Современная математика. Фундаментальные направления. Том 67, № 4 (2021). С. 654–667
Contemporary Mathematics. Fundamental Directions. ISSN 2413-3639 (Print)

DOI: 10.22363/2413-3639-2021-67-4-654-667 УДК 517.98

СТАТИСТИЧЕСКАЯ ЭРГОДИЧЕСКАЯ ТЕОРЕМА В СИММЕТРИЧНЫХ ПРОСТРАНСТВАХ ДЛЯ БЕСКОНЕЧНЫХ МЕР

© 2021 г. **А. С. ВЕКСЛЕР, В. И. ЧИЛИН**

Аннотация. Пусть (Ω, μ) — измеримое пространство с σ-конечной непрерывной мерой, $\mu(\Omega) = \infty$. Линейный оператор $T : L_1(\Omega)+L_\infty(\Omega) \to L_1(\Omega)+L_\infty(\Omega)$ называют *оператором Данфорда—Шварца*, если $\|T(f)\|_1 \leqslant \|f\|_1$ (соответственно, $\|T(f)\|_\infty \leqslant \|f\|_\infty$) для всех $f \in L_1(\Omega)$ (соответственно, $f \in L_\infty(\Omega)$). Если $\{T_t\}_{t\geqslant 0}$ — сильно непрерывная в $L_1(\Omega)$ полугруппа операторов Данфорда—Шварца, то каждый оператор $A_t(f) = \dfrac{1}{t}\int\limits_0^t T_s(f)ds \in L_1(\Omega)$, $f \in L_1(\Omega)$ имеет единственное продолжение до оператора Данфорда—Шварца, которое также обозначается через A_t, $t > 0$. Доказывается, что во вполне симметричном пространстве $E(\Omega) \nsubseteq L_1$ измеримых функций на (Ω, μ) средние A_t сильно сходятся при $t \to +\infty$ для каждой сильно непрерывной в $L_1(\Omega)$ полугруппы $\{T_t\}_{t\geqslant 0}$ операторов Данфорда—Шварца в том и только в том случае, когда норма $\|\cdot\|_{E(\Omega)}$ порядково непрерывна.

ОГЛАВЛЕНИЕ

1. Введение

Известная статистическая эргодическая теорема для линейных сжатий T рефлексивного банахова пространства $(X, \|\cdot\|_X)$ утверждает, что средние Чезаро $A_n(T) = \dfrac{1}{n+1}\sum\limits_{k=0}^{n} T^k$ сходятся сильно в X [14, глава III, §3], т. е. для любого $x \in X$ существует такое $\widehat{x} \in X$, что

$$\left\| \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} T^k(x) - \widehat{x} \right\|_X \to 0 \quad \text{при} \quad n \to \infty.$$

Полезными примерами, иллюстрирующими статистическую эргодическую теорему, являются банаховы пространства $L_p(\Omega) = L_p(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$, $1 \leqslant p < \infty$, всех действительных измеримых функций f, заданных на измеримом пространстве $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ с σ-конечной мерой μ, для которых $\|f\|_p = (\int\limits_\Omega |f|^p d\mu)^{1/p} < \infty$ (равные почти всюду функции отождествляются). При $1 < p < \infty$ пространства $L_p(\Omega)$ рефлексивны, и поэтому средние Чезаро $A_n(T)$ сходятся сильно в $L_p(\Omega)$ для любого линейного сжатия $T : L_p(\Omega) \to L_p(\Omega)$. В случае пространств $L_1(\Omega)$ и $L_\infty(\Omega)$ статистическая эргодическая теорема, вообще говоря, уже неверна.

Важными примерами линейных операторов, для которых верна статистическая эргодическая теорема, являются *абсолютные линейные сжатия*, т. е. такие линейные операторы $T : L_1(\Omega) \to$

$L_1(\Omega)$, для которых $\|T(f)\|_1 \leqslant \|f\|_1$ для всех $f \in L_1(\Omega)$ и $\|T(f)\|_\infty \leqslant \|f\|_\infty$ для всех $f \in L_1(\Omega) \cap L_\infty(\Omega)$.

Каждое абсолютное линейное сжатие T естественным образом продолжается до линейного сжатия в пространстве $L_p(\Omega)$ [16, гл. II, §4] (это продолжение также обозначается через T), и поэтому средние Чезаро $A_n(T)$ сходятся сильно в $L_p(\Omega)$ при $1 < p < \infty$. Эргодические свойства абсолютных линейных сжатий в пространствах $L_p(\Omega)$ рассматривались в [15, 17].

Каждое абсолютное линейное сжатие T однозначно определяет линейный оператор

$$\widehat{T} : L_1(\Omega) + L_\infty(\Omega) \to L_1(\Omega) + L_\infty(\Omega),$$

для которого сужение $\widehat{T}_{|L_1(\Omega)}$ на $L_1(\Omega)$ совпадает с оператором T (см. [7, теорема 3.1]). При этом

$$\|\widehat{T}(f)\|_1 \leqslant \|f\|_1 \ \text{ для всех } \ f \in L_1(\Omega) \quad \text{и} \quad \|\widehat{T}(f)\|_\infty \leqslant \|f\|_\infty \ \text{ для всех } \ f \in L_\infty(\Omega). \tag{1.1}$$

Линейный оператор $T : L_1(\Omega) + L_\infty(\Omega) \to L_1(\Omega) + L_\infty(\Omega)$, удовлетворяющий неравенствам (1.1), называют *оператором Данфорда—Шварца* (запись: $T \in DS$). Если $T \in DS$, то $T(E(\Omega)) \subset E(\Omega)$ и $\|T\|_{E(\Omega)\to E(\Omega)} \leqslant 1$ для любого точного интерполяционного в паре $(L_1(\Omega), L_\infty(\Omega))$ симметричного пространства $E(\Omega) \subseteq L_1(\Omega) + L_\infty(\Omega)$ (см. [16, гл. II, §4, раздел 2]). Примерами таких точных интерполяционных симметричных пространств служат функциональные пространства Орлича, Лоренца и Марцинкевича. Отметим также, что класс точных интерполяционных симметричных пространств для пары $(L_1(\Omega), L_\infty(\Omega))$ совпадает с классом вполне симметричных пространств измеримых функций на $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ (см. [16, гл. II, §4, теорема 4.3]).

Естественно возникает задача об описании класса всех вполне симметричных пространств $E(\Omega)$, для которых сохраняется справедливость статистической эргодической теоремы при действии произвольного оператора Данфорда—Шварца $T : E(\Omega) \to E(\Omega)$. Известно, что в случае пространства Лебега $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ с конечной непрерывной мерой средние Чезаро $A_n(T)$ сходятся сильно во вполне симметричном пространстве $E(\Omega)$ для любого $T \in DS$ в том и только в том случае, когда $E(\Omega)$ сепарабельно (см. [1, 2, 19, 20], [4, гл. 2, § 2.1, теорема 2.1.3]). Если же $\mu(\Omega) = \infty$, то уже в случае сепарабельного вполне симметричного пространства $L_1((0, \infty), \nu)$, где ν — обычная мера Лебега, существуют такие $T \in DS$, для которых статистическая эргодическая теорема неверна. В [11] показано, что необходимым и достаточным условием для справедливости статистической эргодической теоремы при действии произвольного оператора Данфорда—Шварца $T : E(0, \infty) \to E(0, \infty)$ во вполне симметричном пространстве $E(0, \infty)$ измеримых функций на $((0, \infty), \nu)$ является одновременное выполнение следующих двух требований: (i) $E(0, \infty)$ сепарабельно; (ii) $E(0, \infty) \nsubseteq L_1((0, \infty), \nu)$.

Основная цель настоящей работы есть установление аналогичного критерия справедливости статистической эргодической теоремы для действий произвольных сильно непрерывных в $L_1(\Omega)$ полугрупп $\{T_t\}_{t\geqslant 0}$ операторов Данфорда—Шварца во вполне симметричных пространствах измеримых функций, заданных на измеримом пространстве $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ с σ-конечной непрерывной мерой.

2. Предварительные сведения

Пусть $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ — измеримое пространство с σ-конечной мерой. Через $L_0 = L_0(\Omega)$ обозначим алгебру всех классов равных почти всюду действительных измеримых функций на $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$, а через $L_0(\mu)$ — подалгебру в L_0, состоящую из тех функций $f \in L$, для которых $\mu(\{|f| > \lambda\}) < \infty$ при некотором $\lambda > 0$. Как обычно, через $L_p \subset L_0(\mu)$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$, обозначается классическое банахово функциональное пространство, снабженное стандартной нормой $\|\cdot\|_p$.

Если $f \in L_0(\mu)$, то *невозрастающая перестановка* $\mu_t(f)$ функции f определяется с помощью равенства

$$\mu_t(f) = \inf\{\lambda > 0 : \mu\{|f| > \lambda\} \leqslant t\}, \quad t \geqslant 0$$

(см., например, [6, ch. II, §1], [16, гл. II, §2]).

Ненулевое линейное подпространство $E \subset L_0(\mu)$ с банаховой нормой $\|\cdot\|_E$ называется *симметричным* пространством на $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$, если из условий

$$f \in E, \ g \in L_0(\mu), \ \mu_t(g) \leqslant \mu_t(f) \ \text{ для всех } \ t \geqslant 0$$

следует, что $g \in E$ и $\|g\|_E \leqslant \|f\|_E$.

Примерами симметричных пространств служат банаховы пространства $(L_p, \|\cdot\|_p)$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$, а также пространство $L_1 \cap L_\infty$ с нормой

$$\|f\|_{L_1 \cap L_\infty} = \max\{\|f\|_1, \|f\|_\infty\}$$

и пространство $L_1 + L_\infty$ с нормой

$$\|f\|_{L_1+L_\infty} = \inf\{\|g\|_1 + \|h\|_\infty : f = g + h,\ g \in L_1,\ h \in L_\infty\}$$

(см. [16, гл. II, §4]).

Положим

$$\mathcal{R}_\mu = \{f \in L_0(\mu) : \mu_t(f) \to 0 \ \text{ при } \ t \to \infty\}.$$

Известно, что $\mathcal{R}_\mu$ совпадает с замыканием подпространства $L_1 \cap L_\infty$ в $(L_1 + L_\infty, \|\cdot\|_{L_1+L_\infty})$ и верно равенство

$$\mathcal{R}_\mu = \{f \in L_0(\mu) : \mu\{|f| > \lambda\} < \infty \ \text{ для всех } \ \lambda > 0\}.$$

В частности, $(\mathcal{R}_\mu, \|\cdot\|_{L_1+L_\infty})$ также есть симметричное пространство на $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$.

Обозначим через $\mathcal{A}_\nu$ σ-алгебру всех измеримых по Лебегу множеств из $(0,\infty)$, а через ν — меру Лебега на $(0,\infty)$. Для любого симметричного пространства $E = E(\nu)$ на $((0,\infty), \mathcal{A}_\nu, \nu)$ положим

$$E(\mu) = \{f \in L_0(\mu) : \mu_t(f) \in E\};$$

$$\|f\|_{E(\mu)} = \|\mu_t(f)\|_E, \quad f \in E(\mu).$$

Известно, что $(E(\mu), \|\cdot\|_{E(\mu)})$ есть симметричное пространство на $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ (см., например, [16, гл. II, §8]). Это симметричное пространство обычно называют пространством, порожденным симметричным пространством $E(\nu)$. В случае, когда $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ не имеет атомов (такие измеримые пространства называются неатомическими), каждое симметричное пространство $(E, \|\cdot\|_E)$ на $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ порождается симметричным пространством $(E(\nu), \|\cdot\|_{E(\nu)})$ на $((0,\infty), \mathcal{A}_\nu, \nu)$, определенным равенствами

$$E(\nu) = \{f \in L_0(\nu) : \mu_t(f) = \mu_t(g) \ \text{ для некоторого } \ g \in E\};$$

$$\|f\|_{E(\nu)} = \|g\|_E, \quad \text{где} \quad \mu_t(f) = \mu_t(g).$$

Для любого симметричного пространства E всегда верны следующие непрерывные вложения [6, ch. 2, §6, Theorem 6.6]:

$$(L_1 \cap L_\infty, \|\cdot\|_{L_1 \cap L_\infty}) \subset (E, \|\cdot\|_E) \subset (L_1 + L_\infty, \|\cdot\|_{L_1+L_\infty}).$$

Обозначим через χ_A характеристическую функцию множества $A \in \mathcal{A}$ и положим $\mathbf{1} = \chi_\Omega$. Если $\mu(\Omega) < \infty$, то

$$\mathbf{1} \in L_\infty \subset E \subset L_1 = \mathcal{R}_\mu.$$

Следующее утверждение описывает класс симметричных пространств, содержащихся в $\mathcal{R}_\mu$ (см. [7, Proposition 2.1]).

Утверждение 2.1. *Если $\mu(\Omega) = +\infty$, то симметричное пространство E на $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ содержится в $\mathcal{R}_\mu$ в том и только в том случае, когда $\mathbf{1} \notin E$.*

Если $(E, \|\cdot\|_E)$ — симметричное пространство на $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$, то *ассоциированное пространство* (*Köthe dual space*) $(E^\times, \|\cdot\|_{E^\times})$ для $(E, \|\cdot\|_E)$ определяется следующими равенствами:

$$E^\times = \{f \in L_1 + L_\infty : \int\limits_\Omega |fg| d\mu < \infty \ \text{ для всех } \ g \in E\},$$

$$\|f\|_{E^\times} = \sup\{\int\limits_\Omega |fg| d\mu : \quad \|g\|_E \leqslant 1\}.$$

Известно (см., например [18, Ch. 7, § 7.1], что $(E^\times, \|\,\|_{E^\times})$ есть симметричное пространство на $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$. При этом

$$E \subseteq E^{\times\times},\ (L_\infty)^\times = L_1,\ (L_1)^\times = L_\infty,$$

$$(L_1 \cap L_\infty)^\times = L_1 + L_\infty,\ (L_1 + L_\infty)^\times = L_1 \cap L_\infty.$$

Определим в $L_0(\mu)$ частичный порядок Харди—Литтлвуда—Полиа (Hardy, Littlewood, Polya) $f \prec g$, полагая

$$f \prec g \iff \int_0^s \mu_t(f)dt \leqslant \int_0^s \mu_t(g)dt \quad \text{для всех} \quad s > 0.$$

Ненулевое линейное подпространство $E \subset L_0(\mu)$ с банаховой нормой $\|\cdot\|_E$ называется *вполне симметричным* пространством на $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$, если из условий $f \in E$, $g \in L_0(\mu)$, $g \prec f$, следует, что $g \in E$ и $\|g\|_E \leqslant \|f\|_E$.

Любое вполне симметричное пространство является симметричным пространством. Обратное, вообще говоря, неверно (см. [16, гл. II, §5, теорема 5.11]). Примерами вполне симметричных пространств служат пространства $(L_p, \|\cdot\|_p)$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$, $L_1 \cap L_\infty$, $L_1 + L_\infty$, $(\mathcal{R}_\mu, \|\cdot\|_{L_1+L_\infty})$, $(E^\times, \|\cdot\|_{E^\times})$.

Как уже отмечалось во введении, линейный оператор $T : L_1 + L_\infty \to L_1 + L_\infty$ есть оператор Данфорда—Шварца (запись: $T \in DS$), если

$$\|T(f)\|_1 \leqslant \|f\|_1 \quad \text{для всех} \quad f \in L_1, \qquad \|T(f)\|_\infty \leqslant \|f\|_\infty \quad \text{для всех} \quad f \in L_\infty.$$

Для каждого оператора $T \in DS$ верны неравенства $\|T\|_{L_1+L_\infty \to L_1+L_\infty} \leqslant 1$, $Tf \prec\prec f$ при всех $f \in L_1 + L_\infty$ (см. [16, гл. II, §3, раздел 4]). В частности, отсюда вытекает, что $T(E) \subset E$ и $\|T\|_{E\to E} \leqslant 1$ для любого вполне симметричного пространства E (см. [16, гл. II, §4, раздел 2]).

Пусть $\{T_t\}_{t\geqslant 0}$ — полугруппа операторов Данфорда—Шварца, действующая в симметричном пространстве $L_1 + L_\infty$ (при $t = 0$ считаем, что $T_0(f) = I(f) = f$ есть тождественный оператор в $L_1 + L_\infty$). Говорят, что полугруппа $\{T_t\}_{t\geqslant 0}$ *сильно непрерывна* в L_1, если

$$\|T_t(f) - T_{t_0}(f)\|_1 \to 0 \quad \text{при} \quad t \to t_0 \quad \text{для всех} \quad f \in L_1.$$

В этом случае для фиксированного $f \in L_1$ и любого $g \in L_\infty$ функция $\varphi_{f,g}(t) = \int\limits_\Omega T_t(f)g)d\mu$ непрерывна на $\mathbb{R}_+ = [0, \infty)$, и поэтому отображение $U_f : \mathbb{R}_+ \to L_1$, определенное равенством $U_f(t) = T_t(f)$, является слабо ν-измеримым (см. [22, Ch. V, §4]). Поскольку образ $U_f(\mathbb{R}_+)$ есть сепарабельное подмножество в L_1, то, согласно теореме Петтиса (см. [22, Ch. V, §4]), отображение U_f сильно ν-измеримо, и следовательно, действительная функция $\|U_f(t)\|_1 = \|T_t(f)\|_1$ также ν-измерима на $\mathbb{R}_+$. Поэтому из неравенства $\|T_t(f)\|_1 \leqslant \|f\|_1$ следует, что неотрицательная функция $\|T_s(f)\|_1$ интегрируема по Лебегу на отрезке $[0, t]$ для каждого $t > 0$. Следовательно, L_1-значная функция $T_s(f)$ является ν-интегрируемой по Бохнеру на каждом отрезке $[0, t]$, $t > 0$ (см. [22, Ch. V, §5, Theorem 1]). В частности, для любых $f \in L_1$ и $t > 0$ существует интеграл

$$A_t(f) = \frac{1}{t}\int_0^t T_s(f)ds \in L_1, \tag{2.1}$$

при этом $\|A_t(f)\|_1 \leqslant \|f\|_1$ для всех $f \in L_1$ и $\|A_t(xf\|_\infty \leqslant \|f\|_\infty$ для всех $f \in L_1 \cap L_\infty$. Следовательно, оператор A_t есть абсолютное линейное сжатие в L_1 для каждого $t > 0$ (при $t = 0$ считаем, что $A_0(f) = I(f) = f$ есть тождественный оператор). Согласно [7, Theorem 3.2], для любого $t \geqslant 0$ существует единственное расширение оператора A_t до оператора Данфорда—Шварца, действующего в $L_1 + L_\infty$ (это расширение также будем обозначать через A_t). Операторы $A_t \in DS$ обычно называют *непрерывными средними* сильно непрерывной в L_1 полугруппы $\{T_t\}_{t\geqslant 0}$. Для таких непрерывных средних всегда верны равенства $A_t(f) = \dfrac{1}{t}\int\limits_0^t T_s(f)ds \in L_1$ при каждом $f \in L_1$ и включения $A_t(E) \subset E$ для всех вполне симметричных пространств E на $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$.

Известна следующая статистическая эргодическая теорема для сильно непрерывных в L_1 полугрупп $\{T_t\}_{t\geqslant 0} \subset DS$ (см., например, [14, Ch. VIII, §7, Theorem 1, Corollary 3]).

Теорема 2.1. *Пусть $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ — измеримое пространство с σ-конечной мерой, и пусть $\{T_t\}_{t\geqslant 0}$ — сильно непрерывная в L_1 полугруппа операторов Данфорда—Шварца. Тогда непрерывные средние $\{A_t\}_{t\geqslant 0}$ сходятся сильно в каждом $L_p(\mu)$, $1 < p < \infty$, при $t \to \infty$, т. е. для любого $f \in L_p(\mu)$ существует такое $\widehat{f} \in L_p(\mu)$, что $\|A_t(f) - \widehat{f}\|_p \to 0$ при $t \to \infty$.*

Отметим, что в случае $\mu(\Omega) < \infty$ утверждение теоремы 2.1 сохраняется и для пространства $L_1(\mu)$ (см. [14, Ch. VIII, §7, Corollary 4]).

3. Статистическая эргодическая теорема и порядковая непрерывность нормы

В этом разделе доказывается, что для каждого вполне симметричного пространства $(E, \|\cdot\|_E)$ на неатомическом измеримом пространстве $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ с σ-конечной мерой μ, $\mu(\Omega) = \infty$, норма $\|\cdot\|_E$ которого не является порядково непрерывной, всегда существует такая сильно непрерывная в L_1 полугруппа $\{T_t\}_{t\geqslant 0}$ операторов Данфорда—Шварца, что непрерывные средние $\{A_t\}_{t\geqslant 0}$ не сходятся сильно в $(E, \|\cdot\|_E)$, т. е. для полугруппы $\{T_t\}_{t\geqslant 0}$ неверна статистическая эргодическая теорема в $(E, \|\cdot\|_E)$.

Пусть $(\Omega_1, \mathcal{A}_1, \mu_1)$ и $(\Omega_2, \mathcal{A}_2, \mu_2)$ — два измеримых пространства с σ-конечными мерами. Отображение $\sigma : \Omega_1 \to \Omega_2$ называется *сохраняющим меру преобразованием* , если

$$\sigma^{-1}(A) \in \mathcal{A}_1 \quad \text{и} \quad \mu_1\left(\sigma^{-1}(A)\right) = \mu_2(A) \ \ \text{для любого} \ \ A \in \mathcal{A}_2.$$

Обозначим через $\operatorname{supp}(f)$ носитель функции $f \in L_0(\Omega)$. Нам понадобится следующее важное свойство неатомических пространств с σ-конечной мерой.

Теорема 3.1 (см. [6, Ch. 2, Corollary 7.6]). *Если $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ — неатомическое пространство с σ-конечной мерой, то для любого $0 \leqslant f \in \mathcal{R}_\mu$ существует такое сюръективное сохраняющее меру преобразование $\sigma : \operatorname{supp}(f) \to \operatorname{supp}(\mu_t(f))$, что $f(\omega) = \mu_t(f)(\sigma(\omega))$ для п.в. $\omega \in \operatorname{supp}(f)$.*

Если в условиях теоремы 3.1 $\mu(\operatorname{supp}(f)) = +\infty$ (это равенство выполняется, например, в случае, когда $\operatorname{supp}(f) = \Omega$), то $\operatorname{supp}(\mu_t(f)) = (0, \infty)$, и в этой ситуации отображение σ есть сюръективное сохраняющее меру преобразование из $\operatorname{supp}(f)$ на $(0, \infty)$.

Пусть ∇_1, ∇_2 — полные булевы алгебры. Булев гомоморфизм $\varphi : \nabla_1 \to \nabla_2$ называется *вполне аддитивным*, если $\varphi(\sup\limits_{i\in I} e_i) = \sup\limits_{i\in I} \varphi(e_i)$ для любого семейства $\{e_i\}_{i\in I}$ попарно дизъюнктных элементов из ∇_1. Каждый булев изоморфизм $\varphi : \nabla_1 \to \nabla_2$ всегда вполне аддитивен.

Обозначим через ∇_μ полную булеву алгебру классов эквивалентности $e = [A]$ равных почти всюду множеств из $A \in \mathcal{A}$. Функция $\widehat{\mu}(e) = \mu(A)$ есть строго положительная σ-конечная счетно-аддитивная мера на ∇_μ (см., например, [21, Ch. I, §6]). В дальнейшем меру $\widehat{\mu}$ будем обозначать также через μ, соответственно, алгебру $L_0(\Omega)$ (пространство $L_p(\Omega)$) через $L_0(\nabla_\mu)$ ($L_p(\nabla_\mu)$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$).

Если $(\Omega_i, \mathcal{A}_i, \mu_i)$, $i = 1, 2$ — два измеримых пространства с σ-конечными мерами и преобразование $\sigma : \Omega_1 \to \Omega_2$ сохраняет меру, то отображение $\varphi : \nabla_{\mu_2} \to \nabla_{\mu_1}$, определяемое равенством $\varphi([A]) = [\sigma^{-1}(A)]$, $A \in \mathcal{A}_2$, есть булев гомоморфизм со свойством $\mu_1(\varphi(e)) = \mu_2(e)$ для всех $e \in \nabla_{\mu_2}$ (в этом случае говорят, что булев гомоморфизм φ сохраняет меру).

Теорема 3.2. *Пусть $(\Omega_i, \mathcal{A}_i, \mu_i)$ — измеримые пространства с σ-конечными мерами μ_i, $i = 1, 2$, и пусть $\varphi : \nabla_{\mu_2} \to \nabla_{\mu_1}$ — инъективный вполне аддитивный булев гомоморфизм* (*изоморфизм*)*, сохраняющий меру. Тогда существует такой инъективный гомоморфизм* (*изоморфизм*) *Φ из алгебры $L_0(\nabla_{\mu_2})$ в алгебру* (*на алгебру*) *$L_0(\nabla_{\mu_1})$, что*

- (i) *$\Phi(e) = \varphi(e)$ для всех $e \in \nabla_{\mu_2}$;*
- (ii) *$\Phi(L_1(\nabla_{\mu_2})) \subset L_1(\nabla_{\mu_1})$ и $\Phi(L_\infty(\nabla_{\mu_2})) \subset L_\infty(\nabla_{\mu_1})$* (*соответственно, $\Phi(L_1(\nabla_{\mu_2})) = L_1(\nabla_{\mu_1})$ и $\Phi(L_\infty(\nabla_{\mu_2})) = L_\infty(\nabla_{\mu_1})$*)*, при этом оба отображения $\Phi : L_1(\nabla_{\mu_2}) \to L_1(\nabla_{\mu_1})$ и $\Phi : L_\infty(\nabla_{\mu_2}) \to L_\infty(\nabla_{\mu_1})$ суть линейные изометрии* (*соответственно, сюръективные линейные изометрии*).

Доказательство. (i). Покажем сначала, что булев гомоморфизм (изоморфизм) φ продолжается до гомоморфизма (изоморфизма) $\Phi_0 : L_\infty(\nabla_{\mu_2}) \to L_\infty(\nabla_{\mu_2})$. Обозначим через $\mathbb{R}(\nabla_{\mu_2})$ всюду плотную в банаховой алгебре $(L_\infty(\nabla_{\mu_2}), \|\cdot\|_\infty)$ подалгебру всех ступенчатых элементов алгебры $L_\infty(\nabla_{\mu_2})$ вида $f = \sum\limits_{i=1}^{k} \lambda_i e_i$, где $e_i \in \nabla_{\mu_2}$, $e_i e_j = 0$, если $i \neq j$, и $\lambda_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, \ldots, k$, $\mathbb{R}$ — поле действительных чисел. Для каждого ступенчатого элемента $f = \sum\limits_{i=1}^{k} \lambda_i e_i$ положим $\Phi_0(f) = \sum\limits_{i=1}^{k} \lambda_i \varphi(e_i)$. Так как φ есть инъективный булев гомоморфизм (изоморфизм), то Φ_0 есть инъективный гомоморфизм (изоморфизм) из алгебры $\mathbb{R}(\nabla_{\mu_2})$ в алгебру (на алгебру) $\mathbb{R}(\nabla_{\mu_1})$, при этом $\|f\|_\infty = \|\Phi_0(f)\|_\infty$ для всех $f \in \mathbb{R}(\nabla_{\mu_2})$. Поскольку подалгебра $\mathbb{R}(\nabla_{\mu_i})$ плотна в банаховой алгебре $(L_\infty(\nabla_{\mu_i}), \|\cdot\|_\infty)$, $i =$

$1, 2$, то Φ_0 продолжается до инъективного гомоморфизма (изоморфизма) $\Phi_0 : L_\infty(\nabla_{\mu_2}) \to L_\infty(\nabla_{\mu_2})$, при этом $\Phi_0(e) = \varphi(e)$ для всех $e \in \nabla_{\mu_2}$.

Если $f \in L_0(\nabla_{\mu_2})$, то существует такое разбиение $\{e_i\}_{i\in I}$ единицы $\mathbf{1}_{\nabla_{\mu_2}}$ булевой алгебры ∇_{μ_2}, что $fe_i \in L_\infty(\nabla_{\mu_1})$ для любого $i \in I$. Так как φ — вполне аддитивный булев гомоморфизм, то $\{\varphi(e_i)\}_{i\in I}$ есть разбиение единицы $\mathbf{1}_{\nabla_{\mu_1}}$ булевой алгебры ∇_{μ_1}. Следовательно, существует единственный элемент $g \in L(\nabla_{\mu_1})$ такой, что $\Phi_0(fe_i)\varphi(e_i) = g\varphi(e_i)$ для всех $i \in I$.

Если $\{q_j\}_{j\in J}$ — другое разбиение единицы $\mathbf{1}_{\nabla_{\mu_2}}$, для которого $fq_j \in L_\infty(\nabla_{\mu_2})$ при всех $j \in J$, то $p_{ij} = e_iq_j$, $i \in I$, $j \in J$, также есть разбиение единицы $\mathbf{1}_{\nabla_{\mu_2}}$ и $fp_{ij} \in L_\infty(\nabla_{\mu_2})$ для любых $i \in I$, $j \in J$. Если $h \in L_0(\nabla_{\mu_1})$ и $h\varphi(q_j) = \Phi_0(fq_j)\varphi(q_j)$ для всех $j \in J$, то

$$g\varphi(p_{ij}) = g\varphi(e_i)\varphi(q_j) = \Phi_0(fe_i)\varphi(e_i)\varphi(q_j) = \Phi_0(fe_iq_j) =$$
$$= \Phi_0(fq_j)\varphi(q_j)\varphi(e_i) = h\varphi(q_j)\varphi(e_i) = h\varphi(p_{ij})$$

при каждом $i \in I$, $j \in J$. Поскольку

$$\sup_{i,j}\varphi(p_{ij}) = \left(\sup_i \varphi(e_i)\right)\left(\sup_j \varphi(q_j)\right) = \mathbf{1}_{\nabla_{\mu_1}},$$

то $h = g$. Таким образом, корректно определено отображение $\Phi : L_0(\nabla_{\mu_2}) \to L_0(\nabla_{\mu_1})$ с помощью равенства $\Phi(f) = g$. Ясно, что построенное отображение Φ есть инъективный гомоморфизм (изоморфизм), для которого $\Phi(e) = \varphi(e)$ при каждом $e \in \nabla_2$ и $\Phi(f) = \Phi_0(f)$ для всех $f \in L_\infty(\nabla_{\mu_2})$.

(ii). Поскольку φ — сохраняющий меру гомоморфизм, то для любого $f = \sum\limits_{i=1}^{k} \lambda_i e_i \in \mathbb{R}(\nabla_{\mu_2})$ имеем, что

$$\|\Phi(f)\|_1 = \left\|\sum_{i=1}^{k} \lambda_i\varphi(e_i)\right\|_1 = \sum_{i=1}^{k} |\lambda_i|\,\mu_1(\varphi(e_i)) = \sum_{i=1}^{k} |\lambda_i|\,\mu_2(e_i) = \|f\|_1.$$

Так как алгебра $\mathbb{R}(\nabla_{\mu_2})$ плотна в банаховом пространстве $(L_1\nabla_{\mu_2}), \|\cdot\|_1)$, то существует такая линейная изометрия (соответственно, сюръективная линейная изометрия) U из $(L_1(\nabla_{\mu_2}), \|\cdot\|_1)$ в $(L_1(\nabla_{\mu_1}), \|\cdot\|_1)$, что $U(f) = \Phi(f)$ для всех $f \in \mathbb{R}(\nabla_{\mu_2})$. Если $0 \leqslant f \in L_1(\nabla_{\mu_2})$, то найдется такая последовательность $\{f_n\} \subset \mathbb{R}(\nabla_{\mu_2})$, что $0 \leqslant f_n \uparrow f$. В частности, $\|f_n - f\|_1 \to 0$, что влечет $\|U(f_n) - U(f)\|_1 \to 0$. Таким образом, $\Phi(f_n) = U(f_n) \uparrow U(f)$. Так как $\Phi : L_0(\nabla_{\mu_2}) \to L_0(\nabla_{\mu_1})$ есть инъективный вполне аддитивный гомоморфизм, то $\Phi(f_n) \uparrow \Phi(f)$, и поэтому $\Phi(f) = U(f)$ для всех $0 \leqslant f \in L_1(\nabla_{\mu_2})$. Отсюда сразу следует, что $\Phi(g) = U(g)$ при каждом $g \in L_1(\nabla_{\mu_2})$. Следовательно, отображение $\Phi : (L_1(\nabla_{\mu_2}), \|\cdot\|_1) \to (L_1(\nabla_{\mu_1}), \|\cdot\|_1)$ есть линейная изометрия (соответственно, сюръективная линейная изометрия).

Если $0 \leqslant f \in L_\infty(\nabla_{\mu_2})$, то выбираем такую последовательность $\{f_n\} \subset \mathbb{R}(\nabla_{\mu_2})$, для которой $0 \leqslant f_n \uparrow f$ и $\|f_n - f\|_\infty \to 0$. Повторяя предыдущее доказательство, получим, что отображение $\Phi : L_\infty(\nabla_{\mu_2}) \to L_\infty(\nabla_{\mu_1})$ есть линейная изометрия (соответственно, сюръективная линейная изометрия). □

Пусть $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ — измеримое пространство с полной непрерывной σ-конечной мерой, $\mu(\Omega) = \infty$, и пусть $\mathcal{A}_\nu$ есть σ-алгебра всех измеримых по Лебегу множеств из $((0, \infty, \nu)$. Зафиксируем функцию $0 \leqslant f \in \mathcal{R}_\mu$ с $\operatorname{supp}(f) = \mathbf{1}_{\nabla_\mu}$ и, используя теорему 3.1, рассмотрим сюръективное сохраняющее меру преобразование $\sigma : \Omega \to (0, \infty)$, для которого $f(\omega) = \mu_t(f)(\sigma(\omega))$ для п.в. $\omega \in \Omega$. Положим

$$\mathcal{A}_\sigma = \{\sigma^{-1}(B) : B \in \mathcal{A}_\nu\}, \quad \nabla_\sigma = \{[\sigma^{-1}(B)] : B \in \mathcal{A}_\nu\}. \tag{3.1}$$

Отображение $\varphi : \nabla_\nu \to \nabla_\sigma$, определяемое равенством

$$\varphi([B]) = [\sigma^{-1}(B)],\ B \in \mathcal{A}_\nu, \tag{3.2}$$

есть сохраняющий меру булев изоморфизм из ∇_ν на ∇_σ. Согласно теореме 3.2, существует изоморфизм Φ из алгебры $L_0(\nabla_\nu)$ на алгебру $L_0(\nabla_\sigma)$, для которого $\Phi(e) = \varphi(e)$ для всех $e \in \nabla_\nu$, при этом $\Phi(\mu_t(f)) = f$ и $\Phi(g \circ \sigma) = g$ для каждой функции $g \in L_0(\nabla_\nu)$. Поскольку изоморфизм $\varphi : \nabla_\nu \to \nabla_\sigma$ сохраняет меру, то функции $\Phi(g)$ и g равноизмеримы для всех $g \in L_0(\nabla_\nu)$.

Если $E(\nabla_\nu)$ — симметричное пространство на $((0, \infty), \mathcal{A}_\nu, \nu)$ и $E(\nabla_\mu)$ — симметричное пространство на $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$, порожденное пространством $E(\nabla_\nu)$, то из равноизмеримости функций $\Phi(g)$ и g,

$g \in L_0(\nabla_\sigma)$ следует, что $\Phi(g) \in E(\nabla_\mu)$ и $\|\Phi(g)\|_{E(\nabla_\mu)} = \|g\|_{\nabla_\nu)}$ для каждой функции $g \in E(\nabla_\nu)$. Это означает, что $\Phi(E(\nabla_\nu)) \subseteq E(\nabla_\mu)$ и отображение Φ есть линейная изометрия из $E(\nabla_\nu)$ в $E(\nabla_\mu)$.

Таким образом, верна следующая теорема об изометрическом вложении симметричного пространства $E(\nabla_\nu)$ в симметричное пространство $E(\nabla_\mu)$.

Теорема 3.3. *Пусть* $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ — *измеримое пространство с непрерывной* σ*-конечной мерой,* $0 \leqslant f \in \mathcal{R}_\mu, \operatorname{supp}(f) = \Omega$, *и пусть* $\sigma : \Omega \to (0, \infty)$ *сюръективное сохраняющее меру преобразование, для которого* $f(\omega) = \mu_t(f)(\sigma(\omega))$ *для п.в.* $\omega \in \Omega$ (*см. теорему* 3.1). *Пусть* ∇_σ — σ*-подалгебра в* ∇_μ (*см. равенство* (3.1)), *и пусть* Φ — *изоморфизм из алгебры* $L_0(\nabla_\nu)$ *на алгебру* $L_0(\nabla_\sigma)$, *для которого* $\Phi(e) = \varphi(e)$ *для всех* $e \in \nabla_\nu$ (*см. равенство* (3.2) *и теорему* 3.2). *Тогда для каждого симметричного пространства* $E(\nabla_\nu)$ *на* $((0, \infty), \mathcal{A}_\nu, \nu)$ *верно равенство* $\Phi(E(\nabla_\nu)) = E(\nabla_\sigma)$, *где* $E(\nabla_\sigma)$ *есть симметричное пространство на* (∇_σ, μ), *порожденное симметричным пространством* $E(\nabla_\nu)$, *при этом отображение* $\Phi : E(\nabla_\nu) \to E(\nabla_\sigma)$ *есть сюръективная изометрия.*

Говорят, что норма $\|\cdot\|_{E(\mu)}$ в симметричном пространстве $E(\mu)$ на измеримом пространстве $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ *порядково непрерывна*, если из условий $0 \leqslant f_n \in E(\mu)$, $n = 1, 2, \ldots$, $f_n \downarrow 0$ следует, что $\|f_n\|_{E(\mu)} \to 0$. Ясно, что симметричное пространство $E(\nu)$ имеет (соответственно, не имеет) порядково непрерывную норму в том и только в том случае, когда порожденное им симметричное пространство $E(\mu)$ также имеет (соответственно, не имеет) порядково непрерывную норму. Отметим также, что симметричное пространство $E(\nu)$ на $((0, \infty), \mathcal{A}_\nu, \nu)$ имеет порядково непрерывную норму тогда и только тогда, когда $E(\nu)$ сепарабельное пространство (см., например, [5, гл. IV, §3, теорема 3]).

Будем говорить, что вполне симметричное пространство $E(\mu)$ удовлетворяет *статистической эргодической теореме* для сильно непрерывных в L_1 полугрупп $\{T_t\}_{t \geqslant 0} \subset DS$ (запись: $E(\mu) \in$ (СЭТ)), если для любой сильно непрерывной в L_1 полугруппы $\{T_t\}_{t \geqslant 0}$ операторов Данфорда—Шварца непрерывные средние $\{A_t\}_{t \geqslant 0}$ сходятся сильно в $E(\mu)$, т. е. для каждого $f \in E(\mu)$ существует такое $\widetilde{f} \in E(\mu)$, что $\|A_t(f) - \widehat{f}\|_{E(\mu)} \to 0$ при $t \to \infty$.

Известен следующий критерий справедливости статистической эргодической теоремы для сильно непрерывных в L_1 полугрупп $\{T_t\}_{t \geqslant 0} \subset DS$ в случае пространств Лебега с конечной непрерывной мерой (см. [3, гл. 2, § 2.1, теорема 2.1.1, § 2.6, теорема 2.6.4]).

Теорема 3.4. *Пусть* $((0, a), \mathcal{A}_\nu, \nu)$, $0 < a < \infty$ — *измеримое пространство Лебега с конечной непрерывной мерой, и пусть* $E(\nu)$ — *вполне симметричное пространство на* $((0, a), \mathcal{A}_\nu, \nu)$. *Тогда* $E(\nu) \in$ (*СЭТ*) *в том и только в том случае, когда* $E(\nu)$ *имеет порядково непрерывную норму.*

Ниже показывается, что в случае пространства Лебега $((0, \infty), \mathcal{A}_\nu, \nu)$ с бесконечной непрерывной мерой для вполне симметричного пространства $L_1(\nu)$, имеющего порядково непрерывную норму, имеются примеры сильно непрерывных в L_1 полугрупп $\{T_t\}_{t \geqslant 0} \subset DS$, для которых статистическая эргодическая теорема неверна.

Пример 3.1. Положим $T_0 = I$ и для каждого $s \in (0, 1]$ определим оператор $T_s \in DS$, действующий в $L_1(\nu) + L_\infty(\nu)$ по правилу $T_s(f)(t) = f(t - s)$, $t \geqslant s$ и $T_s(f)(t) = 0$, $t \in (0, s)$. Если $s > 1$, то полагаем $T_s = T_1^{[s]} \cdot T_{\{s\}}$, где $[s]$ (соответственно, $\{s\}$) — целая (дробная) часть числа s. Нетрудно видеть, что $\{T_t\}_{t \geqslant 0}$ есть сильно непрерывная в L_1 полугруппа операторов Данфорда—Шварца, при этом для каждого $k = 1, 2, \ldots$ имеем, что

$$A_k(\chi_{0,1)})(t) = \left(\frac{1}{k} \int\limits_0^k T_s(\chi_{(0,1)}) ds\right)(t) = \frac{1}{k} \cdot \left(\|\cdot\|_1 - \lim_{n \to \infty} \frac{k}{n} \cdot \sum_{i=0}^{n-1} T_{\frac{i \cdot k}{n}}(\chi_{(0,1)})\right)(t) =$$

$$= \left(\|\cdot\|_1 - \lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=0}^{n-1} T_{\frac{i \cdot k}{n}}(\chi_{(0,1)})\right)(t),$$

и поэтому $A_k(\chi_{0,1)})(t) = 0$ почти всюду для $t > k$. Аналогично, $\int\limits_k^{2k} T_s(\chi_{(0,1)})(t)ds = 0$ почти всюду для $0 < t \leqslant k$. Следовательно,

$$\|A_{2k}(\chi_{0,1)})(t) - A_k(\chi_{(0,1)})(t)\|_1 = \left\| \frac{1}{2k}\int\limits_0^{2k} T_s(\chi_{(0,1)})(t)ds - \frac{1}{k}\int\limits_0^{k} T_s(\chi_{(0,1)})(t)ds \right\|_1 =$$

$$= \left\| -\frac{1}{2k}\int\limits_0^{k} T_s(\chi_{(0,1)})(t)ds + \frac{1}{2k}\int\limits_k^{2k} T_s(\chi_{(0,1)})(t)ds \right\|_1 =$$

$$= \left\| \frac{1}{2k}\int\limits_0^{k} T_s(\chi_{(0,1)})(t)ds \right\|_1 + \left\| \frac{1}{2k}\int\limits_k^{2k} T_s(\chi_{(0,1)})(t)ds \right\|_1.$$

Если $g = \int\limits_0^1 T_s(\chi_{(0,1)})(t)ds$, то для каждого $k = 1, 2, \ldots$, имеем

$$(A_k(\chi_{(0,1)})(t) = \frac{1}{k}\int\limits_0^{k} T_s(\chi_{(0,1)})(t)ds = \frac{1}{k}\sum_{i=0}^{k-1}\int\limits_i^{i+1} T_s(\chi_{(0,1)})(t)ds = \frac{1}{k}\sum_{i=0}^{k-1} T_i(g) = \frac{1}{k}\sum_{i=0}^{k-1} T_1^i(g).$$

Так как $\|T_1(f)\|_1 = \|f\|_1$ для всех $f \in L_1(\nu)$, то

$$\|A_k(\chi_{(0,1)})\|_1 = \left\| \frac{1}{k}\sum_{i=0}^{k-1} T_1^i(g) \right\|_1 = \|g\|_1.$$

Таким образом,

$$\|A_{2k}(\chi_{0,1)})(t) - A_k(\chi_{(0,1)})(t)\|_1 = \left\| \frac{1}{2k}\int\limits_0^{k} T_s(\chi_{(0,1)})(t)ds \right\|_1 + \left\| \frac{1}{2k}\int\limits_k^{2k} T_s(\chi_{(0,1)})(t)ds \right\|_1 = \frac{3}{2}\cdot\|g\|_1 > 0$$

для всех $k = 1, 2, \ldots$. Это означает, что сеть $\{A_t(\chi_{(0,1)})\}_{t>0}$ не может сходится по норме $\|\cdot\|_1$ при $t \to \infty$. Следовательно, $L_1(0,\infty) \notin$ (СЭТ).

Следующая теорема показывает, что для вполне симметричного пространства $E(\mu)$, не имеющего порядково непрерывную норму, обязательно верно $E(\mu) \notin$ (СЭТ) (ср. [9, Theorem 4.3]).

Теорема 3.5. *Пусть $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ — измеримое пространство с непрерывной σ-конечной мерой, $\mu(\Omega) = \infty$, и пусть $E(\mu)$ — симметричное пространство на $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$, порожденное вполне симметричным пространством $E(\nu)$. Если норма $\|\cdot\|_{E(\mu)}$ не является порядково непрерывной, то $E(\mu) \notin$ (СЭТ).*

Доказательство. Согласно [16, Ch. II, §4, теорема 4.8], существует такое натуральное число $k \in \mathbb{N}$, для которого $(E((0,k)), \|\cdot\|_{E((0,\infty),\nu)})$ не имеет порядково непрерывную норму. Следовательно, в силу теоремы 3.4 найдутся такие функция $f_0 \in E((0,k),\nu))$ и сильно непрерывная в $L_1((0,k),\nu))$ полугруппа $T_t : L_1((0,k),\nu)) + L_\infty((0,k),\nu) \to L_1((0,k),\nu)) + L_\infty((0,k),\nu))$, $t \geqslant 0$, операторов Данфорда—Шварца, для которых непрерывные средние $\{A_t(f_0)\}_{t\geqslant 0}$ не сходятся по норме $\|\cdot\|_{E((0,\infty),\nu)}$ при $t \to \infty$.

Определим операторы Данфорда—Шварца

$$\hat{T}_t : L_1((0,\infty),\nu)) + L_\infty((0,\infty),\nu) \to L_1((0,\infty),\nu)) + L_\infty((0,\infty),\nu),\ t \geqslant 0,$$

полагая $\hat{T}_t(h) = T_t(h \cdot \chi_{(0,k)})$, $h \in L_1((0,\infty),\nu)) + L_\infty((0,\infty),\nu)$. Ясно, что $\{\hat{T}_t\}_{t\geqslant 0}$ есть сильно непрерывная в $L_1((0,\infty),\nu))$ полугруппа, при этом $\hat{A}_t(h) = A_t(h)$ для всех $t \geqslant 0$ и каждого $h \in E((0,k),\nu))$, где $\{\hat{A}_t\}_{t\geqslant 0}$ (соответственно, $\{A_t\}_{t\geqslant 0}$) есть непрерывные средние для полугруппы $\{\hat{T}_t\}_{t\geqslant 0}$ (соответственно, $\{T_t\}_{t\geqslant 0}$). Поскольку $f_0 \in E((0,k),\nu))$, то $\hat{A}_t(f_0) = A_t(f_0)$, для всех $t \geqslant 0$. Следовательно, непрерывные средние $\{\hat{A}_t(f_0)\}_{t\geqslant 0}$ не сходятся по норме $\|\cdot\|_{E((0,\infty),\nu)}$ при $t \to \infty$.

Пусть Φ есть изоморфизм из алгебры $L_0((0,\infty),\nu)$ на алгебру $L_0(\nabla_\sigma)$, для которого верно равенство $\Phi(E((0,\infty),\nu)) = E(\nabla_\sigma)$, при этом отображение $\Phi : E((0,\infty),\nu) \to E(\nabla_\sigma)$ есть сюръективная изометрия (см. теорему 3.3). Рассмотрим также оператор условного математического ожидания $M : L_1(\Omega,\mathcal{A},\mu) \to L_1(\Omega,\mathcal{A}_\sigma,\mu)$ (определение σ-подалгебры A_σ см. в (3.1)). Ясно, что M является абсолютным линейным сжатием в $L_1(\Omega,\mathcal{A},\mu)$, и следовательно, единственным образом продолжается до оператора Данфорда—Шварца (см. [7, теорема 3.1]):

$$\widehat{M} : L_1(\Omega,\mathcal{A},\mu) + L_\infty(\Omega,\mathcal{A},\mu) \to L_1(\Omega,\mathcal{A},\mu) + L_\infty(\Omega,\mathcal{A},\mu),$$

для которого верно равенство $\widehat{M}(h) = h$ при всех $h \in L_1(\Omega,\mathcal{A}_\sigma,\mu) + L_\infty(\Omega,\mathcal{A}_\sigma,\mu)$.

Определим теперь операторы Данфорда—Шварца

$$\widetilde{T}_t : L_1(\Omega,\mu) + L_\infty(\Omega,\mu) \to L_1(\Omega,\mu) + L_\infty(\Omega,\mu),\ t \geqslant 0,$$

полагая $\widetilde{T}_t(g) = \big(\Phi \circ \hat{T}_t \circ \Phi^{-1} \circ \widehat{M}\big)(g)$, $g \in L_1(\Omega,\mu) + L_\infty(\Omega,\mu)$. Ясно, что $\{\widetilde{T}_t\}_{t\geqslant 0}$ есть сильно непрерывная в $L_1((\Omega,\mu)$ полугруппа, при этом из включения $\Phi(f_0) \in E(\nabla_\sigma)$ следует, что $\widetilde{T}_t(\Phi(f_0)) = \big(\Phi \circ \hat{T}_t \circ \Phi^{-1} \circ \widehat{M}\big)(\Phi(f_0)) = \Phi \circ \hat{T}_t(f_0)$ для всех $t \geqslant 0$. Это означает, что для непрерывных средних $\{\widetilde{A}_t\}_{t\geqslant 0}$ полугруппы $\{\widetilde{T}_t\}_{t\geqslant 0}$ верно равенство $\widetilde{A}_t(\Phi(f_0)) = \Phi \circ \hat{A}_t(f_0)$ для всех $t \geqslant 0$. Следовательно, непрерывные средние $\{\widetilde{A}_t(\Phi(f_0))\}_{t\geqslant 0}$ не сходятся по норме $\|\cdot\|_{E(\nabla_\sigma)}$ при $t \to \infty$. Это означает, что $E(\mu) \notin$ (СЭТ). $\square$

Следующая теорема дает еще одно достаточное условие для вполне симметричного пространства $E(\Omega)$, при выполнении которого верно $E(\Omega) \notin$ (СЭТ) (ср. [9, Theorem 4.2]).

Теорема 3.6. *Пусть $(\Omega,\mathcal{A},\mu)$ — измеримое пространство с непрерывной σ-конечной мерой, $\mu(\Omega) = \infty$, и пусть $E(\mu)$ — вполне симметричное пространство на $(\Omega,\mathcal{A},\mu)$. Если $E(\mu) \subset L_1(\Omega,\mathcal{A},\mu)$, то $E(\mu) \notin$ (СЭТ).*

Доказательство. Рассмотрим сильно непрерывную в L_1 полугруппу $\{T_t\}_{t\geqslant 0}$ операторов Данфорда—Шварца из примера 3.1. Согласно этому примеру, имеем, что $L_1((0,\infty),\nu) \notin$ (СЭТ). Повторяя доказательство теоремы 3.5, получим, что $L_1(\Omega,\mathcal{A},\mu) \notin$ (СЭТ), т. е. найдется такая функция $f_0 \in L_1(\Omega,\mathcal{A},\mu)$ и сильно непрерывная в $L_1(\Omega,\mathcal{A},\mu)$ полугруппа $T_t : L_1(\Omega,\mathcal{A},\mu) + L_\infty(\Omega,\mathcal{A},\mu) \to L_1(\Omega,\mathcal{A},\mu) + L_\infty(\Omega,\mathcal{A},\mu), t \geqslant 0$, операторов Данфорда—Шварца, что непрерывные средние $\{A_t(f_0)\}_{t\geqslant 0}$ не сходятся по норме $\|\cdot\|_{L_1(\Omega,\mathcal{A},\mu)}$ при $t \to \infty$.

Известно, что вложение $(E_1(\mu),\|\cdot\|_{E_1(\mu)}) \subset (E_2(\mu),\|\cdot\|_{E_2(\mu)})$ двух симметричных пространств на $(\Omega,\mathcal{A},\mu)$ всегда является непрерывным (см. [18, Ch. 6, § 6.1, Proposition 6.1.1]), т. е. существует такая константа $\alpha > 0$, что $\|f\|_{E_2(\mu)} \leqslant \alpha\|f\|_{E_1(\mu)}$ для всех $f \in E_1(\mu)$.

Так как $E(\mu) \subseteq L_1(\Omega,\mathcal{A},\mu)$, то $\|f\|_{L_1(\Omega,\mathcal{A},\mu)} \leqslant \alpha\|f\|_{E(\mu)}$ для всех $f \in E(\mu)$. Следовательно, непрерывные средние $\{A_t(f_0)\}_{t\geqslant 0}$ не сходятся по норме $\|\cdot\|_{E(\mu)}$ при $t \to \infty$, что влечет отсутствие сильной сходимости непрерывных средних $\{A_t\}_{t\geqslant 0}$ в $E(\mu)$, т. е. $E(\mu) \notin$ (СЭТ). $\square$

Отметим, что согласно [9, следствие 4.2] верен следующий критерий для справедливости вложения $E(\mu) \subset L_1(\Omega,\mathcal{A},\mu)$.

Утверждение 3.1. *Пусть $(\Omega,\mathcal{A},\mu)$ — измеримое пространство с непрерывной σ-конечной мерой, $\mu(\Omega) = \infty$, и пусть $E(\mu)$ — симметричное пространство на $(\Omega,\mathcal{A},\mu)$. Тогда вложение $E(\mu) \subset L_1(\Omega,\mathcal{A},\mu)$ верно в том и только в том случае, когда $\chi_\Omega \in E^\times(\mu)$, где $E^\times(\mu)$ — ассоциированное пространство для $E(\mu)$.*

4. Критерий справедливости статистической эргодической теоремы

Основная цель настоящего раздела есть нахождение необходимых и достаточных условий для вполне симметричных пространств $E(\mu)$ измеримых функций на пространстве $(\Omega,\mathcal{A},\mu)$ с непрерывной σ-конечной мерой, $\mu(\Omega) = \infty$, обеспечивающих справедливость включения $E(\mu) \in$ (СЭТ).

Пусть $(\Omega,\mathcal{A},\mu)$ — произвольное измеримое пространство с σ-конечной мерой, $f_n \in L_0(\Omega)$, $n \in \mathbb{N}$. Говорят, что последовательность $\{f_n\}$ сходится к функции $f \in L_0(\Omega)$ *локально по мере*, если $f_n\chi_A \xrightarrow{\mu} f\chi_A$ для любого $A \in \mathcal{A}$, $\mu(A) < \infty$, где $g_n \xrightarrow{\mu} g$ есть обычная сходимость по мере μ для последовательности $g_n \in L_0(\Omega)$, $g \in L_0(\Omega)$. Известно, что для любого симметричного пространства

$(E(\mu), \|\cdot\|_{E(\mu)})$ на $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ сходимость $\|f_n - f\|_{E(\mu)} \to 0$, $f_n, f \in E(\mu)$, $n \in \mathbb{N}$, влечет сходимость $f_n \to f$ локально по мере (см. [12, Proposition 2.2]).

Нам понадобится следующий вариант индивидуальной эргодической теоремы Данфорда—Шварца о поточечной сходимости непрерывных средних $\{A_t(f)\}_{t\geqslant 0}$ (см. [8, теорема 4.1], а также [10, теорема 4.1]).

Теорема 4.1. *Пусть* $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ — *измеримое пространство с* σ*-конечной мерой, и пусть* $\{T_t\}_{t\geqslant 0}$ — *сильно непрерывная в* L_1 *полугруппа операторов Данфорда—Шварца. Тогда для любого* $f \in \mathcal{R}_\mu$ *существует такая функция* $\widehat{f} \in \mathcal{R}_\mu$, *что непрерывные средние* $\{A_t(f)\}_{t\geqslant 0}$ *сходятся к* $\widehat{f}$ *почти всюду при* $t \to \infty$.

Определим отображение $P : \mathcal{R}_\mu \to \mathcal{R}_\mu$, полагая

$$P(f) = \text{п.в.} - \lim_{t\to\infty} A_t(f), \quad f \in \mathcal{R}_\mu.$$

Ясно, что P есть линейное отображение. Так как $\|A_t(f)\|_1 \leqslant \|f\|_1$ для всех $f \in L_1(\Omega)$, то из сходимости почти всюду $A_t(f) \to P(f)$ и замкнутости шаров в $(L_1(\Omega), \|\cdot\|_1)$ относительно сходимости локально по мере (см. [5, Ch. IV, §3]) следует, что $\|P(f)\|_1 \leqslant \|f\|_1$ для всех $f \in L_1(\Omega)$.

Аналогично, для каждого $f \in L_1(\Omega) \cap L_\infty(\Omega)$ имеем, что $\|A_t(f)\|_\infty \leqslant \|f\|_\infty$ при всех $t \geqslant 0$. Поэтому сходимость почти всюду $A_t(f) \to P(f)$, $t \to \infty$, влечет неравенство $\|P(f)\|_\infty \leqslant \|f\|_\infty$. Следовательно, P есть абсолютное линейное сжатие в $L_1(\Omega)$. Согласно [7, теорема 3.2], существует единственный оператор $\widehat{P} \in DS$ такой, что $\widehat{P}(f) = P(f)$ для всех $f \in \mathcal{R}_\mu$, в частности, $\|P\|_{\mathcal{R}_\mu\to\mathcal{R}_\mu} = \|\widehat{P}\|_{\mathcal{R}_\mu\to\mathcal{R}_\mu} \leqslant 1$.

Лемма 4.1. $(PT_r)(f) = P(f)$ *для всех* $f \in \mathcal{R}_\mu$, $r \geqslant 0$.

Доказательство. Так как

$$A_{t+r}(f) - \frac{t}{t+r}A_t(f) = \frac{1}{t+r}\int_0^{t+r} T_s(f)ds - \frac{1}{t+r}\int_0^{t} T_s(f)ds = \frac{1}{t+r}\int_t^{t+r} T_s(f)ds$$

и

$$(I - T_r)A_t(f) = (I - T_r)\frac{1}{t}\int_0^t T_s(f)ds = \frac{1}{t}\int_0^t T_s(f)ds - \frac{1}{t}\int_0^t T_{s+r}(f)ds =$$

$$= \frac{1}{t}\int_0^t T_s(f)ds - \frac{1}{t}\int_r^{t+r} T_s(f)ds = \frac{1}{t}\int_0^r T_s(f)ds + \frac{1}{t}\int_t^{t+r} T_s(f)ds,$$

то (см. теорему 4.1)

$$(I - T_r)A_t(f) = \frac{1}{t}\int_0^r T_s(f)ds + \frac{t+r}{t}\big(A_{t+r}(f) - \frac{t}{t+r}A_t(f)\big) \to 0 \ \text{ почти всюду при } t \to \infty.$$

С другой стороны,

$$T_rA_t(f) = T_r\frac{1}{t}\int_0^t T_s(f)ds = \frac{1}{t}\int_0^t T_rT_s(f)ds = \frac{1}{t}\int_0^t T_s(T_r(f))ds \to P(T_r(f)) \ \text{ почти всюду при } t \to \infty.$$

Следовательно,

$$(I - T_r)A_t(f) = A_t(f) - T_rA_t(f) \to P(f) - P(T_r(f)) \ \text{ почти всюду при } \ t \to \infty.$$

Это означает, что $(PT_r)(f) = P(f)$ для всех $f \in \mathcal{R}_\mu$. □

Лемма 4.2. *Для любого* $f \in L_2(\Omega)$ *имеет место сходимость*

$$\|A_t(f) - P(f)\|_2 \to 0 \ \text{ при } \ t \to \infty.$$

Доказательство. Согласно статистической эргодической теоремы для пространства L_2 (см. теорему 2.1), имеем, что для любого $f \in L_2(\Omega)$ существует такое $\widetilde{f} \in L_2(\Omega)$, что

$$\|A_t(f) - \widetilde{f}\|_2 \to 0 \quad \text{при} \quad t \to \infty.$$

Следовательно, $A_t(f) \to \widetilde{f}$ локально по мере μ (см. [12, Proposition 2.2]). Поскольку $A_t(f) \to P(f)$ почти всюду, то верно равенство $\widetilde{f} = P(f)$. □

Следующая теорема устанавливает сильную сходимость непрерывных средних $A_t(f)$ во вполне симметричном пространстве $(\mathcal{R}_\mu, \|\cdot\|_{L_1+L_\infty})$.

Теорема 4.2. *Пусть* $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ — *измеримое пространство с* σ*-конечной мерой, и пусть* $\{T_t\}_{t\geqslant 0}$ — *сильно непрерывная в* L_1 *полугруппа операторов Данфорда—Шварца. Тогда*

$$\|\{A_t(f)\} - P(f)\|_{L_1+L_\infty} \to 0 \quad \textit{при} \quad t \to \infty \quad \textit{для всех} \quad f \in \mathcal{R}_\mu.$$

Доказательство. Если $f \in L_1(\Omega) \cap L_\infty(\Omega) \subset L_2(\Omega)$, то в силу леммы 4.2 имеем, что

$$\|A_t(f) - P(f)\|_2 \to 0 \quad \text{при} \quad t \to \infty.$$

Поскольку $L_2(\Omega)$ непрерывно вложено в $L_1(\Omega) + L_\infty(\Omega)$ (см. [6, Ch. 2, §6, Theorem 6.6]), то

$$\|A_t(f) - P(f)\|_{L_1+L_\infty} \to 0 \quad \text{при} \quad t \to \infty \quad \text{для всех} \quad f \in L_1(\Omega) \cap L_\infty(\Omega).$$

При этом $\sup\limits_{t\geqslant 0} \|A_t\|_{L_1+L_\infty \to L_1+L_\infty} \leqslant 1$, $\|P\|_{L_1+L_\infty \to L_1+L_\infty} \leqslant 1$, и линейное подпространство $L_1(\Omega) \cap L_\infty(\Omega)$ всюду плотно в банаховом пространстве $(\mathcal{R}_\mu, \|\cdot\|_{L_1+L_\infty})$. Если $f \in \mathcal{R}_\mu$ и f_n — такая последовательность из $L_1(\Omega) \cap L_\infty(\Omega)$, для которой $\|f_n - f\|_{L_1+L_\infty} \to 0$ при $n \to \infty$, то используя неравенства

$$\|A_t(f) - P(f)\|_{L_1+L_\infty} \leqslant \|A_t(f - f_n)\|_{L_1+L_\infty} + \|A_t(f_n) - P(f_n)\|_{L_1+L_\infty} + \|P(f_n) - P(f)\|_{L_1+L_\infty},$$

получим, что $\|\{A_t(f)\} - P(f)\|_{L_1+L_\infty} \to 0$ при $t \to \infty$. □

Из теоремы 4.2 и [12, Proposition 2.2] вытекает следующее утверждение.

Утверждение 4.1. *Пусть* $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ — *измеримое пространство с* σ*-конечной мерой, и пусть* $\{T_t\}_{t\geqslant 0}$ — *сильно непрерывная в* L_1 *полугруппа операторов Данфорда—Шварца. Тогда непрерывные средние* $A_t(f) \to P(f)$ *локально по мере при* $t \to \infty$ *для всех* $f \in \mathcal{R}_\mu$.

Лемма 4.3. $(T_r P)(f) = P(f)$ *для всех* $f \in \mathcal{R}_\mu$, $r \geqslant 0$.

Доказательство. Согласно теореме 4.2, $\|A_t(f) - P(f)\|_{L_1+L_\infty} \to 0$ при $t \to \infty$ для любого $f \in \mathcal{R}_\mu$. Следовательно,

$$(T_r P)(f) = T_r(\|\cdot\|_{L_1+L_\infty} - \lim_{t\to\infty} A_t(f) = \|\cdot\|_{L_1+L_\infty} - \lim_{t\to\infty} T_r(A_t(f)) =$$

$$= \|\cdot\|_{L_1+L_\infty} - \lim_{t\to\infty} \frac{1}{t} \int\limits_0^t T_{r+s}(f)ds = \|\cdot\|_{L_1+L_\infty} - \lim_{t\to\infty} \frac{1}{t} \int\limits_r^{r+t} T_s(f)ds =$$

$$= \|\cdot\|_{L_1+L_\infty} - \lim_{t\to\infty} \big(\frac{t+r}{t} \cdot \frac{1}{t+r} \int\limits_0^{r+t} T_s(f)ds - \frac{1}{t} \int\limits_0^r T_s(f)ds\big) = P(f).$$

□

Из лемм 4.1 и 4.3 вытекает

Утверждение 4.2. $P^2 = P$ *и* $(T_r P)(f) = P(f) = (PT_r)(f)$ *для всех* $f \in \mathcal{R}_\mu$, $r \geqslant 0$.

Пусть $E(\nu)$ — симметричное пространство на $((0,\infty), \mathcal{A}_\nu, \nu)$ и $E(\mu)$ — симметричное пространство на $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$, порожденное симметричным пространством $E(\nu)$. Известно, что ассоциированное симметричное пространство $E(\mu)^\times$ порождается ассоциированным симметричным пространством $E(\nu)^\times$ (см. [12, Theorem 5.5]).

Ниже нам понадобится следующее свойство симметричных пространств, установленное в [13, Proposition 2.2].

Утверждение 4.3. *Пусть $E(\nu)$ — симметричное пространство на $((0,\infty),\mathcal{A}_\nu,\nu)$ с порядково непрерывной нормой и $\chi_{(0,\infty)}\notin E^\times(\nu)$. Пусть $(E(\mu),\|\cdot\|_{E(\mu)})$ — симметричное пространство на $(\Omega,\mathcal{A},\mu)$, порожденное симметричным пространством $E(\nu)$. Если f_n, $g\in E(\mu)$, $f_n\prec g$, $n\in\mathbb{N}$, и $f_n\longrightarrow 0$ локально по мере, то $\|f_n\|_{E(\mu)}\to 0$.*

Следующая теорема есть вариант статистической эргодический теоремы Данфорда—Шварца о сильной сходимости непрерывных средних $A_t(f)$ для вполне симметричных пространств $E(\mu)$ на измеримом пространстве с σ-конечной мерой.

Теорема 4.3. *Пусть $(\Omega,\mathcal{A},\mu)$ — измеримое пространство с σ-конечной мерой, и пусть $E(\mu)$ — вполне симметричное пространство на $(\Omega,\mathcal{A},\mu)$, для которого $\chi_{(0,\infty)}\notin E^\times(\nu)$, и норма $\|\cdot\|_{E(\mu)}$ порядково непрерывна. Тогда для любой сильно непрерывной в L_1 полугруппы $\{T_t\}_{t\geqslant 0}$ операторов Данфорда—Шварца непрерывные средние $\{A_t\}_{t\geqslant 0}$ сходятся сильно в $E(\mu)$ при $t\to\infty$.*

Доказательство. Если $P(f)=f\in E(\mu)$, то из утверждения 4.2 вытекает, что

$$A_t(f)=A_t(P(f))=\frac{1}{t}\int\limits_0^t T_s(P(f))ds=P(f)=f\quad\text{для всех}\quad t>0. \tag{4.1}$$

Пусть теперь f — произвольная функция из $E(\mu)$. Согласно утверждению 4.2, для $g=f-P(f)$ имеем, что $P(g)=P(f)-P^2(f)=0$.

Так как норма $\|\cdot\|_{E(\mu)}$ порядково непрерывна, то $\mu\{|f|>\lambda\}<\infty$ для всех $f\in E(\mu)$ и $\lambda>0$, и поэтому $E(\mu)\subset\mathcal{R}_\mu$. Отсюда в силу утверждения 4.1 вытекает, что $A_t(g)\to 0$ локально по мере при $t\to\infty$.

Поскольку $A_t\in DS$, то $A_t(g)\prec g\in E(\mu)$ для всех $t\geqslant 0$. Поэтому из утверждения 4.3 следует, что $\|A_t(g)\|_E\to 0$. Используя теперь утверждение 4.2, равенство (4.1) и равенства $A_t(g)=A_t(f)-A_t(P(f))$, $t>0$, получим, что $\|A_t(f)-P(f)\|_E\to 0$. $\square$

Из теорем 3.5, 3.6 и 4.3 вытекает следующий критерий для включения $E(\mu)\in$ (СЭТ).

Теорема 4.4. *Пусть $(\Omega,\mathcal{A},\mu)$ — измеримое пространство с непрерывной σ-конечной мерой, $\mu(\Omega)=\infty$, и пусть $E(\mu)$ — симметричное пространство на $(\Omega,\mathcal{A},\mu)$, порожденное вполне симметричным пространством $E(\nu)$. Следующие условия эквивалентны*:

(*i*) $E(\mu)\in$ (*СЭТ*);

(*ii*) $E(\mu)$ *не содержится в* $L_1(\Omega)$ *и норма* $\|\cdot\|_{E(\mu)}$ *является порядково непрерывной.*

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Векслер А. С.* Эргодическая теорема в симметричных пространствах// Сиб. мат. ж. — 1985. — *26*, № 4. — С. 189–191.
2. *Векслер А. С.* Статистическая эргодическая теорема в несепарабельных симметричных пространствах функций// Сиб. мат. ж. — 1988. — *29*, № 3. — С. 183–185.
3. *Векслер А. С.* Статистические эргодические теоремы в перестановочно-инвариантных пространствах измеримых функций. — Beau Bassin: Lambert Academic Publishing, 2018.
4. *Векслер А. С., Федоров А. Л.* Симметрические пространства и статистические эргодические теоремы для автомофизмов и потоков. — Ташкент: ФАН, 2016.
5. *Канторович Л. В., Акилов Г. П.* Функциональный анализ. — М.: Наука, 1977.
6. *Bennett C., Sharpley R.* Interpolation of operators. — Boston, etc.: Academic Press Inc., 1988.
7. *Chilin V., Cömez D., Litvinov S.* Individual ergodic theorems for infinite measure// ArXiv. — 2019. — 1907.04678v1 [math.FA].
8. *Chilin V., Litvinov S.* Noncommutative weighted individual ergodic theorems with continuous time// ArXiv. — 2018. — 1809.01788v1 [math.FA].
9. *Chilin V., Litvinov S.* Almost uniform and strong convergences in ergodic theorems for symmetric spaces// Acta Math. Hungar. — 2019. — *157*, № 1. — С. 229–253.
10. *Chilin V., Litvinov S.* Noncommutative weighted individual ergodic theorems with continuous time// Infin. Dimens. Anal. Quantum Probab. Relat. Top. — 2020. — *23*, № 2. — 2050013.
11. *Chilin V. I., Veksler A. S.* Mean ergodic theorem in function symmetric spaces for infinite measure// Uzb. Math. J. — 2018. — № 1. — С. 35–46.

12. *Dodds P. G., Dodds T. K., Pagter B.* Noncommutative Köthe duality// Trans. Am. Math. Soc. — 1993. — *339*. — С. 717–750.
13. *Dodds P. G., Dodds T. K., Sukochev F. A.* Banach—Saks properties in symmetric spaces of measurable operators// Studia Math. — 2007. — *178*. — С. 125–166.
14. *Dunford N., Schwartz J. T.* Linear operators. Part I: General theory. — New York, etc.: John Willey & Sons, 1988.
15. *Garsia A.* Topics in almost everywhere convergence. — Chicago: Markham Publishing Company, 1970.
16. *Krein S. G., Petunin Ju. I., Semenov E. M.* Interpolation of linear operators. — Providence: Am. Math. Soc., 1982.
17. *Krengel U.* Ergodic theorems. — Berlin—New York: Walter de Gruyter, 1985.
18. *Rubshtein B. A., Muratov M. A., Grabarnik G. Ya., Pashkova Yu. S.* Foundations of symmetric spaces of measurable functions. Lorentz, Marcinkiewicz and Orlicz spaces. — Cham: Springer, 2016.
19. *Sukochev F., Veksler A.* The Mean Ergodic Theorem in symmetric spaces// C.R. Acad. Sci. Paris. Ser. I. — 2017. — *355*. — С. 559–562.
20. *Sukochev F., Veksler A.* The Mean Ergodic Theorem in symmetric spaces// Studia Math. — 2019. — *245*, № 3. — С. 229–253.
21. *Vladimirov D. A.* Boolean algebras in analysis. — Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 2002.
22. *Yosida K.* Functional analysis. — Berlin—Göttingen—Heidelberg: Springer Verlag, 1965.

А. С. Векслер
Институт математики АН РУз, Ташкент, Узбекистан
E-mail: aleksandr.veksler@micros.uz

В. И. Чилин
Национальный университет Узбекистана им. М. Улугбека, Ташкент, Узбекистан
E-mail: vladimirchil@gmail.com

DOI: 10.22363/2413-3639-2021-67-4-654-667 UDC 517.98

Statistical Ergodic Theorem in Symmetric Spaces for Infinite Measures

© 2021 **A. S. Veksler, V. I. Chilin**

Abstract. Let (Ω, μ) be a measurable space with σ-finite continuous measure, $\mu(\Omega) = \infty$. A linear operator $T : L_1(\Omega) + L_\infty(\Omega) \to L_1(\Omega) + L_\infty(\Omega)$ is called the Dunford–Schwartz operator if $\|T(f)\|_1 \leqslant \|f\|_1$ (respectively, $\|T(f)\|_\infty \leqslant \|f\|_\infty$) for all $f \in L_1(\Omega)$ (respectively, $f \in L_\infty(\Omega)$). If $\{T_t\}_{t\geqslant 0}$ is a strongly continuous in $L_1(\Omega)$ semigroup of Dunford–Schwartz operators, then each operator $A_t(f) = \dfrac{1}{t}\int\limits_0^t T_s(f)ds \in L_1(\Omega)$, $f \in L_1(\Omega)$ has a unique extension to the Dunford–Schwartz operator, which is also denoted by A_t, $t > 0$. It is proved that in the completely symmetric space $E(\Omega) \nsubseteq L_1$ of measurable functions on (Ω, μ) the means A_t converge strongly as $t \to +\infty$ for each strongly continuous in $L_1(\Omega)$ semigroup $\{T_t\}_{t\geqslant 0}$ of Dunford–Schwartz operators if and only if the norm $\|\cdot\|_{E(\Omega)}$ is order continuous.

REFERENCES

1. A. S. Veksler, "Ergodicheskaya teorema v simmetrichnykh prostranstvakh" [Ergodic theorem in symmetric spaces], *Sib. mat. zh.* [Siberian Math. J.], 1985, **26**, No. 4, 189–191 (in Russian).

2. A. S. Veksler, "Statisticheskaya ergodicheskaya teorema v neseparabel'nykh simmetrichnykh prostranstvakh funktsiy" [Statistical ergodic theorem in inseparable symmetric function spaces], *Sib. mat. zh.* [Siberian Math. J.], 1988, **29**, No. 3, 183–185 (in Russian).
3. A. S. Veksler, *Statisticheskie ergodicheskie teoremy v perestanovochno-invariantnykh prostranstvakh izmerimykh funktsiy* [Statistical Ergodic Theorems in Permutation-Invariant Spaces of Measurable Functions], Lambert Academic Publishing, Beau Bassin, 2018 (in Russian).
4. A. S. Veksler and A. L. Fedorov, *Simmetricheskie prostranstva i statisticheskie ergodicheskie teoremy dlya avtomofizmov i potokov* [Symmetric Spaces and Statistical Ergodic Theorems for Automophisms and Flows], FAN, Tashkent, 2016 (in Russian).
5. L. V. Kantorovich and G. P. Akilov, *Funktsional'nyy analiz* [Functional Analysis], Nauka, Moscow, 1977 (in Russian).
6. C. Bennett and R. Sharpley, *Interpolation of operators*, Academic Press Inc., Boston, etc., 1988.
7. V. Chilin, D. Cömez, and S. Litvinov, "Individual ergodic theorems for infinite measure," *ArXiv*, 2019, 1907.04678v1 [math.FA].
8. V. Chilin and S. Litvinov, "Noncommutative weighted individual ergodic theorems with continuous time," *ArXiv*, 2018, 1809.01788v1 [math.FA].
9. V. Chilin and S. Litvinov, "Almost uniform and strong convergences in ergodic theorems for symmetric spaces," *Acta Math. Hungar.*, 2019, **157**, No. 1, 229–253.
10. V. Chilin and S. Litvinov, "Noncommutative weighted individual ergodic theorems with continuous time," *Infin. Dimens. Anal. Quantum Probab. Relat. Top.*, 2020, **23**, No. 2, 2050013.
11. V. I. Chilin and A. S. Veksler, "Mean ergodic theorem in function symmetric spaces for infinite measure," *Uzb. Math. J.*, 2018, No. 1, 35–46.
12. P. G. Dodds, T. K. Dodds, and B. Pagter, "Noncommutative Köthe duality," *Trans. Am. Math. Soc.*, 1993, **339**, 717–750.
13. P. G. Dodds, T. K. Dodds, and F. A. Sukochev, "Banach–Saks properties in symmetric spaces of measurable operators," *Studia Math.*, 2007, **178**, 125–166.
14. N. Dunford, and J. T. Schwartz, *Linear operators. Part I: General theory*, John Willey & Sons, New York, etc., 1988.
15. A. Garsia, *Topics in almost everywhere convergence*, Markham Publishing Company, Chicago, 1970.
16. S. G. Krein, Ju. I. Petunin, and E. M. Semenov, *Interpolation of linear operators*, Am. Math. Soc., Providence, 1982.
17. U. Krengel, *Ergodic theorems*, Walter de Gruyter, Berlin–New York, 1985.
18. B. A. Rubshtein, M. A. Muratov, G. Ya. Grabarnik, and Yu. S. Pashkova, *Foundations of symmetric spaces of measurable functions. Lorentz, Marcinkiewicz and Orlicz Spaces*, Springer, Cham, 2016.
19. F. Sukochev and A. Veksler, "The Mean Ergodic Theorem in symmetric spaces," *C.R. Acad. Sci. Paris. Ser. I*, 2017, **355**, 559–562.
20. F. Sukochev and A. Veksler, "The Mean Ergodic Theorem in symmetric spaces," *Studia Math.*, 2019, **245**, No. 3, 229–253.
21. D. A. Vladimirov, *Boolean algebras in analysis*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 2002.
22. K. Yosida, *Functional analysis*, Springer Verlag, Berlin–Göttingen–Heidelberg, 1965.

A. S. Veksler
Institute of Mathematics of the Academy of Sciences of Uzbekistan, Tashkent, Uzbekistan
E-mail: aleksandr.veksler@micros.uz

V. I. Chilin
National University of Uzbekistan named after M. Ulugbek, Tashkent, Uzbekistan
E-mail: vladimirchil@gmail.com