1^{(j)}(w, t) + ik\widehat{h}_0^{(j)}(w, t)) - \widehat{g}_0^{(j)}(w, t) - ik\widehat{g}_0^{(j)}(w, t), \quad j = 1, 2, \dots, 6, \quad (3.3)$$

где $\{k \in \mathbb{C} : \text{Im } k < 0\}$.

Заменяя k на $-k$, из (3.3) имеем:

$$e^{wt} \widehat{u}^{(j)}(-k, t) - \widehat{u}_0^{(j)}(-k) = e^{ikL_j} \sigma^2 (\widehat{h}_1^{(j)}(w, t) - ik\widehat{h}_0^{(j)}(w, t)) - \sigma^2 (\widehat{g}_j(w, t) - ik\widehat{g}_0(w, t)), \quad j = \overline{1, 6}, \quad (3.4)$$

где $\{k \in \mathbb{C} : \text{Im } k > 0\}$.

Применим обратное преобразование Фурье в глобальном соотношении (3.3):

$$u^{(j)}(x, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ikx-wt} \widehat{u}_0^{(j)}(k) dk + \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ikx-ikL_j-wt} (\widehat{h}_1^{(j)}(w, t) + ik\widehat{h}_0^{(j)}(w, t)) dk - \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ikx-wt} (\widehat{g}_1^{(j)}(w, t) + ik\widehat{g}_0^{(j)}(w, t)) dk, \quad j = 1, 2, \dots, 6. \quad (3.5)$$

Пусть $\mathbb{C}^+ = \{k \in \mathbb{C} : \text{Im } k > 0\}$, $\mathbb{C}^- = \{k \in \mathbb{C} : \text{Im } k < 0\}$, $D = \{k \in \mathbb{C}^\pm : \text{Re } k^2 < 0\} = D^+ \cup D^-$. Область D показана на рис. 2.5.

Подынтегральная функция второго интеграла в (3.5) является целой функцией и убывает при $k \rightarrow \infty$ в $k \in \mathbb{C}^- \setminus D^-$. Подынтегральная функция в третьем интеграле является целой функцией и убывает при $k \rightarrow \infty$ в $k \in \mathbb{C}^+ \setminus D^+$. Используя голоморфность подынтегральных функций и лемму Жордана, можно заменить контур интегрирования второго интеграла на $-\int_{\partial D^-}$, а третьего

интеграла — на $-\int_{\partial D^+}$ (см. [9]):

$$u^{(j)}(x, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ikx-wt} \widehat{u}_0^{(j)}(k) dk - \frac{1}{2\pi} \int_{\partial D^-} e^{ikx-ikL_j-wt} \left(\widehat{h}_1^{(j)}(w, t) + ik\widehat{h}_0^{(j)}(w, t) \right) dk - \\ - \frac{1}{2\pi} \int_{\partial D^+} e^{ikx-wt} \left(\widehat{g}_1^{(j)}(w, t) + ik\widehat{g}_0^{(j)}(w, t) \right) dk, \quad j = 1, 2, \dots, 6. \quad (3.6)$$

Найдем неизвестные функции в этом интегральном представлении решения. Из условий непрерывности и сохранения потока (2.3) имеем

$$\begin{aligned} \widehat{h}_0^{(1)}(w, t) &= \widehat{g}_0^{(2)}(w, t) = \widehat{g}_0^{(3)}(w, t); & \widehat{h}_1^{(1)}(w, t) &= \widehat{g}_1^{(2)}(w, t) + \widehat{g}_1^{(3)}(w, t); \\ \widehat{h}_0^{(2)}(w, t) &= \widehat{g}_0^{(4)}(w, t) = \widehat{g}_0^{(5)}(w, t); & \widehat{h}_1^{(2)}(w, t) &= \widehat{g}_1^{(4)}(w, t) + \widehat{g}_1^{(5)}(w, t); \\ \widehat{h}_0^{(3)}(w, t) &= \widehat{h}_0^{(4)}(w, t) = \widehat{g}_0^{(6)}(w, t); & \widehat{h}_1^{(3)}(w, t) + \widehat{h}_1^{(4)}(w, t) &= \widehat{g}_1^{(6)}(w, t). \end{aligned}$$

Отсюда, с учетом глобальных соотношений, получаем следующую систему уравнений:

$$\begin{aligned} e^{wt} \left(A_2 A_3 \left(\widehat{u}^{(1)}(k, t) - \widehat{u}^{(1)}(-k, t) \right) - A_1 A_3 \left(e^{ikL_2} \widehat{u}^{(2)}(k, t) - e^{-ikL_2} \widehat{u}^{(2)}(-k, t) \right) \right) - \\ - e^{wt} A_1 A_2 \left(e^{ikL_3} \widehat{u}^{(3)}(k, t) - e^{-ikL_3} \widehat{u}^{(3)}(-k, t) \right) - A_1 A_3 \left(\widehat{u}_0^{(1)}(k) - \widehat{u}_0^{(1)}(-k) \right) + \\ + A_1 A_3 \left(e^{ikL_2} \widehat{u}_0^{(2)}(k) - e^{-ikL_2} \widehat{u}_0^{(2)}(-k) \right) + A_1 A_2 \left(e^{ikL_3} \widehat{u}_0^{(3)}(k) - e^{-ikL_3} \widehat{u}_0^{(3)}(-k) \right) = \\ = ikC_{123} \widehat{h}_0^{(1)}(w, t) - 2ikA_1 A_3 \widehat{h}_0^{(2)}(w, t) - 2ikA_1 A_2 \widehat{h}_0^{(3)}(w, t) - 2ikA_2 A_3 \widehat{g}_0^{(1)}(w, t); \quad (3.7) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} e^{wt} \left(A_4 A_5 \left(\widehat{u}^{(2)}(k, t) - \widehat{u}^{(2)}(-k, t) \right) - A_2 A_5 \left(e^{ikL_4} \widehat{u}^{(4)}(k, t) - e^{-ikL_4} \widehat{u}^{(4)}(-k, t) \right) \right) - \\ - e^{wt} A_2 A_4 \left(e^{ikL_5} \widehat{u}^{(5)}(k, t) - e^{-ikL_5} \widehat{u}^{(5)}(-k, t) \right) - A_4 A_5 \left(\widehat{u}_0^{(2)}(k) - \widehat{u}_0^{(2)}(-k) \right) + \\ + A_2 A_5 \left(e^{ikL_4} \widehat{u}_0^{(4)}(k) - e^{-ikL_4} \widehat{u}_0^{(4)}(-k) \right) + A_2 A_4 \left(e^{ikL_5} \widehat{u}_0^{(5)}(k) - e^{-ikL_5} \widehat{u}_0^{(5)}(-k) \right) = \\ = -2ikA_4 A_5 \widehat{h}_0^{(1)}(w, t) + ikC_{245} \widehat{h}_0^{(2)}(w, t) - 2ikA_2 A_5 \widehat{h}_0^{(3)}(w, t) - 2ikA_2 A_4 \widehat{h}_0^{(5)}(w, t); \quad (3.8) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} e^{wt} \left(A_4 A_6 \left(\widehat{u}^{(3)}(k, t) - \widehat{u}^{(3)}(-k, t) \right) + A_3 A_6 \left(\widehat{u}^{(4)}(k, t) - \widehat{u}^{(4)}(-k, t) \right) \right) - \\ - e^{wt} A_3 A_4 \left(e^{ikL_6} \widehat{u}^{(6)}(k, t) - e^{-ikL_6} \widehat{u}^{(6)}(-k, t) \right) - A_4 A_6 \left(\widehat{u}_0^{(3)}(k) - \widehat{u}_0^{(3)}(-k) \right) - \\ - A_3 A_6 \left(\widehat{u}_0^{(4)}(k) - \widehat{u}_0^{(4)}(-k) \right) + A_3 A_4 \left(e^{ikL_6} \widehat{u}_0^{(6)}(k) - e^{-ikL_6} \widehat{u}_0^{(6)}(-k) \right) = \\ = -2ikA_4 A_6 \widehat{h}_0^{(1)}(w, t) - 2ikA_3 A_6 \widehat{h}_0^{(2)}(w, t) - 2ikA_3 A_4 \widehat{h}_0^{(6)}(w, t) + ikC_{346} \widehat{h}_0^{(3)}(w, t). \quad (3.9) \end{aligned}$$

Здесь $\widehat{h}_0^{(j)}(w, t)$, $j = 1, 2, 3$ — неизвестные функции, $C_{ijk} = B_i A_j A_k + A_i B_j A_k + A_i A_j B_k$.

Перепишем систему уравнений (3.7)–(3.9) в виде

$$M \cdot X(w, t) = N_1(k) \cdot \widehat{U}_0(k) + N_2(k) \cdot \widehat{U}_0(-k) - e^{wt} \cdot (N_1(k) \cdot \widehat{U}(k, t) + N_2(k) \cdot \widehat{U}(-k, t)), \quad (3.10)$$

здесь

$$X(w, t) = \left(\widehat{h}_0^{(1)}(w, t), \widehat{h}_0^{(2)}(w, t), \widehat{h}_0^{(3)}(w, t) \right)^T.$$

Чтобы доказать разрешимость последней системы уравнений, нам понадобятся следующие две леммы.

Лемма 3.1. *Задача (2.1)–(2.4) не имеет более одного регулярного решения.*

Доказательство. Рассмотрим задачу (2.1)–(2.4) с однородными граничными условиями. Умножая уравнение (2.1) на $u^{(j)}(x, t)$ и интегрируя от 0 до L_j для каждого $j = \overline{1, n}$, складывая полученные

равенства и интегрируя по частям, имеем

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \sum_{j=1}^n \int_0^{L_j} (u^{(j)}(x, t))^2 dx + \sum_{j=1}^n \int_0^{L_j} (u_x^{(j)}(x, t))^2 dx = 0.$$

Далее, интегрируя это соотношение по t , получим

$$\sum_{j=1}^n \int_0^{L_j} (u^{(j)}(x, t))^2 dx + 2 \sum_{j=1}^n \int_0^t \int_0^{L_j} (u_x^{(j)}(x, s))^2 dx ds = \sum_{j=1}^n \int_0^{L_j} (u_0^{(j)}(x))^2 dx.$$

Отсюда следует, что если $u_0^{(j)}(x) \equiv 0$, то $u^{(j)}(x, t) = 0$ при $x \in b_j, t > 0$. Лемма доказана. \square

Лемма 3.2. *Определитель матрицы*

$$M(k) = \begin{pmatrix} C_{123} & -2A_1 A_3 & -2A_1 A_2 \\ -2A_4 A_5 & C_{245} & -2A_2 A_5 \\ -2A_4 A_6 & -2A_3 A_6 & C_{346} \end{pmatrix}$$

отличен от нуля при $\text{Im } k \neq 0$.

Доказательство. Пусть $\psi_j(x)$ является решением уравнения $-\frac{d^2}{dx^2} \psi(x) = \lambda \psi(x)$ на графе Γ с однородными граничными условиями (2.4) и условиями склеивания (Кирхгоффа), указанными выше. Положим $\lambda = k^2$. Известно, что в таком случае граф называется *квантовым графом* [7]. Спектральные задачи на квантовых графах исследованы в работах [5, 11, 12].

Рассмотрим задачу (2.1)–(2.4) с однородными граничными условиями и с начальным условием $u^{(j)}(x, 0) = \psi_j(x), x \in \bar{b}_j, j = \overline{1, n}$. Ясно, что эта задача имеет единственное решение в виде $u^{(j)}(x, t) = e^{-k^2 t} \psi_j(x)$. Подставляя это выражение в систему уравнений (3.7)–(3.9), получим систему уравнений $M(k)\phi = 0$, где $\phi = (\psi_1(L_1), \psi_2(L_2), \psi_3(L_3))$.

Предположим, что $\det M(k) = 0$ при некотором k , мнимая часть которого не равна нулю. Тогда система уравнений $M(k)\phi = 0$ имеет ненулевые решения. Далее, из глобальных соотношений (3.3) можно найти значения производных $\phi' = (\psi_1'(L_1), \psi_2'(L_2), \psi_3'(L_3))$.

С учетом того, что вторая производная инвариантна относительно замены x на $L_j - x$, на каждом отдельном ребре $b_j, j = \overline{1, n}$, получаем задачу Коши для уравнения $\psi_j''(x) = k^2 \psi(x)$ с найденными выше начальными данными. Так как хотя бы одно из начальных значений отлично от нуля, то хотя бы одна из этих задач Коши имеет ненулевое решение. Из глобального соотношения (3.3) и системы уравнений (3.7)–(3.9) следует, что эти найденные решения удовлетворяют граничным условиям (2.4) и условиям склеивания (Кирхгоффа) (2.3) на вершинах графа.

Таким образом, мы получили собственные функции оператора Шредингера $-\frac{d^2}{dx^2}$ на метрическом графе Γ , соответствующее собственному числу $\lambda = k^2$. Согласно нашему предположению, это собственное значение либо отрицательно, либо является комплексным числом с отличной от нуля мнимой частью. Но это противоречит положительной определенности и самосопряженности оператора Шредингера на метрическом графе Γ (см. [5, 11, 12]).

Лемма доказана. \square

Заметим, что при $k \rightarrow 0$ обе части системы уравнений имеют порядок k^3 , поэтому решение системы уравнений (3.7)–(3.9) при $k = 0$ имеет устранимую особенность.

Рассмотрим интегралы $\int_{\partial D^+} e^{ikx} \widehat{u}(\pm k, t) dk$ и $\int_{\partial D^-} e^{-ik(L_j - x)} \widehat{u}(\pm k, t) dk$. Понятно, что подынтегральные функции в этих интегралах являются голоморфными функциями в D^- и D^+ , соответственно (в силу регулярности решения задачи), и экспоненциально стремятся к нулю в данных областях при $\lambda \rightarrow \infty$. Значит, согласно теореме Коши и лемме Жордана, эти интегралы равны нулю. Поэтому мы можем не учитывать третье и четвертое слагаемые в правой части уравнения (3.10), зависящие от неизвестного решения, так как они при подстановке в интегральное представление решения обнуляются.

В заключение этого пункта сформулируем полученный результат в виде следующей теоремы.

Теорема 3.1. Решение начально-краевой задачи на Γ_1 имеет вид

$$u^{(j)}(x, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ikx-wt} \widehat{u}_0^{(j)}(k) dk - \frac{1}{2\pi} \int_{\partial D^-} e^{ikx-ikL_j-wt} \left(\tilde{h}_1^{(j)}(w, t) + ik\tilde{h}_0^{(j)}(w, t) \right) dk - \\ - \frac{1}{2\pi} \int_{\partial D^+} e^{ikx-wt} \left(\tilde{g}_1^{(j)}(w, t) + ik\tilde{g}_0^{(j)}(w, t) \right) dk, \quad j = 1, 2, \dots, 6, \quad (3.11)$$

где $G^{(j)}(k, t) = \widehat{u}_0^{(j)}(k) + (e^{-ikL_j} - 1)ik\widehat{h}_0^{(j)}(w, t)$, $j = 1, 2, \dots, 6$, $\widehat{g}_0^{(1)}(w, t)$, $\widehat{h}_0^{(5)}(w, t)$, $\widehat{h}_0^{(6)}(w, t)$ — известные функции, которые выражаются через граничные данные по формулам (2.4),

$$\tilde{h}_1^{(j)}(w, t) = \frac{1}{A_j} \left(G^{(j)}(k, t) - G^{(j)}(-k, t) \right), \quad (3.12)$$

$$\tilde{g}_1^{(j)}(w, t) = \frac{1}{A_j} \left(e^{ikL_j} G^{(j)}(k, t) - e^{-ikL_j} G^{(j)}(-k, t) \right), \quad (3.13)$$

$A_j = e^{ikL_j} - e^{-ikL_j}$, $B_j = e^{ikL_j} + e^{-ikL_j}$, $j = 1, 2, \dots, 6$, $\left(\tilde{h}_0^{(1)}(w, t), \tilde{h}_0^{(2)}(w, t), \tilde{h}_0^{(3)}(w, t) \right)^T = (M(k))^{-1} (N_1(k) \cdot \widehat{U}_0(k) + N_2(k) \cdot \widehat{U}_0(-k))$.

3.2. Граф в виде дерева. Рассмотрим начально-краевую задачу в случае графа-дерева Γ_2 . В этом случае $n = 7$ и $m = 8$.

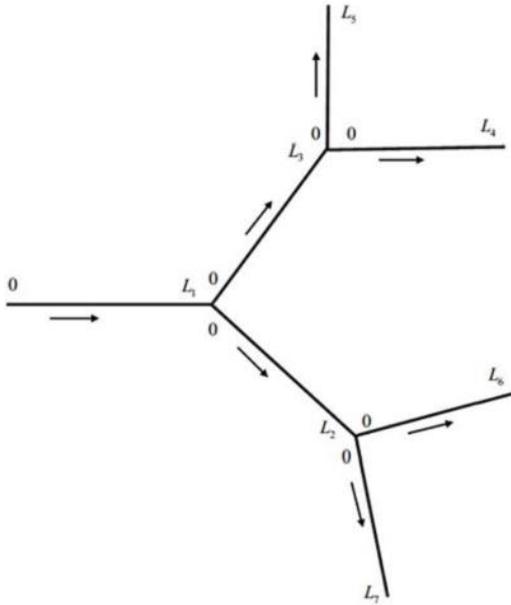


Рис. 3.2.1. Метрический граф Γ_2 .

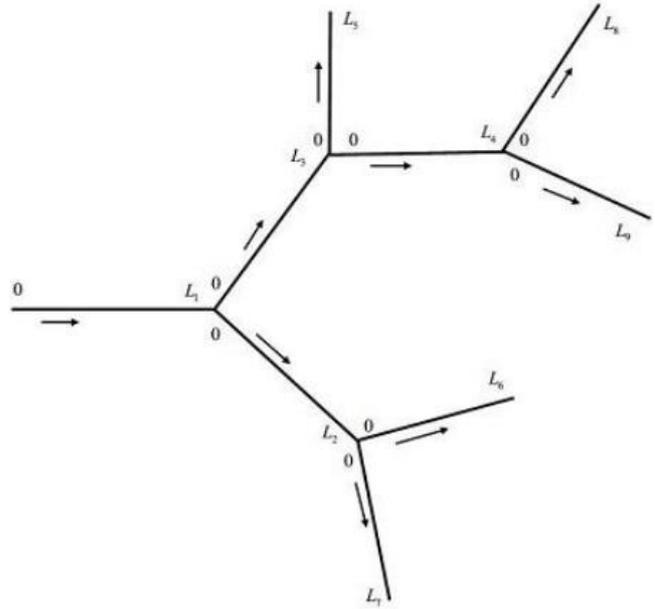


Рис. 3.2.2. Метрический граф Γ_3 .

Решение задачи в этом случае строится аналогично, поэтому мы опускаем подробности его построения. В этом случае основная система уравнений для определения значений решения в точках разветвления имеет вид:

$$e^{wt} \left(A_2 A_3 \left(\widehat{u}^{(1)}(k, t) - \widehat{u}^{(1)}(-k, t) \right) - A_1 A_3 \left(e^{ikL_2} \widehat{u}^{(2)}(k, t) - e^{-ikL_2} \widehat{u}^{(2)}(-k, t) \right) \right) - \\ - e^{wt} A_1 A_2 \left(e^{ikL_3} \widehat{u}^{(3)}(k, t) - e^{-ikL_3} \widehat{u}^{(3)}(-k, t) \right) - A_1 A_3 \left(\widehat{u}_0^{(1)}(k) - \widehat{u}_0^{(1)}(-k) \right) + \\ + A_1 A_3 \left(e^{ikL_2} \widehat{u}_0^{(2)}(k) - e^{-ikL_2} \widehat{u}_0^{(2)}(-k) \right) + A_1 A_2 \left(e^{ikL_3} \widehat{u}_0^{(3)}(k) - e^{-ikL_3} \widehat{u}_0^{(3)}(-k) \right) = \\ = ikC_{123} \widehat{h}_0^{(1)}(w, t) - 2ikA_1 A_3 \widehat{h}_0^{(2)}(w, t) - 2ikA_1 A_2 \widehat{h}_0^{(3)}(w, t) - 2ikA_2 A_3 \widehat{g}_0^{(1)}(w, t); \quad (3.14)$$

$$\begin{aligned}
& e^{wt} \left(A_4 A_5 \left(\widehat{u}^{(3)}(k, t) - \widehat{u}^{(3)}(-k, t) \right) - A_3 A_5 \left(e^{ikL_4} \widehat{u}^{(4)}(k, t) - e^{-ikL_4} \widehat{u}^{(4)}(-k, t) \right) \right) - \\
& - e^{wt} A_3 A_4 \left(e^{ikL_5} \widehat{u}^{(5)}(k, t) - e^{-ikL_5} \widehat{u}^{(5)}(-k, t) \right) - A_4 A_5 \left(\widehat{u}_0^{(3)}(k) - \widehat{u}_0^{(3)}(-k) \right) + \\
& + A_3 A_5 \left(e^{ikL_4} \widehat{u}_0^{(4)}(k) - e^{-ikL_4} \widehat{u}_0^{(4)}(-k) \right) + A_3 A_4 \left(e^{ikL_5} \widehat{u}_0^{(5)}(k) - e^{-ikL_5} \widehat{u}_0^{(5)}(-k) \right) = \\
& = ikC_{345} \widehat{h}_0^{(3)}(w, t) - 2ikA_4 A_5 \widehat{h}_0^{(1)}(w, t) - 2ikA_3 A_5 \widehat{h}_0^{(4)}(w, t) - 2ikA_3 A_4 \widehat{h}_0^{(5)}(w, t); \quad (3.15)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& e^{wt} \left(A_6 A_7 \left(\widehat{u}^{(2)}(k, t) - \widehat{u}^{(2)}(-k, t) \right) - A_2 A_7 \left(e^{ikL_6} \widehat{u}^{(6)}(k, t) - e^{-ikL_6} \widehat{u}^{(6)}(-k, t) \right) \right) - \\
& - e^{wt} A_2 A_6 \left(e^{ikL_7} \widehat{u}^{(7)}(k, t) - e^{-ikL_7} \widehat{u}^{(7)}(-k, t) \right) - A_6 A_7 \left(\widehat{u}_0^{(2)}(k) - \widehat{u}_0^{(2)}(-k) \right) + \\
& + A_2 A_7 \left(e^{ikL_6} \widehat{u}_0^{(6)}(k) - e^{-ikL_6} \widehat{u}_0^{(6)}(-k) \right) + A_2 A_6 \left(e^{ikL_7} \widehat{u}_0^{(7)}(k) - e^{-ikL_7} \widehat{u}_0^{(7)}(-k) \right) = \\
& = ikC_{267} \widehat{h}_0^{(2)}(w, t) - 2ikA_6 A_7 \widehat{h}_0^{(1)}(w, t) - 2ikA_2 A_7 \widehat{h}_0^{(6)}(w, t) - 2ikA_2 A_6 \widehat{h}_0^{(7)}(w, t). \quad (3.16)
\end{aligned}$$

Существование решений этой системы уравнений доказывается аналогично вышеизложенному. После нахождения этих неизвестных задача сводится к решению начально-краевой задачи на конечном интервале, которая была приведена выше.

Для наглядности приведем еще один случай графа-дерева Γ_3 (см. рис. 3.2.2), где количество ребер $n = 9$ и количество вершин $m = 10$.

В этом случае количество внутренних вершин равно четырем, так как с добавлением дополнительных ребер одна из граничных вершин графа Γ_2 становится внутренней вершиной. Соответственно, в системе уравнений (3.14)–(3.16) для определения неизвестных значений решения на внутренних вершинах (в точках разветвления) графа добавляется еще одно уравнение:

$$\begin{aligned}
& e^{wt} \left(A_8 A_9 \left(\widehat{u}^{(4)}(k, t) - \widehat{u}^{(4)}(-k, t) \right) - A_4 A_9 \left(e^{ikL_8} \widehat{u}^{(8)}(k, t) - e^{-ikL_8} \widehat{u}^{(8)}(-k, t) \right) \right) - \\
& - e^{wt} A_4 A_8 \left(e^{ikL_9} \widehat{u}^{(9)}(k, t) - e^{-ikL_9} \widehat{u}^{(9)}(-k, t) \right) - A_8 A_9 \left(\widehat{u}_0^{(4)}(k) - \widehat{u}_0^{(4)}(-k) \right) + \\
& + A_4 A_9 \left(e^{ikL_8} \widehat{u}_0^{(8)}(k) - e^{-ikL_8} \widehat{u}_0^{(8)}(-k) \right) + A_4 A_8 \left(e^{ikL_9} \widehat{u}_0^{(9)}(k) - e^{-ikL_9} \widehat{u}_0^{(9)}(-k) \right) = \\
& = ikC_{489} \widehat{h}_0^{(4)}(w, t) - 2ikA_8 A_9 \widehat{h}_0^{(3)}(w, t) - 2ikA_4 A_9 \widehat{h}_0^{(8)}(w, t) - 2ikA_4 A_8 \widehat{h}_0^{(9)}(w, t). \quad (3.17)
\end{aligned}$$

4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ И ВЫВОДЫ

В этой работе мы привели метод построения решений начально-краевых задач на некоторых метрических графах, таких как звездообразный граф; граф, состоящий из треугольника с дополнительными прикрепленными ребрами на каждой вершине; граф в виде дерева. Мы выбрали эти графы, чтобы показать, что в случае графа с циклами и графа без циклов метод работает почти одинаково. В общем, этот метод применим для решения начально-краевых задач в произвольных метрических графах.

При решении задачи используются так называемое глобальное соотношение и соотношение, получаемое из него заменой комплексного параметра на противоположный. Эти два соотношения эквивалентны отображению условий Дирихле на условия Неймана на вершинах. С помощью этих соотношений рассматриваемая задача сводится к системе алгебраических уравнений относительно неизвестных значений решения в точках разветвления графа.

Решение мы задаем в виде интегралов по контуру от известных функций. При этом контуры выбраны так, что подынтегральные функции экспоненциально убывают на бесконечности по этому контуру. Это свойство обеспечивает хорошую сходимость интегралов, что очень важно, например, для численного вычисления решения (см. [13]).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Волкова А. С. Обобщенные решения краевой задачи для уравнения теплопроводности на графе// Вестн. СПб. ун-та. Сер. 10. Прикл. матем. Информ. Проц. упр. — 2013. — 3. — С. 39–47.
2. Мерков А. Б. Уравнение теплопроводности на графах// Усп. мат. наук. — 1987. — 42, № 5. — С. 213–214.

3. *Ablowitz M. J., Fokas A. S.* Complex variables introduction and applications second edition. — Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2003.
4. *Albert R., Barabasi A. L.* Statistical mechanics of complex networks// *Rev. Mod. Phys. A.* — 2002. — 74, № 4. — С. 62–76.
5. *Berkolaiko G.* An elementary introduction to quantum graphs// В сб.: «Geometric and Computational Spectral Theory». — Providence: Am. Math. Soc., 2017. — С. 41–72.
6. *Cohen R., Havlin S.* Complex networks: Structure, robustness and function. — Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2010.
7. *Exner P., Post O.* A General approximation of quantum graph vertex couplings by scaled Schrödinger operators on thin branched manifolds// *Commun. Math. Phys.* — 2013. — 1322. — С. 207–227.
8. *Fokas A. S.* A unified transform method for solving linear and certain nonlinear PDEs// *Proc. R. Soc. Lond. Ser. A.* — 1997. — 453, № 1962. — С. 1411–1443.
9. *Fokas A. S.* A unified approach to boundary value problems. — Philadelphia: SIAM, 2008.
10. *Fokas A. S.* Fokas method (unified transform)// Preprint. — Jan. 25, 2017. — <http://www.damtp.cam.ac.uk/user/examples/3N15.pdf>.
11. *Gnutzmann S., Keating J. P., Piotet F.* Eigenfunction statistics on quantum graphs// *Ann. Phys.* — 2010. — 325, № 12. — С. 2595–2640.
12. *Gnutzmann S., Smilansky U.* Quantum graphs: Applications to quantum chaos and universal spectral statistics// *Adv. Phys.* — 2006. — 55. — С. 527–625.
13. *Kesici E., Pelloni B., Pryer T., Smith D. A.* A numerical implementation of the unified Fokas transform for evolution problems on a finite interval// *Eur. J. Appl. Math.* — 2017. — 29, № 3. — С. 543–567.
14. *Khudayberganov G., Sobirov Z. A., Eshimbetov M. R.* Unified transform method for the Schrödinger equation on a simple metric graph// *Журн. СФУ. Сер. Мат. Физ.* — 2019. — 12, № 4. — С. 412–420.
15. *Khudayberganov G., Sobirov Z. A., Eshimbetov M. R.* The Fokas' unified transformation method for heat equation on general star graph// *Uzb. Math. J.* — 2019. — № 1. — С. 73–81.
16. *Sheils N. E.* Interface problems using the Fokas method// Дисс. докт. наук. — Washington: University of Washington, 2015.
17. *Sheils N. E.* Multilayer diffusion in a composite medium with imperfect contact// *Appl. Math. Modelling.* — 2017. — 46. — С. 450–464.
18. *Sheils N. E., Smith A. D.* Heat equation on a network using the Fokas method// *J. Phys. A. Math. Theor.* — 2015. — 48. — 335001.
19. *Uecker H., Grieser D., Sobirov Z. A., Babajanov D., Matrasulov D.* Soliton transport in tubular networks: Transmission at vertices in the shrinking limit// *Phys. Rev. E.* — 2015. — 91. — 023209.

З. А. Собиров

Национальный университет Узбекистана им. М. Улугбека, Ташкент, Узбекистан

E-mail: z.sobirov@nuu.uz

М. Р. Эшимбетов

Национальный университет Узбекистана им. М. Улугбека, Ташкент, Узбекистан

E-mail: mr.eshimbetov92@gmail.com

DOI: 10.22363/2413-3639-2021-67-4-766-782

UDC 517.953

Fokas Method for the Heat Equation on Metric Graphs

© 2021 **Z. A. Sobirov, M. R. Eshimbetov**

Abstract. The paper presents a method for constructing solutions to initial-boundary value problems for the heat equation on simple metric graphs such as a star-shaped graph, a tree, and a triangle with three converging edges. The solutions to the problems are constructed by the so-called Fokas method, which is a generalization of the Fourier transform method. In this case, the problem is reduced to a system of algebraic equations for the Fourier transform of the unknown values of the solution at the vertices of the graph.

REFERENCES

1. A. S. Volkova, “Obobshchennye resheniya kraevoy zadachi dlya uravneniya teploprovodnosti na grafe” [Generalized solutions of a boundary-value problem for the heat equation on a graph], *Vestn. SPb. un-ta. Ser. 10. Prikl. matem. Inform. Prots. upr.* [Bull. Saint Petersburg Univ. Ser. 10. Appl. Math. Inform. Control Proc.], 2013, **3**, 39–47 (in Russian).
2. A. B. Merkov, “Uravnenie teploprovodnosti na grafakh” [Heat equation on graphs], *Usp. mat. nauk* [Progr. Math. Sci.], 1987, **42**, No. 5, 213–214 (in Russian).
3. M. J. Ablowitz and A. S. Fokas, *Complex variables introduction and applications second edition*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2003.
4. R. Albert and A. L. Barabasi, “Statistical mechanics of complex networks,” *Rev. Mod. Phys. A*, 2002, **74**, No. 4, 62–76.
5. G. Berkolaiko, “An elementary introduction to quantum graphs,” In: *Geometric and Computational Spectral Theory*, Am. Math. Soc., Providence, 2017, pp. 41–72.
6. R. Cohen and S. Havlin, *Complex networks: Structure, robustness and function*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2010.
7. P. Exner and O. Post, “A General approximation of quantum graph vertex couplings by scaled Schrödinger operators on thin branched manifolds,” *Commun. Math. Phys.*, 2013, **1322**, 207–227.
8. A. S. Fokas, “A unified transform method for solving linear and certain nonlinear PDEs,” *Proc. R. Soc. Lond. Ser. A*, 1997, **453**, No. 1962, 1411–1443.
9. A. S. Fokas, *A unified approach to boundary value problems*, SIAM, Philadelphia, 2008.
10. A. S. Fokas, “Fokas method (unified transform),” *Preprint*, Jan. 25, 2017, <http://www.damtp.cam.ac.uk/user/examples/3N15.pdf>.
11. S. Gnutzmann, J. P. Keating, and F. Pietet, “Eigenfunction statistics on quantum graphs,” *Ann. Phys.*, 2010, **325**, No. 12, 2595–2640.
12. S. Gnutzmann and U. Smilansky, “Quantum graphs: Applications to quantum chaos and universal spectral statistics,” *Adv. Phys.*, 2006, **55**, 527–625.
13. E. Kesici, B. Pelloni, T. Pryer, and D. A. Smith, “A numerical implementation of the unified Fokas transform for evolution problems on a finite interval,” *Eur. J. Appl. Math.*, 2017, **29**, No. 3, 543–567.
14. G. Khudayberganov, Z. A. Sobirov, and M. R. Eshimbetov, “Unified transform method for the Schrödinger equation on a simple metric graph,” *Zhurn. SFU. Ser. Math. Phys.*, 2019, **12**, No. 4, 412–420.
15. G. Khudayberganov, Z. A. Sobirov, and M. R. Eshimbetov, “The Fokas’ unified transformation method for heat equation on general star graph,” *Uzb. Math. J.*, 2019, No. 1, 73–81.
16. N. E. Sheils, “Interface problems using the Fokas method,” *Doctoral Thesis*, University of Washington, Washington, 2015.



17. N. E. Sheils, “Multilayer diffusion in a composite medium with imperfect contact,” *Appl. Math. Modelling*, 2017, **46**, 450–464.
18. N. Sheils E. and A. D. Smith, “Heat equation on a network using the Fokas method,” *J. Phys. A. Math. Theor.*, 2015, **48**, 335001.
19. H. Uecker, D. Grieser, Z. A. Sobirov, D. Babajanov, and D. Matrasulov, “Soliton transport in tubular networks: Transmission at vertices in the shrinking limit,” *Phys. Rev. E*, 2015, **91**, 023209.

Z. A. Sobirov

National University of Uzbekistan named after M. Ulugbek, Tashkent, Uzbekistan

E-mail: z.sobirov@nuu.uz

M. R. Eshimbetov

National University of Uzbekistan named after M. Ulugbek, Tashkent, Uzbekistan

E-mail: mr.eshimbetov92@gmail.com