Современная математика. Фундаментальные направления. Том 67, № 4 (2021). С. 755–765
Contemporary Mathematics. Fundamental Directions. ISSN 2413-3639 (Print)

DOI: 10.22363/2413-3639-2021-67-4-755-765 УДК 517.98

СВОЙСТВА ИНЪЕКТИВНОСТИ И ЯДЕРНОСТИ ДЛЯ ВЕЩЕСТВЕННЫХ C*-АЛГЕБР

© 2021 г. **А. А. РАХИМОВ, М. Э. НУРИЛЛАЕВ, Х. Х. БОЛТАЕВ**

Аннотация. В работе изучаются инъективные и ядерные вещественные W*- и C*-алгебры. Рассмотрена связь этих понятий с аналогичными понятиями обертывающих W*- и C*-алгебр. Показана эквивалентность понятий инъективности и ядерности для вещественных C*-алгебр. Как следствие, полностью описаны ядерные вещественные факторы типов II_1, II_∞, III_1, III_0 и III_λ $(0 < \lambda < 1)$.

ОГЛАВЛЕНИЕ

1. Введение

Решения проблем, возникающих в результате научно-прикладных исследований на мировом уровне, очень часто сводятся к изучению динамических систем математической физики и квантовой механики, в частности, теории операторных алгебр. Наблюдаемой данной физической системе в квантовой механике соответствует линейный самосопряженный оператор, действующий в гильбертовом пространстве, а всякому состоянию рассматриваемой системы соответствует матрица плотности. Так как операторные алгебры, в частности, комплексные и вещественные C*- и W*-алгебры, являются математическими моделями квантовой механики и динамических систем, где каждый полученный результат имеет свое применение в квантовой механике, то операторные алгебры очень важны как в теоретическом, так и в практическом смысле и являются одним из актуальных направлений современной математики. В настоящее время в мире процессы в технике и природе моделируются с помощью динамических систем, многие из которых имеют важные практические свойства. Среди них особое значение имеет изучение свойств инъективности, гиперфинитности и ядерности операторных алгебр, которые являются актуальной проблемой для динамических систем. Результаты исследования имеют теоретическое доказательство того, что эти свойства являются эквивалентными для динамических систем, в частности, операторных алгебр. К настоящему времени свойства инъективности и гиперфинитности этих алгебр хорошо изучены. Исследование свойств ядерности динамических систем, классифицирование ядерных комплексных и вещественных C*- и W*-алгебр и нахождение отношения между свойствами ядерности, инъективности и гиперфинитности являются одними из целевых исследований динамических систем в квантовой механике.

Теория алгебр операторов, действующих в гильбертовом пространстве, возникла в 30-е годы прошлого века с появлением серии статей фон Неймана и Мюррея [2, 3, 11]. Ими подробно изучена структура семейства алгебр, которые теперь называют *алгебрами фон Неймана*, или *W*-алгебрами*. Это слабо замкнутые комплексные *-алгебры операторов в гильбертовом пространстве. В настоящее время теория алгебр фон Неймана глубоко развита и имеет многочисленные приложения, которым посвящено много работ (Диксмье [7], Сакаи [13] и Такесаки [16]). В рамках этой теории важное место занимают алгебры фон Неймана с тривиальным центром, которые называют *факторами*. Построенная фон Нейманом теория разложения позволяет во многих случаях сводить задачи о произвольных алгебрах фон Неймана к соответствующим задачам для факторов. Первоначальная классификация факторов, согласно которой факторы распределяются по типам I_n ($n = 1, 2, \dots \infty$), II_1, II_∞ и III, появилась в основополагающих работах Мюррея и фон Неймана. Факторы типа I_n были полностью классифицированы с самого начала: это алгебра всех операторов в гильбертовом пространстве размерности n. Первым замечательным результатом в классификации является теорема фон Неймана об изоморфности всех гиперфинитных (т. е. конечномерно аппроксимативных) факторов типа II_1. В конце 70-х годов прошлого века доказана единственность гиперфинитного фактора типа II_∞ (см. [6]). Затем А. Конн показал [6], что любые два инъективных фактора типа III_λ $(0 \leqslant \lambda < 1)$ изоморфны. Единственность инъективного фактора типа III_1 была получена чуть позже, в работах Хаагерупа.

В то же время, для W*-алгебр, наряду с понятиями инъективности и гиперфинитности, изучались такие близкие понятия, как аменабельность и полудискретность. Каждое из приведенных понятий выделяет свой класс алгебр, и несмотря на то, что W*-алгебры с этими свойствами возникли в связи с различными вопросами функционального анализа и математической физики, с самого начала была выдвинута гипотеза, что все эти понятия совпадают. К настоящему времени благодаря усилиям Конна, Вассермана и Хаагерупа полностью доказана эквивалентность всех этих понятий.

В середине 1960-х годов в работах Топпинга и Штермера впервые были рассмотрены йордановы (неассоциативные вещественные) аналоги W*-алгебр — *JW-алгебры*, т. е. вещественные линейные пространства самосопряженных операторов из алгебры $B(H)$, которые содержат $\mathbb{1}$, замкнуты относительно йорданова умножения $a \circ b = (ab + ba)/2$ и замкнуты в слабой операторной топологии. Структура этих алгебр оказалась близка к структуре W*-алгебр, и в изучении JW-алгебр оказалось возможным применить идеи, сходные с идеями теории W*-алгебр. В работе Топпинга была получена начальная классификация JW-алгебр по типам I, II_1, II_∞, III, а в работах Штермера и Аюпова была решена проблема о связи типа JW-алгебры с типом ее обертывающей W*-алгебры. Штермер полностью изучил JW-алгебры типа I и доказал, что всякая обратимая JW-алгебра (в частности, типа II или III) изоморфна прямой сумме $A_c \oplus A_r$, где JW-алгебра $A_c = U(A_c)_h$ является самосопряженной частью W*-алгебры $U(A_c)$, а JW-алгебра $A_r = U(A_r)_h$ является самосопряженной частью вещественной W*-алгебры $U(A_r)$ (так называемая чисто вещественная JW-алгебра).

Напомним, что *вещественной W*-алгеброй* называется вещественная *-алгебра R в $B(H)$, содержащая единицу $\mathbb{1}$, которая слабо замкнута и удовлетворяет условиям: $R \cap iR = \{0\}$.

Таким образом, задача изучения JW-алгебр типа II и III в существенном редуцируется к изучению вещественных W*-алгебр типа II и III. Поэтому параллельно с теорией JW-алгебр началось исследование теории вещественных W*-алгебр. В последние годы теория вещественных W*-алгебр получила значительное развитие. Основные достижения в классификации вещественных факторов принадлежат, в первую очередь, Ш. Аюпову и Э. Штермеру. Ими полностью описаны класс JW-факторов и класс вещественных факторов, у которых обертывающая W*-алгебра (т. е. наименьшая (комплексная) W*-алгебра) является инъективной [1, 15]. Для вещественных W*-алгебр доказана единственность (с точностью до изоморфизма) вещественных инъективных факторов типа II_1, II_∞ и III_1, а для типа III_λ $(0 < \lambda < 1)$ — что существуют в точности два вещественных инъективных факторов типа III_λ. Что касается вещественных инъективных факторов типа III_0, то можно построить счетное число попарно неизоморфных вещественных инъективных факторов типа III_0, у которых обертывающие W*-факторы изоморфны.

Изучение пространств обычных или обобщенных функций всюду определенными непрерывными дифференциальными операторами было начато в 50-х годах прошлого века. Эти пространства обладали резко выраженными особенностями, наиболее существенной из которых оказалась справедливость «теоремы о ядре». Сформулировав эту теорему в абстрактном виде, на языке введенных им «топологических тензорных произведений», А. Гротендик [8,9], выделил класс локально выпуклых пространств, названных им ядерными. Теория ядерных пространств была развита Гротендиком в рамках его общей теории тензорных произведений локально выпуклых пространств. Ядерные C*-алгебры были введены, по аналогии с понятием ядерного локально выпуклого пространства, в теории тензорных произведений C*-алгебр. Их теория быстро развилась и в настоящее время превратилась из предмета в инструмент исследования. Как известно, приложения теории ядерных C*-алгебр в общей теории C*-алгебр весьма многообразны. Ядерные C*-алгебры по отношению к тензорным произведениям ведут себя подобно ядерным пространствам. Ядерные (комплексные) C*-алгебры достаточно хорошо изучены. Благодаря работам А. Конна, Э. Штермера, У. Хаагерупа, С. Вассермана, Э. Эфросса, С. Попа, С. Ланса и М. Чоя для факторов была доказана эквивалентность таких понятий, как ядерность, инъективность и гиперфинитность. Исключением является $B(H)$ — алгебра всех ограниченных линейных операторов на гильбертовом пространстве H, так как оно не является ядерным и гиперфинитным. Для вещественных факторов понятия инъективности и гиперфинитности достаточно хорошо изучены в работах Ш. Усманова, А. Рахимова и Б. Байкабилова. Однако в вещественном случае понятие ядерности алгебры недостаточно изучено.

Настоящая статья посвящена изучению ядерных и инъективных вещественных C*-алгебр. Как известно, имеются определения инъективности в смысле фон Неймана и в смысле Хакеда—Томиямы. В работе [12] авторы, изучая инъективные вещественные C*-алгебры, доказали эквивалентность этих определений. В частности, доказано, что вещественная C*-алгебра R инъективна тогда и только тогда, когда ее обертывающая (комплексная) C*-алгебра $R+iR$ инъективна. В настоящей статье при изучении отношения между понятиями ядерности и инъективности для вещественных C*- или W*-алгебр используется определение инъективности в смысле Хакеда—Томиямы.

2. Предварительные сведения

Пусть A — банахова *-алгебра над полем $\mathbb{C}$. Алгебра A называется C*-*алгеброй*, если $\|aa^*\| = \|a\|^2$ для любого $a \in A$. C*-алгебра M называется W*-*алгеброй*, если существует банахово пространство M_* такое, что $(M_*)^* = M$. При этом пространство M_* называется *предсопряженным пространством* для M.

Пусть $B(H)$ — алгебра всех ограниченных линейных операторов, действующих в комплексном гильбертовом пространстве H, и пусть $(x_\gamma) \subset B(H)$ — сеть. На $B(H)$ рассмотрим следующие локально-выпуклые топологии:

1. топология, определяемая с помощью сходимости:
$$x_\gamma \to \theta \Leftrightarrow \ (x_\gamma \xi, \eta) \to 0 \ (\forall \xi, \eta \in H)$$
— называется *слабой* (*операторной*) *топологией* и обозначается как ω-*топология*;
2. топология, определяемая с помощью сходимости:
$$x_\gamma \to \theta \Leftrightarrow \ \|x_\gamma\| \to 0$$
— называется *равномерной* (*операторной*) *топологией* и обозначается как u-*топология*.

Пусть $M \subset B(H)$ — *-подалгебра. Подмножество $M' = \{x \in B(H) : \ xy = yx, \forall y \in M\}$ называется *коммутантом* алгебры M. Легко видеть, что $M \subset M'' = M^{iv} = \ldots$ и $M' = M''' = M^v = \ldots$, где $M'' = (M')'$. При этом, если $M = M''$, то M называется *алгеброй фон Неймана*. По теореме о бикоммутанте известно, что для *-подалгебры $M \subset B(H)$ следующие условия эквивалентны:

1. $M = M''$, т. е. M — алгебра фон Неймана;
2. M — W*-алгебра;
3. M слабо замкнута и $\mathbb{1} \in M$.

Поэтому W*-алгебры получили также название алгебр фон Неймана. Пусть M — W*-алгебра. Совокупность всех элементов M, коммутирующих со всеми элементами из M, называется *центром* алгебры M и обозначается как $Z(M)$. Легко видеть, что $Z(M) = M \cap M'$. Элементы $Z(M)$ называются *центральными*. Алгебру, у которой центральными элементами являются только элементы вида $\lambda \mathbb{1}$ ($\lambda \in \mathbb{C}$), называют *фактором*.

Вещественная банахова *-алгебра R называется *вещественной C*-алгеброй*, если норму на R можно продолжить на комплексификацию $A = R + iR$ алгебры R так, чтобы алгебра A являлась (комплексной) C*-алгеброй (см. [10]). Известен результат [10, теорема 5.2.10] о том, что вещественная банахова *-алгебра R является вещественной C*-алгеброй тогда и только тогда, когда R — эрмитова алгебра и $\|aa^*\| = \|a\|^2$ для любого $a \in R$. Эрмитовость R означает, что $\sigma(a) \subset \mathbb{R}$ для любого $a \in R$, где $\sigma(a)$ — спектр элемента a. С другой стороны, эрмитовость алгебры R эквивалентна обратимости элемента $\mathbb{1} + aa^*$ для любого $a \in R$.

Пусть H_r — вещественное гильбертово пространство такое, что $H_r + iH_r = H$, и пусть $R \subset B(H_r) \subset B(H_r) + iB(H_r) = B(H)$ — вещественная *-подалгебра (см. [10]). Коммутант *-алгебры R определяется аналогично комплексному случаю: $R' = \{a \in B(H_r) : \ ab = ba, \forall b \in R\}$. Непосредственно проверяется, что $(R + iR)' = R' + iR'$. Аналогично комплексному случаю, если $R = R''$, то R называется *вещественной алгеброй фон Неймана*.

Теперь, пусть R — вещественная C*-алгебра. Тогда, как уже сказано выше, $R+iR$ является (комплексной) C*-алгеброй. Легко видеть, что эта алгебра есть наименьшая C*-алгебра, содержащая R. Вещественная C*-алгебра R называется *вещественной* W*-*алгеброй*, если C*-алгебра $R + iR$ является (комплексной) W*-алгеброй. Для вещественных *-алгебр также имеется аналог теоремы о бикоммутанте: для вещественной *-подалгебры $R \subset B(H_r)$ следующие условия эквивалентны:

1. $R = R''$, т. е. R — вещественная алгебра фон Неймана;
2. R — вещественная W*-алгебра;
3. R слабо замкнута и $\mathbb{1} \in R$.

Для удобства в дальнейшем алгебру, удовлетворяющую одному из эквивалентных условий, будем называть *вещественной W*-алгеброй*.

3. Конечномерные и абелевы вещественные ядерные C*-алгебры

Как уже сказано, ядерные пространства были введены А. Гротендиком [8, 9] в 1950-е годы как пространства, которые содержат так называемые «пространства дифференциального типа». Теория ядерных пространств была развита Гротендиком в рамках его общей теории тензорных произведений локально выпуклых пространств. Ядерные C*-алгебры были введены, по аналогии с понятием ядерного локально выпуклого пространства, в теории тензорных произведений C*-алгебр.

Норма γ на инволютивной алгебре $A \otimes B$ называется *C*-нормой*, если $\gamma(x^*x) = \gamma(x)^2$ для всех $x \in A \otimes B$. Если γ — C*-норма, то пополнение алгебры $A \otimes B$ по норме γ является C*-алгеброй, которую мы обозначим как $A\overline{\otimes}_\gamma B$, или просто $A\overline{\otimes}B$. Любая C*-норма на $A \otimes B$ является так называемой *кросс-нормой*, т. е. удовлетворяет условию $\gamma(a \otimes b) = \|a\| \cdot \|b\|$, для всех $a \in A$, $b \in B$.

В тензорном произведение $A \otimes B$ всегда существуют, по крайне мере, следующие две C*-нормы, называемые *минимальной* и *максимальной*, соответственно:

$$\|u\|_{min} = \sup\{\left|(f \otimes g)(u)\right| : \ f \in A^*, g \in B^*, \ \|f\| \leqslant 1, \|g\| \leqslant 1\},$$

$$\|u\|_{max} = \inf \sum_j \|a_j\| \cdot \|b_j\|,$$

где $u = \sum\limits_j a_j \otimes b_j \in A \otimes B$ и $(f \otimes g)(u) = \sum\limits_j f(a_j) \cdot g(b_j)$. Эти нормы иногда называются также *инъективной* и *проективной*, соответственно. Нетрудно показать, что для любой C*-нормы $\|\cdot\|_\gamma$ имеет место

$$\|\cdot\|_{min} \leqslant \|\cdot\|_\gamma \leqslant \|\cdot\|_{max}.$$

В частности, отображение

$$\gamma_0(u) := \|u\|_{\gamma_0} = \sup \frac{\bigotimes\limits_{i=1}^{2} \varphi_i(v^*u^*uv)}{\bigotimes\limits_{i=1}^{2} \varphi_i(v^*v)}, \quad \varphi_i \in S_i, v \in A \otimes B, \ \bigotimes_{i=1}^{2} \varphi_i(v^*v) > 0$$

также является C*-нормой, где $S_1 = S(A)$ и $S_2 = S(B)$ — пространства состояний алгебр A и B, соответственно.

Рассмотрим связь обертывающей W*-алгебры тензорных произведений вещественных W*-алгебр с тензорным произведением их обертывающих W*-алгебр.

Предложение 3.1. *Пусть R и Q — вещественные W*-алгебры, $U(R) = R + iR$ и $U(Q) = Q + iQ$ — их обертывающие W*-алгебры, соответственно. Тогда*

$$U(R\overline{\otimes}Q) = U(R)\overline{\otimes}U(Q), \quad \text{т. е.} \quad (R+iR)\overline{\otimes}(Q+iQ) = R\overline{\otimes}Q + i(R\overline{\otimes}Q).$$

Доказательство. Пусть α_R и α_Q — канонические инволютивные *-антиавтоморфизмы[1] $U(R)$ и $U(Q)$, порождающие R и Q, соответственно (см. [4, теорема 1.5.2]), т. е.

$$R = \{x \in U(R) : \alpha_R(x) = x^*\}, \quad Q = \{y \in U(Q) : \alpha_Q(y) = y^*\}.$$

Рассмотрим *-антиавтоморфизм $\alpha_R \otimes \alpha_Q : U(R)\overline{\otimes}U(Q) \to U(R)\overline{\otimes}U(Q)$, определяемый как

$$(\alpha_R \otimes \alpha_Q)(x \otimes y) := \alpha_R(x) \otimes \alpha_Q(y).$$

Так как *-автоморфизм $(\alpha_R\otimes\alpha_Q)^2$ — нормальный и $\alpha_R^2 = \alpha_Q^2 = id$ — тождественный, то для любого

$$z = \sup_n \sum_{i=1}^{n} x_i \otimes y_i \in U(R)\overline{\otimes}U(Q)$$

имеет место:

$$\begin{aligned}(\alpha_R \otimes \alpha_Q)^2(z) &= \sup_n(\alpha_R \otimes \alpha_Q)^2\Big(\sum_{i=1}^{n} x_i \otimes y_i\Big) = \sup_n \sum_{i=1}^{n}(\alpha_R \otimes \alpha_Q)^2(x_i \otimes y_i) = \\ &= \sup_n \sum_{i=1}^{n}(\alpha_R^2(x_i) \otimes \alpha_Q^2(y_i)) = \sup_n \sum_{i=1}^{n} x_i \otimes y_i = z,\end{aligned}$$

т. е. $(\alpha_R \otimes \alpha_Q)^2$ — тождественное отображение на $U(R)\overline{\otimes}U(Q)$. Рассмотрим вещественную W*-алгебру

$$F = \{z \in U(R)\overline{\otimes}U(Q) : \ (\alpha_R \otimes \alpha_Q)(z) = z^*\}.$$

Аналогично доказательству [4, теорема 1.5.2] легко показать, что

$$F \cap iF = \{0\} \quad \text{и} \quad U(R)\overline{\otimes}U(Q) = F + iF.$$

Если $x \in R$ и $y \in Q$, то

$$(\alpha_R \otimes \alpha_Q)(a \otimes y) = \alpha_R(x) \otimes \alpha_Q(y) = x^* \otimes y^* = (x \otimes y)^*,$$

следовательно, $R \otimes Q \subset F$. Так как F слабо-* замкнуто, то $R\overline{\otimes}Q \subset F$. Отсюда $U(R\overline{\otimes}Q) \subset U(R)\overline{\otimes}U(Q)$.

Пусть теперь $z \in U(R) \otimes U(Q)$. Тогда

$$z = \sum_{k=1}^{n}(a_k + ib_k) \otimes (c_k + id_k) \quad (a_k, b_k \in R, \ c_k, d_k \in Q).$$

Так как

$$z = \sum_{k=1}^{n}(a_k \otimes c_k - b_k \otimes d_k) + i\sum_{k=1}^{n}(b_k \otimes c_k + a_k \otimes d_k),$$

то $z \in R\otimes Q + i(R\otimes Q) = U(R\otimes Q)$. Следовательно, $U(R)\otimes U(Q) \subset U(R\otimes Q)$. Отсюда $U(R)\overline{\otimes}U(Q) \subset U(R\overline{\otimes}Q)$. □

Замечание 3.1. В доказательстве предложение 3.1 используется тот факт, что всякая вещественная W*-алгебра порождается каноническим инволютивным *-антиавтоморфизмом обертывающей W*-алгебры, и наоборот. Поэтому утверждение сформулировано для вещественных W*-алгебр. Однако в работах П. Стейси (см., например, [14]) показано, что всякая вещественная C*-алгебра также порождается некоторым инволютивным *-антиавтоморфизмом обертывающей C*-алгебры, и наоборот. Таким образом, предложение 3.1 верно и для вещественных C*-алгебр.

[1] Отображение $\alpha : R \to R$ называется *инволютивным *-антиавтоморфизмом*, если $\alpha(xy) = \alpha(y)\alpha(x)$, $\alpha(x^*) = \alpha(x)^*$ $(\forall x, y \in R)$ и $\alpha^2 = id$.

Определение 3.1. Комплексная или вещественная C*-алгебра A называется *ядерной*, если для любой комплексной (соответственно, вещественной) C*-алгебры B на $A \otimes B$ существует единственная C*-норма.

Ядерность вещественной C*-алгебры связана с ядерностью обертывающей (комплексной) C*-алгебры следующим образом.

Предложение 3.2. *Вещественная C*-алгебра R — ядерная, если ее обертывающая C*-алгебра $R+iR$ — ядерная.*

Доказательство. Пусть B — вещественная C*-алгебра. Тогда $B+iB$ — C*-алгебра и по предложению 3.1 (см. также замечание 3.1) имеем:

$$(R+iR)\overline{\otimes}(B+iB) = R\overline{\otimes}B + i(R\overline{\otimes}B).$$

Так как C*-норма на алгебре $(R+iR)\otimes(B+iB)$ единственна, то из последнего равенство получим, что C*-норма на алгебре $R\otimes B$ также единственна. □

Наша цель — доказать и обратное утверждение. Используя понятие инъективности, мы докажем его в следующем разделе.

Используя свойства тензорного произведения матричных алгебр, легко показать, что конечномерные вещественные (также комплексные) C*-алгебры являются ядерными.

Сначала покажем, что матричные алгебры является ядерными.

Теорема 3.1. *Если F — поле вещественных чисел или тело кватернионов (т. е. $F = \mathbb{R}$ или $F = \mathbb{H}$), то вещественная C*-алгебра $M_n(F)$ — алгебра $n \times n$-матриц над F (которая также является вещественной C*-алгеброй, относительно обычных операций над матрицами) — является ядерной, т. е. для любой вещественной C*-алгебры R на тензорном произведении $M_n(F)\otimes R$ существует единственная C*-норма. В этом случае $M_n(F)\otimes R \cong M_n(R)$.*

Доказательство. Рассмотрим комплексификацию $A = R+iR$ алгебры R, которая является (комплексной) C*-алгеброй. Так как комплексная матричная *-алгебра $M_n(\mathbb{C})$ является ядерной, тогда на $M_n(\mathbb{C})\otimes A$ существует единственная C*-норма $\|\cdot\|$. По предложению 3.1 (см. также замечание 3.1 и [12, теорема 10]) имеем:

$$M_n(\mathbb{C})\otimes A = (M_n(F)+iM_n(F))\otimes(R+iR) = M_n(F)\otimes R + i(M_n(F)\otimes R)$$

($F = \mathbb{H}$ может быть только в случае четного n). Тогда легко видеть, что сужение нормы $\|\cdot\|$ на $M_n(F)\otimes R$ также является единственной C*-нормой. Следовательно, вещественная C*-алгебра $M_n(F)$ является ядерной. □

Пусть теперь R — конечномерная вещественная C*-алгебра. Тогда известно, что $R \cong \bigoplus\limits_{k=1}^{m} M_{n_k}(F)$, где $F=\mathbb{R}$ или $F=\mathbb{H}$. Тогда для любой вещественной C*-алгебры Q легко показать, что

$$R\otimes Q \cong \bigoplus_{k=1}^{m} M_{m_k}(Q).$$

Следовательно, на $R\otimes Q$ существует естественная C*-норма, а значит, по теореме 3.1 эта норма единственна. Таким образом, для конечномерных вещественных C*-алгебр также имеем:

Следствие 3.1. *Всякая конечномерная вещественная C*-алгебра является ядерной.*

Теперь, докажем вещественный аналог известной теоремы Такесаки, т. е. покажем, что абелевы (т. е. коммутативные) вещественные C*-алгебры также являются ядерными

Теорема 3.2. *Всякая абелева вещественная C*-алгебра является ядерной.*

Доказательство. Пусть A — абелева вещественная C*-алгебра и пусть Ω — ее спектральное пространство, т. е. множество всех ненулевых вещественно-значных мультипликативных (вещественно) линейных функционалов на A. Элементы Ω называются *характерами* алгебры A. Известно, что множество Ω есть локально-компактное хаусдорфово пространство относительно топологии поточечной сходимости на A, и абелева вещественная C*-алгебра A *-изоморфна алгебре $C_0(\Omega)$ всех непрерывных вещественных функций на пространстве Ω, стремящихся к нулю в бесконечности (см. [5, п. 4.1.3]).

Поэтому пусть $A \cong C_0(\Omega_1)$ — вещественная абелева C*-алгебра, где Ω_1 — локально-компактное хаусдорфово пространство. Пусть B — вещественная C*-алгебра. Не ограничивая общности, можно полагать, что A и B — алгебры с единицей. Пусть $\|.\|_\gamma$ — произвольная C*-норма на $A \otimes B$.

Сначала пусть B также абелева, т. е. $B \cong C_0(\Omega_2)$, где Ω_2 — некоторое компактное хаусдорфово пространство. Тогда вещественная C*-алгебра $A\overline{\otimes}_\gamma B$ с единицей также является абелевой: $A\overline{\otimes}_\gamma B \cong C_0(\Omega)$, где Ω — компактное хаусдорфово пространство. Если $\varphi \in \Omega$, то для $\varphi_1 = \varphi(\cdot \otimes \mathbb{1}_B)$ и $\varphi_2 = \varphi(\mathbb{1}_A \otimes \cdot)$ можно непосредственно показать, что

$$\varphi_1 \in \Omega_1,\ \varphi_2 \in \Omega_2, \quad \varphi(a \otimes b) = \varphi_1(a) \otimes \varphi_2(b)$$

для $\forall a \otimes b \in A \otimes B$. Следовательно, Ω — замкнутое подпространство $\Omega_1 \times \Omega_2$. Если $\Omega \neq \Omega_1 \times \Omega_2$, то существуют непустые открытые подмножества $U_1 \subset \Omega_1$ и $U_2 \subset \Omega_2$ такие, что $\Omega \cap (U_1 \times U_2) = \varnothing$. Выберем элементы $a \in A$ и $b \in B$ так, чтобы $supp(a)(\cdot) \subset U_1$ и $supp(b)(\cdot) \subset U_2$. Тогда $\varphi(a \otimes b) = 0$ для $\forall \varphi \in \Omega$. Это противоречие, так как $a \otimes b \neq 0$. Следовательно, $\Omega = \Omega_1 \times \Omega_2$, т. е. $A\overline{\otimes}_\gamma B \cong C_0(\Omega_1 \times \Omega_2)$. Тогда для любого $a \otimes b \in A \otimes B$ мы имеем

$$\begin{aligned} \|a \otimes b\|_\gamma &= \|a \otimes b\|_{\gamma_0} = \sup\{|\varphi_1(a) \otimes \varphi_2(b)| :\ \varphi_i \in \Omega_i\} = \\ &= \sup\{\big|f(a) \otimes g(b)\big| :\ f \in A^*, g \in B^*,\ \|f\| \leqslant 1, \|g\| \leqslant 1\} = \|a \otimes b\|_{min}, \end{aligned}$$

т. е. на алгебре $A \otimes B$ существует единственная C*-норма.

Теперь рассмотрим общий случай, т. е. пусть B — произвольная (не обязательно абелева) вещественная C*-алгебра. Пусть $\varphi_1 \in \Omega_1$ (т. е. φ_1 — чистое состояние на A), и пусть E — подмножество состояний φ_2 на B такое, что функционал $\varphi_1 \otimes \varphi_2$ непрерывен относительно нормы $\|\cdot\|_\gamma$. Легко показать, что E является $\sigma(B^*, B)$-компактным выпуклым подмножеством $S(B)$ пространства состояний алгебры B. Пусть $h^* = h \in B$, и пусть B_1 — абелева C*-подалгебра B, порожденная элементами $\mathbb{1}_B$ и h. Выберем состояние ψ на B_1 такое, что $\psi(h) = \max\{\lambda :\ \lambda \in \sigma(h)\}$. Так как B_1 — абелева, то, как показано выше, на $A \otimes B_1$ существует единственная C*-норма $\|\cdot\|_\gamma$. Тогда функционал $\varphi_1 \otimes \psi$ является $\|\cdot\|_\gamma$-непрерывным. Следовательно, по теореме Хана—Банаха функционал $\varphi_1 \otimes \psi$ можно непрерывно продолжить до состояния φ на $A\overline{\otimes}_\gamma B_1$. Очевидно, $\varphi(\cdot \otimes \mathbb{1}_{B_1}) = \varphi_1$ и $\varphi = \varphi_1 \otimes \varphi_2$, где φ_2 — продолжение ψ на B. В частности, $\varphi_2 \in E$ и $E = S(B)$. Так как для $\varphi_1 \in S(A)$ и $\varphi_2 \in S(B)$ функционал $\varphi_1 \otimes \varphi_2$ является $\|\cdot\|_\gamma$-непрерывным, то $\|\cdot\|_\gamma \geqslant \|\cdot\|_{\gamma_0}$. С другой стороны, если φ — чистое состояние на $A \otimes B$, то можно показать, что существуют чистые состояния $\varphi_1 \in S(A)$ и $\varphi_2 \in S(B)$, удовлетворяющие $\varphi = \varphi_1 \otimes \varphi_2$ и такие, что для любого $x = a \otimes b \in A \otimes B$ мы получим

$$\|x\|_\gamma^2 = \|x^*x\|_\gamma = \sup_\varphi\{\varphi(x^*x)\} = \sup\{\varphi_1(a^*a) \otimes \varphi_2(b^*b)\} \leqslant \|a \otimes b\|_{\gamma_0} = \|x\|_{\gamma_0}.$$

Таким образом, на алгебре $A \otimes B$ существует единственная C*-норма. □

Замечание 3.2. Как сказано выше, в комплексном случае эта теорема доказана в работе М. Такесаки. Из этого случая нельзя непосредственно получить утверждение теоремы 3.2, потому что спектральное пространство абелевой вещественной C*-алгебры шире, чем спектральное пространство обертывающей абелевой (комплексной) C*-алгебры.

4. Инъективные и ядерные вещественные C*-алгебры

Как уже сказано, что инъективные комплексные и вещественные W*-алгебры достаточно хорошо изучены. Напомним некоторые определения.

Инъективность (в смысле Хакеда—Томияма) W*-алгебры R означает существование проекции $P : B(H) \to R$ с $\|P\| = 1$, $P(\mathbb{1}) = \mathbb{1}$.

Пусть A — комплексная или вещественная C*-алгебра. Элемент $a \in A$ называется *положительным* (пишут $a \geqslant 0$), если существует самосопряженный элемент b такой, что $a = b^2$. Обозначим через A^+ множество всех положительных элементов в A. *Положительное отображение* φ между C*-алгебрами A и B — это отображение $\varphi : A \to B$, при котором $\varphi(a) \in B^+$ для всех $a \in A^+$. Положительное линейное отображение φ называется *вполне положительным*, если отображение $\varphi_n : M_n(A) \to M_n(B)$, определяемое как $\varphi_n((a_{ij})_{i,j=1}^n) = (\varphi(a_{ij}))_{i,j=1}^n$, является положительным для всех n. Алгебра A называется *инъективной*, если для любой комплексной (или вещественной) C*-алгебры B с $\mathbb{1}$ и для каждого самосопряженного подпространства $S \subset B$, содержащего $\mathbb{1}$, всякое вполне положительное линейное отображение $\varphi : S \to A$ можно продолжить до вполне положительного линейного отображения $\overline{\varphi} : B \to A$.

В работе [12, следствие 2] показано следующее.

Предложение 4.1. *Вещественная C*-алгебра инъективна тогда и только тогда, когда она инъективна в смысле Хакеда—Томияма.*

Таким образом, оба определения эквивалентны. Кроме того, в работе [12, теоремы 7 и 8] доказано, что вещественная W*-алгебра R инъективна тогда и только тогда, когда обертывающая W*-алгебра $R+iR$ инъективна. На самом деле этот результат верен и для вещественных C*-алгебр.

При изучении инъективных факторов удобно использовать определение в смысле Хакеда—Томияма. Однако в вещественном случае имеются две основные алгебры $B(H)$ и $B(H_r)$ — всех ограниченных линейных операторов на комплексном и вещественном гильбертовом пространстве, соответственно. Поэтому здесь можно рассматривать инъективность (в смысле Хакеда—Томияма) относительно $B(H)$ и относительно $B(H_r)$. В связи с этим докажем следующий результат.

Предложение 4.2. *Вещественная W*-алгебра $R \subset B(H_r) \subset B(H)$ инъективна относительно $B(H)$ тогда и только тогда, когда она инъективна относительно $B(H_r)$.*

Доказательство. Пусть вещественная W*-алгебра R инъективна относительно $B(H_r)$, т. е. существует проекция $P : B(H_r) \to R$ такая, что $\|P\| = 1$ и $P(\mathbb{1}) = \mathbb{1}$. Так как $B(H_r)$ инъективна (см. [12, теорема 3]), то существует проекция $P_1 : B(H) \to B(H_r)$ такая, что $\|P_1\| = 1$ и $P_1(\mathbb{1}) = \mathbb{1}$. Положим $P_2 = P \circ P_1$. Легко видеть, что P_2 является проекцией из $B(H)$ на R такой, что $\|P_2\| = 1$ и $P_2(\mathbb{1}) = \mathbb{1}$.

Теперь, пусть вещественная W*-алгебра R инъективна относительно $B(H)$, т. е. существует проекция $P : B(H) \to R$ такая, что $\|P\| = 1$ и $P(\mathbb{1}) = \mathbb{1}$. Тогда сужение P на $B(H_r)$: $P_1 = P|_{B(H_r)}$ также является проекцией из $B(H_r)$ на R такой, что $\|P_1\| = 1$ и $P_1(\mathbb{1}) = \mathbb{1}$. □

Ниже рассмотрим коммутант R' алгебры R и второе сопряженное пространство R^{**}. Наша цель — с помощью них показать эквивалентность понятий инъективности и ядерности для вещественных C*-алгебр.

Теорема 4.1. *Если $R \subset B(H_r)$ — ядерная вещественная C*-алгебра, то коммутант R' алгебры R является инъективным.*

Доказательство. Поскольку R — ядерная, то отображение $R \otimes R' \to B(H_r)$, определяемое как

$$\sum a_i \otimes a_i' \;\longrightarrow\; \sum a_i a_i',$$

продолжается до представления алгебры $R \otimes R'$ на H_r. Так как алгебру $R \otimes R'$ можно изоморфно вложить в $R \otimes B(H_r)$, то существуют вещественное гильбертово пространство K, содержащее H_r, и представление φ алгебры $R \otimes B(H_r)$ на K такие, что

$$\varphi(a \otimes a')|_{H_r} = aa', \qquad a \in R, a' \in R'.$$

Пусть $p : K \to H_r$ — проекция, и пусть $\pi(x) = p\varphi(\mathbb{1} \otimes x)|_{H_r}$, $x \in H_r$. Непосредственно проверяется, что элемент $\pi(x)$ коммутирует с алгеброй R и отображение π действует тождественно на R'. Таким образом, π — проекция из $B(H_r)$ на R' такая, что $\|\pi\| = 1$ и $\pi(\mathbb{1}) = \mathbb{1}$. □

Сформулируем один вспомогательный результат.

Предложение 4.3 (см. [10, 5.5.4]). *Пусть R — вещественная C*-алгебра и $\{\pi, H_r\}$ — *-представление алгебры R. Тогда $\{\pi, H_r\}$ единственным образом может быть продолжено до *-представления $\{\overline{\pi}, H_r\}$ алгебры R^{**} такого, что $\overline{\pi}$ является $\sigma(R^{**}, R^*)$-непрерывным и $\overline{\pi}(R^{**}) = \pi(R)''$. Здесь R^{**} — второе сопряженное пространство.*

Если $R \subset B(H_r)$ — ядерная вещественная C*-алгебра, то по теореме 4.1 коммутант R' алгебры R является инъективным. Известно, что коммутант инъективной (комплексной или вещественной) W*-алгебры также инъективен. Отсюда следует, что слабое замыкание $\overline{R}^w = R''$ инъективно.

Так как это выполняется для любого точного *-представления R, в частности, универсального *-представления, то по предложению 4.3 алгебра R^{**} является инъективной. Таким образом, получим следующий результат.

Теорема 4.2. *Если вещественная C*-алгебра R — ядерная, то вещественная W*-алгебра R^{**} — инъективная.*

Верно и обратное утверждение.

Теорема 4.3. *Пусть R — вещественная C*-алгебра. Если вещественная W*-алгебра R^{**} является инъективной, то алгебра R — ядерная.*

Доказательство. Положим $A = R + iR$. Так как $A^{**} = R^{**} + iR^{**}$ (см. [10]) и алгебра R^{**} инъективна, то в силу [12, теоремы 7 и 8] алгебра A^{**} также инъективна. Поскольку, в комплексном случае, понятия инъективности и ядерности эквивалентны, то алгебра A — ядерная. По предложению 3.2 алгебра R также является ядерной. □

Следствие 4.1. *Вещественная C*-алгебра R — ядерная тогда и только тогда, когда вещественная W*-алгебра R^{**} — инъективная.*

Отсюда, получим один из основных результатов статьи.

Теорема 4.4. *Вещественная C*-алгебра R — ядерная тогда и только тогда, когда обертывающая C*-алгебра $R + iR$ — ядерная.*

Доказательство. По следствию 4.1 ядерность R эквивалентна инъективности алгебры R^{**}. В силу [12, теоремы 7 и 8], инъективность R^{**} эквивалентна инъективности алгебры $R^{**} + iR^{**} = (R + iR)^{**}$, следовательно, ядерности C*-алгебры $R + iR$. Теорема доказана. □

Из следствия 4.1 и теоремы 4.4 следует один из основных результатов работы.

Следствие 4.2. *Для вещественной W*-алгебры понятия ядерности и инъективности совпадают.*

Итак, подведя итог и учитывая все, сказанное во введении, получим главный результат работы.

Теорема 4.5. *Имеют место следующие утверждения*:

1. *существует единственный (с точностью до изоморфизма) ядерный вещественный фактор типа II_1;*
2. *существует единственный ядерный вещественный фактор типа II_∞;*
3. *существует единственный ядерный вещественный фактор типа III_1;*
4. *существуют в точности два ядерных вещественных фактора типа $III_\lambda (0 < \lambda < 1)$;*
5. *для любого натурального числа n существуют n попарно неизоморфных вещественных ядерных факторов типа III_0, у которых обертывающие W*-факторы изоморфны.*

Доказательство. В [4, теорема 1.7.3] получен следующий результат:

- существует единственный класс изоморфности инъективных вещественных факторов типа II_1, II_∞ и III_1, соответственно;
- существуют в точности два класса изоморфности инъективных вещественных факторов типа III_λ $(0 < \lambda < 1)$;
- для любого натурального числа n существуют n попарно неизоморфных вещественных инъективных факторов типа III_0, у которых обертывающие W*-факторы изоморфны.

Тогда из следствия 4.2 получим утверждение данной теоремы. □

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Аюпов Ш. А.* Классификация инъективных JW-факторов// Функц. анализ и его прилож. — 1984. — *18*, № 3. — С. 67-68.
2. *Фон Нейман Дж.* Обобщение математического аппарата квантовой механики методами абстрактной алгебры. I// Мат. сб. — 1936. — *1*, № 4. — С. 415–485.
3. *Фон Нейман Дж.* Избранные труды по функциональному анализу. I, II. — М.: Наука, 1987.

4. *Ayupov Sh. A., Rakhimov A. A., Usmanov Sh. M.* Jordan, Real and Lie structures in operator algebras. — Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1997.
5. *Ayupov Sh. A., Rakhimov A. A.* Real W*-algebras, actions of groups and index theory for real factors. — Beau-Bassin: VDM Verlag Dr. Müller, 2010.
6. *Connes A.* Classification of injective facteurs// Ann. Math. — 1976. — *104*, № 1. — С. 73–115.
7. *Dixmier J.* Les algebres d'operateurs dans l'espace Hilbertien. — Paris: Gauthier-Villars, 1969.
8. *Grothendieck A.* Resume des results essentiels dans la theorie des produits tensoriels topologiques et des espaces nucleaires// Ann. Inst. Fourier (Grenoble). — 1954. — *4*. — С. 73–112.
9. *Grothendieck A.* Produits tensoriels topologiques et des espaces nucléaires// Séminaire N. Bourbaki. — 1954. — *69*. — С. 193–200.
10. *Li B. R.* Real operator algebras. — River Edge: World Scientific, 2003.
11. *Murray F., von Neumann J.* On rings of operators. I// Ann. Math. — 1936. — *37*. — С. 116–229.
12. *Rakhimov A. A., Nurillaev M. E.* On property of injectivity for real W*-algebras and JW-algebras// Positivity. — 2018. — *22*. — С. 1345–1354.
13. *Sakai S.* C*-algebras and W*-algebras. — Berlin: Springer, 1971.
14. *Stacey P. J.* Real structure in unital separable simple C*-algebras with tracial rank zero and with a unique tracial state// New York J. Math. — 2006. — *12*. — С. 269–273.
15. *Stormer E.* Real structure in the hyperfinite factor// Duke Math. J. — 1980. — *47*, № 1. — С. 145–153.
16. *Takesaki M.* Theory of operator algebras. I, II, III. — Berlin: Springer, 1979.

А. А. Рахимов
Национальный университет Узбекистана им. М. Улугбека, Ташкент, Узбекистан;
Karadeniz Teknik Üniversitesi, Trabzon, Turkey
E-mail: rakhimov@ktu.edu.tr

М. Э. Нуриллаев
Ташкентский государственный педагогический университет им. Низами, Ташкент, Узбекистан
E-mail: nur11laev_muzaffar@mail.ru

Х. Х. Болтаев
Ташкентский государственный педагогический университет им. Низами, Ташкент, Узбекистан
E-mail: bkhabibzhan@mail.ru

DOI: 10.22363/2413-3639-2021-67-4-755-765 UDC 517.98

Injectivity and Nuclearity Properties for Real C*-Algebras

© 2021 **A. A. Rakhimov, M. E. Nurillaev, Kh. Kh. Boltaev**

Abstract. In this paper, we study injective and nuclear real W*- and C*-algebras. The connection of these concepts with similar concepts of enveloping W*- and C*-algebras is considered. The equivalence of the concepts of injectivity and nuclearity for real C*-algebras is shown. As a consequence, nuclear real factors of types II_1, II_∞, III_1, III_0, and III_λ $(0 < \lambda < 1)$ are completely described.

REFERENCES

1. Sh. A. Ayupov, "Klassifikatsiya in"ektivnykh JW-faktorov" [Classification of injective JW-factors], *Funkts. analiz i ego prilozh.* [Funct. Anal. Appl.], 1984, **18**, No. 3, 67-68 (in Russian).

2. J. von Neumann, “Obobshchenie matematicheskogo apparata kvantovoy mekhaniki metodami abstraktnoy algebry. I” [Generalization of the mathematical apparatus of quantum mechanics by methods of abstract algebra. I], *Mat. sb.* [Math. Digest], 1936, **1**, No. 4, 415–485 (Russian translation).
3. J. von Neumann, *Izbrannye trudy po funktsional’nomu analizu. I, II* [Selected Works on Functional Analysis. I, II], Nauka, Moscow, 1987 (Russian translation).
4. Sh. A. Ayupov, A. A. Rakhimov, and Sh. M. Usmanov, *Jordan, Real and Lie structures in operator algebras*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1997.
5. Sh. A. Ayupov and A. A. Rakhimov, *Real W*-algebras, actions of groups and index theory for real factors*, VDM Verlag Dr. Müller, Beau-Bassin, 2010.
6. A. Connes, “Classification of injective facteurs,” *Ann. Math.*, 1976, **104**, No. 1, 73–115.
7. J. Dixmier, *Les algebres d’operateurs dans l’espace Hilbertien*, Gauthier-Villars, Paris, 1969.
8. A. Grothendieck, “Resume des results essentiels dans la theorie des produits tensoriels topologiques et des espaces nucleaires,” *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)*, 1954, **4**, 73–112.
9. A. Grothendieck, “Produits tensoriels topologiques et des espaces nucléaires,” *Séminaire N. Bourbaki*, 1954, **69**, 193–200.
10. B. R. Li, *Real operator algebras*, World Scientific, River Edge, 2003.
11. F. Murray and J. von Neumann, “On rings of operators. I,” *Ann. Math.*, 1936, **37**, 116–229.
12. A. A. Rakhimov and M. E. Nurillaev, “On property of injectivity for real W*-algebras and JW-algebras,” *Positivity*, 2018, **22**, 1345–1354.
13. S. Sakai, *C*-algebras and W*-algebras*, Springer, Berlin, 1971.
14. P. J. Stacey, “Real structure in unital separable simple C*-algebras with tracial rank zero and with a unique tracial state,” *New York J. Math.*, 2006, **12**, 269–273.
15. E. Stormer, “Real structure in the hyperfinite factor,” *Duke Math. J.*, 1980, **47**, No. 1, 145–153.
16. M. Takesaki, *Theory of operator algebras. I, II, III*, Springer, Berlin, 1979.

A. A. Rakhimov
National University of Uzbekistan named after M. Ulugbek, Tashkent, Uzbekistan;
Karadeniz Teknik Üniversitesi, Trabzon, Turkey
E-mail: `rakhimov@ktu.edu.tr`

M. E. Nurillaev
Tashkent State Pedagogical University named after Nizami, Tashkent, Uzbekistan
E-mail: `nur1llaev_muzaffar@mail.ru`

Kh. Kh. Boltaev
Tashkent State Pedagogical University named after Nizami, Tashkent, Uzbekistan
E-mail: `bkhabibzhan@mail.ru`