Современная математика. Фундаментальные направления. Том 67, № 4 (2021). С. 668–692
Contemporary Mathematics. Fundamental Directions. ISSN 2413-3639 (Print)

DOI: 10.22363/2413-3639-2021-67-4-668-692 УДК 517.518

ПОЛИНОМЫ ВЕЙЕРШТРАССА В ОЦЕНКАХ ОСЦИЛЛЯТОРНЫХ ИНТЕГРАЛОВ

© 2021 г. **И. А. ИКРОМОВ, А. С. САДУЛЛАЕВ**

Аннотация. В работе получены оценки для преобразования Фурье гладких зарядов (мер), сосредоточенных на некоторых невыпуклых гиперповерхностях. Доказана суммируемость максимальной функции Рэндола для широкого класса невыпуклых гиперповерхностей. Кроме того, в трехмерном случае получены оценки в зависимости от высоты А. Н. Варченко. Доказана точность полученных оценок. Доказательство оценки осцилляторных интегралов основывается на подготовительной теореме Вейерштрасса.

ОГЛАВЛЕНИЕ

1. Введение

1.1. Постановка задачи. Пусть $S(a) \subset \mathbb{R}^{n+1}$ — семейство гладких гиперповерхностей, гладко зависящих от параметров $a \in \mathbb{R}^m$, и $\psi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^{n+1})$ — гладкая функция с компактным носителем. Для фиксированного $a \in \mathbb{R}^m$ рассмотрим заряд $d\mu_a(x) := \psi(a, x)dS(a)$, где dS_a — индуцированная лебегова мера на поверхности S_a. В частности, если ψ — неотрицательная функция, то мы имеем дело с борелевской мерой. Преобразование Фурье заряда $d\mu_a$ определяется следующим интегралом:

$$\hat{d}\mu_a(\xi) := \int\limits_{S(a)} e^{ix\cdot\xi} d\mu_a(x), \tag{1.1}$$

что соответствует преобразованию Фурье обобщенной функции, заданной зарядом $d\mu_a$ (см. [10]), где $x \cdot \xi$ — скалярное произведение векторов x и ξ.

В настоящей работе мы рассмотрим следующую задачу: *найти точную нижнюю грань p_0 множества $\{p : \hat{d}\mu_a \in L^p(\mathbb{R}^{n+1})\}$*, где $L^p(\mathbb{R}^{n+1})$ — пространство интегрируемых функций со степенью $p (1 \leqslant p < \infty)$.

Замечание 1.1. Аналогичная задача может быть рассмотрена для гладких поверхностей коразмерности строго больше единицы.

Работа выполнена при поддержке Исполнительного Комитета по координации Науки и технологий при КМ Республики Узбекистан, гранты ОТ-Ф-4-69 и ОТ-Ф-4-37/29.

Замечание 1.2. Вообще говоря, p_0 может стремиться к бесконечности. Например, для гиперплоскости соответствующее преобразование Фурье не суммируемо ни для какого конечного значения p. Однако, если гиперповерхность удовлетворяет так называемому условию «кривизны» (см. [30]), то p_0 — конечное число. Задача о точном значении этого числа весьма сложна и является одной из нерешенных задач классического анализа. Ниже мы получим некоторые оценки для точной грани p_0 и найдем точное значение p_0 для некоторого класса гиперповерхностей.

1.2. Краткая история проблемы. Для тригонометрических интегралов с полиномиальными фазовыми функциями проблема суммируемости была рассмотрена И. М. Виноградовым [4], Хуа-Ло-Кеном [19] в связи с некоторыми проблемами теории чисел. В этом случае степень тригонометрического интеграла интегрируется по пространству коэффициентов полинома. Далее, в работе [2] Г. И. Архипова, А. А. Карацуба и В. Н. Чубарикова было предложено полное решение этой задачи в случае однократных тригонометрических интегралов с полиномиальной фазой. Более того, в этой работе получены оценки сверху для показателя суммируемости кратных тригонометрических интегралов. Также в работе [8] получены аналогичные результаты относительно преобразования Фурье гладких мер (зарядов), сосредоточенных на кривых с кручением, не имеющим нулей бесконечного порядка.

Задача о точном показателе суммируемости кратных тригонометрических интегралов с полиномиальной фазой до сих пор остается открытой. Известны только некоторые результаты о конечности показателя суммируемости, полученные в работе [2](см. также [14]).

В 1996 году Дж. Мокенхаупт [23] показал связь между задачей о точном показателе суммируемости тригонометрических интегралов и проблемой об ограничении преобразования Фурье на гладких поверхностях. Следует отметить серию статьей Дж. Вака и А. Сегера (см. [15]), посвященных к этой проблеме, где используются результаты работы [2].

1.3. Мотивы проблемы. Задача о точном показателе суммируемости преобразования Фурье зарядов (мер) имеет несколько причин. Как отмечено выше, один из них связан с методом тригонометрических сумм (см. [2], а также [4]). Другим мотивом задачи о суммируемости является задача об ограничении преобразования Фурье на множествах меры нуль. Известны некоторые результаты об ограничении преобразования Фурье на гладких поверхностях, более подробное их обсуждение содержится в [28, 30] (см. также [21, 22] для окончательных результатов в случае двумерных гиперповерхностей).

Обратим внимание на недавнюю работу Л. Эрдоша и М. Салмхофера [17], в которой рассмотрена задача о суммируемости преобразования Фурье мер, сосредоточенных на двумерных гиперповерхностях, заданных дисперсионным соотношением дискретного оператора Шредингера. Следует отметить, что эти поверхности удовлетворяют некоторым условиям невырожденности. Оказывается, показатель суммируемости осцилляторного интеграла позволяет получить оценку для некоторого кратного интеграла, связанного с дискретным оператором Шредингера. В данной работе мы рассмотрим проблему суммируемости преобразования Фурье зарядов для широких классов гиперповерхностей многомерного Евклидова пространства. Кроме того, в трехмерном случае мы получим более точные оценки.

Работа состоит из введения (раздел 1) и пяти разделов 2–6. В разделе 2 приведена формулировка основных результатов. Далее, в разделах 3-4 рассматриваются аналоги классической подготовительной теоремы Вейерштрасса и доказываются некоторые вспомогательные утверждения, необходимые для применения в доказательствах основных результатов и дальнейшего изложения материала. В следующем разделе 5 приведено доказательство основных результатов. Затем, в разделе 6, показана точность полученных результатов. Отметим, что некоторые результаты, приведенные здесь в более или менее слабой форме, опубликованы в статье [27] авторов. Некоторые результаты, касающихся к подготовительной теоремы Вейерштрасса, приводятся с доказательствами для полноты изложения и ясности в применении.

2. Формулировка основных результатов

Прежде чем перейти к обсуждению результатов нашей работы, мы введем необходимые определения и обозначения. В работе C, c обозначают любые константы. Они могут изменяться от строки к строке. Так, например, выполняются соотношения $C + C = C$ или $2C = C$ и т. п.

Через $K_l(x)$ обозначим класс гладких гиперповерхностей, имеющих хотя бы l ненулевых главных кривизн в точке $x \in S$. Далее, соотношение $S \subset K_l$ означает, что в каждой точке $x \in S$ имеет место включение $S \subset K_l(x)$.

В. Литтман [30] доказал, что если гиперповерхность принадлежит классу K_l, то интеграл (1.1) имеет равномерную оценку

$$\hat{d\mu}(\xi) = O(|\xi|^{-l/2}) \quad \text{при} \quad |\xi| \to +\infty.$$

В частности, если гауссова кривизна гиперповерхности в некоторой точке отлична от нуля, то преобразование Фурье гладких мер, сосредоточенных в достаточно малой окрестности этой точки, разлагается в асимптотический ряд. Более того, если S — гладкая, компактная гиперповерхность, то согласно классической теореме Сарда [1] для п.в. направлений $\omega \in S^n$ (где S^n — единичная сфера в $\mathbb{R}^{n+1}$ с центром в начале координат) имеет место соотношение:

$$\hat{d\mu}(r\omega) = O(r^{-n/2}) \quad \text{при} \quad r \to +\infty.$$

Поэтому естественно определяется следующая максимальная функция Рэндола:

$$M(\omega) := \sup_{r>0} r^{\frac{n}{2}} |\hat{d\mu}(r\omega)|, \tag{2.1}$$

где $\omega \in S^n$ и $\xi = r\omega$. Максимальная функция, соответствующая

$$\hat{d\mu}_a(\xi) = \int\limits_{S(a)} e^{ix\cdot\xi} d\mu_a(x),$$

обозначается через M_a.

Аналогичные максимальные функции введены Рэндолом для исследования преобразования Фурье индикатора выпуклых компактных областей с аналитической границей [25]. Позднее И. Свенссон [31] рассмотрел и исследовал максимальные функции для компактных выпуклых областей с гладкой границей.

В работах [25,31] доказано, что если S является гладкой границей выпуклой компактной области и имеет конечный линейный тип (т. е. каждая касательная прямая имеет конечный порядок касания с гиперповерхностью), то существует положительное число ε такое, что $M \in L^{2+\varepsilon}(S^n)$.

Следует отметить, что методы этих работ неприменимы для невыпуклых гиперповерхностей (см. [5], а также [11]). Мы рассмотрим аналогичную задачу о суммируемости для некоторых невыпуклых гиперповерхностей. Основным результатом настоящей работы является следующая теорема.

Теорема 2.1. *Предположим, что $S(a) \subset \mathbb{R}^{n+1}$ (с параметром $a \in \mathbb{R}^m$) — семейство аналитических гиперповерхностей, удовлетворяющее условиям*:

1) $S(0) \subset \mathbb{R}^{n+1}$ — *аналитическая гиперповерхность и* $S(0) \in K_{n-1}$;
2) *для гауссовой кривизны $K(a, x)$ гиперповерхности $S(a)$ выполняется условие*: $K(0, \cdot) \not\equiv 0$.

Тогда имеют место следующие утверждения:

(i) *Существуют окрестность $V \times U \subset \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^{n+1}$ и $p_m > 2$ такие, что для любой функции $\psi \in C_0^\infty(V \times U)$ справедливо включение*: $M_a \in L^{p_m}(S^n)$, *где M_a — максимальная функция, соответствующая $\hat{d\mu}_a(r\omega)$. Более того, интеграл*

$$\int\limits_{S^n} M_a^{p_m} d\omega$$

равномерно ограничен относительно $a \in V \subset \mathbb{R}^m$.

(ii) *Если $p_m > 2(n+1)/n$, то для любого $p > 2(n+1)/n$ справедливо включение*: $\hat{d\mu}_a \in L^p(\mathbb{R}^{n+1})$. *Более того, для любого фиксированного $p > 2(n+1)/n$ интеграл*

$$\int\limits_{\mathbb{R}^{n+1}} |\hat{d\mu}_a(\xi)|^p d\xi$$

равномерно ограничен относительно $a \in V$.

(iii) *Если* $2 < p_m \leqslant 2(n+1)/n$, *то для любого* $p > (2n+2-p_m)/(n-1)$ *имеет место включение*: $\hat{d\mu}_a \in L^p(\mathbb{R}^{n+1})$. *Кроме того, для любого фиксированного числа* $p > (2n+2-p_m)/(n-1)$ *интеграл*

$$\int\limits_{\mathbb{R}^{n+1}} |\hat{d\mu}_a(\xi)|^p d\xi$$

равномерно ограничен относительно $a \in V$.

Замечание 2.1. Если S — цилиндр со сферическим основанием, то имеет место включение $S \in K_{n-1}$ и $K \equiv 0$. В этом случае $M \notin L^2(S^n)$. Более того, если $n = 2$, то $\hat{d\mu} \notin L^4(\mathbb{R}^3)$ для некоторой амплитудной функции $\psi(x)$. Помимо этого, для любых $\psi(x) \in C_0^\infty(\mathbb{R}^3)$ при $p > 4$ справедливо включение: $\hat{d\mu} \in L^p(\mathbb{R}^3)$. Таким образом, без условия 2) теоремы 2.1 ее утверждение перестанет быть справедливым.

Для произвольных аналитических гиперповерхностей трехмерного евклидова пространства мы имеем аналогичные результаты, не налагая никаких условий на кривизну. Если рассмотрим заданную гиперповерхность в достаточно малой окрестности фиксированной точки, например, начала координат, то при помощи евклидова движения представим гиперповерхность S как график некоторой функции $x_3 = \Phi(x_1, x_2)$, где Φ — гладкая функция, удовлетворяющая условиям: $\Phi(0, 0) = 0$, $\nabla\Phi(0, 0) = 0$. Тогда мы можем определить высоту гиперповерхности, обозначаемую через $h(S)$, соотношением (см. [3], а также [20]): $h(S) := h(\Phi)$, где $h(\Phi)$ — высота функции Φ, определенная в работе [3]. В работе [20] показана корректность этого определения высоты гиперповерхности.

Теорема 2.2. *Пусть* $S \subset \mathbb{R}^3$ — *произвольная аналитическая гиперповерхность, содержащая начало координат и* $d\mu(x) := \psi(x)dS$, *где* ψ — *гладкая функция, сосредоточенная в достаточно малой окрестности начала координат. Если* h — *высота гиперповерхности в начале координат, то для любого числа* $p > 2 + h$ *имеет место включение*: $\hat{d\mu} \in L^p(\mathbb{R}^3)$. *Более того, если* $h = 2$, *а* $K \not\equiv 0$, *то существует положительное число* $\varepsilon > 0$ *такое, что справедливо включение*: $\hat{d\mu} \in L^{(4-\varepsilon)}(\mathbb{R}^3)$.

Замечание 2.2. Отметим, что последнее утверждение теоремы 2.2 не следует из теоремы 2.1, примененной к трехмерному случаю, потому что в случае $h = 2$ обе главные кривизны могут обратится в нуль в начале координат.

Замечание 2.3. В работе [17] доказана суммируемость преобразования Фурье борелевских мер при некоторых дополнительных условиях. В частности, предполагается, что гауссова кривизна имеет лишь нули первого порядка, т. е. градиент этой кривизны отличен от нуля там, где кривизна обращается в нуль. Легко показать, что в этом случае в каждой точке хотя бы одна из главных кривизн отлична от нуля. Для таких гиперповерхностей трехмерного пространства в каждой точке высота не превосходит двух, и более того, гауссова кривизна не может иметь нулей бесконечного порядка. Поэтому наши результаты не только обобщают, но и улучшают оценки работы [17].

Следующее утверждение показывает точность полученных результатов.

Предложение 2.1. *Для любого положительного числа* ε *существует гиперповерхность* $S \subset \mathbb{R}^3$, *удовлетворяющая условиям*: $S \in K_1$, $K(x) \not\equiv 0$, *но при этом* $\hat{d\mu} \notin L^{(4-\varepsilon)}(\mathbb{R}^3)$.

Для доказательств основных результатов существенно используются полиномы Вейерштрасса и аналоги классической подготовительной теоремы Вейерштрасса, которые мы обсудим в следующем разделе.

3. Полиномы Вейерштрасса

3.1. Обобщение классической теоремы Вейерштрасса. Хорошо известная теорема Вейерштрасса говорит, что если функция $f(z, w)$ голоморфна в окрестности точки $(z_0, w_0) \in \mathbb{C}_z^n \times \mathbb{C}_w$ и $f(z_0, w_0) = 0$, но $f(z_0, w) \not\equiv 0$, то в некотором поликруге $U = V(z^0, r) \times W(w^0, r) \subset \mathbb{C}_z^n \times \mathbb{C}_w$ она представляется в виде

$$f(z, w) = [(w - w_0)^m + c_1(z)(w - w_0)^{m-1} + \dots + c_m(z)]\varphi(z, w), \tag{3.1}$$

где $m \geqslant 1$ — порядок нуля функции $f(z_0, w)$ в точке $w = w_0$, $c_k(z), k = 1, \dots, m$ — голоморфные функции в V, $c_k(z_0) = 0$, и $\varphi(z, w)$ — голоморфная функция в U, $\varphi(z, w) \neq 0$, при $(z, w) \in U$.

Псевдополином $(w-w_0)^m + c_{m-1}(z)(w-w_0)^{m-1} + \dots + c_0(z)$ называется полиномом Вейерштрасса.

В цитированных выше работах обычно предполагается, что фазовая функция является аналитической в фиксированной критической точке $(z_0, w_0) \in \mathbb{C}_z^n \times \mathbb{C}_w$. Как показал В. И. Арнольд [1] условие $f(z_0, w) \not\equiv 0$ эквивалентно тому, что фазовая функция является аналитической деформацией конечнократной изолированной критической точки. Однако, в приложениях часто встречаются фазовые функции, имеющие неизолированные критические точки. И поэтому естественно ожидать справедливости аналога теоремы Вейерштрасса без выполнения условия $f(z_0, w) \not\equiv 0$, хотя $f(z, w) \not\equiv 0$. Таким аналогом было бы утверждение: в некоторой окрестности $U = V \times W$ точки (z_0, w_0) функция представляется в виде

$$f(z, w) = [c_m(z)(w - w_0)^m + c_{m-1}(z)(w - w_0)^{m-1} + \dots + c_0(z)]\varphi(z, w), \tag{3.2}$$

где $c_k(z), k = 0, 1, \dots, m$, голоморфны в V и φ голоморфна в $U, \varphi(z, w) \neq 0, \forall (z, w) \in U$. Такой результат был бы полезным в изучении осцилляторных интегралов и в оценках максимальных операторов, ассоциированных с аналитическими гиперповерхностями.

Когда $n = 1$ представление (3.2) имеет место так как в этом случае, легко показать, что в окрестности $U = V \times W$ точки (z_0, w_0) функция $f(z, w)$ представляется как $f(z, w) = (z - z_0)^j \varphi(z, w)$, где $j \geqslant 0, \varphi(z, w) \in \mathcal{O}(U), \varphi(z_0, w) \not\equiv 0$. Однако, известный контрпример Осгуда (см. например, [26]) показывает, что при $n > 1$ не всегда возможно разложение функции на множители (3.2). Тем не менее имеет место (см. [12, 26]).

Лемма 3.1. *Если $f(z, w) \in \mathcal{O}(V \times W)$, где $V = V(0, \varepsilon) \subset \mathbb{C}_z^n$, $W = \{|w| < \varepsilon\}$ полицилиндр с центром в начале координат $(0, 0)$ и $f(0, 0) = 0$, то $f(z, w)$ представляется в виде $f(z, w) = c(z)\varphi(z, w)$, где $c(z) \in \mathcal{O}(U)$, $\varphi(z, w) \in \mathcal{O}(V \times W)$ и размерность аналитического множества $G_\varphi = \{z_0 \in V : \varphi(z_0, w) \equiv 0\}$ не превосходит $n - 2$ ($G_\varphi = \varnothing$ для $n = 1$).*

Для описания локальной структуры нулей голоморфных функций в направлении ow весьма полезна следующая

Лемма 3.2. *Пусть $f(z, w)$ голоморфная функция в полицилиндре $V \times W$, причем $f(0, w) \equiv 0$. Тогда в некоторой окрестности $V' \times W' \subset V \times W$ функция $f(z, w)$ представляется как*

$$f(z, w) = w^l [c_0(z)g_0(z, w) + \dots + c_m(z)g_m(z, w)], \tag{3.3}$$

где $l \geqslant 0$, $c_k(z) \in \mathcal{O}(V')$, $g_k(z, w) \in \mathcal{O}(V' \times W')$, $k = 0, \dots, m$, $|g_0(0, w)| + \dots + |g_m(0, w)| \not\equiv 0$.

Доказательство. Если $f(z, 0) \equiv 0$, то f представляется в виде $f(z, w) = w^l \varphi(z, w)$, где $l > 0$, $\varphi(z, 0) \not\equiv 0$.

Разлагаем функцию $\varphi(z, w)$ в ряд Гартогса

$$\varphi(z, w) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k(z) w^k, \quad c_k(z) \in \mathcal{O}(U).$$

Тогда $G_\varphi = \{z_0 \in V : \varphi(z_0, w) \equiv 0\} = \{c_0(z) = 0\} \cap \{c_1(z) = 0\} \cap \dots$.

Так как пространство ${}_{(n+1)}\mathcal{O}_{(0,0)}$ ростков голоморфных функций в $(0, 0) \in \mathbb{C}^{(n+1)}$ является Нетеровым кольцом, т. е. произвольный идеал ${}_{(n+1)}\mathcal{O}_{(0,0)}$ имеет конечный базис, то идеал I_F порожденный семейством $F = \{c_0(z), c_1(z), \dots\}$ имеет конечный базис: существует конечная система $\{c_0, \dots, c_m\} \subset F$ такая, что произвольная функция $\phi \in I_F$ в некоторой окрестности $(0, 0) \in V' \times W' \subset V \times W$ представляется в виде

$$\phi(z, w) = c_0(z)g_0(z, w) + \dots + c_m(z)g_m(z, w),$$

где $g_k(z, w) \in \mathcal{O}(V' \times W')$, $k = 0, \dots, m$. Отсюда следует, что в некоторой окрестности $V' \times W' \subset V \times W$ функция $\varphi(z, w)$ представляется как $\varphi(z, w) = c_0(z)g_0(z, w) + \dots + c_m(z)g_m(z, w)$ или же, окончательно, функция $f(z, w)$ имеет вид

$$f(z, w) = w^l [c_0(z)g_0(z, w) + \dots + c_m(z)g_m(z, w)], \tag{3.4}$$

где $c_k(z) \in \mathcal{O}(V')$, $c_k(0) = 0$, $g_k(z, w) \in \mathcal{O}(V' \times W')$, $k = 0, \dots, m$, $l \geqslant 0$.

Если в (3.4) $|g_0(0,w)|+\dots+|g_m(0,w)| \equiv 0$, то каждую из функций $g_k(z,w)$ применяем опять (3.4):

$$g_k(z,w) = w^{l_k}[c_0^k(z)g_0^k(z,w) + \dots + c_{m_k}^k(z)g_{m_k}^k(z,w)],$$

где $c_j^k(z) \in \mathcal{O}(V'')$, $c_j^k(0) = 0$, $g_j^k(z,w) \in \mathcal{O}(V'' \times W'')$, $k = 0,\dots,m$, $j = 0,\dots,m_k$, $l_k \geqslant 0$. После конечного числа шагов (ибо процесс не может продолжаться бесконечно) мы приходим к

$$f(z,w) = w^{l'}[c_0'(z)g_0'(z,w) + \dots + c_m'(z)g_m'(z,w)].$$

□

Имеет место глобальный многомерный (относительно w) вариант (3.2) для произвольной функции $f(z,w) \in \mathcal{O}\left(D_z \times \mathbb{C}_w^k\right)$ (см. [26]).

Теорема 3.1. *Пусть $f(z,w)$ голоморфна в области $\Omega = D_z \times \mathbb{C}_w \subset \mathbb{C}^{n+1}$, где в $D_z \subset \mathbb{C}^n$ разрешима любая вторая проблема Кузена. Обозначим через $n_f(z_0)$ число нулей целой функции $f(z_0,w)$ по переменной $w \in \mathbb{C}$ с учетом кратности, причем для удобства считаем $n_f(z_0) = -1$, если $f(z_0,w) \equiv 0$. Если множество $\Im(f) := \{z \in D : n_f(z) < \infty\}$ не является плюриполярным в D, то функция $f(z,w)$ представляется а виде* (3.2)*, где $c_k(z) \in \mathcal{O}(D), k = 0,1,\dots,m, \varphi(z,w) \in \mathcal{O}(\Omega), \varphi(z,w) \neq 0$ для любой точки $(z,w) \in \Omega$.*

Теорема 3.2. *Предположим, что $f(z,w), z = (z_1,\dots,z_n), w = (w_1,\dots,w_k), n \geqslant 1, k \geqslant 1$, голоморфна в области $\Omega = D_z \times C_w^k \subset \mathbb{C}^{n+k}$, где в $D_z \subset \mathbb{C}^n$ любая вторая проблема Кузена разрешима. Если совокупность точек $z_0 \in D$, для которой множество $Z_{z_0} = \{w \in \mathbb{C}^k : f(z_0,w) = 0\}$ — алгебраическое, не является плюриполярным в D, т. е. если множество $\Im_f = \{z_0 \in D : Z_{z_0}$ является алгебраическим в $\mathbb{C}^k\}$ не является плюриполярным множеством, то функция $f(z,w)$ представляется в виде*

$$f(z,w) = Q_m(z,w)\varphi(z,w),$$

где $Q_m(z,w)$ — псевдополином некоторой степени $m \geqslant 0$ и функция $\varphi(z,w) \in \mathcal{O}(\Omega)$, $\varphi(z,w) \neq 0$, $\forall\,(z,w) \in \Omega$.

Напомним, что псевдополином степени m в области $\Omega = D_z \times \mathbb{C}_w^k \subset \mathbb{C}^{n+k}$ выражается в виде:

$$Q_m(z,w) = \sum_{|\alpha|=m} C_\alpha(z)w^\alpha + \sum_{|\alpha|=m-1} C_\alpha(z)w^\alpha + \dots + C_0(z),$$

где $\alpha = (\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n), |\alpha| = \alpha_1+\alpha_2+\dots+\alpha_n, w^\alpha = w_1^{\alpha_1}w_2^{\alpha_2}\dots w_n^{\alpha_n}$ и $C_\alpha(z) \in \mathcal{O}(D), \forall|\alpha| \leqslant m$.

3.2. Вещественно-аналитический случай. Аналог теоремы Вейерштрасса имеет место и для вещественно-аналитических функций: пусть $f(x,t)$ вещественнозначная вещественно-аналитическая функция в точке $(0,0) \in \mathbb{R}_x^n \times \mathbb{R}_t^1$, такая, что $f(0,0) = 0$, но $f(0,t) \not\equiv 0$. Соответствующая голоморфная функция $f(z,w)$ согласно подготовительной теореме Вейерштрасса в некоторой окрестности $U = V \times W$ точки $(0,0)$ представляется как

$$f(z,w) = [w^m + c_{m-1}(z)w^{m-1} + \dots + c_0(z)]\varphi(z,w),$$

где $m \geqslant 1$ порядок нуля $f(0,t)$ в $t = 0, c_k(z), k = 0,1,\dots,m-1$, голоморфные функции в $V, c_k(0) = 0$ и $\varphi(z,w)$ является голоморфной и $\neq 0$ в U функцией. Положим $f(z,w) = \sum\limits_{j=0}^{\infty} a_j(z)w^j$, $a_j(z) \in \mathcal{O}(V)$. Так как $f(x,t)$ вещественнозначная, то все тейлоровы коэффициенты $a_j(x)$ также вещественны в $V \cap \mathbb{R}^n$. Отсюда следует, что если $w = \alpha$ корень функции $f(x,w)$, т. е. $f(x,\alpha) = 0$, то комплексное сопряжение $\overline{\alpha}$ также является корнем, $f(x,\overline{\alpha}) = 0$. Поэтому полином Вейерштрасса $t^m + c_{m-1}(x)t^{m-1} + \dots + c_0(t)$ является вещественнозначным, $c_k(x), k = 0,1,\dots,m-1$, являются вещественнозначными функциями в $V \cap \mathbb{R}^n$. Из соотношения $f(x,t) = [t^m + c_{m-1}(x)t^{m-1} + \dots + c_0(x)]\varphi(x,t)$ мы имеем, что $\varphi(x,t) \neq 0$ также вещественно-аналитическая вещественнозначная функция в $U \cap \mathbb{R}^{n+1}$. Следовательно,

$$f(x,t) = [t^m + c_{m-1}(x)t^{m-1} + \dots + c_0(x)]\varphi(x,t), \tag{3.5}$$

где $c_k(x), k = 0,1,\dots,m-1$, $\varphi(x,t)$ вещественно-аналитические, вещественнозначные функции, $\varphi(x,t) \neq 0$.

Справедлив также глобальный вещественный аналог теоремы 3.1 без условии $f(0,t)\not\equiv 0$ (см. [27]). Пусть $f(x,t)\not\equiv 0$ — вещественно-аналитическая и вещественнозначная функция в области $\Omega = D_x\times\mathbb{R}_t\subset\mathbb{R}^{n+1}$.

Функция $f(x,t)$ — вещественно-аналитическая в области $\Omega = D_x\times\mathbb{R}_t\subset\mathbb{R}^{n+1}$, голоморфно продолжается в некоторой окрестности $\hat\Omega\subset\mathbb{C}^n_z\times\mathbb{C}_w, \hat\Omega\supset\Omega$. Обозначим продолжение функции в $\hat\Omega$ как $\hat f$, $\hat f|_\Omega = f$. Так как для произвольной фиксированной точки $x_0\in D_x$ функция $f(x_0,t)$ аналитически продолжается в $\mathbb{C}$ как целая функция, т. е. $\hat\Omega\cap\{z=x^0\}=\mathbb{C}$, и $D_z\subset\mathbb{R}^n_x\subset\mathbb{C}^n_z$ не является плюриполярной в $\mathbb{C}^n_z$, то существует область $\hat D_z\supset D_x$ такая, что $\hat f$ голоморфна в $\hat D_z\times\mathbb{C}_w$. Без ограничения общности мы предположим, что в $\hat D_z$ разрешима вторая проблема Кузена. Обозначим через $n_f(x_0)$ число нулей функции $\hat f(x_0,w)$ по переменной $w\in\mathbb{C}$ с учетом кратности. Положим $n_f(x_0)=-1$, если $\hat f(x_0,w)\equiv 0$.

Теорема 3.3. *Пусть $f(x,t)$ — вещественно-аналитическая и вещественнозначная функция в области $\Omega = D_x\times\mathbb{R}_t\subset\mathbb{R}^{n+1}$. Если множество $\Im(f) := \{x\in D : n_f(x)<\infty\}$ не является плюриполярным в $\mathbb{C}^n$, $D\subset\mathbb{R}^n\subset\mathbb{C}^n$, то функция $f(x,t)$ представляется как $f(x,t) = [c_m(x)t^m + c_{m-1}(x)t^{m-1}+\dots+c_0(x)]\varphi(x,t)$, где $c_k(x), k=0,1,\dots,m$ — вещественно-аналитические в D и $\varphi(x,t)$ — вещественно-аналитические в Ω, $\varphi(x,t)\neq 0$ для любого $(x,t)\in\Omega$.*

Имеет место многомерный (по t) аналог этой теоремы в следующей форме. Псевдополином степени m в области $\Omega = D_x\times\mathbb{R}^k_t\subset\mathbb{R}^{n+k}$ выражается в виде:

$$Q_m(x,t) = \sum_{|\alpha|=m} C_\alpha(x)t^\alpha + \sum_{|\alpha|=m-1} C_\alpha(z)t^\alpha + \dots + C_0(x),$$

где $\alpha=(\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n), |\alpha| = \alpha_1+\alpha_2+\dots+\alpha_n$, $w^\alpha = w_1^{\alpha_1}w_2^{\alpha_2}\dots w_n^{\alpha_n}$ и $C_\alpha(x)$ является вещественно-аналитической функцией в D $\forall\, 0\leqslant|\alpha|\leqslant m$.

Теорема 3.4. *Предположим, что $f(x,t)$, $x=(x_1,\dots,x_n)$, $t=(t_1,\dots,t_k)$, $n\geqslant 1$, $k\geqslant 1$ — вещественно-аналитическая функция в области $\Omega = D_x\times\mathbb{R}^k_t\subset\mathbb{R}^{n+k}$. Если совокупность точек $x_0\in D$, для которых множество $Z_{x_0} = \{w\in\mathbb{C}^k : \hat f(x_0,w)=0\}$ — алгебраическое, не является плюриполярной в $\mathbb{C}^n, D\subset\mathbb{R}^n\subset\mathbb{C}^n$, т. е., если множество $\Im(f) = \{x_0\in D : Z_{x_0}$ алгебраическая в $\mathbb{C}^k\}$ является не плюриполярным, то функция $f(x,t)$ представляется как*

$$f(x,t) = Q_m(x,t)\varphi(x,t),$$

где $Q_m(x,t)$ — вещественнозначный псевдополином степени $m\geqslant 0$ и функция $\varphi(x,t)$ — вещественнозначная вещественно-аналитическая в Ω, $\varphi(x,t)\neq 0$ для любого $(x,t)\in\Omega$. Здесь функция $\hat f(x,t)$ — голоморфное продолжение $f(x,t)$ на $\hat\Omega\supset\Omega$, $\hat f|_\Omega = f$.

Пусть теперь $f(x,t)\not\equiv 0$ — вещественно-аналитическая и вещественнозначная функция в окрестности точки $(0,0)\in\mathbb{R}^{n+1}$ такая, что $f(0,0)=0$.

Теорема 3.5. *Существует вещественно-аналитическое многообразие Y и отображение $\pi : Y\mapsto\mathbb{R}^n$, которое является композицией конечного числа σ-процессов таких, что для любой точки $y^0\in Y$ существует карта $(y_1,\dots,y_n)$ с центром в точке y^0, для которой справедливо следующее соотношение*:

$$f(\pi(y),t) = (y_1-y_1(y^0))^{k_1}\dots(y_n-y_n(y^0))^{k_n}p(y,t)g(y,t),$$

где $k_j\in\mathbb{N}$, $j=1,2,\dots,n$, $g(y,t)$ — вещественно-аналитическая функция, $(g(0,y^0)\neq 0)$, и $p(y,t)$ — унитарный псевдополином, т. е.

$$p(y,t) = t^m + d_1(y)t^{m-1}+\dots+d_m(y);$$

здесь $d_1,\dots,d_m$ — вещественно-аналитические функции в точке y^0 и $d_l(y^0)=0,\ l=\overline{1,m}$.

Теорема 3.5 доказана в работе [7].

Для C^∞-функций мы имеем следующую теорему, доказанную Б. Мальгранжем (см. [13]).

Теорема 3.6. *Пусть $f(x,t)$ — C^∞-функция от $(x,t) \in \mathbb{R}^{n+1}$ в окрестности точки $(0,0)$, удовлетворяющая условиям:*

$$f = \frac{\partial f}{\partial t} = \dots = \frac{\partial^{k-1} f}{\partial t^{k-1}} = 0, \frac{\partial^k f}{\partial t^k} \neq 0 \quad \text{в} \quad (0,0).$$

Тогда функция f представляется как

$$f(x,t) = (t^k + a_{k-1}(x)t^{k-1} + \dots + a_0(x))c(x,t),$$

где a_j и c являются C^∞-функциями в окрестностях точек 0 и $(0,0)$ соответственно, $a_j(0) = 0$, $c(0,0) \neq 0$. Если f — вещественнозначная функция, то такими являются a_j и c.

4. Некоторые вспомогательные утверждения

4.1. Пусть $V(\mathbb{R})$ — пространство функций с ограниченной вариацией в $\mathbb{R}$. Естественная норма этого пространства обозначается через $\|.\|_V$, т. е.

$$\|b\|_V = |b(-\infty)| + V_{\mathbb{R}}[b],$$

где $V_{\mathbb{R}}[b]$ — полная вариация функции b в $\mathbb{R}$.

Пусть $\phi(A,\, x)$ — семейство гладких функций, зависящее от параметров $A \in \mathbb{R}^m$. Берем фазовую функцию следующего вида:

$$\Phi(s,\, A,\, x) := \phi(A,\, x) + sx, \tag{4.1}$$

где s рассматривается как малый параметр. Рассмотрим также соответствующий осцилляторный интеграл с фазой вида (4.1):

$$J(s,\, A,\, \lambda) = \int\limits_{\mathbb{R}} b(s,\, A,\, x) \exp(i\lambda\Phi(s,\, A,\, x))dx \tag{4.2}$$

и введем максимальную функцию, соответствующую осцилляторному интегралу (4.2):

$$m(s,\, A) = \sup_{\lambda > 0} |\lambda|^{1/2} |J(s,\, A,\, \lambda)|.$$

Для измеримого множества $E \subset \mathbb{R}^m$ с конечной мерой Лебега и числа $q > 1$ обозначим через $L^{q-0}(E)$ множество функций

$$L^{q-0}(E) := \bigcap_{p<q} L^p(E).$$

Основным результатом этого раздела является следующая теорема.

Теорема 4.1. *Если $\phi(A,\, x)$ имеет особенность типа A_k в начале координат, то существует окрестность нуля $W \times V \times U \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}$ и функция $\Psi(s,\, A)$, удовлетворяющие следующим условиям:*

1) *при любой амплитудной функции $b(s,A,x) \in C_0^\infty(W \times V \times U)$ для осцилляторного интеграла $J(s,\, A,\, \lambda)$ справедлива оценка*

$$|J(s,\, A,\, \lambda)| \leqslant \frac{\|b(s,\, A,\, \cdot)\|_V \cdot \Psi(s, A)}{\sqrt{|\lambda|}};$$

2) *при любой фиксированной точке $A \in V$ функция $\Psi(\cdot,\, A)$ принадлежит классу $L^{\frac{2k}{k-1}-0}(W)$;*
3) *для любого фиксированного положительного числа $p < \dfrac{2k}{k-1}$ норма $L^p(W)$ функции $\Psi(A,\, \cdot)$ равномерно ограничена в V.*

Доказательство. Сначала сформулируем стандартную лемму о нормальных формах функций, имеющих особенность эллиптического типа в начале координат [1].

Лемма 4.1. *Пусть $\phi(A,\, x)$ — гладкая функция, определенная в некоторой окрестности начала координат в $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^2$, и $\Phi(s,\, A,\, x)$ — функция, определенная соотношением (4.2), где*

$s \in \mathbb{R}^2$, $x \in \mathbb{R}^2$ и sx — скалярное произведение. Если функция $\phi(0, x)$ имеет особенность эллиптического типа кратности k в начале координат, то существуют окрестность нуля $W \times V \times U \subset \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^2$, гладкое отображение

$$X : W \times V \times U \mapsto \mathbb{R}^2$$

и гладкие функции $\sigma_j(s, A)(j = 0, \dots, k-1)$, удовлетворяющие условиям:

1)
$$X(0) = 0, \quad \det \begin{pmatrix} \dfrac{\partial X_1(0)}{\partial x_1} & \dfrac{\partial X_1(0)}{\partial x_2} \\ \dfrac{\partial X_2(0)}{\partial x_1} & \dfrac{\partial X_2(0)}{\partial x_2} \end{pmatrix} \neq 0, \quad \det \begin{pmatrix} \dfrac{\partial \sigma_1(0)}{\partial s_1} & \dfrac{\partial \sigma_1(0)}{\partial s_2} \\ \dfrac{\partial \sigma_2(0)}{\partial s_1} & \dfrac{\partial \sigma_2(0)}{\partial s_2} \end{pmatrix} \neq 0;$$

2) *для функции $\Phi(s, A, x)$ выполняется равенство*

$$\Phi(s, A, x(s, A, X)) = f(X_1, X_2) + \sum_{j=3}^{k-1} \sigma_j(s, A) e_j(X) + \sigma_1(s, A) X_1 + \sigma_2(s, A) X_2 + \sigma_0(s, A),$$

где $f(X_1, X_2)$ — квазиоднородный многочлен, имеющий особенность эллиптического типа в начале координат, и $\{1, X_1, X_2, \{e_j(X)\}_{j=3}^{k-1}\}$ — базисные мономы локальной алгебры особенностей.

Единственное отличие этой леммы от общей теоремы Мозера [1] состоит в том, что ранг отображения, задаваемого функциями (σ_1, σ_2), равняется двум в некоторой окрестности начала координат. Это свойство существенно используется при доказательстве суммируемости функции $\Psi(\cdot, A)$. В частности, в одномерном случае $s \in \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}$ функция $\Phi(s, A, x)$ приводится к виду:

$$\Phi(s_1, A, x(s_1, A, X)) = X^{k+1} + \sigma_{k-1}(s_1, A) X^{k-1} + \dots + \sigma_2(s_1, A) X^2 + \sigma_1(s_1, A) X + \sigma_0(s_1, A),$$

причем $\dfrac{\partial \sigma_1(0)}{\partial s_1} \neq 0$.

Теперь приведем доказательство теоремы 4.1. Согласно лемме 4.1, достаточно провести доказательство в случае одномерных осцилляторных интегралов с фазой, имеющей нормальный вид: $\Phi_1(s_1, A, X) := \Phi(s_1, A, x(s_1, A, X))$. В некоторой окрестности нуля каждая функция $\sigma_l(s_1, A)\,(l = 2, \dots, k-1)$ записывается в виде (см. [13]):

$$\sigma_l(s_1, A) = \sigma_1(s_1, A) g_l(s_1, A) + \tilde{\sigma}_l(A),$$

где $g_l(s_1, A)$, $\tilde{\sigma}_l(A)$ — некоторые гладкие функции. С учетом этих равенств фазовая функция $\Phi_1(s_1, A, X)$ преобразуется следующим образом:

$$\Phi_1(s_1, A, X) = X^{k+1} + \tilde{\sigma}_{k-1}(A) X^{k-1} + \dots + \tilde{\sigma}_2(A) X^2 + \sigma_1(s_1, A) \varphi(s_1(\sigma_1, A), A, X) X + \sigma_0(s_1(\sigma_1, A), A),$$

где

$$\varphi(s_1(\sigma_1, A), A, X) := 1 + g_2(s_1(\sigma_1, A), A) X + \dots + g_{k-1}(s_1(\sigma_1, A), A) X^{k-1}$$

и σ_1 рассматривается как новая независимая переменная. Доказательство теоремы 4.1 проводится по индукции относительно k. Если $k = 1$, то согласно лемме Ван дер Корпута [32] искомая оценка тривиально выполняется. Предположим, что $k > 1$ и утверждение теоремы 4.1 доказано для всех $\leqslant k - 1$. Мы докажем его для k.

Введем обозначение:

$$\rho(A) := |\tilde{\sigma}_2(A)|^{\frac{k+1}{k-1}} + \dots + |\tilde{\sigma}_{k-1}(A)|^{\frac{k+1}{2}}.$$

Для параметров $(\sigma_1, \rho(A))$ рассмотрим два случая:

1-*й случай*: $\rho(A) < \varepsilon |\sigma_1|$, где ε — фиксированное, достаточно малое положительное число. В этом случае в осцилляторном интеграле сделаем замену переменных $X = |\sigma_1|^{\frac{1}{k}} x$ и получим:

$$J(\sigma_1, A, \lambda) = |\sigma_1|^{\frac{1}{k}} e^{i\lambda \sigma_0(s_1(A, \sigma_1), A)} \int e^{i\lambda |\sigma_1|^{\frac{k+1}{k}} \Phi_2(\sigma_1, \tilde{\sigma}(A), x)} b(\sigma_1, A, |\sigma_1|^{\frac{1}{k}} x) dx,$$

где

$$\Phi_2(\sigma_1, \tilde{\sigma}(A), x) := x^{k+1} + \frac{\tilde{\sigma}_{k-1}(A)}{|\sigma_1|^{\frac{2}{k}}} x^{k-1} + \dots + \frac{\tilde{\sigma}_2(A)}{|\sigma_1|^{\frac{k-1}{k}}} x^2 + sgn(\sigma_1) x \varphi(\sigma_1, A, s_1(A), x),$$

и

$$\varphi(\sigma_1,\, A,\, s_1(A),\, x) := 1 + g_2(s_1(A,\,\sigma_1),\, A)|\sigma_1|^{\frac{1}{k}}x + \cdots + g_{k-1}(s_1(A,\,\sigma_1),\, A)|\sigma_1|^{\frac{k-1}{k}}x^{k-1}.$$

Так как коэффициенты полинома Φ_2 ограничены, то множество его критических точек содержится в некотором компакте $\{|x| \leqslant N\}$. Берем гладкую функцию χ с компактным носителем такую, что $\chi(x) \equiv 1$ при $x \in [-N-1,\, N+1]$. С помощью этой функции запишем интеграл $J(s_1,\, A,\, \lambda)$ в виде суммы следующих двух интегралов:

$$J_0(\sigma_1,\, A,\, \lambda) := |\sigma_1|^{\frac{1}{k}} e^{i\lambda\sigma_0(s_1(A,\,\sigma_1),\, A)} \int e^{i\lambda|\sigma_1|^{\frac{k+1}{k}}\Phi_2(\sigma_1),\,\tilde{\sigma}(A),\,x)} b(|\sigma_1,\, A, |\sigma_1|^{\frac{1}{k}}x)\chi(x)dx$$

и $J_1(\sigma_1,\, A,\, \lambda) := J(\sigma_1,\, A,\, \lambda) - J_0(\sigma_1,\, A,\, \lambda)$.

Заметим, что носитель амплитуды осцилляторного интеграла $J_1(\sigma_1,\, A,\, \lambda)$ не содержит критических точек фазовой функции, более того, ее вторая производная оценивается снизу с некоторой положительной константой. Поэтому, мы можем применить лемму Ван дер Корпута и иметь оценку [32] (см. также [2]):

$$|J_1(\sigma_1,\, A,\, \lambda)| \leqslant \frac{\|b(\sigma_1,\, A,\, \cdot)\|_V \cdot c}{|\lambda|^{\frac{1}{2}}|\sigma_1|^{\frac{k-1}{2k}}}. \tag{4.3}$$

Далее, носитель амплитуды осцилляторного интеграла $J_0(\sigma_1,\, A,\, \lambda)$ находится в фиксированном компакте. Мы можем считать, что фазовая функция является малой деформацией функции $x^{k+1} + \operatorname{sgn}(\sigma_1)x$. Следовательно, если σ_1 меняется в достаточно малой окрестности нуля и ε — достаточно малое положительное число, то фазовая функция при всех рассматриваемых значениях параметров имеет не более двух невырожденных критических точек. Поэтому для интеграла $J_0(\sigma_1,\, A,\, \lambda)$ также справедлива оценка вида (4.3).

2-*й случай*: $\rho(A) \geqslant \varepsilon|\sigma_1|$, или, что то же самое, $|\sigma_1| \leqslant M\rho(A)$, где $M := \varepsilon^{-1}$.

В этом случае в интеграле (4.1) сделаем замену переменных $X = \rho^{\frac{1}{k+1}}x$ (где $\rho := \rho(A)$) и получим:

$$J = \rho^{\frac{1}{k+1}} e^{i\lambda\sigma_0(s_1(A,\,\sigma_1),\, A)} \int e^{i\lambda\rho\Phi_3(\tilde{\sigma}_1,\,\varsigma(A),\,x)} b(\sigma_1,\, A, \rho^{\frac{1}{k+1}}x)dx,$$

где

$$\Phi_3(\tilde{\sigma}_1,\, \varsigma(A),\, x) := x^{k+1} + \varsigma_{k-1}(A)x^{k-1} + \cdots + \varsigma_2(A)x^2 + \tilde{\sigma}_1 x\varphi_1(\sigma_1,\, A,\, s_1(A),\, x),$$

$$\varphi_1(\sigma_1,\, A,\, s_1(A),\, x)) := 1 + g_2(s_1(A,\,\sigma_1),\, A)\rho^{\frac{1}{k+1}}x + \cdots + g_{k-1}(s_1(A,\,\sigma_1),\, A)\rho^{\frac{k-1}{k+1}}x^{k-1}$$

и

$$g_l := \frac{\tilde{\sigma}_l}{\rho^{\frac{k+1-l}{k+1}}},\ (l = 2, \ldots, k-1).$$

Так как коэффициенты полинома Φ_3 также ограничены, то множество его критических точек содержится в некотором компакте $\{|x| \leqslant N_1\}$. Берем гладкую функцию χ с компактным носителем такую, что $\chi(x) \equiv 1$ при $x \in [-N_1 - 1,\, N_1 + 1]$. С помощью этой функции запишем интеграл $J(\sigma_1,\, A,\, \lambda)$ в виде суммы следующих двух интегралов:

$$J_0(\sigma_1,\, A,\, \lambda) := \rho^{\frac{1}{k+1}} e^{i\lambda\sigma_0(s_1(A,\,\sigma_1),\, A)} \int e^{i\lambda\rho\Phi_3(\tilde{\sigma}_1,\,\varsigma(A),\,x)} b(\sigma_1,\, A,\, \rho^{\frac{1}{k+1}}x)\chi(x)dx$$

и

$$J_1(\sigma_1,\, A,\, \lambda) := J(\sigma_1,\, A,\, \lambda) - J_0(\sigma_1,\, A,\, \lambda).$$

Аналогично к предыдущему случаю носитель амплитуды осцилляторного интеграла $J_1(\sigma_1,\, A,\, \lambda)$ не содержит критических точек фазовой функции, а ее вторая производная оценивается снизу с некоторым положительным числом. Применяя лемму Ван дер Корпута, имеем оценку вида (4.3).

Далее, носитель амплитуды осцилляторного интеграла $J_0(\sigma_1,\, A,\, \lambda)$ находится в фиксированном компакте. Причем $\varsigma := (\varsigma_2, \ldots, \varsigma_{k-1})$ лежит на квазисфере $\Sigma := \{\varsigma \in \mathbb{R}^{k-2} : \rho(\varsigma) = 1\}$, а $|\varsigma_1| \leqslant M$. Фиксируем точку $(\varsigma^0,\, \varsigma_1^0) \in \Sigma \times [-M,\, M]$. Тогда фазовая функция является деформацией следующей функции:

$$\Phi_3(\varsigma^0,\, \varsigma_1^0,\, x) := x^{k+1} + \varsigma_{k-1}^0 x^{k-1} + \cdots + \varsigma_2^0 x^2 + \varsigma_1^0 x.$$

Так как $\varsigma^0 \in \Sigma$, то эта функция имеет не более k критических точек, кратности которых не превосходят $k-1$. С помощью разбиения единицы интеграл $J_0(\sigma_1,\, A,\, \lambda)$ записывается в виде суммы конечного числа интегралов. Каждый из этих интегралов оцениваем по индукции. По предположению индукции существует функция $\psi(\varsigma)$, определенная в некоторой окрестности $W(\varsigma^0)\times V(\varsigma_1^0)\subset \Sigma\times\mathbb{R}$ точки $(\varsigma^0,\, \varsigma_1^0)$, которая удовлетворяет условиям:

1) При всех значениях $\varsigma \in W(\varsigma^0)\times V(\varsigma_1^0)$ для интеграла $J_0(\sigma_1,\, A,\, \lambda)$ справедлива оценка:

$$|J_0(\sigma_1,\, A,\, \lambda)| \leqslant \frac{\|b(\cdot,\, A, \sigma_1)\|_V \psi(\varsigma)}{|\lambda|^{\frac{1}{2}} \rho^{\frac{k-1}{2(k+1)}}}.$$

2) Для любого $p < \dfrac{2(k-1)}{k}$ интеграл

$$\int\limits_{V(\varsigma_1^0)} (\psi(\varsigma))^p d\varsigma_1$$

равномерно ограничен в $W(\varsigma^0)$.

Такая функция $\psi(\varsigma)$ существует в окрестности каждой точки $(\varsigma^0, \varsigma_1^0)\in \Sigma\times\mathbb{R}$. Следовательно, из компактности множества $\Sigma\times[-M,\, M]$ мы можем найти аналогичную функцию $\psi(\varsigma)$ для всего $\Sigma\times[-M,\, M]$.

Отсюда для любого числа $p < \dfrac{2k}{k-1}$ имеем:

$$\int\limits_{|s_1|\leqslant M\rho^{\frac{k}{k+1}}} \frac{(\psi(\varsigma,\, \frac{s_1}{\rho^{\frac{k}{k+1}}}))^p ds_1}{\rho^{\frac{(k-1)p}{2(k+1)}}} = \int\limits_{[-M,\, M]} \rho^{\frac{2k-(k-1)p}{2(k+1)}} (\psi(\varsigma,\, \varsigma_1))^p d\varsigma_1 \leqslant \int\limits_{[-M,\, M]} (\psi(\varsigma,\, \varsigma_1))^p d\varsigma_1 < \infty.$$

Суммируя полученные оценки, мы приходим к доказательству теоремы 4.1. $\square$

4.2. Рассмотрим случай, когда фазовая функция Φ зависит от некоторого дополнительного параметра $\eta\in\mathbb{R}^n$, причем $\Phi(\eta, a, x) : \mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^m\times\mathbb{R}\mapsto\mathbb{R}$, $\dfrac{\partial\Phi}{\partial x}(\eta, a, 0)\equiv 0$, $\Phi(\eta, a, 0)\equiv 0$ и

$$F(\eta,\, s_1, a,\; x) := \Phi(\eta,\, a,\, x) + s_1 x. \tag{4.4}$$

Рассмотрим соответствующий осцилляторный интеграл:

$$J(\eta,\, s_1,\, a, \lambda) := \int\limits_{\mathbb{R}} e^{i\lambda F(\eta, s_1, a, x)} b(\eta,\, s_1,\, a,\, x)dx. \tag{4.5}$$

Теорема 4.2. *Пусть Φ — вещественно-аналитическая функция в начале координат, удовлетворяющая условию $\Phi(\eta,\, 0,\, x)\not\equiv 0$. Тогда существует окрестность нуля $W\times V\times U\subset \mathbb{R}^{n+1}_{(\eta, s_1)}\times\mathbb{R}^m\times\mathbb{R}$ такая, что при любой амплитудной функции $b\in C_0^\infty(W\times V\times U)$ для осцилляторного интеграла* (4.5) *справедлива оценка*

$$|J(\eta,\, s_1,\, a,\, \lambda)| \leqslant \frac{\psi(\eta,\, s_1,\, a)}{|\lambda|^{1/2}}, \tag{4.6}$$

где ψ — некоторая функция, удовлетворяющая условию: существует число $\varepsilon>0$ такое, что для любого фиксированного a функция $\psi(\cdot,\, a)$ принадлежит классу $L^{2+\varepsilon}(W)$, причем ее норма $\|\psi(\cdot,\, a)\|_{L^{2+\varepsilon}(W)}$ равномерно ограничена относительно $a\in V$.

Доказательство. Мы следуем методу доказательства локального варианта леммы 3.1 (см. также [7]). Запишем функцию Φ в виде:

$$\Phi(\eta,\, a,\, x) = \sum_{k=2}^{\infty} c_k(\eta,\, a)x^k,$$

где $\{c_k\}_{k=2}^\infty$ — некоторые аналитические функции в фиксированной окрестности начала координат.

Рассмотрим идеал I алгебры аналитических функций в начале координат, порожденный функциями $\{c_k\}_{k=2}^\infty$. По нашему предположению $I\neq 0$. Если I совпадает с алгеброй аналитических в нуле функций, то $\Phi(0,0,x)$ является ненулевой аналитической функцией. Таким образом, она является деформацией особенности A_k с конечным числом k (см. [1]). В этом случае доказательство теоремы 4.2 следует из теоремы 4.1. Далее, предположим, что $I \neq 0$ — собственный идеал. Тогда согласно теореме Гильберта о нетеровости кольца аналитических функций существует натуральное число N такое, что идеал I порождается элементами $\{c_k\}_{k=2}^{N}$. Также естественно определяется идеал $I_0 :=< \{c_k(\cdot,\, 0)\}_{k=2}^{\infty} >$, который порождается элементами $\{c_k(\cdot,\, 0)\}_{k=2}^{N}$. В частности, по условиям леммы 4.2 для аналитической функции $c^2(\eta,a)$, определенной равенством

$$c^2(\eta,a) := \sum_{l=2}^{N} c_l^2(\eta,a),$$

мы имеем соотношение $c^2(\eta,0) \not\equiv 0$. Следовательно, существует положительное число $\delta > 0$ и окрестность нуля $W \times V \subset \mathbb{R}^{n+1} \times \mathbb{R}^m$ такие, что для любого $a \in V$ интеграл

$$\int\limits_V \frac{d\eta}{|c(\eta,\, a)|^{\delta}} \tag{4.7}$$

равномерно ограничен относительно a.

Следует отметить, что из сходимости последнего интеграла при $a = 0$, вообще говоря, не следует равномерной ограниченности этого интеграла относительно a. Соответствующий пример приведен в работе А. Н. Варченко (см. [3]). Однако для достаточно малых δ последний интеграл сходится и равномерно ограничен относительно a. Например, если

$$c^2(\eta,0) = \sum_{k=m}^{\infty} p_k(\eta)$$

— разложение функции c^2 в ряд Тейлора, где p_k — однородный многочлен степени k, а также $p_m \not\equiv 0$, то легко показать, что при $\delta < 2/m$ интеграл (4.7) сходится для достаточно малых a и он равномерно ограничен. Для более тонких результатов в этом направлении см. [9] (а также [24] для дальнейших обобщений).

Для оценки осцилляторного интеграла $J(\eta,\, s_1,\, a,\, \lambda)$ сначала рассмотрим случай $|c(\eta,\, a)| < |s_1|$. Так как $\Phi(\eta,\, a,\, x)/(x^2 c(\eta,\, a))$ и ее производные ограничены, то функция $\Phi(\eta,\, a,\, x)/|s_1|$ и ее производные достаточно малы в окрестности начала координат. Следовательно, мы можем использовать формулу интегрирования по частям и получить:

$$|J(\eta,\, s_1,\, a,\, \lambda)\chi_{\{|c(\eta,\, a)|<|s_1|\}}(\eta,\, s_1,\, a)| \leqslant \frac{C}{|\lambda s_1|^{1/2}}$$

с некоторой постоянной C, где $\chi_{\{|c(\eta,\, a)|<|s_1|\}}$ — индикатор множества $\{|c(\eta,\, a)| < |s_1|\}$.

При $|c(\eta,\, a)| \geqslant |s_1|$ мы используем лемму 4.1. Определим

$$\Phi_1(\eta,\, a,\, x) := \frac{\Phi(\eta,\, a,\, x)}{c(\eta,\, a)} \quad \text{и} \quad \varsigma_1 := \frac{s_1}{c(\eta,\, a)}.$$

Согласно лемме 4.1 мы можем предполагать, что функция $\Phi_1(\eta,\, a,\, x)$ является гладкой деформацией особенности A_k (хотя k может быть различными в зависимости от параметров).

Воспользуемся теперь теоремой 3.5, находим вещественно-аналитическое многообразие Y и собственное отображение $\pi : Y \mapsto \mathbb{R}^n_\eta \times \mathbb{R}^m_a$ такие, что для любой точки $y^0 \in Y$ существует карта $(y_1, \ldots, y_{n+m})$ с центром в точке y^0, для которой справедливо соотношение:

$$\Phi_1(\pi(y),x) = (y_1 - y_1(y^0))^{k_1} \ldots (y_{n+m} - y_{n+m}(y^0))^{k_n} p(y,x) g(y,x),$$

где $k_j \in \mathbb{N}$, $j = 1,2,\ldots,(n+m)$, $g(y,x)$ — вещественно-аналитическая функция, $(g(0,y^0) \neq 0)$ и $p(y,x)$ — унитарный псевдополином, т. е.

$$p(y,x) = x^q + d_1(y)x^{q-1} + \cdots + d_q(y),$$

где $d_1, \ldots, d_q$ — вещественно-аналитические функции в точке y^0 и $d_l(y^0) = 0,\ l = \overline{1,q}$.

Фиксируем $\varsigma_1 = \varsigma_1^0 \in [-1,1]$ и рассмотрим функцию

$$\Phi^0(y,\varsigma_1,\, x) := \Phi_1(\pi(y),\, x) + \varsigma_1^0 x + (\varsigma_1 - \varsigma_1^0)x.$$

Теорема Хиронака [18] о разрешении особенностей показывает, что собственное отображение $\pi : Y \mapsto W \times V \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ является взаимно-однозначным вне некоторого особого аналитического подмножества Y. Тогда согласно теореме 4.1 существует функция $\Psi(y, \varsigma_1)$ такая, что для осцилляторного интеграла справедлива оценка:

$$|J(\eta,\, s_1,\, a,\, \lambda)| \leqslant \frac{C\chi_{\{c(\eta,a)\geqslant |s_1|\}}(\eta,\, a,\, s_1)\Psi(\eta,\, \frac{s_1}{c(\eta,a)})}{|c(\eta,a)\lambda|^{1/2}},$$

причем интеграл

$$\int\limits_{-1}^{1} \Psi^p(y,\, \varsigma_1) d\varsigma_1$$

равномерно ограничен на многообразии Y благодаря компактности прообраза π. Положим

$$\psi(\eta,\, s_1,\, a) := \frac{C\chi_{\{|c(\eta,a)|<|s_1|\}}(\eta,\, a,\, s_1)}{|s_1|^{1/2}} + \frac{C\chi_{\{|c(\eta,a)|\geqslant |s_1|\}}(\eta,\, a,\, s_1)\Psi(\eta,\, \frac{s_1}{c(\eta,a)})}{|c(\eta,a)|^{1/2}}.$$

Легко показать, что функция $\psi(\eta,\, s_1,\, a)$ удовлетворяет утверждениям теоремы 4.2. $\square$

4.3. В этом пункте мы докажем аналог теоремы 4.1 для двукратных осцилляторных интегралов, фазовая функция которых является деформацией особенности типа $D_4^{\pm}$.

Пусть $\phi(A,\, x)$, где $(A,\, x) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^2$ — семейство гладких функций. Рассмотрим фазовую функцию следующего вида:

$$\Phi(s,\, A,\, x) := \phi(A,\, x) + s_1x_1 + s_2x_2.$$

Через $J(s,\, A,\, \lambda)$ обозначим соответствующий осцилляторный интеграл:

$$J(s,\, A,\, \lambda) := \int\limits_{\mathbb{R}^2} b(s,\, A,\, x) e^{i\lambda\Phi(s,\, A,\, x)} dx,$$

где $b \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^2)$.

Теорема 4.3. *Пусть гладкая функция $\phi(0,\, x)$ имеет особенность типа $D_4^{\pm}$ в начале координат. Тогда существуют окрестность нуля $W \times V \times U \subset \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^2$ и функция $\Psi(s,\, A)$ удовлетворяющие следующим условиям*:

1) *при любой амплитудной функции $b \in C_0^\infty(W \times V \times U)$ для осцилляторного интеграла $J(s,\, A,\, \lambda)$ справедлива оценка*
$$|J(s,\, A,\, \lambda)| \leqslant \frac{\|b(s,\, \cdot)\|_{C^2}\Psi(s,\, A)}{|\lambda|};$$
2) *для любой фиксированной точки $A \in V$ функция $\Psi(\cdot,\, A)$ принадлежит классу $L^{3-0}(W)$;*
3) *для любого $p < 3$ функция $\|\Psi(\cdot,\, A)\|_{L^p(W)}$ равномерно ограничена в V.*

Доказательство. Согласно лемме 4.1 достаточно провести доказательство теоремы в случае, когда фазовая функция имеет нормальный вид. Также, используя свойства отображения $(\sigma_1,\, \sigma_2)$ из леммы 4.1 ($k = 4$), мы можем представить функцию σ_3 в виде:

$$\sigma_3(s,\, A) = \sigma_1(s,\, A)g_1(s,\, A) + \sigma_2(s,\, A)g_2(s,\, A) + \tilde{\sigma}_3(A),$$

где $g_1(s,\, A)$, $g_2(s,\, A)$ и $\tilde{\sigma}_3(A)$ — некоторые гладкие функции в окрестности начала координат.

Обозначая новую функцию $\tilde{\sigma}_3(A)$ снова через $\sigma_3(A)$, мы можем написать фазовую функцию в виде:

$$\Phi(\sigma,\, X) = X_1^3 \pm X_1X_2^2 + \sigma_3(A)X_2^2 + \sigma_1(X_1 + g_1(\sigma, A)X_2^2) + \sigma_2X_2(1 + g_1(\sigma, A)X_2).$$

Введем обозначение $\rho := (\sigma_1^2 + \sigma_2^2)^{\frac{1}{4}}$ и сначала рассмотрим случай $\varepsilon|\sigma_3| > \rho$, где $\varepsilon > 0$ — достаточно малое фиксированное положительное число. При этом мы можем дать оценку $|\lambda\sigma_3^3| \geqslant 1$, ибо в противном случае согласно классическим результатам Дж. Дейстермаата [16] интеграл $J(s,\, A,\, \lambda)$ оценивается следующим образом:

$$|J| \leqslant \frac{C\|b(\sigma,\, \cdot)\|_{C^2}}{|\lambda|^{\frac{2}{3}}|\lambda\sigma_3^3|^{\frac{1}{3}}} \leqslant \frac{C\|b(\sigma,\, \cdot)\|_{C^2}}{|\lambda| \cdot \rho},$$

где $\rho^{-1} \in L^{4-0}(V)$.

Таким образом, предполагая $|\lambda\sigma_3^3| \geqslant 1$, в интеграле $J(s, A, \lambda)$ сделаем замену переменных $X \mapsto |\sigma_3|x$ и получим:

$$J(s, A, \lambda) = |\sigma_3|^2 \int e^{i\lambda|\sigma_3|^3\Phi_1(\sigma, x)} b(\sigma, |\sigma_3|x)dx,$$

где

$$\Phi_1(\sigma, x) = x_1^3 \pm x_1x_2^2 + sgn(\sigma_3)x_2^2 + \tilde{\sigma}_1(x_1 + g_1(\sigma, A)\sigma_3x_2^2) + \tilde{\sigma}_2x_2(1 + g_1(\sigma, A)\sigma_3x_2).$$

Здесь $\tilde{\sigma}_j = \dfrac{\sigma_j}{\sigma_3^2}$ $(j = 1, 2)$ и $\operatorname{sgn}(\sigma_3) = \pm 1$ $(\sigma_3 \neq 0)$.

Очевидно, что при любых значениях параметров $(\tilde{\sigma}, \sigma_3)$ множество критических точек фазовой функции $\Phi_1(\sigma, x)$ содержится в некотором компакте K. Выберем гладкую функцию χ, имеющую компактный носитель и такую, что $\chi(x) \equiv 1$ в некоторой окрестности K. С помощью этой функции интеграл J записывается в виде суммы двух следующих интегралов:

$$J_0 := |\sigma_3|^2 \int e^{i\lambda|\sigma_3|^3\Phi_1(\sigma, x)} b(\sigma, |\sigma_3|x,)\chi dx \quad \text{и} \quad J_1 := J - J_0.$$

Теперь покажем, что осцилляторный интеграл J_1 достаточно быстро убывает. Действительно, рассмотрим векторное поле, определенное на множестве $\operatorname{supp}(1-\chi) \cap \operatorname{supp}(a(\delta_\rho(\cdot)))$ следующей формулой:

$$v := \frac{\frac{\partial\Phi_1(x)}{\partial x_1}}{\left(\frac{\partial\Phi_1(x)}{\partial x_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial\Phi_1(x)}{\partial x_2}\right)^2} \frac{\partial}{\partial x_1} + \frac{\frac{\partial\Phi_1(x)}{\partial x_2}}{\left(\frac{\partial\Phi_1(x)}{\partial x_2}\right)^2 + \left(\frac{\partial\Phi_1(x)}{\partial x_2}\right)^2} \frac{\partial}{\partial x_2}.$$

Тогда очевидным образом выполняется следующее равенство:

$$v(e^{i\lambda|\sigma_3|^3\Phi_1(x)}) = i\lambda|\sigma_3|^3 e^{i\lambda|\sigma_3|^3\Phi_1(x)}.$$

С использованием последнего равенства, дважды применяя формулу интегрирования по частям, получим:

$$J_1 := (i\lambda|\sigma_3|^3)^{-2}|\sigma_3|^2 \int e^{i\lambda|\sigma_3|^3\Phi_1(x)}(v^t)^2(b(|\sigma_3|^3x, \sigma)(1-\chi(x)))dx,$$

где v^t — сопряженный оператор к векторному полю v.

Очевидно, что последний интеграл абсолютно сходится и справедлива следующая оценка:

$$|J_1| \leqslant \frac{C\|b(\sigma, \cdot)\|_{C^2}}{|\lambda\sigma_3|} \leqslant \frac{C\|b(\sigma, \cdot)\|_{C^2}}{|\lambda|\rho}.$$

Таким образом, осталось оценить осцилляторный интеграл J_0. Непосредственная проверка показывает, что фазовая функция Φ_1 является версальной деформацией особенности типа A_2 в достаточно малой окрестности начала координат. Остальные критические точки фазовой функции — невырожденные при условии малости ε. Применяя метод стационарной фазы по одной переменной с остаточным членом вида $O(|\lambda|^{-1}\|b(\sigma, \cdot)\|_{C^2})$ (см. [11]), сводим задачу к оценке одномерных осцилляторных интегралов. Следовательно, существует функция $\Psi_1(\tilde{\sigma}, \sigma_3, A)$, удовлетворяющая следующим условиям:

1) для осцилляторного интеграла $J(s, A, \lambda)$ справедлива оценка

$$|J(s, A, \lambda)| \leqslant \frac{\|b(\sigma, \cdot)\|_{C^2}\Psi_1(\tilde{\sigma}, \sigma_3, A)}{|\lambda|};$$

2) при любой фиксированной точке $A \in W$ функция $\Psi_1(\cdot, \sigma_3, A)$ принадлежит классу $L^{4-0}(V)$;

3) для любого $p < 4$ L^p-норма функции $\tilde{\Psi}_1(\cdot, \sigma_3, A) := \dfrac{\Psi_1(\tilde{\sigma}, \sigma_3, A)}{|\sigma_3|}$ равномерно ограничена в U.

Теперь рассмотрим случай $\sigma \in \{|\sigma_3| \leqslant M\rho\}$, где M — достаточно большое фиксированное положительное число.

Снова, как и прежде, предположим, что $\lambda\rho^3 \geqslant 1$. В противном случае классические результаты Дж. Дейстермаата [16] позволяют получить искомую оценку. В осцилляторном интеграле сделаем замену переменных $X \mapsto \rho x$ и получим:

$$J = \rho^2 \int e^{i\lambda\rho^3\Phi_2(x,\sigma)} b(|\sigma_3|x, \sigma)dx,$$

где

$$\Phi_1(x, \sigma) = x_1^3 \pm x_1 x_2^2 + \tilde{\sigma}_3 X_2^2 + \tilde{\sigma}_1(X_1 + g_1(\sigma, A)\rho X_2^2) + \tilde{\sigma}_2 X_2(1 + g_1(\sigma, A)\rho X_2),$$

здесь $\tilde{\sigma}_3 = \dfrac{\sigma_3}{\rho}$ и $\tilde{\sigma}_j = \dfrac{\sigma_j}{\rho^2}$ $(j = 1, 2)$.

Заметим, что $(\tilde{\sigma}_1, \tilde{\sigma}_2) \in S^1$, где S^1 — единичная сфера с центром в начале координат; при этом для σ_3 имеем: $|\sigma_3| \leqslant M$.

Очевидно, что при любых значениях параметров $(\tilde{\sigma}, \sigma_3)$ множество критических точек фазовой функции $\Psi_2(A, \tilde{\sigma}, \sigma_3)$ содержится в некотором компакте K. Выберем гладкую функцию χ, имеющую компактный носитель и такую, что $\chi(x) \equiv 1$ в некоторой окрестности K. С помощью этой функции интеграл J записывается в виде суммы двух следующих интегралов:

$$J_0 := \rho^2 \int e^{i\lambda\rho^3\Phi_2(A, \tilde{\sigma}, \tilde{\sigma}_3)} a(\rho x, \sigma)\chi dx \quad \text{и} \quad J_1 := J - J_0.$$

Теперь покажем, что осцилляторный интеграл J_1 достаточно быстро убывает. Действительно, рассмотрим векторное поле, определенное на множестве $\operatorname{supp}(1 - \chi) \cap \operatorname{supp}(b(\rho(\cdot), \sigma))$ следующей формулой:

$$v := \frac{\frac{\partial\Phi_2(x)}{\partial x_1}}{\left(\frac{\partial\Phi_2(x)}{\partial x_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial\Phi_2(x)}{\partial x_2}\right)^2} \frac{\partial}{\partial x_1} + \frac{\frac{\partial\Phi_2(x)}{\partial x_2}}{\left(\frac{\partial\Phi_2(x)}{\partial x_2}\right)^2 + \left(\frac{\partial\Phi_2(x)}{\partial x_2}\right)^2} \frac{\partial}{\partial x_2}.$$

Тогда очевидным образом выполняется следующее равенство:

$$v(e^{i\lambda\rho^3\Phi_2(x)}) = i\lambda\rho^3 e^{i\lambda\rho^3\Phi_2(x)}.$$

С использованием последнего соотношения, дважды применяя формулу интегрирования по частям, получим:

$$J_1 := (i\lambda\rho^3)^{-2}\rho^2 \int e^{i\lambda\rho^3\Phi_2(x)} (v^t)^2 (b(\rho^3 x, \sigma)(1 - \chi(x)))dx,$$

где v^t — сопряженный оператор к векторному полю v.

Очевидно, что последний интеграл абсолютно сходится и справедлива следующая оценка:

$$|J_1| \leqslant \frac{C\|b(\cdot, \sigma)\|_{C^2}}{|\lambda|\rho}.$$

Теперь осталось лишь оценить осцилляторный интеграл $J_0(\lambda, A, s)$. Мы покажем, что существует функция $\Psi_2(A, \cdot)$, принадлежащая классу $L^{3-0}(S^1)$ и такая, что для осцилляторного интеграла $J_0(s, A, \lambda)$ справедлива оценка:

$$|J_0(s, A, \lambda)| \leqslant \frac{\|b(\cdot, \sigma)\|_{C^2}\Psi_2(\tilde{\sigma}, \tilde{\sigma}_3, A)}{\rho|\lambda|}. \tag{4.8}$$

Действительно, так как переменные $(\tilde{\sigma}, \tilde{\sigma}_3)$ меняются в компактном множестве $S^1 \times [-M, M]$, то достаточно получить искомую оценку в некоторой окрестности фиксированной точки $(\tilde{\sigma}^0, \tilde{\sigma}_3^0)$ этого множества. Легко показать, что фазовая функция Φ_2 является деформацией особенности типа A_k $(k \leqslant 3)$. Причем в малой окрестности критической точки деформация удовлетворяет условиям леммы 4.1, при этом $k \leqslant 3$. Таким образом, рассуждения, основанные на методе стационарной фазы, сводят нашу проблему к задачу об оценках однократных осцилляторных интегралов.

Следовательно, существует функция $\Psi_2(A, \tilde{\sigma}, \tilde{\sigma}_3)$, удовлетворяющая оценке (4.8). Помимо этого, при любой фиксированной точке $A \in W$ функция $\Psi_2(A, \cdot, \tilde{\sigma}_3)$ принадлежит классу $L^{3-0}(S^1)$, причем для любого $p < 3$ интеграл

$$\int_{S^1} (\Psi_2(A, \tilde{\sigma}, \tilde{\sigma}_3))^p dl$$

локально равномерно и поэтому равномерно ограничен по $(A,\, \tilde{\sigma}_3)$, ибо A меняется в достаточно малой окрестности нуля и $\tilde{\sigma}_3$ лежит в компактном множестве $[-M,\, M]$.

Покажем, что норма функции $\tilde{\Psi}_2(A, \cdot,\, \tilde{\sigma}_3) := \dfrac{\Psi_2(A,\, \tilde{\sigma},\, \tilde{\sigma}_3)}{\rho}$ в L^p равномерно ограничена в U. Действительно, для любого $p < 3$ имеем:

$$\int \Psi_2(A,\, \tilde{\sigma},\, \sigma_3)^p d\tilde{\sigma}_1 d\tilde{\sigma}_2 = \int \frac{(\Psi_2(A,\, \tilde{\sigma},\, \sigma_3))^p}{\rho^p} d\tilde{\sigma}_1 d\tilde{\sigma}_2 = \int\limits_{[0,\,\varepsilon]} \rho^{4-p} d\rho \int\limits_{S^1} \Psi_2(A,\, \tilde{\sigma},\, \sigma_3)^p dl \leqslant C,$$

где, как отмечено выше, C не зависит от параметров A, $\tilde{\sigma}_3$.

$\square$

5. Доказательство основных теорем

Доказательство теоремы 2.1.

(i). Пусть $S(a)$ — семейство аналитических гиперповерхностей. Используя метод стационарной фазы, сводим интеграл к одномерному осцилляторному интегралу, удовлетворяющему условиям теоремы 4.2.

Действительно, преобразование Фурье (1.1) меры $\hat{d}\mu_a$ локально может записано в виде кратного осцилляторного интеграла, ибо локально $S(a)$ после возможного евклидова движения представляется как график аналитической функции

$$S := \{x \in \mathbb{R}^{n+1} : x_{n+1} := \phi(a, x)\},$$

где $\phi(a, x)$ — вещественно-аналитическая функция, удовлетворяющая условиям: $\phi(0, 0) = 0$, $\nabla_x \phi(0, 0) = 0$. Как следствие, поверхностный интеграл сводится к кратному интегралу

$$J(s,\, a,\, \lambda) := \int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{i\lambda \Phi(s,a,x)} b(x) dx.$$

Здесь $\lambda := \xi_{n+1}$, $s_j := \dfrac{\xi_j}{\lambda}$ $(j = 1, \ldots, n)$, $\Phi(s, a, x) := \phi(a, x) + s \cdot x$, где $\phi(s,\, a,\, x)$ — вещественно-аналитическая функция, удовлетворяющая условиям: $\nabla_x \phi(0, 0) = 0$, $\operatorname{rank} \operatorname{Hess}_x \phi(0, 0) = n - 1$, что эквивалентно условию $S(0) \in \Lambda_{n-1}$.

Если $|s| > 1$ и b — гладкая функция с достаточно малым носителем, содержащимся в окрестности начало координат, то для произвольного натурального числа N, используя формулу интегрирования по частям, получим:

$$J(s,\, a,\, \lambda) = O(|s\lambda|^{-N}) \quad \text{при} \quad |\lambda| \to +\infty.$$

Далее, без ограничения общности предполагая

$$\det\{\partial_j \partial_k \phi(0, 0)\}_{j,k=2}^n \neq 0,$$

мы можем использовать классическую лемму Морса: существует окрестность $V \times U$ и диффеоморфное отображение $\varphi : V \times U \mapsto V \times U$ вида

$$x_1 = y_1, x_j = \varphi_j(s_2, \ldots, s_n, a,\, y), \quad j = 2, \ldots, n$$

такое, что для фазовой функции $\Phi(s, a, x)$ справедливо следующее соотношение:

$$\Phi(s, a, \varphi(s_2, \ldots, s_n, a,\, y)) := \Phi_1(s_2, \ldots, s_n,\, a,\, y_1) + s_1 y_1 + Q(y_2, \ldots, y_n),$$

где $\Phi_1(s_2, \ldots, s_n,\, a,\, y_1)$ — вещественно-аналитическая функция, $Q := (Ay', y')$ — невырожденная квадратичная форма от переменных $(y_2, \ldots, y_n)$, заданная с обратимой симметрической матрицей A. Напомним, что соотношение

$$\frac{\partial^2 \Phi_1(s_2, \ldots,\, s_n,\, y_1)}{\partial y_1^2} \not\equiv 0$$

эквивалентно условию $K(0,\, x) \not\equiv 0$.

Таким образом, осцилляторный интеграл $J(s,\, a,\, \lambda)$ после замены переменных, заданной отображением $(y_1, \varphi(s_2, \dots, s_n, a, y)$, может быть записан как повторный интеграл

$$J(s,\, a,\, \lambda) = \int\limits_{\mathbf{R}} e^{i\lambda(\Phi_1(s_2,\dots,s_n,\, a,\, y_1)+s_1y_1)} \left(\int\limits_{\mathbf{R}^{n-1}} e^{i\lambda Q(y_2,\dots,y_n)} b_1(s,\, y) dy_2 \dots dy_n \right) dy_1,$$

с гладкой амплитудной функцией $b_1 \in C_0^\infty(V \times U)$.

Далее, согласно классическому методу стационарной фазы получим асимптотическое соотношение (см. [13])

$$\int\limits_{\mathbf{R}^{n-1}} e^{i\lambda Q(y_2,\dots,y_n)} b_1(y, s) dy_2 \dots dy_n = c b_1(y_1, 0, \dots, 0, s) \lambda^{\frac{1-n}{2}} + O(|\lambda|^{-\frac{n+1}{2}}) \text{ при } |\lambda| \to +\infty,$$

где

$$c := \frac{e^{isign(Q)\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{\pi^{n-1}|\det A|}}.$$

Следовательно, осцилляторный интеграл $J(s,\, a,\, \lambda)$ может записан в виде

$$J(s,\, a,\, \lambda) = c\lambda^{\frac{1-n}{2}} \int\limits_{\mathbf{R}} e^{i\lambda(\Phi_1(s_2,\dots,s_n,\, a,\, y_1)+s_1y_1)} b_1(y_1, 0, \dots, 0, s) dy_1 + O(|\lambda|^{-\frac{n+1}{2}}) \text{ при } |\lambda| \to +\infty.$$

Поэтому задача о поведении осцилляторного интеграла $J(s,\, a,\, \lambda)$ сводится к задаче об оценке одномерного осцилляторного интеграла

$$J_1(s,\, a,\, \lambda) := \int\limits_{\mathbf{R}} e^{i\lambda(\Phi_1(s_2,\dots,s_n,a,y_1,)+s_1y_1)} b_1(y_1, 0, \dots, 0, s, a) dy_1.$$

Запишем фазовую функцию $\Phi_1(s_2, \dots, s_n,\, a,\, y_1) + s_1y_1$ в виде:

$$\Phi_1(s_2, \dots, s_n, a, y_1) + s_1y_1 := \Phi_2(s_2, \dots, s_n, a, y_1) + \tilde{s}_1y_1 + \Phi_0(s_2, \dots, s_n, a),$$

где

$$\tilde{s}_1 := s_1 + \frac{\partial\Phi_1(s_2, \dots, s_n, a, 0)}{\partial y_1}, \quad \Phi_0(s_2, \dots, s_n, a) := \Phi_1(s_2, \dots, s_n, a, 0)$$

и

$$\Phi_2(s_2, \dots, s_n, a, y_1) := \Phi_1(s_2, \dots, s_n, \sigma, y_1) - \frac{\partial\Phi_1(s_2, \dots, s_n, a, y_1)}{\partial y_1} y_1 - \Phi_0(s_2, \dots, s_n, a).$$

Далее, функция $\Phi_2(s_2, \dots, s_n, a, y_1)$ делится на y_1^2 и имеем:

$$\Phi_2(s_2, \dots, s_n, a, y_1) = y_1^2 G(s_2, \dots, s_n, a, y_1),$$

где G — вещественно-аналитическая функция, удовлетворяющая условию: $G(s_2, \dots, s_n, 0, y_1) \not\equiv 0$.

Обозначая $\tilde{s}_1$ снова через s_1, получим фазовую функцию:

$$F(s,\, a,\, x_1) := x_1^2 G(s,\, a,\, x_1) + s_1x_1.$$

Рассмотрим также соответствующий осцилляторный интеграл:

$$J(s,\, a,\, \lambda) := c\lambda^{\frac{1-n}{2}} \int\limits_{\mathbb{R}} e^{i\lambda F(s,\, a,\, x_1)} b(s,\, a,\, x_1) dx_1 + O(|\lambda|^{-\frac{n+1}{2}}) \text{ при } |\lambda| \to +\infty. \tag{5.1}$$

Наконец, мы можем считать, что носитель меры $d\mu_a$ находится в достаточно малой окрестности фиксированной точки, а параметры a лежат на достаточно малой окрестности фиксированной точки. Таким образом, достаточно доказать искомое утверждение для меры $d\mu_a(x) := \psi(a,\, x) dS(a)$, где $S(a)$ является графиком

$$S := \{x \in \mathbb{R}^{n+1} : x_{n+1} := \phi(a, x)\}.$$

Тогда, как мы отметили раньше, справедливо соотношение

$$\hat{\mu}_a(\xi) = J(s,\, a,\, \lambda), \tag{5.2}$$

где $\lambda = \xi_{n+1}$, $s_j = \dfrac{\xi_j}{\xi_{n+1}}$, $j = 1, \dots, n$.

Из вышеприведенных рассуждений следует, что основной вклад в максимальной функции Рэндола дают близкие к $\omega_0 := (0,\dots,0,1)$ точки. Иными словами, мы можем считать, что $(s_1,\dots,s_n)$ меняется в достаточно малой окрестности нуля. Тогда, согласно (5.1), (5.2), получим, что

$$\hat{\mu}_a(\xi) = c\lambda^{\frac{1-n}{2}} \int\limits_{\mathbb{R}} e^{i\lambda F(s,a,x_1)} b(s,\, a,\, x_1) dx_1 + O(|\lambda|^{-\frac{n+1}{2}}) \text{ при } |\lambda| \to +\infty.$$

Для последнего одномерного осцилляторного интеграла, используя теорему 4.2, получим:

$$|\hat{\mu}_a(\xi)| \leqslant \frac{\psi(s_1,\dots,s_n\, a)}{|\lambda|^{n/2}} \chi_{\{|s|<\varepsilon\}}(s) + C|\lambda|^{-n/2},$$

где $\chi_{\{|s|<\varepsilon\}}$ — характеристическая функция множества $\{|s|<\varepsilon\}$. Таким образом, максимальная функция Рэндола имеет оценку

$$M_a(\omega) \leqslant \psi(s_1,\dots,s_n\, a)\chi_{|s|<\varepsilon}(s) + C, \tag{5.3}$$

где s и ω связаны соотношением $s_j = \dfrac{\omega_j}{\omega_{n+1}}$, $j=1,\dots,n$.

Отсюда получим справедливость включения $M_a \in L^{p_m}(S^n)$ для некоторого числа $p_m > 2$.

(ii). Если $p_m > 2(n+1)/n$, то с использованием сферических координат получим:

$$\int\limits_{\mathbb{R}^{n+1}} |\hat{\mu}_a(\xi)|^p d\xi = c + \int\limits_1^\infty r^n dr \int\limits_{S^n} |\hat{\mu}_a(r\omega)|^p d\omega \leqslant c + \int\limits_1^\infty r^{n-pn/2} dr \int\limits_{S^n} |M_a(\omega)|^p d\omega < C.$$

Последний интеграл сходится при условии $p_m \geqslant p > 2(n+1)/n$. Более того, постоянная C не зависит от a.

(iii). Теперь рассмотрим случай $2 < p_m \leqslant 2(n+1)/n$. В этом случае с использованием классических равномерных оценок имеем:

$$\int\limits_{\mathbb{R}^{n+1}} |\hat{\mu}_a(\xi)|^p d\xi \leqslant c + \int\limits_1^\infty r^{n-p_m n/2-(p-p_m)(n-1)/2} dr \int\limits_{S^n} |M_a(\omega)|^{p_m} d\omega.$$

Последний интеграл сходится при условии $p > (2n+2-p_m)/(n-1)$, причем он равномерно ограничен относительно a.

Этим завершается доказательство основной теоремы. ☐

Теперь докажем теорему 2.2. Если $S \subset \mathbb{R}^3$ — вещественно-аналитическая гиперповерхность, то согласно результатам работы [6] для максимальной функции имеется соотношение $M \in L^{2-0}(S^2)$. Берем достаточно малое положительное число $\varepsilon > 0$, чтобы было $M \in L^{2-\varepsilon}(S^2)$. Согласно теореме В. Н. Карпушкина о равномерной оценке осцилляторных интегралов [9] для преобразования Фурье имеем оценку

$$|\hat{\mu}(\xi)| \leqslant \frac{C\ln(2+|\xi|)^m}{(1+|\xi|)^{1/h}},$$

где m — так называемая кратность показателя осцилляции (см. [1]). Заметим, что в нашем случае $m = 0, 1$. Аналогичные равномерные оценки для гладкого случая доказаны в работе [21]. В частности, мы можем написать оценку

$$|\hat{\mu}(\xi)| \leqslant \frac{C}{(1+|\xi|)^{1/h-\varepsilon}} \tag{5.4}$$

для произвольного фиксированного положительного числа $\varepsilon > 0$.

Объединяя оценку (5.3) и (5.4), получим:

$$\int\limits_{\mathbb{R}^3} |\hat{\mu}(\xi)|^p d\xi \leqslant c + \int\limits_1^\infty r^2 dr \int\limits_{S^2} |\hat{\mu}(r\omega)|^p d\omega \leqslant c + c_1 \int\limits_1^\infty r^{2-(2-\varepsilon)-(p-(2-\varepsilon))(1/h-\varepsilon)} dr \int\limits_{S^2} |M(\omega)|^{2-\varepsilon} d\omega.$$

Последний интеграл сходится при условии

$$p > 2 + \frac{h(1+\varepsilon+\varepsilon^2)-\varepsilon}{1-h\varepsilon}.$$

Так как ε — любое фиксированное положительное число, то мы получаем искомый результат, что $\hat{d\mu} \in L^p(\mathbb{R}^3)$. В частности, если $h < 2$, то существует положительное число $\varepsilon > 0$ такое, что $\hat{d\mu} \in L^{4-\varepsilon}(\mathbb{R}^3)$.

Остается рассмотреть случай $h = 2$. Используя разбиение единицы, мы можем предполагать, что поверхность задана в виде графика аналитической функции

$$S := \{x \in \mathbb{R}^3 : x_3 = \Phi(x_1, x_2)\},$$

где Φ — вещественно-аналитическая функция в начале координат, удовлетворяющая условиям: $\Phi(0,0) = 0$, $\nabla\Phi(0,0) = 0$. Докажем следующий более сильный результат.

Предложение 5.1. *Если $h(\Phi) = 2$ и $K \not\equiv 0$, то существует положительное число ε такое, что $M \in L^{2+\varepsilon}(S^2)$.*

Доказательство. Мы используем методы работы [21]. Запишем функцию Φ в виде:

$$\Phi(x_1, x_2) = \Phi_\kappa(x_1, x_2) + \Phi_{r\kappa}(x_1, x_2), \tag{5.5}$$

где $\Phi_{r\kappa}$ — остаточный член и Φ_κ — квазиоднородный полином с весом $(\kappa_1, \kappa_2), \kappa_2 \geqslant \kappa_1 > 0$, причем $h(\Phi_\kappa) = 2$. Предположим, что $|\xi_3| \geqslant |\xi_1| + |\xi_2$, в противном случае мы можем использовать формулу интегрирования по частям при условии малости носителя амплитуды ψ. Следуя работе [21], рассмотрим разбиение единицы и соответствующее разложение преобразования Фурье:

$$\hat{d\mu}(\xi) = \sum_{j=j_0}^{\infty} \hat{d\mu}_j(\xi),$$

где после преобразований растяжения $\hat{d\mu}_j$ имеет вид:

$$\hat{d\mu}_j = 2^{-|\kappa|j} \int e^{i2^{-j}\lambda(\Phi_\kappa(x_1,x_2)+\tilde{\Phi}_{r\kappa}(x_1,x_2,2^{-j})+\sigma_1x_1+\sigma_2x_2)}\chi(x)\psi(\delta_{2^{-j}}(x))dx.$$

Здесь $\delta_{2^{-j}}$ — преобразование растяжения, соответствующее весу κ, т. е.

$$\delta_{2^{-j}}(x_1, x_2) := (2^{-j\kappa_1}x_1, 2^{-j\kappa_2}x_2),$$

а $\sigma_l := 2^{(1-\kappa_l)j}s_l\,(l = 1,2)$, $\lambda := \xi_3$, $s_l := \xi_l/\lambda$ и $\tilde{\Phi}_{r\kappa}(x_1,x_2,2^{-j})$ — «остаточный» член после замены переменных, χ — так называемая срезающая функция с носителем на множестве $\{x \in \mathbb{R}^2 : \frac{1}{2} < |x| < 2\}$.

Отметим, что $\tilde{\Phi}_{r\kappa}(x_1,x_2,2^{-j})$ может быть рассмотрено как малая деформация при достаточно больших j_0. Отметим, что если носитель амплитуды сосредоточен в достаточно малой окрестности начала координат, то мы можем предполагать, что j_0 — достаточно большое число.

Покажем, что существует функция $\varphi \in L^{2+\varepsilon}(V)$ такая, что

$$|\hat{d\mu}(s,\lambda)| \leqslant \frac{\varphi(s_1,s_2)}{|\lambda|},$$

где V — достаточно малая окрестность начала координат. Функция φ ищется в виде суммы ряда.

Существует положительное число M такое, что при $|\sigma| \geqslant M$ фазовая функция осцилляторного интеграла $\hat{d\mu}_j(\xi)$ не имеет критических точек. Следовательно, мы можем применить формулу интегрирования по частям и получим:

$$|\hat{d\mu}_j(\xi)\chi_{\{|\sigma|\geqslant M\}}(\sigma)| \leqslant \frac{\varphi_{1j}(s)}{\lambda},$$

где

$$\varphi_{1j}(s) := \frac{C2^{-|\kappa|j}}{|2^{-j}\sigma|}\chi_{\{|\sigma|\geqslant M\}}(\sigma),$$

здесь $\sigma_l := 2^{(1-\kappa_l)j}s_l\,(l = 1,2)$ и $\chi_{\{|\sigma|\geqslant M\}}$ — характеристическая функция множества $\{|\sigma| \geqslant M\}$.

Легко показать, что если ε — достаточно малое фиксированное положительное число, то существует положительное число δ такое, что справедлива оценка:

$$2^{(1-|\kappa|)j}\left(\int\limits_{|\sigma|>1}|\sigma|^{(\varepsilon+2)}ds_1ds_2\right)^{1/(2+\varepsilon)}\leqslant C2^{-\delta j}.$$

Следовательно, сходится ряд

$$\sum_{j=j_0}^{\infty}\|\varphi_{1j}(s)\|_{L^{2+\varepsilon}(V)}.$$

Если же $|\sigma|\leqslant M$, то рассуждая, как в работе [20], получаем, что часть поверхности

$$\{x\in\mathbb{R}^3:\, x_3=\Phi_\kappa(x_1,\,x_2)+\tilde{\Phi}_{r\kappa}(x_1,x_2,2^{-j})\}$$

может быть рассмотрена как семейство аналитических гиперповерхностей, имеющее хотя бы одну ненулевую главную кривизну и удовлетворяющее условиям теоремы 2.1. Поэтому существует функция $\varphi_{2j}(\sigma)\chi_{\{|\sigma|\leqslant M\}}(\sigma)$ такая, что $\varphi_{2j}(\sigma)\chi_{\{|\sigma|\leqslant M\}}(\sigma)\in L^{2+\varepsilon}(\{|\sigma|\leqslant M\})$. Заметим, что

$$\int\limits_V(\varphi_{2j}(\sigma)\chi_{\{|\sigma|\leqslant M\}}(\sigma))^p(\sigma)ds=2^{(|\kappa|-2)j}\int\limits_{\{|\sigma|\leqslant M\}}\varphi_{2j}^p(\sigma)d\sigma.$$

Суммируя полученные оценки, имеем:

$$|\hat{d\mu}_k(\xi)|\leqslant\frac{\varphi_j(s)}{\lambda},$$

где $\varphi_j(s):=\varphi_{1j}(s)+\varphi_{2j}(s)$, причем справедливо соотношение:

$$\|\varphi_j\|_{L^{2+\varepsilon}(V)}\leqslant C2^{-\delta j}.$$

Поэтому ряд

$$\varphi(s):=\sum_{j=j_0}^{\infty}\varphi_j(s)$$

сходится в пространстве $L^{2+\varepsilon}$. Предложение 5.1 доказано, вместе с ним доказана и теорема 2.2 в случае $h=2$. $\square$

6. О точности результатов

Мы докажем следующую лемму, которая показывает, что полученные оценки близки к точным.

Лемма 6.1. *Рассмотрим гиперповерхность $S\subset\mathbb{R}^3$, определенную соотношением*:

$$S:=\{x\in\mathbb{R}^3:\quad x_3=x_2^2+x_1^k\},\tag{6.1}$$

где $k\geqslant 3$. Если μ — мера, сосредоточенная на поверхности (6.1)*, то $\hat{d\mu}\in L^p(\mathbb{R}^3)$ для любого $p>p_k:=2(2k+1)/(k+2)$, причем если $\psi(0)>0$, то $\hat{d\mu}\notin L^p(\mathbb{R}^3)$ при $p\leqslant p_k$.*

Замечание 6.1. Лемма 6.1 показывает справедливость предложения 2.1, ибо для любого $\varepsilon>0$ мы можем выбрать k такое, что $4-\varepsilon<p_k$.

Доказательство леммы 6.1. Пусть $d\mu:=\psi(x)dS(x)$ и носитель амплитуды ψ находится в достаточно малой окрестности начала координат, а также мы будем предполагать, что $\psi(0,0)=1$. В случае $\psi(0,0)=0$ мы имеем дело с оцилляторным интегралом с множителем гашения. Более того, методом стационарной фазы мы сводим задачу к оценкам одномерных осцилляторных интегралов, где могут быть применены методы работы [8]. На самом деле, в этом случае интеграл быстрее убывает.

Достаточно рассмотреть случай $|\xi_2| + |\xi_1| < |\xi_3|$, ибо в остальных случаях формула интегрирования по частям показывает, что осцилляторный интеграл достаточно быстро убывает. Для этого случая применяем метод стационарной фазы по переменной x_2 и получим:

$$\hat{d\mu}(\xi) = c\frac{e^{-i\frac{\xi_2}{4\xi_3^2}}}{|\xi_3|^{1/2}} \int e^{i(\xi_3 x_1^k + \xi_1 x_1)} b\left(x_1, -\frac{\xi_2}{2\xi_3}\right) dx_1 + R(\xi),$$

где $R(\xi)$ — остаточный член, удовлетворяющий условию: $R(\xi) = O(|\xi|^{-3/2})$ при $|\xi| \to +\infty$. Поэтому для любого положительного числа ε мы имеем соотношение $R \in L^{2+\varepsilon}(\mathbb{R}^3)$.

Оценим главный член осцилляторного интеграла:

$$J(\xi) := \frac{e^{-i\frac{\xi_2}{4\xi_3^2}}}{|\xi_3|^{1/2}} \int e^{i(\xi_3 x_1^k + \xi_1 x_1)} b\left(x_1, -\frac{\xi_2}{2\xi_3}\right) dx_1.$$

Сначала покажем, что при $p \leqslant p_k$ имеет место соотношение $J(\xi) \notin L^p(\mathbb{R}^3)$. Действительно, если $|\xi_1| < \varepsilon|\xi_3|^{1/k}$ (где $\varepsilon > 0$ — достаточно малое положительное число), то мы имеем следующую оценку снизу:

$$|J(\xi)| \geqslant \frac{c}{|\xi_3|^{(k+2)/(2k)}},$$

где c — некоторое положительное число. Поэтому легко показать, что интеграл от функции $|J(\xi)|^p$ по множеству

$$\Omega := \{(\xi \in \mathbb{R}^3 : |\xi_2| \leqslant |\xi_3|,\ |\xi_1| < \varepsilon|\xi_3|^{1/k}\}$$

расходится при $p \leqslant p_k$.

Теперь покажем, что если $p > p_k$, то интеграл от этой функции по $\mathbb{R}^3$ сходится. Пусть

$$\xi \in \Omega_M := \{(\xi \in \mathbb{R}^3 :\ |\xi_2| \leqslant |\xi_3|,\ |\xi_1| \leqslant M|\xi_3|^{1/k}\},$$

где M — любое фиксированное положительное число. Тогда мы можем применить оценку типа Ван дер Корпута и иметь:

$$|J(\xi)| \leqslant \frac{C}{|\xi_3|^{(k+2)/(2k)}}.$$

Поэтому если $p > p_k$, то интеграл функции $|J(\xi)|^p$ по множеству Ω_M сходится. Далее, мы рассмотрим интеграл по множеству $\mathbb{R}^3 \setminus \Omega_M$. Берем гладкую функцию χ со следующими свойствами:

$$\chi(x) = \begin{cases} 1 & \text{если} \quad |x| \leqslant 1, \\ 0 & \text{если} \quad |x| \geqslant 2 \end{cases}$$

и определим новую функцию $\beta(x) := \chi(x) - \chi(2x)$ (см. [28]). Используя эту функцию, мы получим разложение интеграла в ряд:

$$J(\xi) = \sum_{j=j_0}^{\infty} \frac{e^{-i\frac{\xi_2}{4\xi_3^2}}}{|\xi_3|^{1/2}} \int e^{i(\xi_3 x_1^k + \xi_1 x_1)} b\left(x_1, -\frac{\xi_2}{2\xi_3}\right) \beta(2^j x_1) dx_1,$$

где j_0 — достаточно большое число, зависящее от носителя функции b (см. [21]).

Рассмотрим теперь оценку осцилляторного интеграла J_j, определенного соотношением:

$$J_j(\xi) := \frac{e^{-i\frac{\xi_2}{4\xi_3^2}}}{|\xi_3|^{1/2}} \int e^{i(\xi_3 x_1^k + \xi_1 x_1)} b\left(x_1, -\frac{\xi_2}{2\xi_3}\right) \beta(2^j x_1) dx_1.$$

После преобразования растяжения имеем:

$$J_j(\xi) := 2^{-j} \frac{e^{-i\frac{\xi_2}{4\xi_3^2}}}{|\xi_3|^{1/2}} \int e^{i(2^{-jk} \xi_3 x_1^k + 2^{-j} \xi_1 x_1)} b\left(2^{-j} x_1, -\frac{\xi_2}{2\xi_3}\right) \beta(x_1) dx_1.$$

Предположим сначала, что $|\xi_3| \leqslant N 2^{jk}$ (где N — достаточно большое фиксированное положительное число). В этом случае мы используем оценку

$$J_j(\xi) = O\left(\frac{1}{2^j |\xi_3|^{1/2} (1 + |\xi_1 2^{-j}|)}\right)$$

для интеграла по x_1. Действительно, если $|\xi_1 2^{-j}| \leqslant 2N$, то тривиальная оценка интеграла дает искомое соотношение, в противном случае достаточно использовать формулу интегрирования по частям и получить:

$$\int\limits_{0\leqslant \max\{|\xi_1|,\,|\xi_2|\}\leqslant|\xi_3|\leqslant 2^{jk}} |J_j(\xi)|^p d\xi \leqslant C2^{-j(p-1)}\int\limits_1^{2^{jk}} |\xi_3|^{1-p/2} d\xi_3 \leqslant C2^{-j(p-1)+(2-p/2)jk} \leqslant C2^{-\delta j}$$

при условии $p > p_k$, где $\delta > 0$ — положительное число.

В случае $|\xi_3| < N2^{jk}$ мы введем обозначение

$$\sigma_1 := 2^{-j(k-1)}\frac{\xi_1}{\xi_3}.$$

Если $|\sigma_1| \geqslant M$ (где M достаточно большое положительное число), то фазовая функция осцилляторного интеграла не имеет критических точек. Поэтому мы можем использовать формулу интегрирования по частям по x_1 и получить:

$$|J_j(\xi)| \leqslant C\frac{2^{j(k-1)}}{|\xi_3|^{3/2}|\sigma_1|}.$$

Интегрируя по ξ, имеем

$$\int\limits_{\substack{\{0\leqslant\max\{|\xi_1|,\,|\xi_2|\}\leqslant|\xi_3|\}\cap\\ \cap\{|\xi_3|\geqslant N2^{jk}\}\cap\\ \cap\{|\sigma_1|\geqslant M\}}} |J_j(\xi)|^p d\xi \leqslant C2^{-j(p-1)}\int\limits_{2^{jk}}^{\infty} |\xi_3|^{2-3p/2} d\xi_3 \leqslant C2^{-j((2k+1)-p(k+2)/2)} \leqslant C2^{-\delta j}$$

при $p > p_k$, где $\delta > 0$.

Наконец, рассмотрим случай $|\sigma_1| < M$. Отметим, что если $|\sigma_1| < \varepsilon$ (где $\varepsilon > 0$ — достаточно малое положительное число), то фазовая функция осцилляторного интеграла не имеет критических точек. Поэтому, используя формулу интегрирования по частям по x_1, мы имеем оценку

$$|J_j(\xi)| \leqslant C\frac{2^{j(k-1)}}{|\xi_3|^{3/2}}.$$

Тогда интеграл по переменным ξ по множеству

$$\{0 \leqslant \max\{|\xi_1|,\, |\xi_2|\} \leqslant |\xi_3|\} \cap \{|\xi_3| \geqslant N2^{jk}\} \cap \{|\sigma_1| < \varepsilon\}$$

имеет оценку $O(2^{-\delta j})$.

В случае $\varepsilon \leqslant |\sigma_1| \leqslant M$ фазовая функция имеет не более двух невырожденных критических точек, и классическая лемма Ван дер Корпута дает оценку:

$$|J_j(\xi)| \leqslant C\frac{2^{j(k/2-1)}}{|\xi_3|}.$$

Стало быть, мы получили

$$\int\limits_{\substack{\{0\leqslant\max\{|\xi_1|,\,|\xi_2|\}\leqslant|\xi_3|\}\cap\\ \cap\{|\xi_3|\geqslant N2^{jk}\}\cap\\ \cap\{\varepsilon\leqslant|\sigma_1|\leqslant M\}}} |J_j(\xi)|^p d\xi \leqslant C2^{j(p(k/2-1)-(k-1)+(3-p)k)} \leqslant C2^{-\delta j},$$

где снова $\delta > 0$ при $p > p_k$. Таким образом, суммируя полученные оценки, мы завершаем доказательство леммы 6.1. $\square$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Арнольд В. И., Варченко А. Н., Гусейн-заде С. М.* Особенности диффернцируемых отображений, ч. 1. Классификация критических точек каустик и волновых фронтов. — М.: Наука, 1982.
2. *Архипов Г. И., Карацуба А. А., Чубариков В. Н.* Тригонометрические интегралы// Изв. АН СССР. — 1979. — *43*, № 5. — С. 971–1003.
3. *Варченко А. Н.* Многогранники Ньютона и оценки осциллирующих интегралов// Функц. анализ и его прилож. — 1976. — *10*, № 3. — С. 13–38.
4. *Виноградов И. М.* Метод тригонометрических сумм в теории чисел. — М.: Наука, 1980.
5. *Икромов И. А.* Об оценках преобразования Фурье индикатора невыпуклых множеств// Докл. РАН. — 1993. — *331*, № 3. — С. 272–274.
6. *Икромов И. А.* Об оценках преобразования Фурье индикатора невыпуклых областей// Функц. анализ и его прилож. — 1995. — *29*, № 3. — С. 16–24.
7. *Икромов И. А.* Демпфированные осцилляторные интегралы и максимальные операторы// Мат. заметки. — 2005. — *78*, № 6. — С. 833–852.
8. *Икромов И. А.* Суммируемость осцилляторных интегралов по параметрам и проблема об ограничении преобразования Фурье на кривых// Мат. заметки. — 2010. — *87*, № 5. — С. 734–755.
9. *Карпушкин В. Н.* Теорема о равномерной оценке осциллирующих интегралов с фазой, зависящей от двух переменных// Труды сем. им. И. Г. Петровского. — 1984. — *10*. — С. 150–169.
10. *Паламодов В. П.* Обобщенные функции и гармонический анализ// Соврем. пробл. мат. Фундам. направл. — 1991. — *72*. — С. 5–134.
11. *Попов Д. А.* Оценки с константами для некоторых классов осциллирующих интегралов// Усп. мат. наук. — 1997. — *52*, № 1. — С. 77–148.
12. *Садуллаев А. С.* Критерии алгебраичности аналитических множеств// Функц. анализ и его прилож. — 1972. — *6*, № 1. — С. 85-86.
13. *Хермандер Л.* Анализ линейных дифференциальных операторов с частными производными. Ч. 1. — М.: Мир, 1986.
14. *Чахкиев М.* Оценки осциллирующих интегралов с выпуклой фазой и их приложения// Автореферат дисс. д.ф.-м.н. — М.: МГУ, 2006.
15. *Bak J.-G., Oberlin D., Seeger A.* Restriction of Fourier transform to curves: An endpoint estimate with affine arclength measure// ArXiv. — 2012. — 1109.1300v2 [math.CA].
16. *Duistermaat J.* Oscillatory integrals, Lagrange immersions and unifoldings of singularities// Commun. Pure Appl. Math. — 1974. — *27*, № 2. — С. 207–281.
17. *Erdös L'., Salmhofer M.* Decay of the Fourier transform of surfaces with vanishing curvature// Math. Z. — 2007. — *257*, № 2. — С. 261–294.
18. *Hironaka H.* Resolution of singularities of an algebraic variety over a field of characteristic zero: I, II// Ann. Math. — 1964. — *79*. — С. 109–326.
19. *Hua L.-K.* On the number of solutions of Tarry's problem// Acta Sci. Sinica. — 1952. — *1*, № 1. — С. 1–76.
20. *Ikromov I. A., Kempe M., Müller D.* Estimates for maximal functions associated with hypersurfaces in $\mathbb{R}^3$ and related problems of harmonic analysis// Acta Math. — 2010. — *204*, № 2. — С. 151–271.
21. *Ikromov I. A., Müller D.* Uniform estimates for the Fourier transform of surface carried measures in $\mathbb{R}^3$ and an application to Fourier restriction// J. Fourier Anal. Appl. — 2011. — *17*, № 6. — С. 1292–1332.
22. *Ikromov I. A., Müller D.* Fourier restriction for hypersurfaces in three dimensions and Newton polyhedra. — Princeton—Oxford: Princeton University Press, 2016.
23. *Mokenhaupt G.* Bounds in Lebesgue spaces of oscillatory integral operators// Habilitationsschrift. — Universität Siegen, 1996.
24. *Phong D. H., Stein E. M., Sturm J. A.* On the growth and stability of real-analytic functions// Am. J. Math. — 1999. — *121*, № 3. — С. 519–554.
25. *Randol B.* On the asymptotic behavior of the Fourier transform of the indicator function of a convex set// Trans. AMS. — 1970. — *139*. — С. 278–285.
26. *Sadullaev A.* On Weierstrass polynomials// Ann. Pol. Mat. — 2019. — *123*. — С. 473–479.
27. *Sadullaev A., Ikromov I. A.* Oscillatory integrals and Weierstrass polynomials// Bull. Nat. Univ. Uzbekistan. Math. Nat. Sci. — 2019. — *2*, № 2. — С. 125–139.
28. *Sogge C. D.* Fourier integrals in classical analysis. — Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1993.
29. *Sogge C. D., Stein E. M.* Averages of functions over hypersurfaces in $\mathbb{R}^n$// Invent. Math. — 1985. — *82*, № 3. — С. 543–556.
30. *Stein E. M.* Harmonic analysis: real-valued methods, orthogonality and oscillatory integrals. — Princeton: Princeton University Press, 1993.

31. *Svensson I.* Estimates for the Fourier transform of the characteristic function of a convex set// Ark. Mat. — 1970. — *9*, № 1. — С. 11–22.
32. *Van der Corput J. G.* Zur Methode der stationaren phase. I// Composito Math. — 1934. — *1*. — С. 15–38.

Икромов Исроил Акрамович
Самаркандский государственный университет им. А. Навои, Самарканд, Узбекистан
E-mail: ikromov1@rambler.ru

Садуллаев Азимбай Садуллаевич
Национальный университет Узбекистана им. М. Улугбека, Ташкент, Узбекистан
E-mail: sadullaev@mail.ru

DOI: 10.22363/2413-3639-2021-67-4-668-692 UDC 517.518

Weierstrass Polynomials in Estimates of Oscillatory Integrals

© 2021 **I. A. Ikromov, A. S. Sadullaev**

Abstract. In this paper, estimates are obtained for the Fourier transform of smooth charges (measures) concentrated on some nonconvex hypersurfaces. The summability of the maximal Randall function is proved for a wide class of nonconvex hypersurfaces. In addition, in the three-dimensional case, estimates are obtained depending on the Varchenko height. The accuracy of the obtained estimates is proved. The proof of the estimate for oscillatory integrals is based on the Weierstrass preparatory theorem.

REFERENCES

1. V. I. Arnol'd, A. N. Varchenko, and S. M. Guseyn-zade, *Osobennosti differntsiruemykh otobrazheniy, ch. 1. Klassifikatsiya kriticheskikh tochek kaustik i volnovykh frontov* [Singularities of Differentiable Mappings, V. 1. Classification of Critical Points of Caustics and Wave Fronts], Nauka, Moscow, 1982 (in Russian).
2. G. I. Arkhipov, A. A. Karatsuba, and V. N. Chubarikov, "Trigonometricheskie integraly" [Trigonometric integrals], *Izv. AN SSSR* [Bull. Acad. Sci. USSR], 1979, **43**, No. 5, 971–1003 (in Russian).
3. A. N. Varchenko, "Mnogogranniki N'yutona i otsenki ostsilliruyushchikh integralov" [Newton polytopes and estimates for oscillating integrals], *Funkts. analiz i ego prilozh.* [Funct. Anal. Appl.], 1976, **10**, No. 3, 13–38 (in Russian).
4. I. M. Vinogradov, *Metod trigonometricheskikh summ v teorii chisel* [Method of Trigonometric Sums in Number Theory], Nauka, Moscow, 1980 (in Russian).
5. I. A. Ikromov, "Ob otsenkakh preobrazovaniya Fur'e indikatora nevypuklykh mnozhestv" [On estimates of the Fourier transform of the indicator of nonconvex sets], *Dokl. RAN* [Rep. Russ. Acad. Sci.], 1993, **331**, No. 3, 272–274 (in Russian).
6. I. A. Ikromov, "Ob otsenkakh preobrazovaniya Fur'e indikatora nevypuklykh oblastey" [On estimates of the Fourier transform of the indicator of nonconvex domains], *Funkts. analiz i ego prilozh.* [Funct. Anal. Appl.], 1995, **29**, No. 3, 16–24 (in Russian).
7. I. A. Ikromov, "Dempfirovannye ostsillyatornye integraly i maksimal'nye operatory" [Damped oscillatory integrals and maximum operators], *Mat. zametki* [Math. Notes], 2005, **78**, No. 6, 833–852 (in Russian).
8. I. A. Ikromov, "Summiruemost' ostsillyatornykh integralov po parametram i problema ob ogranichenii preobrazovaniya Fur'e na krivykh" [Summability of oscillatory integrals with respect to parameters and the problem of restricting the Fourier transform on curves], *Mat. zametki* [Math. Notes], 2010, **87**, No. 5, 734–755 (in Russian).

9. V. N. Karpushkin, “Teorema o ravnomernoy otsenke ostsilliruyushchikh integralov s fazoy, zavisyashchey ot dvukh peremennykh” [A uniform estimate theorem for oscillating integrals with phase depending on two variables], *Trudy sem. im. I. G. Petrovskogo* [Proc. Petrovskii Semin.], 1984, **10**, 150–169 (in Russian).
10. V. P. Palamodov, “Obobshchennye funktsii i garmonicheskiy analiz” [Generalized functions and harmonic analysis], *Sovrem. probl. mat. Fundam. napravl.* [Contemp. Math. Fundam. Directions], 1991, **72**, 5–134 (in Russian).
11. D. A. Popov, “Otsenki s konstantami dlya nekotorykh klassov ostsilliruyushchikh integralov” [Estimates with constants for some classes of oscillating integrals], *Usp. mat. nauk* [Progr. Math. Sci.], 1997, **52**, No. 1, 77–148 (in Russian).
12. A. S. Sadullaev, “Kriterii algebraichnosti analiticheskikh mnozhestv” [Criteria for the algebraicity of analytic sets], *Funkts. analiz i ego prilozh.* [Funct. Anal. Appl.], 1972, **6**, No. 1, 85-86 (in Russian).
13. L. Khermander, *Analiz lineynykh differentsial’nykh operatorov s chastnymi proizvodnymi. Ch. 1* [Analysis of Linear Partial Differential Operators. V. 1], Mir, Moscow, 1986 (in Russian).
14. M. Chakhkiev, “Otsenki ostsilliruyushchikh integralov s vypukloy fazoy i ikh prilozheniya” [Estimates for oscillating integrals with convex phase and their applications], *Abstract of doctoral thesis*, MSU, Moscow, 2006 (in Russian).
15. J.-G. Bak, D. Oberlin, and A. Seeger, “Restriction of Fourier transform to curves: An endpoint estimate with affine arclength measure,” *ArXiv*, 2012, 1109.1300v2 [math.CA].
16. J. Duistermaat, “Oscillatory integrals, Lagrange immersions and unifoldings of singularities,” *Commun. Pure Appl. Math.*, 1974, **27**, No. 2, 207–281.
17. L’. Erdös and M. Salmhofer, “Decay of the Fourier transform of surfaces with vanishing curvature,” *Math. Z.*, 2007, **257**, No. 2, 261–294.
18. H. Hironaka, “Resolution of singularities of an algebraic variety over a field of characteristic zero: I, II,” *Ann. Math.*, 1964, **79**, 109–326.
19. L.-K. Hua, “On the number of solutions of Tarry’s problem,” *Acta Sci. Sinica*, 1952, **1**, No. 1, 1–76.
20. I. A. Ikromov, M. Kempe, and D. Müller, “Estimates for maximal functions associated with hypersurfaces in $\mathbb{R}^3$ and related problems of harmonic analysis,” *Acta Math.*, 2010, **204**, No. 2, 151–271.
21. I. A. Ikromov and D. Müller, “Uniform estimates for the Fourier transform of surface carried measures in $\mathbb{R}^3$ and an application to Fourier restriction,” *J. Fourier Anal. Appl.*, 2011, **17**, No. 6, 1292–1332.
22. I. A. Ikromov and D. Müller, *Fourier restriction for hypersurfaces in three dimensions and Newton polyhedra*, Princeton University Press, Princeton–Oxford, 2016.
23. G. Mokenhaupt, “Bounds in Lebesgue spaces of oscillatory integral operators,” *Habilitationsschrift*, Universität Siegen, 1996.
24. D. H. Phong, E. M. Stein, and J. A. Sturm, “On the growth and stability of real-analytic functions,” *Am. J. Math.*, 1999, **121**, No. 3, 519–554.
25. B. Randol, “On the asymptotic behavior of the Fourier transform of the indicator function of a convex set,” *Trans. Am. Math. Soc.*, 1970, **139**, 278–285.
26. A. Sadullaev, “On Weierstrass polynomials,” *Ann. Pol. Mat.*, 2019, **123**, 473–479.
27. A. Sadullaev and I. A. Ikromov, “Oscillatory integrals and Weierstrass polynomials,” *Bull. Nat. Univ. Uzbekistan. Math. Nat. Sci.*, 2019, **2**, No. 2, 125–139.
28. C. D. Sogge, *Fourier integrals in classical analysis*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1993.
29. C. D. Sogge and E. M. Stein, “Averages of functions over hypersurfaces in $\mathbb{R}^n$,” *Invent. Math.*, 1985, **82**, No. 3, 543–556.
30. E. M. Stein, *Harmonic analysis: real-valued methods, orthogonality and oscillatory integrals*, Princeton University Press, Princeton, 1993.
31. I. Svensson, “Estimates for the Fourier transform of the characteristic function of a convex set,” *Ark. Mat.*, 1970, **9**, No. 1, 11–22.
32. J. G. van der Corput, “Zur Methode der stationaren phase. I,” *Composito Math.*, 1934, **1**, 15–38.

I. A. Ikromov
Samarkand State University named after A. Navoi, Samarkand, Uzekistan
E-mail: ikromov1@rambler.ru

A. S. Sadullaev
Samarkand State University named after A. Navoi, Samarkand, Uzekistan
E-mail: sadullaev@mail.ru