Современная математика. Фундаментальные направления. Том 67, № 4 (2021). С. 693–706
Contemporary Mathematics. Fundamental Directions. ISSN 2413-3639 (Print)

DOI: 10.22363/2413-3639-2021-67-4-693-706 УДК 515.12

ФУНКТОР ИДЕМПОТЕНТНЫХ ВЕРОЯТНОСТНЫХ МЕР С КОМПАКТНЫМ НОСИТЕЛЕМ И ОТКРЫТЫЕ ОТОБРАЖЕНИЯ

© 2021 г. **А. Я. ИШМЕТОВ**

Аннотация. В работе показано, что функтор идемпотентных вероятностных мер с компактным носителем, действующий в категории тихоновских пространств и их непрерывных отображений, является нормальным. Установлено, что этот функтор монодичен. Далее, доказано, что функтор идемпотентных вероятностных мер с компактным носителем сохраняет открытость непрерывных отображений тихоновских пространств.

ОГЛАВЛЕНИЕ

1. Введение

Традиционную математику над числовыми полями можно трактовать как квантовую науку. Имеется и ее «классический аналог» — идемпотентная математика, т. е. математика над полуполями (и полукольцами) с идемпотентным сложением. Для идемпотентных полуполей выполнены все стандартные аксиомы, кроме наличия вычитания; вместо этого выполняется свойство идемпотентности сложения: $x + x = x$. Типичным примером является алгебра Max-Plus, состоящая из вещественных чисел (и символа «минус бесконечность», играющего роль нуля) и имеющая операцию maximum в качестве сложения и обычное сложение в качестве (нового) умножения.

Напомним [15], что множество S называется *полукольцом*, если в нем определены две операции: $\oplus$ — сложение и $\odot$ — умножение, удовлетворяющие следующим условиям:

- сложение $\oplus$ и умножение $\odot$ ассоциативны;
- сложение $\oplus$ коммутативно;
- умножение $\odot$ дистрибутивно относительно сложения $\oplus$:

$$x \odot (y \oplus z) = x \odot y \oplus x \odot z \quad \text{и}$$
$$(x \oplus y) \odot z = x \odot z \oplus y \odot z$$

для всех $x,\ y,\ z \in S$.

Единицей полукольца S называется такой элемент $\mathbf{1} \in S$, что $\mathbf{1} \odot x = x \odot \mathbf{1} = x$ для всех $x \in S$. *Нулем* полукольца S называется такой элемент $\mathbf{0} \in S$, что $\mathbf{0} \neq \mathbf{1}$ и $\mathbf{0} \oplus x = x \oplus \mathbf{0} = x$ для всех $x \in S$. Полукольцо S называется *идемпотентным полукольцом*, если $x \oplus x = x$ для всех $x \in S$.

(Идемпотентное) полукольцо S с элементами $\mathbf{0}$ и $\mathbf{1}$ называется (*идемпотентным*) *полуполем*, если для любого ненулевого элемента множества S существует обратный элемент.

Изложим *деквантование Маслова*. Пусть $\mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$ — поле вещественных чисел и $\mathbb{R}_+ = [0, +\infty)$ — полуполе неотрицательных вещественных чисел (относительно обычных операций сложения и умножения). Рассмотрим отображение $\Phi_h\colon \mathbb{R} \to S = \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$, определенное равенством

$$\Phi_h(x) = h \ln x, \qquad h > 0. \tag{1.1}$$

Перенесем обычные операции сложения и умножения из $\mathbb{R}$ в S с помощью отображения Φ_h. Пусть

$$u = \Phi_h(x) = h \ln x, \qquad v = \Phi_h(y) = h \ln y.$$

Тогда

$$\Phi_h(x + y) = h \ln (x + y) = h \ln \left(\mathrm{e}^{\frac{u}{h}} + \mathrm{e}^{\frac{v}{h}} \right),$$
$$\Phi_h(xy) = h \ln (xy) = h \ln x + h \ln y.$$

Положим $u \oplus_h v = \Phi_h(x + y)$ и $u \odot v = \Phi_h(xy)$, т. е. $u \oplus_h v = h \ln \left(\mathrm{e}^{\frac{u}{h}} + \mathrm{e}^{\frac{v}{h}} \right)$ и $u \odot v = u + v$. Образ $\Phi_h(0) = -\infty$ обычного нуля 0 является нулем $\mathbf{0}$ и образ $\Phi_h(1) = 0$ обычной единицы 1 — единицей $\mathbf{1}$ в S относительно этих операций. Таким образом, S приобретает структуру полукольца $\mathbb{R}^{(h)}$, изоморфного $\mathbb{R}_+$.

Непосредственная проверка показывает, что $u \oplus_h v \to \max\{u, v\}$ при $h \to 0$. Несложно проверить, что S образует полукольцо относительно сложения $u \oplus v = \max\{u, v\}$ и умножения $u \odot v = u + v$ с нулевым элементом $\mathbf{0} = -\infty$ и единицей $\mathbf{1} = 0$. Обозначим это полукольцо через $\mathbb{R}_{\max}$; оно является идемпотентным полуполем. Переход из $\mathbb{R}^{(h)}$ к предельному состоянию $\mathbb{R}_{\max}$ при $h \to 0$ и процедура квантования аналогичны. Здесь параметр h играет роль постоянной Планка. Поэтому полуполе $\mathbb{R}_+ \cong \mathbb{R}^{(h)}$ рассматривают как «квантовый» объект, а $\mathbb{R}_{\max}$ — как результат его деквантования. Изложенный переход из $\mathbb{R}_+$ к $\mathbb{R}_{\max}$ называется *деквантованием Маслова*. Идемпотентная математика продвинута весьма далеко (в частности, построен идемпотентный функциональный анализ [15]) и имеет многочисленные приложения (в особенности в задачах оптимизации и оптимального управления [12, 13]).

В традиционной математике идемпотентной вероятностной мере соответствует вероятностная мера. Понятие идемпотентной меры (меры Маслова) находит многочисленные применения в различных областях математики, математической физики и экономики. В частности, такие меры возникают в задачах динамической оптимизации [11]. Аналогия между интегрированием Маслова и оптимизацией отмечена также в [14]. Однако, как показывают результаты работ [4, 6], для доказательства аналогичных результатов для вероятностных мер и идемпотентных вероятностных мер требуются различные друг от друга методы. В [23] утверждается, что использование мер Маслова для моделирования неопределенности в математической экономике может быть настолько же релевантным, насколько и использование классической теории вероятностей.

В работе [22] Е. Щепин ввел понятие нормального функтора в категории компактов и их непрерывных отображений. А. Ч. Чигогидзе в работе [21] предложил построения конструкции продолжений нормальных функторов $F\colon \mathit{Comp} \to \mathit{Comp}$ до ковариантного функтора $F_\beta\colon \mathit{Tych} \to \mathit{Tych}$ с сохранением нормальности. В работе [9] были установлены категорные свойства функтора $I\colon \mathit{Comp} \to \mathit{Comp}$ идемпотентных вероятностных мер на категории компактов и их непрерывных отображений. В отличие от случая (обычных) вероятностных мер, рассмотрению которых посвящена обширная литература (см. [18]), геометрические и топологические свойства пространств идемпотентных мер до недавнего времени практически не были исследованы. В связи с этим последнее время появились работы [5–8, 10, 26] по идемпотентным вероятностным мерам. Далеко идущее продвижение в этом направлении наблюдалось в [28].

В работе [27] установлены варианты основных принципов функционального анализа для слабо аддитивных функционалов, и тем самым обобщено некоторые результаты из [14].

В настоящей работе рассмотрим распространение функтора идемпотентных вероятностных мер на категорию Tych тихоновских пространств и их непрерывных отображений. Детально обсуждены плотные подмножества пространства идемпотентных вероятностных мер, и полученные результаты применены при доказательствах основных достижений работы. Установлено, что функтор I_β идемпотентных вероятностных мер с компактным носителем, действующий в категории тихоновских пространств и их непрерывных отображений, является нормальным. Показано, что функтор I_β может быть включен в монаду. Доказано, что функтор идемпотентных вероятностных мер с компактным носителем сохраняет открытость непрерывных отображений тихоновских пространств.

Стоить отметить, что в данной работе предложен новый метод, сильно отличающийся от методов, изложенных в [1].

2. Конструкция функтора I_β

Пусть X — компактное Хаусдорфово пространство (далее, для краткости, компакт), $C(X)$ — банахова алгебра непрерывных функций на X с обычными алгебраическими операциями и sup-нормой. На $C(X)$ операции $\oplus$ и $\odot$ определим по правилам $\varphi \oplus \psi = \max\{\varphi, \psi\}$ и $\varphi \odot \psi = \varphi + \psi$, где $\varphi, \psi \in C(X)$.

Напомним, что функционал $\mu\colon C(X) \to \mathbb{R}$ называется *идемпотентной вероятностной мерой* [9] на X, если он обладает следующими свойствами:

(1) $\mu(\lambda_X) = \lambda$ для всех $\lambda \in \mathbb{R}$, где λ_X — постоянная функция;
(2) $\mu(\lambda \odot \varphi) = \lambda \odot \mu(\varphi)$ для всех $\lambda \in \mathbb{R}$ и $\varphi \in C(X)$;
(3) $\mu(\varphi \oplus \psi) = \mu(\varphi) \oplus \mu(\psi)$ для всех $\varphi, \psi \in C(X)$.

Для компакта X обозначим через $I(X)$ множество всех идемпотентных вероятностных мер на X.

Предложение 2.1. *Идемпотентная вероятностная мера непрерывна.*

Доказательство. Отметим сначала, что всякая идемпотентная вероятностная мера $\mu\colon C(X) \to \mathbb{R}$ *сохраняет порядок*, т. е. неравенство $\varphi \leqslant \psi$ влечет $\mu(\varphi) \leqslant \mu(\psi)$, где $\varphi, \psi \in C(X)$. Действительно, так как неравенство $\varphi \leqslant \psi$ справедливо тогда и только тогда, когда $\varphi \oplus \psi = \psi$, то имеем

$$\mu(\varphi) \leqslant \mu(\varphi) \oplus \mu(\psi) = \mu(\varphi \oplus \psi) = \mu(\psi).$$

Кроме того, свойство (2) означает, что всякая идемпотентная вероятностная мера $\mu\colon C(X) \to \mathbb{R}$ *слабо аддитивна*, т. е. $\mu(\varphi + \lambda_X) = \mu(\varphi) + \lambda$ для всех $\varphi \in C(X)$ и $\lambda \in \mathbb{R}$.

Пусть теперь $\varphi, \psi \in C(X)$ — функции такие, что $\|\psi - \varphi\| < \varepsilon$ для некоторого $\varepsilon > 0$. Тогда

$$\begin{gathered} -\varepsilon_X < \psi - \varphi < \varepsilon_X, \\ \varphi - \varepsilon_X < \psi < \varphi + \varepsilon_X, \\ \mu(\varphi) - \varepsilon < \mu(\psi) < \mu(\varphi) + \varepsilon, \\ |\mu(\psi) - \mu(\varphi)| < \varepsilon. \end{gathered}$$

Предложение 2.1 доказано. □

Ясно, что $I(X)$ является подмножеством пространства $\mathbb{R}^{C(X)}$. Рассмотрим $I(X)$ как подпространство пространства $\mathbb{R}^{C(X)}$ — тихоновского произведения числовых прямых. Базу окрестностей идемпотентной вероятностной меры $\mu \in I(X)$ относительно индуцированной из $\mathbb{R}^{C(X)}$ в $I(X)$ топологии образуют множества вида

$$\langle \mu; \varphi_1, \ldots, \varphi_n; \varepsilon \rangle = \{\nu \in I(X) : |\nu(\varphi_i) - \mu(\varphi_i)| < \varepsilon, i = 1, \ldots, n\},$$

где $\varphi_i \in C(X)$, $i = 1, \ldots, n$, $\varepsilon > 0$. Таким образом, индуцированная топология и топология поточечной сходимости на $I(X)$ совпадают. Для компакта X топологическое пространство $I(X)$, снабженное топологией поточечной сходимости, является компактом [9].

Пусть X, Y — компакты, $f\colon X \to Y$ — непрерывное отображение. Определим отображение $I(f)\colon I(X) \to I(Y)$ по формуле $I(f)(\mu)(\psi) = \mu(\psi \circ f)$. Так как композиция непрерывных отображений непрерывна, то из предложения 2.1 вытекает, что отображение $I(f)$ непрерывно. Таким образом, конструкция I переводит компакты в компакты и непрерывные отображения — в непрерывные, т. е. I образует функтор, действующий в категории компактов и их непрерывных отображений. Более того, конструкция I является нормальным функтором [9].

Для идемпотентной вероятностной меры $\mu \in I(X)$ определен ее носитель:

$$\operatorname{supp} \mu = \cap\{F : F \ \text{ замкнуто в } \ X \ \text{ и } \ \mu \in I(F)\}.$$

Для компакта X и целого положительного числа n определим следующее множество:

$$I_n(X) = \{\mu \in I(X) : \ |\operatorname{supp}\mu| \leqslant n\}.$$

Положим

$$I_\omega(X) = \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n(X).$$

Пусть X — тихоновское пространство, βX — его стоун-чеховское компактное расширение. Положим

$$I_\beta(X) = \{\mu \in I(\beta X) : \operatorname{supp}\mu \subset X\}.$$

Ясно, что имеет место

Предложение 2.2. *Подпространство $I_\beta(X)$ компакта $I(\beta X)$ является тихоновским пространством.*

Отметим, что для непрерывного отображения $f\colon X \to Y$ тихоновских пространств X и Y определено (единственное) продолжение $\beta f\colon \beta X \to \beta Y$ отображения f.

Предложение 2.3. *Для каждой пары тихоновских пространств X и Y и непрерывного отображения $f\colon X \to Y$ имеет место $I_\beta(f)(I_\beta(X)) \subset I_\beta(Y)$.*

Доказательство. Пусть $\mu \in I_\beta(X)$ и $\varphi \in C_b(Y)$. Имеем $I_\beta(f)(\mu)(\varphi) = I(\beta f)(\mu)(\tilde{\varphi}) = \mu(\tilde{\varphi} \circ \beta f) =$ (так как $\operatorname{supp}\mu \subset X$) $= \mu((\tilde{\varphi} \circ \beta f)|X) = \mu(\varphi \circ f)$, где $\tilde{\varphi} \in C(\beta Y)$ — продолжение $\varphi \in C_b(Y)$. Следовательно, $I_\beta(f)(\mu)$ сосредоточена на $f(X) \subset Y$. Предложение 2.3 доказано. $\square$

Если X и Y — тихоновские пространства, и $f\colon X \to Y$ — непрерывное отображение, то положим

$$I_\beta(f) = I(\beta f) \mid I_\beta(X). \tag{2.1}$$

Предложение 2.4. *Отображение $I_\beta(f)$, определенное равенством* (2.1)*, непрерывно.*

Доказательство вытекает из определения.

Для того, чтобы установить категорные свойства продолжения I_β функтора идемпотентных вероятностных мер на категорию $Tych$ тихоновских пространств и их непрерывных отображений, приведем следующие понятия.

Пусть $\mathfrak{C} = \{\mathcal{O}, \mathcal{M}\}$ и $\mathfrak{C}' = \{\mathcal{O}', \mathcal{M}'\}$ — две категории. Отображение $F\colon \mathfrak{C} \to \mathfrak{C}'$, переводящее объекты в объекты, а морфизмы в морфизмы, называется *ковариантным функтором* из категории $\mathfrak{C}$ в категории $\mathfrak{C}'$, если:

$F1$) для всякого морфизма $f\colon X \to Y$ из категории C морфизм $F(f)$ действует из $F(X)$ в $F(Y)$;
$F2$) $F(\mathrm{id}_X) = \mathrm{id}_{F(X)}$ для всякого $X \in \mathcal{O}$;
$F3$) $F(f \circ g) = F(f) \circ F(g)$ для любых морфизмов f и g из $\mathcal{M}$.

Предложение 2.5. *Конструкция I_β является ковариантным функтором в категории $Tych$ тихоновских пространств и их непрерывных отображений.*

Доказательство. Из предложения 2.2 вытекает, что I_β удовлетворяет условию $F1$). Покажем, что I_β сохраняет композицию отображений. Пусть X, Y, Z — тихоновские пространства и $f\colon X \to Y$, $g\colon Y \to Z$ — непрерывные отображения. Пусть $\mu \in I_\beta(X)$ и $\varphi \in C_b(Z)$. Тогда

$$I_\beta(g \circ f)(\mu)(\varphi) = \mu(\varphi \circ (g \circ f)) = \mu((\varphi \circ g) \circ f) = I_\beta(f)(\mu)(\varphi \circ g) = (I_\beta(g) I_\beta(f)(\mu))(\varphi),$$

т. е. $I_\beta(g \circ f) = I_\beta(g) \circ I_\beta(f)$.

Пусть $\mathrm{id}_X\colon X \to X$ — тождественное отображение, т. е. $\mathrm{id}_X(x) = x$ для всех $x \in X$. Тогда

$$I_\beta(\mathrm{id}_X)(\mu)(\varphi) = \mu(\varphi \circ \mathrm{id}_X) = \mu(\varphi),$$

т. е. $I_\beta(\mathrm{id}_X) = \mathrm{id}_{I_\beta(X)}$. Предложение 2.5 доказано. $\square$

Итак, нами построен функтор I_β, действующий в категории тихоновских пространств и их непрерывных отображений, Этот функтор называется *функтором идемпотентных вероятностных мер* с компактным носителем.

3. Категорные свойства функтора I_β

Для тихоновского пространства X и положительного целого n аналогично определим множество

$$I_{\beta,n}(X) = \{\mu \in I_\beta(X) : |\operatorname{supp}\mu| \leqslant n\}$$

и положим

$$I_{\beta,\omega}(X) = \bigcup_{n=1}^{\infty} I_{\beta,n}(X).$$

Напомним, что функционал $\delta_x\colon C(\beta X) \to \mathbb{R}$, определенный по формуле $\delta_x(\varphi) = \varphi(x)$, $\varphi \in C(\beta X)$, называется *мерой Дирака*. Каждая мера Дирака δ_x является идемпотентной вероятностной мерой с носителем $\operatorname{supp}\delta_x = \{x\}$, где $x \in X$.

Далее в работе *всюду плотное* подмножество заданного пространства для краткости будем называть как *плотное* подмножество.

Предложение 3.1. *Если Y плотно в компакте X, то $I_{\beta,\omega}(Y)$ плотно $I(X)$.*

Доказательство. Известно [9], что $I_\omega(X)$ плотно в $I(X)$. Поэтому достаточно проверить, что $I_{\beta,\omega}(Y)$ плотно в $I_\omega(X)$. Возьмем произвольную меру $\mu \in I_\omega(X)$ и ее базисную окрестность $\langle\mu;\varphi_1,\,\ldots,\,\varphi_k;\varepsilon\rangle$. Пусть $\mu = \lambda_1 \odot \delta_{x_1} \oplus \lambda_2 \odot \delta_{x_2} \oplus \ldots \oplus \lambda_s \odot \delta_{x_s}$. Поскольку Y плотно в X, то существуют точки $y_1 \ldots y_s$ такие, что $|\varphi_i(x_j) - \varphi_i(y_j)| < \varepsilon$ для всех $i = 1 \ldots k$; $j = 1 \ldots s$. Кроме того, существуют неположительные числа $\lambda'_1 \ldots \lambda'_s$, такие, что $|\lambda_i - \lambda'_j| < \varepsilon$ для всех $j = 1 \ldots s$. Теперь, как легко видеть, имеем $\nu = \lambda'_1 \odot \delta_{y_1} \oplus \lambda'_2 \odot \delta_{y_2} \oplus \cdots \oplus \lambda'_s \odot \delta_{y_s} \in \langle\mu;\varphi_1,\,\ldots,\varphi_k;\varepsilon\rangle \cap I_{\beta,\omega}(X)$. Предложение 3.1 доказано. □

Следствие 3.1. *Если Y плотно в компакте X, то $I_\omega(Y)$ и $I_\beta(Y)$ плотны в $I(X)$.*

Предложение 3.2. *Если Y плотно в тихоновском пространстве X, то $I_{\beta,\omega}(Y)$ плотно в $I_\beta(X)$.*

Доказательство. Пусть bX — произвольное компактное расширение пространства X. Тогда Y, будучи плотным в X, плотно в компакте bX. По предложению 2.1 множество $I_{\beta,\omega}(Y)$ плотно в компакте $I(bX)$. Но $I_{\beta,\omega}(X) \subset I_\beta(X) \subset I(bX)$. Следовательно, $I_{\beta,\omega}(Y)$ плотно в пространстве $I_\beta(X)$. Предложение 3.2 доказано. □

Следствие 3.2. *Для любого тихоновского пространства X множество $I_{\beta,\omega}(X)$ всюду плотно в $I_\beta(X)$.*

Пусть X — тихоновское пространство, bX — его некоторое компактное расширение. Тогда

$$I_b(X) = \{\mu \in I(bX) : \operatorname{supp}\mu \subset X\} = \{\mu \in I(\beta X) : \operatorname{supp}\mu \subset X\} = I_\beta(X),$$

т. е. $I_\beta(X) = I_b(X)$.

Предложение 3.3. *Функтор I_β сохраняет вес бесконечных тихоновских пространств, т. е. для любого бесконечного тихоновского пространства X имеет место равенство*

$$w(I_\beta(X)) = w(X).$$

Доказательство. Ясно, что отображение $\delta\colon X \to I_\beta(X)$, определенное по формуле $\delta(x) = \delta_x$, $x \in X$, есть вложение тихоновского пространства X в $I_\beta(X)$. В самом деле, $\delta_x \in I_\beta(X)$, так как $\operatorname{supp}\delta_x = \{x\} \subset X$. Поэтому $w(X) \leqslant w(I_\beta(X))$.

Обратно, пусть $w(X) = \tau \geqslant \aleph_0$. Известно, что существует компактное расширение bX пространства X такое, что $w(bX) = w(X)$. Следовательно, из [9, предложение 12] имеем $w(I(bX)) = w(bX) = \tau$. Но, $I_b(X) \subset I(bX)$, поэтому $\tau = w(I(bX)) \geqslant w(I_b(X))$, т. е. $w(I_b(X)) \leqslant \tau$. Предложение 3.3 доказано. □

Предложение 3.4. *I_β — мономорфный функтор, т. е. I_β сохраняет инъективность отображений тихоновских пространств.*

Доказательство. Пусть $\mu_1,\ \mu_2 \in I_\beta(X) \subset I(\beta X)$, $\mu_1 \neq \mu_2$. Из мономорфности функтора I (см. [9]) вытекает, что $I(\beta f)(\mu_1) \neq I(\beta f)(\mu_2)$. В силу определения функтора I_β получим, что

$$I_\beta(f)(\mu_1) = I(\beta f)(\mu_1) \neq I(\beta f)(\mu_2) = I_\beta(f)(\mu_2),$$

т. е. $I_\beta(f)(\mu_1) \neq I_\beta(f)(\mu_2)$. Предложение 3.4 доказано. □

Пусть X и Y — тихоновские пространства. Напомним, что вложение $i\colon X \to Y$ называется [19] C^*-вложением, если всякая функция $\varphi \in C_b(X)$ продолжается до некоторой функции $\tilde{\varphi} \in C_b(Y)$.

Предложение 3.5. *Функтор $I_\beta\colon Tych \to Tych$ переводит C^*-вложение во вложения.*

Доказательство. Для каждого инъективного отображения $f\colon X \to Y$ инъективность отображения $I_\beta(f)\colon I_\beta(X) \to I_\beta(Y)$ была установлена в предложении 3.4.

Пусть $f\colon X \to Y$ — топологическое C^*-вложение тихоновского пространства X в тихоновское пространство Y и $\beta f\colon \beta X \to \beta Y$ — его стоун-чеховская компактификация. Тогда в силу непрерывности отображения $I(\beta f)\colon I(\beta X) \to I(\beta Y)$, отображение $I_\beta(f)$ непрерывно как его сужение.

По условию βY вложено в βX. Поскольку функтор I сохраняет вложений, то отображение $I(\beta f)$ — вложение. Поэтому отображение $I(\beta f)^{-1}$ также непрерывно, и следовательно, $I_\beta(f)^{-1} = I(\beta f)^{-1}|_{I(\beta f)(I_\beta(X))}$ непрерывно. Предложение 3.5 доказано. □

Предложение 3.6. *Пусть $f\colon X \to Y$ — непрерывное отображение и образ $f(X)$ всюду плотен в Y. Тогда образ $I_\beta(f)(I_\beta(X))$ всюду плотен в $I_\beta(Y)$.*

Доказательство. Образ $I_\beta(f)(I_\beta(X))$ содержит множество

$$I_\omega(f(X)) = \{\mu \in I(\beta Y) : |\operatorname{supp}\mu| < \infty \ \text{ и } \ \operatorname{supp}\mu \subset f(X)\},$$

которое всюду плотно в $I_\beta(Y) \subset I(\beta Y)$. Предложение 3.6 доказано. □

Предложение 3.7. *Функтор $I_\beta\colon Tych \to Tych$ сохраняет*

a) точку,

b) пустое множество.

Доказательство.

a) Пусть $x \in X \subset \beta X$. Ясно, что $\delta_x \in I_\beta(X)$, так как $\operatorname{supp}\delta_x = \{x\} \subset X$. Для любой точки $y \in \beta X \setminus X$ имеем $\operatorname{supp}\delta_y = \{y\} \subset \beta X \setminus X$. Поэтому $\delta_y \notin I_\beta(X)$. Следовательно, если $X = \{x\}$ — одноточечное множество, то $I_\beta(X) = I(X) = I(\{x\}) = \{\delta_x\}$.

b) Пусть $X = \varnothing$. Тогда $\beta X = \varnothing$ и $C(\beta X) = \varnothing$. следовательно,

$$\mathbb{R}^{C(\beta X)} = \mathbb{R}^{\varnothing} = \varnothing.$$

Из того, что $I_\beta(X) \subset \mathbb{R}^{C(\beta X)}$ получим, что $I_\beta(\varnothing) \subset \mathbb{R}^{C(\beta X)} = \varnothing$, т. е. $I_\beta(\varnothing) = \varnothing$. Предложение 3.7 доказано. □

Доказательство следующего утверждения вытекает из определения. Это утверждение отличается от компактного случая тем, что в компактном случае оно выполнено только для замкнутых подмножеств.

Предложение 3.8. *Если A — произвольное подмножество тихоновского пространства X, то $I_\beta(A) \subset I_\beta(X)$. Более того, $I_\beta(A) = \{\mu \in I_\beta(X) : \operatorname{supp}\mu \subset A\}$.*

Предложение 3.9. *Если $f\colon X \to Y$ — совершенное отображение между тихоновскими пространствами и $B \subset Y$, то*

$$I_\beta(f^{-1}(B)) = I_\beta(f^{-1})(I_\beta(B)).$$

Доказательство. Пусть $\mu \in I_\beta(f^{-1}(B))$. Тогда $\mu \in I(\beta X)$ и $\operatorname{supp}\mu \subset f^{-1}(B)$. Следовательно, $f(\operatorname{supp}\mu) \subset B$ или, что то же самое, $(\beta f)(\operatorname{supp}\mu) \subset B$. Поэтому из предложения 3.8 имеем $\operatorname{supp} I(\beta f)(\mu) \subset B$. Но $I(\beta f)(\mu) = I_\beta(f)(\mu)$. Следовательно, $I_\beta(f)(\mu) \in I_\beta(B)$. Наоборот, пусть $\mu \in I_\beta(f)^{-1}(I_\beta(B))$. Тогда $I_\beta(f)(\mu) = I(\beta f)(\mu) \in I_\beta(B)$, т. е. $\operatorname{supp} I(\beta f)(\mu) \subset B$. Следовательно, согласно предложению 3.8 имеем $(\beta f)(\operatorname{supp}\mu) \subset B$. Это означает, что $\operatorname{supp}\mu \subset (\beta f)^{-1}(B)$. Но по теореме А. Д. Тайманова [16] для совершенного отображения $f\colon X \to Y$ и произвольного $B \subset Y$ имеет место равенство $(\beta f)^{-1}(B) = f^{-1}(B)$. Следовательно, $\operatorname{supp}\mu \subset f^{-1}(B)$, откуда $\mu \in I_\beta(f^{-1}(B))$. Предложение 3.9 доказано. □

Пусть $\{X_\alpha,\, p^\beta_\alpha; A\}$ — обратный спектр, индексированный элементами множества A и состоящий из тихоновских пространств. Через $\lim X_\alpha$ обозначим предел этого спектра, а через $p_\alpha\colon\ \lim X_\alpha \to X_\alpha$ — предельные проекции, $\alpha \in A$. Обратный спектр $\{X_\alpha,\, p^{\alpha'}_\alpha;\, A\}$ порождает обратный спектр $\{I_\beta(X_\alpha),\, I_\beta(p^{\alpha'}_\alpha);\, A\}$, предел которого обозначим через $\lim I_\beta(X_\alpha)$, а предельные проекции через $pr_\alpha\colon\ \lim I_\beta(X_\alpha) \to I_\beta(X_\alpha)$. Отображения $I_\beta(p_\alpha)\colon I_\beta(\lim X_\alpha) \to I_\beta(X_\alpha)$ порождают отображение $R\colon I_\beta(\lim X_\alpha) \to \lim I_\beta(X_\alpha)$, $\alpha \in A$. Известно, что если все X_α — компакты, то отображение R — гомеоморфизм [9].

Для тихоновского случая имеет место следующее утверждение.

Предложение 3.10. *Отображение $R\colon I_\beta(\lim X_\alpha) \to \lim I_\beta(X_\alpha)$ является вложением.*

Доказательство. Пусть $\{X_\alpha,\, P^\beta_\alpha;\, A\}$ — спектр тихоновских пространств. Рассмотрим стоун-чеховское продолжение $\{\beta\, X_\alpha,\, \beta\, P^\beta_\alpha;\, A\}$ спектра $\{X_\alpha,\, P^\beta_\alpha;\, A\}$. Отметим, что $\lim X_\alpha$ вкладывается в $\lim \beta\, X_\alpha$. Согласно непрерывности функтора $I\colon Comp \to Comp$ соответствующее отображение

$$\overline{R}\colon\ I(\lim \beta\, X_\alpha) \to \lim I(\beta\, X_\alpha)$$

является гомеоморфизмом. Поскольку функтор I_β сохраняет вложение (предложение 3.4), то отображение $R\colon I_\beta(\lim X_\alpha) \to \lim I_\beta(X_\alpha)$ вкладывается в гомеоморфизм $\overline{R}$ и является вложением. Предложение 3.10 доказано. $\square$

Отметим, что для всякой пары F, K непересекающихся C^*-вложенных подмножеств тихоновского пространства X имеет место $[F]_{\beta X} \cap [K]_{\beta X} = \varnothing$, где $[Y]_{\beta X}$ — замыкание подмножества $Y \subset X$ в $\beta\, X$. Каждое C^*-вложенное подмножество замкнуто.

Предложение 3.11. *Функтор I_β сохраняет пересечение C^*-вложенных множеств, т. е. для любой пары C^*-вложенных подмножеств A и B тихоновского пространства X имеет место*

$$I_\beta(A \cap B) = I_\beta(A) \cap I_\beta(B).$$

Доказательство. Пусть X — тихоновское пространство и A, B — C^*-вложенные подмножества пространства X. Так как функтор I сохраняет пересечение [9], то имеем

$$\begin{aligned} I_\beta(A) \cap I_\beta(B) &= \{\mu \in I([A]_{\beta X}) : \operatorname{supp} \mu \subset A\} \cap \{\mu \in I([B]_{\beta X}) : \operatorname{supp} \mu \subset B\} = \\ &= \{\mu \in I([A]_{\beta X}) \cap I([B]_{\beta X}) : \operatorname{supp} \mu \subset A \text{ и } \mu \subset B\} = \\ &= \{\mu \in I([A]_{\beta X} \cap [B]_{\beta X}) : \operatorname{supp} \mu \subset A \cap B\} = I_\beta(A \cap B). \end{aligned}$$

Предложение 3.11 доказано. $\square$

Предложение 3.12. *Если $f\colon X \to Y$ — совершенное отображение между тихоновскими пространствами, то отображение $I_\beta(f)\colon I_\beta(X) \to I_\beta(Y)$ также совершенно.*

Доказательство. По теореме А. Д. Тайманова [16] имеем $X = \beta\, f^{-1}(Y)$. Тогда по предложению 2.3 имеем

$$I_\beta(X) = I(\beta\, f)^{-1}(I_\beta(Y)),$$

следовательно, отображение $I_\beta(f)$ совершенно как ограничение совершенного отображения $I_\beta(\beta\, f)\colon I_\beta(\beta\, X) \to I_\beta(\beta\, Y)$ на полный прообраз $I_\beta(\beta\, f)^{(-1)}(I_\beta(Y)) = I_\beta(X)$. Предложение 3.12 доказано. $\square$

Определение 3.1. Ковариантный функтор $F\colon Tych \to Tych$ называется *нормальным*, если он удовлетворяет следующим условиям: функтор F непрерывен, сохраняет вес, вложения, пересечения, прообразы, точку, пустое множество и переводит κ-накрывающие отображения в сюръекцию [1].

Напомним, что непрерывное отображение $f\colon X \to Y$ называется *κ-накрывающим*, если для любого компакта $B \subset Y$ существует такой компакт $A \subset X$, что $f(A) = B$. Всякое совершенное отображение является κ-накрывающим.

Таким образом, получен следующий результат.

Теорема 3.1. *Функтор $I_\beta\colon Tych \to Tych$ является нормальным.*

4. О монаде, порожденной функтором I_β

Понятие монады введено С. Эйленбергом и Дж. Муром в связи теорией сопряженных функторов.

Определение 4.1 (см. [24]). *Монадой* (или *тройкой*) на категории $\mathfrak{C}$ называется тройка $\mathbb{T} = (T,\, \delta,\, \psi)$, состоящая из ковариантного функтора T и естественных преобразований $\delta\colon \mathrm{Id} \to T$ (единица) и $\psi\colon T^2 \to T$ (умножение), для которых выполняются условия:

$$\psi_X \circ T(\delta_X) = \psi_X \circ \delta_{T(X)} = \mathrm{id}_{T(X)}\,.$$

Функтор T, который может быть включен в тройку $\mathbb{T}$, называется *монадичным* в категории $\mathfrak{C}$.

В работе [9] М. Заричный показал, что функтор $I\colon Comp \to Comp$ идемпотентных вероятностных мер, действующий в категории компактов и их непрерывных отображений, порождает монаду в этой категории. Установим, что его распространение I_β на категорию тихоновских пространств и их непрерывных отображений также включается в монаду.

Для тихоновских пространств X, Y через

$$j_{XY}\colon\ I_\beta(X) \times Y \to I_\beta(X \times Y)$$

обозначим отображение, определяемое следующим образом:

$$j_{XY}(\nu,\, y) = I_\beta(i_y)(\nu),$$

где $\nu \in I_\beta(X)$, $y \in Y$ и $i_y\colon\ X \to X \times Y$ — вложение в качестве слоя:

$$i_y(x) = (x, y), x \in X.$$

Предложение 4.1. *Отображение j_{XY} является замкнутым вложением.*

Доказательство. Пусть X, Y — тихоновские пространства и $\beta\, X$, $\beta\, Y$ — их стоун-чеховские расширения. Из [2, предложение 1.12] и [25, теорема 2] следует, что отображение

$$j_{\beta\, X \beta\, Y}\colon\ I(\beta\, X) \times \beta\, Y \to I(\beta\, X \times \beta\, Y)$$

является вложением компактов. Очевидно, что

$$j_{XY}(I_\beta(X) \times Y) = j_{\beta\, X \beta\, Y}(I_\beta(X) \times Y) = j_{\beta\, X \beta\, Y}(I(\beta\, X) \times \beta\, Y) \cap (I_\beta(X) \times Y).$$

Предложение 4.1 доказано. □

Следствие 4.1. *Функтор I_β сохраняет гомотопии, т. е. для любой гомотопии $H_{(\cdot)} = \{H_t\colon\ X \to Y \,|\, t \in [0,\, 1]\}$ семейство*

$$I_\beta(H)_{(\cdot)} = \{I_\beta(H)_t\colon\ I_\beta(X) \to I_\beta(Y) \,|\, t \in [0,\, 1]\},$$

где $I_\beta(H)_t = I_\beta(H_t) \circ j_{X[0,\,1]}$, является гомотопией и непрерывно как отображение

$$I_\beta(H)_{(\cdot)}\colon\ I_\beta(X) \times [0,\, 1] \to I_\beta(Y).$$

Доказательство. Пусть $H_{(\cdot)}\colon\ X \times [0,\, 1] \to Y$ — гомотопия. Тогда $I_\beta(H)_{(\cdot)}$ является непрерывным отображением как композиция

$$I_\beta(H)_{(\cdot)} = I_\beta(H_{(\cdot)}) \circ j_{X[0,\,1]}$$

непрерывных отображений

$$j_{X[0,\,1]}\colon\ I_\beta(X) \times [0,\, 1] \to I_\beta(X \times [0,\, 1])$$

и

$$I_\beta(H_{(\cdot)})\colon\ I_\beta(X \times [0,\, 1]) \to I_\beta(Y).$$

Следствие 4.1 доказано. □

Отметим, что для $\varphi \in C(Y)$ имеем

$$\begin{aligned} I_\beta(H)_{(t)}(\mu)(\varphi) &= I_\beta(H)_{(\cdot)}(\mu, t)(\varphi) = I_\beta(H_{(\cdot)}) \circ j_{X[0,1]}(\mu, t)(\varphi) = \\ &= I_\beta(H_{(\cdot)}) \circ I_\beta(i_t)(\mu)(\varphi) = I_\beta(i_t)(\mu)(\varphi \circ H_{(\cdot)}) = \mu(\varphi \circ H_{(\cdot)} \circ i_t) = \\ &= \mu(\varphi \circ H_{(\cdot)} \circ i_t(x)) = \mu(\varphi \circ H_{(\cdot)}(x, t)) = \mu(\varphi \circ H_t(x)) = \mu(\varphi \circ H_t), \end{aligned}$$

т. е. $I_\beta(H)_{(t)}(\mu)(\varphi) = \mu(\varphi \circ H_t)$.

Пусть $F_i\colon \mathfrak{C} \to \mathfrak{C}'$, $i = 1, 2$ — два ковариантных функтора из категории $\mathfrak{C} = \{\mathfrak{O}, \mathfrak{M}\}$ в категорию $\mathfrak{C}' = \{\mathfrak{O}', \mathfrak{M}'\}$. Семейство морфизмов $\Phi = \{\varphi_X\colon F_1(X) \to F_2(X) | X \in \mathfrak{O}\} \subset \mathfrak{M}'$ называется *естественным преобразованием* функтора F_1 в функтор F_2, если для всякого морфизма $f\colon X \to Y$ категории $\mathfrak{C}$ коммутативна диаграмма

$$\begin{array}{ccc} F_1(X) & \xrightarrow{\varphi_X} & F_2(X) \\ \downarrow F_1(f) & & \downarrow F_2(f) \\ F_1(Y) & \xrightarrow{\varphi_Y} & F_2(Y). \end{array}$$

Для каждого тихоновского пространства X через $\delta_X\colon X \to I_\beta(X)$ обозначим отображение, ставящее в соответствии каждой точке $x \in X$ функционал Дирака $\delta(x)$, сосредоточенный в точке x. Через $\exp^\beta(X)$ принято обозначать пространство непустых компактных подмножеств тихоновского пространства X, снабженное топологией Вьеториса. Известно [17], что конструкция $\exp^\beta$ взятия компактных подмножеств является ковариантным функтором в категории тихоновских пространств. Для $F \in \exp^\beta X$ положим $\varphi_X(F) = \nu_F = \bigoplus\limits_{x\in F} 0 \odot \delta_x$.

Предложение 4.2. *Семейство морфизмов*

$$\varPhi = \{\varphi_X\colon\ \exp^\beta(X) \to I_\beta(X) | X \in Tych\}$$

является естественным преобразованием функтора $\exp^\beta$ *в функтор* I_β*. Более того, каждая компонента* φ_X *является замкнутым вложением пространства* $\exp^\beta(X)$ *в* $I_\beta(X)$.

Доказательство. Для установления первой части леммы нам следует показать коммутативность диаграммы

$$\begin{array}{ccc} \exp^\beta(X) & \xrightarrow{\varphi_X} & I_\beta(X) \\ \downarrow \exp^\beta(f) & & \downarrow I_\beta(f) \\ \exp^\beta(Y) & \xrightarrow{\varphi_Y} & I_\beta(Y). \end{array}$$

Пусть $F \in \exp^\beta X$. По определению имеем $\varphi_X(F) = \bigoplus\limits_{x\in F} 0\odot\delta_x$. Далее, для произвольной функции $\psi \in C(Y)$ имеем

$$I_\beta(\varphi_X(F))(\psi) = \varphi_X(F)(\psi \circ f) = \bigoplus_{x\in F} 0 \odot \delta_x(\psi \circ f) = \bigoplus_{x\in F} 0 \odot \psi(f(x)) = \bigoplus_{y\in f(F)} 0 \odot \psi(y).$$

С другой стороны,

$$\varphi_Y(\exp^\beta(f)(F)) = \varphi_Y(f(F)) = \bigoplus_{y\in f(F)} 0 \odot \psi(y).$$

Таким образом, в силу произвольности множества F и функции ψ, имеем $I_\beta(f) \circ \varphi_X = \varphi_Y \circ \exp^\beta(f)$, т. е. рассматриваемая диаграмма коммутативна.

Пусть $F_1, F_2 \in \exp^\beta X$ — различные множества. Предположим, что $F_1 \backslash F_2 \neq \varnothing$. Пусть $x \in F_1 \backslash F_2$. Так как F_2 — компакт, не содержащий x, то существует непрерывная функция $\zeta \in C_b(X)$ такая, что $\zeta(x) = 1$ и $\zeta(y) = 0$ для всех $y \in F_2$. Имеем $\varphi_X(F_1)(\zeta) \geqslant 1 \neq 0 = \varphi_X(F_2)(\zeta)$, т. е. отображение φ_X инъективно. В работе [20] было показано, что для любого компакта Z топология Вьеториса на $\exp Z$ и топология поточечной сходимости на $\varphi_Z(\exp Z)$ совпадают. Отсюда, в частности, вытекает, что φ_X — вложение.

Теперь покажем, что $\varphi_X(\exp^\beta X)$ замкнуто в $I_\beta(X)$. Пусть $\mu \in I_\beta(X) \setminus \varphi_X(\exp^\beta X)$. Так как идемпотентные вероятностные меры с конечным носителем всюду плотны в $I_\beta(X)$, то можно предполагать, что μ — мера с конечным носителем. Поскольку $\mu \notin \varphi_X(\exp^\beta X)$, то идемпотентную вероятностную меру μ нельзя представить в виде $\bigoplus\limits_{x\in \operatorname{supp}\mu} 0 \odot \delta_x$. Другими словами, существует точка $x' \in \operatorname{supp}\mu$ такая, что в представлении $\bigoplus\limits_{x\in \operatorname{supp}\mu} \lambda_x \odot \delta_x$ идемпотентной вероятностной меры μ, где $\bigoplus\limits_{x\in \operatorname{supp}\mu} \lambda_x = 0$, коэффициент $\lambda_{x'}$ отрицателен. Рассмотрим функцию $\xi(x) = \lambda_{x'} + \lambda_x$ и окрестность $\left\langle \mu;\, \xi;\, \dfrac{|\lambda_{x'}|}{2} \right\rangle$. Очевидно, что окрестность $\left\langle \mu;\, \xi;\, \dfrac{|\lambda_{x'}|}{2} \right\rangle$ не пересекается с $\varphi_X(\exp^\beta X)$. Предложение 4.2 доказано. □

Предложение 4.3. *Семейство $\delta = \{\delta_X : X \in Tych\}$ определяет естественное преобразование тождественного функтора* $\mathrm{Id}\colon Tych \to Tych$ *в функтор* $I_\beta\colon Tych \to Tych$, *причем каждая компонента $\delta_X\colon X \to I_\beta(X)$ является замкнутым вложением.*

Доказательство. Легко проверить, что $\delta = \{\delta_X : X \in Tych\}$ — естественное преобразование функтора Id в функтор I_β. То, что каждое отображение $\delta_X\colon ,X \to I_\beta(X)$ является замкнутым вложением, следует из теоремы 1.14 в [17,], которая гласит, что X замкнуто в $\exp^\beta X$, и предложения 4.2. Предложение 4.3 доказано. □

Для функтора I_β умножение $\psi_X\colon I_\beta^2(X) \to I_\beta(X)$ определим по формуле $\psi_X(\alpha)(\varphi) = \alpha(\tilde{\varphi})$, где $\alpha \in I_\beta^2(X)$, $\varphi \in C(X)$, а $\tilde{\varphi}\colon I_\beta(X) \to \mathbb{R}$ — непрерывная функция, определимая формулой $\tilde{\varphi}(\mu) = \mu(\varphi)$, $\mu \in I_\beta(X)$.

Теорема 4.1. *Тройка $\mathbb{I}_\beta = \langle I_\beta, \delta, \psi \rangle$ образует монаду в категории $Tych$ тихоновских пространств и их непрерывных отображений.*

Доказательство. В работе [9] было показано, что функтор $I\colon Comp \to Comp$ образует монаду в категории $Comp$. Поэтому достаточно доказать, что для каждого тихоновского пространства X имеют место включения $\delta_{\beta X}(X) \subset I_\beta(X)$ и $\psi_{\beta X}(I_\beta^2(X)) \subset I_\beta(X)$, где $\delta_{\beta X}$ и $\psi_{\beta X}$ — компоненты естественных преобразований, входящих в тройку $\mathbb{I} = \langle I,\, \delta,\, \psi \rangle$. Из предложения 4.3 вытекает, что $\delta_{\beta X}(X) \subset I_\beta(X)$. Для доказательства включения $\psi_{\beta X}(I_\beta^2(X)) \subset I_\beta(X)$ предположим, что $\alpha \in I_\beta^2(X) \subset I_\beta^2(\beta X)$. Тогда $\operatorname{supp} \alpha \subset I_\beta(X)$. Пусть $\varphi \in C_b(X)$. Обозначим через $\tilde{\varphi}$ продолжение φ на βX. Имеем $(\psi_X(\alpha)(\varphi) = \alpha(\tilde{\varphi}) = \alpha(\tilde{\varphi}|\operatorname{supp} \alpha) =$(поскольку $\operatorname{supp} \alpha \subset I_\beta(X)) = \alpha(\tilde{\varphi}|_{I_\beta(X)})$. Так как всякая функция $f \in C_b(Z)$ пространства Z представима в виде $f = (f(z))_{z \in Z}$, то $\alpha(\tilde{\varphi}|_{I_\beta(X)}) = \alpha((\tilde{\varphi}(\mu))_{\mu \in I_\beta(X)}) = \alpha((\mu(\varphi))_{\mu \in I_\beta(X)})$. Следовательно, $\operatorname{supp} \psi_X(\alpha) \subset X$. Теорема 4.1 доказана. □

5. Функтор I_β и открытые отображения

При доказательстве основного результата будем использовать следующие две леммы, доказанные в [3].

Лемма 5.1. *Пусть $f\colon X \to Y$ — непрерывное отображение, $y_0 \in Y$ и $\varphi \in C_b(Y)$. Тогда существует функция $\psi \in C_b(Y)$ такая, что $\psi \circ f \leqslant \varphi$ и $\psi(y_0) = \inf \left\{\varphi(x) : x \in f^{-1}(y_0)\right\}$.*

Лемма 5.2. *Пусть $f\colon X \to Y$ — непрерывное отображение, $y_0 \in Y$ и $\nu \in I_\beta$ такие, что $I_\beta(f)(\nu) = \delta_{y_0}$. Тогда для любой $\varphi \in C_b(X)$ такой, что $\varphi(x) \geqslant c$ (соответственно, $\varphi(x) \leqslant c$) при $x \in f^{-1}(y_0)$, имеем $\nu(\varphi) \geqslant c$ (соответственно, $\nu(\varphi) \leqslant c$).*

Напомним, что подмножество A пространства $I(X)$ является max-plus-*выпуклым*, если для каждой пары $\mu,\, \nu \in A$ имеем $\alpha \odot \mu \oplus \beta \odot \nu \in A$, где $\alpha,\, \beta \in \mathbb{R}_{\max}$ и $\alpha \oplus \beta = \mathbf{1}$.

Предложение 5.1. *Для отображения $f\colon X \to Y$ компактов и всякой меры $\nu \in I(X)$ прообраз $I(f)^{-1}(\nu)$ является* max-plus-*выпуклым множеством в $I(X)$.*

Доказательство. Пусть $\mu_1,\, \mu_2 \in I(f)^{-1}(\nu)$. Тогда для всякой пары $\alpha,\, \beta \in \mathbb{R}_{\max}$ с $\alpha \oplus \beta = \mathbf{1}$ и для каждой $\psi \in C(Y)$ имеем

$$\begin{aligned} I(f)(\alpha \odot \mu_1 \oplus \beta \odot \mu_2)(\psi) = (\alpha \odot \mu_1 \oplus \beta \odot \mu_2)(\psi \circ f) = \alpha \odot \mu_1(\psi \circ f) \oplus \beta \odot \mu_2(\psi \circ f) = \\ = \alpha \odot I(f)(\mu_1)(\psi) \oplus \beta \odot I(f)(\mu_2)(\psi) = \alpha \odot \nu(\psi) \oplus \beta \odot \nu(\psi) = \nu(\psi), \end{aligned}$$

т. е. $I(f)(\alpha \odot \mu_1 \oplus \beta \odot \mu_2) = \nu$. Следовательно, $\alpha \odot \mu_1 \oplus \beta \odot \mu_2 \in I(f)^{-1}(\nu)$. Предложение 5.1 доказано. □

Взяв одноточечное множество Y, из предложений 3.7 и 5.1 извлекаем следующее утверждение.

Следствие 5.1. *Множество $I_\beta(X)$ является* max-plus-*выпуклым подмножеством тихоновского произведения $\mathbb{R}^{C_b(X)}$.*

Пусть $f\colon X \to Y$ — непрерывное отображение и $\varphi \in C_b(X)$. Через φ^* (соответственно, φ_*) обозначим функцию $\varphi^*\colon Y \to \mathbb{R}$ (соответственно, $\varphi_*\colon Y \to \mathbb{R}$), определенную правилом $\varphi^*(y) = \sup\left\{\varphi(x) : x \in f^{-1}(y)\right\}$ (соответственно, $\varphi_*(y) = \inf\left\{\varphi(x) : x \in f^{-1}(y)\right\}$). Известно, что если f — открытое отображение, то функции φ^* и φ_* непрерывны.

Теорема 5.1. *Пусть $f\colon X \to Y$ — непрерывное отображение тихоновских пространств. Отображение $I_\beta(f)\colon I_\beta(X) \to I_\beta(Y)$ открыто тогда и только тогда, когда f открыто.*

Доказательство. Пусть $f\colon X \to Y$ — такое отображение, что отображение $I_\beta(f)\colon I_\beta(X) \to I_\beta(Y)$ открыто. Рассмотрим точку $x_0 \in X$. Пусть $y_0 = f(x_0)$. Возьмем такую $\varphi \in C_b(X)$, что $\varphi(x_0) = 0$. Положим

$$V = \{x \in X : -1 < \varphi(x) < 1\}.$$

Достаточно показать, что $f(V)$ — открытая окрестность точки y_0, так как множества вида V образуют базу окрестностей точку x_0.

Рассмотрим открытую окрестность $W = \{\mu \in I_\beta(X) : -1 < \mu(\varphi) < 1\}$ функционала $\delta_{x_0} \in I_\beta(X)$. Тогда $I_\beta(f)(W)$ — открытая окрестность функционала $\delta_{y_0} \in I_\beta(Y)$. Существуют функции $\psi_1, \psi_2 \ldots \psi_k \in C_b(Y)$, $\psi_i(y_0) = 0$ и ε, $0 < \varepsilon < 1$, такие, что $H = \langle \delta_{y_0}, \psi_1, \psi_2 \ldots \psi_k; \varepsilon\rangle \subset I_\beta(f)(W)$.

Положим $G = \bigcap\limits_{i=1}^{n} \{y \in Y : -\varepsilon < \psi_i(y) < \varepsilon\}$. Тогда G — открытая окрестность точки y_0. Пусть $y \in G$ — произвольная точка. Тогда $\delta_y \in H$. Следовательно, существует $\mu \in I_\beta(X)$ такая, что $\mu \in W$ и $I_\beta(f)(\mu) = \delta_y$. Согласно условиям, имеем $-1 < \mu(\varphi) < 1$. Поскольку каждая идемпотентная вероятностная мера является сохраняющим порядок функционалом, то μ сохраняет порядок, поэтому существует $x \in f^{-1}(y)$ такая, что $-1 < \varphi(x) < 1$. Таким образом, $G \subset f(V)$ и, следовательно, f открыто.

Пусть теперь $f\colon X \to Y$ — открытое отображение. Предположим, что $I_\beta(f)$ не открыто. Тогда существуют:

1) идемпотентная мера $\mu_0 \in I_\beta(X)$,
2) сеть идемпотентных мер $\{\nu_\alpha\} \subset I_\beta(X)$, сходящаяся к $\nu_0 = I_\beta(f)(\mu_0)$, и
3) окрестность W идемпотентной меры μ_0

такие, что $I_\beta(f)^{-1}(\nu_\alpha) \bigcap W = \varnothing$ для каждого α.

Поскольку $I_\omega(Y)$ всюду плотно в $I_\beta(Y)$, то можно предполагать, что все функционалы ν_α сосредоточены на конечных множествах. Пусть $A_\alpha = I_\beta(X)^{-1}(\nu_\alpha)$ и $[A_\alpha] = \left[I_\beta(f)^{-1}(\nu_\alpha)\right]_{I(\beta X)}$. Так как $I(\beta X)$ — компакт и функция $I(\beta f)$ непрерывна, то сеть $[A_\alpha]$ сходится к $[A_0] = \left[I_\beta(f)^{-1}(\nu_0)\right]_{I(\beta X)}$ по топологии Вьеториса в $\exp I(\beta X)$. Кроме того, из непрерывности отображения $I(\beta f)$ вытекает, что $[A_0] \subset I(\beta f)^{-1}(\nu_0)$ и $\mu_0 \in [A_0]$ (нарушено условие 3)). Ясно, если $\mu_0 \notin [A_0]$, то для каждой $\mu \in [A_0]$ существует $\varphi_\mu \in C_b(X) \cong C(\beta X)$ такая, что $\mu_0(\varphi_\mu) \neq \mu(\varphi_\mu)$. Согласно предположению, для каждого α существует конечное множество $\{y_{\alpha 1} \ldots y_{\alpha n_\alpha}\}$ такое, что $\nu_\alpha \in I\left(\{y_{\alpha 1} \ldots y_{\alpha n_\alpha}\}\right)$. Для каждого $y_{\alpha i}$ можно выбрать $x_{\alpha i} \in X$ такие, что $f(x_{\alpha i}) = y_{\alpha i}$ и $\varphi(x_{\alpha i}) = \varphi^*(y_{\alpha i})$, $\mu \in [A]$. Определим вложение $j_\alpha\colon \{y_{\alpha 1} \ldots y_{\alpha n_\alpha}\} \to X$ по правилу $j_\alpha(y_{\alpha i}) = x_{\alpha i}$ и пусть $\mu_\alpha = I(j_\alpha)(\nu_\alpha)$. Легко видеть, что $\varphi = \varphi^* \circ f = \varphi^* \circ \beta f$ на каждом конечном $\{y_{\alpha 1} \ldots y_{\alpha n_\alpha}\}$. Поэтому

$$\mu_\alpha(\varphi) = \mu_\alpha(\varphi^* \circ f) = \mu_\alpha(\varphi^* \circ \beta f) = I(\beta f)(\mu_\alpha)(\varphi^*) = \nu_\alpha(\varphi_*)$$

для каждого α. Пусть μ_1 — предел сети (μ_α). Тогда $\mu_1 \in [A]$ и

$$\mu_1(\varphi) = \lim_\alpha \mu_\alpha(\varphi) = \lim_\alpha \mu_\alpha(\varphi^* \circ \beta f) = \lim_\alpha I(\beta f)(\mu_\alpha)(\varphi^*) = \lim_\alpha \nu_\alpha(\varphi^*) = \nu_0(\varphi^*), \quad \varphi \in C(X).$$

С другой стороны, $\nu_0(\varphi^*) = I(\beta f)(\mu_0)(\varphi^*) = \mu_0(\varphi^* \circ \beta f)$. Таким образом,

$$\mu_1(\varphi) = \mu_0(\varphi^* \circ \beta f) \tag{5.1}$$

для каждого $\varphi \in C(X)$. Аналогично,

$$\mu_1(\varphi) = \mu_0(\varphi_* \circ \beta f)$$

для каждого $\varphi \in C(X)$. Пусть функция $\varphi_{\mu_1} \in C(X)$ такая, что $\mu_0(\varphi_{\mu_1}) \neq \mu_1(\varphi_{\mu_1})$. Предположим, что $\mu_0(\varphi_{\mu_1}) > \mu_1(\varphi_{\mu_1})$. Из $\varphi^* \circ \beta f \geqslant \varphi$ в силу равенства (5.1) имеем $\mu_1(\varphi_{\mu_1}) = \mu_0(\varphi_{\mu_1}^* \circ \beta f) \geqslant \mu_0(\varphi_{\mu_1})$. Аналогично, можно показать, что предположение $\mu_0(\varphi_{\mu_1}) < \mu_1(\varphi_{\mu_1})$ также не верно.

Таким образом, получили противоречие, которое показывает, что $I_\beta(f)$ открыто. Теорема 5.1 доказана. □

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Аль-Кассас Ю.* Метризуемость и паракомпактность пространств вероятностных мер// Дисс. к.ф.-м.н. — М.: МГУ, 1991.
2. *Заитов А. А.* О продолжении слабо аддитивных функционалов// Докл. АН РУз. — 2005. — № 5. — С. 3–7.
3. *Заитов А. А.* Теорема об открытом отображении пространств слабо аддитивных однородных функционалов// Мат. заметки. — 2010. — *88*, № 5. — С. 683–688.
4. *Заитов А. А.* Геометрические и топологические свойства подпространства $P_f(X)$ вероятностных мер// Изв. вузов. Сер. мат. — 2019. — № 10. — С. 28–37.
5. *Заитов А. А., Ишметов А. Я.* О монаде, порожденной функтором I_β// Вестн. НУУз. — 2013. — № 2. — С. 61–64.
6. *Заитов А. А., Ишметов А. Я.* Гомотопические свойства пространства $I_f(X)$ идемпотентных вероятностных мер// Мат. заметки. — 2019. — *106*, № 4. — С. 531–542.
7. *Заитов А. А., Тожиев И. И.* Функциональные представления замкнутых подмножеств компакта// Узб. мат. ж. — 2010. — № 1. — С. 53–63.
8. *Заитов А. А., Холтураев Х. Ф.* О взаимосвязи функторов P вероятностных мер и I идемпотентных вероятностных мер// Узб. мат. ж. — 2014. — № 4. — С. 36–45.
9. *Заричный М. М.* Пространства и отображения идемпотентных мер// Изв. РАН. Сер. мат. — 2010. — *74*, № 3. — С. 45–64.
10. *Ишметов А. Я.* О функторе идемпотентных вероятностных мер с компактными носителями// Узб. мат. ж. — 2010. — № 1. — С. 72–80.
11. *Колокольцов В. Н.* Идемпотентные структуры в оптимизации// Итоги науки и техн. Сер. Соврем. мат. и ее прил. — 1999. — *65*. — С. 118–174.
12. *Колокольцов В. Н., Маслов В. П.* Идемпотентный анализ как аппарат теории управления. I// Функц. анализ и его прилож. — 1989. — *23*, № 1. — С. 1–14.
13. *Колокольцов В. Н., Маслов В. П.* Идемпотентный анализ как аппарат теории управления и оптимального синтеза. II// Функц. анализ и его прилож. — 1989. — *23*, № 4. — С. 53–62.
14. *Литвинов Г. Л., Маслов В. П., Шпиз Г. Б.* Идемпотентный функциональный анализ. Алгебраический подход// Мат. заметки. — 2001. — *69*, № 5. — С. 758–797.
15. *Маслов В. П., Колокольцов В. Н.* Идемпотентный анализ и его применение в оптимальном управлении. — М.: Физматлит, 1994.
16. *Тайманов А. Д.* О замкнутых отображениях// Мат. сб. — 1955. — *46*. — С. 349–352.
17. *Федорчук В. В.* Многозначные ретракции и характеризация n-мягких отображений// Тр. Моск. мат. об-ва. — 1988. — *51*. — С. 169–207.
18. *Федорчук В. В.* Вероятностные меры в топологии// Усп. мат. наук. — 1991. — *46*, № 1. — С. 41–80.
19. *Федорчук В. В., Садовничий Ю. В.* О некоторых топологических и категорных свойствах знакопеременных мер// Фундам. и прикл. мат. — 1999. — *5*, № 2. — С. 597–618
20. *Федорчук В. В., Филиппов В. В.* Общая топология. Основные конструкции. — М.: МГУ, 1988.
21. *Чигогидзе А. Ч.* О продолжении нормальных функторов// Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Мат. Мех. — 1984. — № 6. — С. 23–26.
22. *Щепин Е. В.* Функторы и несчетные степени компактов// Усп. мат. наук. — 1981. — *36*, № 3. — С. 3–62.
23. *Aubin J. P.* Dynamic economic theory: A viability approach. — Berlin—Heidelberg: Springer-Verlag, 1997.
24. *Eilenberg S., Moore J.* Adjoint functors and triples// Ill. J. Math. — 1965. — *9*, № 3. — С. 381–398.
25. *Radul T. N.* On the functor of order-preserving functionals// Comment. Math. Univ. Carolin. — 1998. — *39*, № 3. — С. 609–615.
26. *Radul T.* Idempotent measures: absolute retracts and soft maps// ArXiv. — 2018. — 1810.09140v1 [math.GN].
27. *Zaitov A. A.* Order-preserving variants of the basic principles of functional analysis// Fundame. J. Math. Appl. — 2019. — *2*, № 1. — С. 10–17.
28. *Zaitov A. A.* On a metric on the space of idempotent probability measures// Appl. Gen. Topol. — 2020. — *21*, № 1. — С. 35-51.

А. Я. Ишметов

Ташкентский архитектурно-строительный институт, Ташкент, Узбекистан

E-mail: ishmetov_azadbek@mail.ru

DOI: 10.22363/2413-3639-2021-67-4-693-706 UDC 515.12

Functor of Idempotent Probability Measures with Compact Support and Open Mappings

© 2021 **A. Ya. Ishmetov**

Abstract. In this paper, we show that the functor of idempotent probability measures with compact support acting in the category of Tikhonov spaces and their continuous mappings is normal. It is found that this functor is monodic. Further, it is proved that the functor of idempotent probability measures with compact support preserves the openness of continuous mappings of Tikhonov spaces.

REFERENCES

1. Yu. Al'-Kassas, "Metrizuemost' i parakompaktnost' prostranstv veroyatnostnykh mer" [Metrizability and paracompactness of spaces of probability measures], *Thesis*, MSU, Moscow, 1991 (in Russian).
2. A. A. Zaitov, "O prodolzhenii slabo additivnykh funktsionalov" [On extension of weakly additive functionals], *Dokl. AN RUz* [Rep. Acad. Sci. Resp. Uzb.], 2005, No. 5, 3–7 (in Russian).
3. A. A. Zaitov, "Teorema ob otkrytom otobrazhenii prostranstv slabo additivnykh odnorodnykh funktsionalov" [An open mapping theorem for spaces of weakly additive homogeneous functionals], *Mat. zametki* [Math. Notes], 2010, **88**, No. 5, 683–688 (in Russian).
4. A. A. Zaitov, "Geometricheskie i topologicheskie svoystva podprostranstva $P_f(X)$ veroyatnostnykh mer" [Geometric and topological properties of the subspace $P_f(X)$ of probability measures], *Izv. vuzov. Ser. mat.* [Bull. Higher Edu. Inst. Ser. Math.], 2019, No. 10, 28–37 (in Russian).
5. A. A. Zaitov and A. Ya. Ishmetov, "O monade, porozhdennoy funktorom I_β" [On the monad generated by the functor I_β], *Vestn. NUUz* [Bull. Nat. Univ. Uzb.], 2013, No. 2, 61–64 (in Russian).
6. A. A. Zaitov and A. Ya. Ishmetov, "Gomotopicheskie svoystva prostranstva $I_f(X)$ idempotentnykh veroyatnostnykh mer" [Homotopy properties of the space $I_f(X)$ of idempotent probability measures], *Mat. zametki* [Math. Notes], 2019, **106**, No. 4, 531–542 (in Russian).
7. A. A. Zaitov and I. I. Tozhiev, "Funktsional'nye predstavleniya zamknutykh podmnozhestv kompakta" [Functional representations of closed subsets of a compactum], *Uzb. mat. zh.* [Uzb. Math. J.], 2010, No. 1, 53–63 (in Russian).
8. A. A. Zaitov and Kh. F. Kholturaev, "O vzaimosvyazi funktorov P veroyatnostnykh mer i I idempotentnykh veroyatnostnykh mer" [On the relationship of functors P of probability measures and I idempotent probability measures], *Uzb. mat. zh.* [Uzb. Math. J.], 2014, No. 4, 36–45 (in Russian).
9. M. M. Zarichnyi, "Prostranstva i otobrazheniya idempotentnykh mer" [Spaces and mappings of idempotent measures], *Izv. RAN. Ser. mat.* [Bull. Russ. Acad. Sci. Ser. Math.], 2010, **74**, No. 3, 45–64 (in Russian).
10. A. Ya. Ishmetov, "O funktore idempotentnykh veroyatnostnykh mer s kompaktnymi nositelyami" [On the functor of compactly supported idempotent probability measures], *Uzb. mat. zh.* [Uzb. Math. J.], 2010, No. 1, 72–80 (in Russian).
11. V. N. Kolokol'tsov, "Idempotentnye struktury v optimizatsii" [Idempotent structures in optimization], *Itogi nauki i tekhn. Ser. Sovrem. mat. i ee pril.* [Totals Sci. Tech. Contemp. Math. Appl.], 1999, **65**, 118–174 (in Russian).
12. V. N. Kolokol'tsov and V. P. Maslov, "Idempotentnyy analiz kak apparat teorii upravleniya. I" [Idempotent analysis as an apparatus of control theory. I], *Funkts. analiz i ego prilozh.* [Funct. Anal. Appl.], 1989, **23**, No. 1, 1–14 (in Russian).

13. V. N. Kolokol'tsov and V. P. Maslov, "Idempotentnyy analiz kak apparat teorii upravleniya i optimal'nogo sinteza. II" [Idempotent analysis as an apparatus of control theory and optimal synthesis. II], *Funkts. analiz i ego prilozh.* [Funct. Anal. Appl.], 1989, **23**, No. 4, 53–62 (in Russian).
14. G. L. Litvinov, V. P. Maslov, and G. B. Shpiz, "Idempotentnyy funktsional'nyy analiz. Algebraicheskiy podkhod" [Idempotent functional analysis. Algebraic approach], *Mat. zametki* [Math. Notes], 2001, **69**, No. 5, 758–797 (in Russian).
15. V. P. Maslov and V. N. Kolokol'tsov, *Idempotentnyy analiz i ego primenenie v optimal'nom upravlenii* [Idempotent analysis and Its Application in Optimal Control], Fizmatlit, Moscow, 1994 (in Russian).
16. A. D. Taymanov, "O zamknutykh otobrazheniyakh" [On closed mappings], *Mat. sb.* [Math. Digest], 1955, **46**, 349–352 (in Russian).
17. V. V. Fedorchuk, "Mnogoznachnye retraktsii i kharakterizatsiya n-myagkikh otobrazheniy" [Multivalued retractions and characterization of n-soft mappings], *Tr. Mosk. mat. ob-va* [Proc. Moscow Math. Soc.], 1988, **51**, 169–207 (in Russian).
18. V. V. Fedorchuk, "Veroyatnostnye mery v topologii" [Probability measures in topology], *Usp. mat. nauk* [Progr. Math. Sci.], 1991, **46**, No. 1, 41–80 (in Russian).
19. V. V. Fedorchuk and Yu. V. Sadovnichiy, "O nekotorykh topologicheskikh i kategornykh svoystvakh znakoperemennykh mer" [On some topological and categorical properties of alternating measures], *Fundam. i prikl. mat.* [Fundam. Appl. Math.], 1999, **5**, No. 2, 597–618 (in Russian)
20. V. V. Fedorchuk and V. V. Filippov, *Obshchaya topologiya. Osnovnye konstruktsii* [General Topology. Basic Constructions], MGU, Moscow, 1988 (in Russian).
21. A. Ch. Chigogidze, "O prodolzhenii normal'nykh funktorov" [On extension of normal functors], *Vestn. Mosk. un-ta. Ser. 1. Mat. Mekh.* [Bull. Moscow Univ. Ser. 1. Math. Mech.], 1984, No. 6, 23–26 (in Russian).
22. E. V. Shchepin, "Funktory i neschetnye stepeni kompaktov" [Functors and uncountable powers of compacta], *Usp. mat. nauk* [Progr. Math. Sci.], 1981, **36**, No. 3, 3–62 (in Russian).
23. J. P. Aubin, *Dynamic economic theory: A viability approach*, Springer-Verlag, Berlin–Heidelberg, 1997.
24. S. Eilenberg and J. Moore, "Adjoint functors and triples," *Ill. J. Math.*, 1965, **9**, No. 3, 381–398.
25. T. N. Radul, "On the functor of order-preserving functionals," *Comment. Math. Univ. Carolin.*, 1998, **39**, No. 3, 609–615.
26. T. Radul, "Idempotent measures: absolute retracts and soft maps," *ArXiv*, 2018, 1810.09140v1 [math.GN].
27. A. A. Zaitov, "Order-preserving variants of the basic principles of functional analysis," *Fundam. J. Math. Appl.*, 2019, **2**, No. 1, 10–17.
28. A. A. Zaitov, "On a metric on the space of idempotent probability measures," *Appl. Gen. Topol.*, 2020, **21**, No. 1, 35-51.

A. Ya. Ishmetov
Tashkent Institute of Architecture and Civil Engineering, Tashkent, Uzbekistan
E-mail: `ishmetov_azadbek@mail.ru`