Современная математика. Фундаментальные направления. Том 67, № 4 (2021). С. 634–653
Contemporary Mathematics. Fundamental Directions. ISSN 2413-3639 (Print)

DOI: 10.22363/2413-3639-2021-67-4-634-653 УДК 517.95

ОБОБЩЕННАЯ ЛОКАЛИЗАЦИЯ И СУММИРУЕМОСТЬ ПОЧТИ ВСЮДУ КРАТНЫХ РЯДОВ И ИНТЕГРАЛОВ ФУРЬЕ

© 2021 г. **Р. Р. АШУРОВ**

Аннотация. Хорошо известно, что гипотеза Лузина имеет положительное решение для одномерных тригонометрических рядов Фурье, но во многомерном случае она до сих пор не нашла своего подтверждения для сферических частичных сумм кратных рядов Фурье. Исторически прогресс в решении гипотезы Лузина был достигнут путем рассмотрения более простых проблем. В данной работе рассматриваются три из таких проблем для сферических частичных сумм: принцип обобщенной локализации, суммируемость почти всюду, почти всюду сходимость кратных рядов Фурье гладких функций. Приводится краткий обзор работ по этим направлениям и упоминаются нерешенные проблемы и формулируется новые задачи. Кроме того, в конце работы доказан новый результат о сходимости сферических сумм для функций из классов Соболева.

ОГЛАВЛЕНИЕ

1. Введение

1. Пусть $\mathbb{T}^N$ — N-мерный тор: $\mathbb{T}^N = (\pi, \pi]^N$, $N \geqslant 2$. Сферические частичные суммы ряда Фурье функции $f \in L_2(\mathbb{T}^N)$ определяются по формуле:

$$S_\lambda f(x) = \sum_{|n|^2<\lambda} f_n \, e^{inx}, \tag{1.1}$$

где $n \in \mathbb{Z}^N$, а коэффициенты Фурье $\{f_n\}$ имеют вид

$$f_n = (2\pi)^{-N} \int\limits_{\mathbb{T}^N} f(y) e^{-iny} dy.$$

Одной из классических проблем теории рядов Фурье является проблема поточечной сходимости $S_\lambda f(x)$ к f при $\lambda \to \infty$: для каких классов функций f частичные суммы $S_\lambda f(x)$ сходятся к f в заданной точке, почти всюду, во всех точках или равномерно.

В данной работе будем изучать проблему сходимости почти всюду рядов $S_\lambda f(x)$, которая является одной из самых привлекательных задач в метрической теории функций. Естественными классами для изучения сходимости почти всюду являются пространства L_p, $p \geqslant 1$.

Следует отметить, что даже в простейшем случае $N = 1$ и $p = 2$ известная гипотеза Н. Н. Лузина о сходимости почти всюду тригонометрических рядов Фурье функций из $L_2(\mathbb{T}^1)$, опубликованная еще в 1915 году, решена только спустя более 50 лет, в 1966 году, Карлесоном [25]. Усовершенствуя метод Карлесона, немецкий математик Хант [28] распространил этот результат для функций из классов L_p, $p > 1$. Если же $p = 1$, то это уже неверно в силу знаменитого примера функции из класса $L_1(\mathbb{T}^1)$ с расходящимися всюду в $\mathbb{T}^1$ рядом Фурье, построенного Колмогоровым в 1922 году (см. [1]).

Для многомерных рядов Фурье справедливость результата Карлесона—Ханта зависит от вида частичных сумм. Так, для квадратных частичных сумм N-кратного ряда Фурье Шелин [34] распространил теорему Ханта. Однако, как показал Фефферман [26], сходимость по прямоугольникам приводит к совершенно новым эффектам: существует непрерывная функция $f(x_1, x_2)$, ряд Фурье которой неограниченно расходится по прямоугольникам в каждой внутренней точке квадрата $\mathbb{T}^2$.

Что касается сферических частичных сумм S_λ, то вопрос о справедливости гипотезы Лузина остается открытым до настоящего времени.

Исторически прогресс в решении гипотезы Лузина был достигнут путем рассмотрения более простых проблем. Например, более простую проблему получим, если наложить на разлагаемую функцию f некоторые дополнительные условия, которые упрощают исследования сходимости почти всюду. В качестве таких условий можно взять обращение в нуль функции f в некоторой подобласти $G \subset \mathbb{T}^N$ и исследовать сходимость почти всюду сферических сумм в G (*принцип обобщенной локализации*). Или же, можно изучать сходимость $S_\lambda f(x)$ не для функций из всего класса L_p, а для функций из подпространства $L_p(\mathbb{T}^N)$, которые обладают некоторой гладкостью. Как альтернативный способ упрощения ситуации можно рассматривать исследование суммируемости S_λ с некоторыми методами суммирования. Наиболее удобным методом суммирования в данном случае является метод Рисса.

Исследованию этих проблем для сферических сумм как кратных рядов, так и кратных интегралов (определение см. ниже) Фурье посвящены многочисленные результаты специалистов. В настоящей работе приведем краткий обзор этих результатов и сформулируем некоторые нерешенные проблемы. Кроме того, в разделе 4 доказан новый результат о сходимости почти всюду сферических сумм $S_\lambda f(x)$ для функций из класса Соболева.

Следует также отметить, что за пределами нашего изложения останется ряд важных работ, посвященные к другим близким направлениям, а именно, к исследованию сходимости почти всюду рядов Фурье радиальных функций, а так же изучению сходимости лакунарных рядов.

Проблемам сходимости и суммируемости кратных рядов и интегралов Фурье (а также более общих разложений по собственным функциям и спектральных разложений эллиптических операторов) посвящен ряд обзорных статьей (см., например, [1, 2]) и книг специалистов (см., например, [27, 39]). В статье Алимова и др. [1] содержится обзор работ, опубликованных до 1989 года. Здесь наряду с формулировками известных и значимых результатов в наиболее интересных направлениях развития теории кратных рядов Фурье приводятся разъяснения принципиальных моментов и идеи доказательств. Работа Алимова, Ильина и Никишина [2], опубликованная в 1976 году, посвящена обзору работ как по кратным тригонометрическим рядам, так и по спектральным разложениям, отвечающих самосопряженным эллиптическим дифференциальным операторам. Отметим, что в статьях [2, 31, 38] приведены нерешенные проблемы и сформулировано значительное число новых задач (только некоторые из них к настоящему времени нашли свое решение).

2. Изучение вопросов сходимости рядов Фурье имеет также важное прикладное значение. Если рассмотреть оператор Лапласа $-\Delta$ на торе $\mathbb{T}^N$ с периодическими граничными условиями, то его собственные функции имеют вид $(2\pi)^{-N/2}e^{inx}$, а собственные числа равны $|n|^2$. При обосновании метода Фурье, скажем, для волнового уравнения естественно возникает задача о разложении произвольной заданной в области $\mathbb{T}^N$ функции f в ряд Фурье по системе указанных собственных функций. Такой ряд имеет вид

$$S_\lambda f(x) = \sum_{|n|^2<\lambda} f_n e^{inx},$$

что совпадает со сферическими частичными суммами кратных рядов Фурье.

Если же оператор Лапласа заменить на произвольное однородное эллиптическое дифференциальное выражение порядка m с вещественными коэффициентами $A(D) = \sum\limits_{|\alpha|=m} a_\alpha D^\alpha$, где

$\alpha=(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_N)$ — мультииндекс, $D_j=\dfrac{1}{i}\dfrac{\partial}{\partial x_j}$, $D^\alpha=D_1^{\alpha_1}\cdots D_N^{\alpha_N}$, и рассмотреть периодические граничные условия, то собственные функции остаются теми же, а собственные числа имеют вид $A(n)$, что проверяется непосредственным вычислением. Напомним, дифференциальное выражение $A(D)$ называется эллиптическим, если соответствующий полином $A(\xi)=\sum\limits_{|\alpha|=m}a_\alpha\xi^\alpha$ является эллиптическим, т. е. $A(\xi)>0$ для всех $\xi\neq 0$.

В рассматриваемом случае ряд Фурье по собственным функциям определяет некоторый способ суммирования кратного тригонометрического ряда Фурье функции f, который записывается в виде

$$S_\lambda(A)f(x)=\sum_{A(n)<\lambda}f_n e^{inx}. \tag{1.2}$$

Пусть теперь оператор A с областью определения $C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ действует в $L_2(\mathbb{R}^N)$ по формуле $Au=A(D)u$. Тогда, используя преобразование Фурье, можно показать (см. [1]), что существует единственное самосопряженное расширение $\hat{A}$ этого оператора, разложение единицы которого имеет вид

$$E_\lambda(A)f(x)=(2\pi)^{-\frac{N}{2}}\int\limits_{A(\xi)<\lambda}\hat{f}(\xi)e^{ix\xi}d\xi. \tag{1.3}$$

Здесь преобразование Фурье функции $f\in L_2(\mathbb{R}^N)$ определено посредством равенства

$$\hat{f}(\xi)=(2\pi)^{-\frac{N}{2}}\int\limits_{\mathbb{R}^N}f(x)e^{-ix\xi}dx,$$

при этом интеграл по теореме Планшереля сходится в $L_2(\mathbb{R}^N)$.

Отметим, что разложение (1.3) определяет, по аналогии с (1.2), некоторый способ суммирования кратного интеграла Фурье функции f. В частности, оператору Лапласа $A(D)=-\Delta$ отвечает способ суммирования по сферам:

$$E_\lambda f(x)\equiv E_\lambda(-\Delta)f(x)=(2\pi)^{-\frac{N}{2}}\int\limits_{|\xi|^2<\lambda}\hat{f}(\xi)e^{ix\xi}d\xi. \tag{1.4}$$

2. Принцип обобщенной локализации

Классический принцип локализации Римана утверждает: если функция интегрируема и равна нулю на некотором интервале, то ее ряд Фурье сходится к нулю равномерно на любом компакте из этого интервала. Ситуация меняется в случае функций двух или многих переменных. В этом случае существуют примеры функций с достаточно высокой гладкостью, для которых классический принцип локализации не имеет места (см. [1]). В связи с этим В. А. Ильин в 1968 году ввел понятие обобщенной локализации [15]. Напомним это определение: если для любой функции f, принадлежащей к некоторому классу $L_p(\mathbb{T}^N)$ и равной нулю в области $G\subset\mathbb{T}^N$, сферические частичные суммы кратных рядов Фурье $S_\lambda f(x)$ сходятся к нулю почти всюду в G, то будем говорить, что в классе $L_p(\mathbb{T}^N)$ есть *обобщенная локализация*. Отметим, что в отличии от классической локализации, для справедливости обобщенной локализации достаточно сходимости $S_\lambda f(x)$ к нулю почти всюду в G.

Понятие обобщенной локализации для кратных интегралов Фурье $E_\lambda f(x)$ вводится совершенно аналогично.

В силу определения коэффициентов Фурье имеем

$$S_\lambda f(x)=\int\limits_{\mathbb{T}^N}\theta(x-y,\lambda)f(y)dy,$$

где ядро представимо в виде

$$\theta(x,\lambda)=(2\pi)^{-N}\sum_{|n|^2<\lambda}e^{inx}.$$

Для того, чтобы изучить сходимость $S_\lambda f(x)$ при $\lambda \to \infty$, необходимо исследовать асимптотическое поведение $\theta(x, \lambda)$ для больших λ, что представляет собой далеко не простую задачу. Если мы заменим сумму на интеграл, то этот интеграл вычисляется явно:

$$e(x, \lambda) = (2\pi)^{-N} \int\limits_{|\xi|^2<\lambda} e^{ix\xi} d\xi = (2\pi)^{-\frac{N}{2}} \lambda^{\frac{N}{2}} \frac{J_{\frac{N}{2}}(|x|\sqrt{\lambda})}{(|x|\sqrt{\lambda})^{N/2}}, \tag{2.1}$$

где $J_\nu(t)$ — функция Бесселя порядка ν. Но с другой стороны, эта функция $e(x, \lambda)$ является ядром интегрального оператора

$$E_\lambda f(x) = \int\limits_{\mathbb{R}^N} e(x - y, \lambda) f(y) dy = (2\pi)^{-\frac{N}{2}} \int\limits_{|\xi|^2<\lambda} \hat{f}(\xi) e^{ix\xi} d\xi, \tag{2.2}$$

который совпадает со сферической частичной суммой кратного интеграла Фурье функции $f \in L_2(\mathbb{R}^N)$.

Очевидно, при $\lambda \to \infty$ ядро $e(x - y, \lambda)$ ведет себя лучше всего вне диагонала $|x - y| > \delta > 0$. При исследовании принципа локализации мы как раз находимся в этой области, вследствие чего изучение принципа локализации кратных рядов или интегралов Фурье становится более простой задачей, чем исследование их сходимости.

Принцип обобщенной локализации в классах $L_p(\mathbb{R}^N)$ для сферических частичных интегралов исследован многими авторами (Шелин П., Карбери А., Сория Ф., Рубио де Франсиа Ж. Л., Вега Л., Бастис А. и др., см. [12, 13, 17, 18, 20–24, 35]).

В частности, в фундаментальной работе [23] доказана следующая теорема.

Теорема 2.1 (Карбери и Сория (1988)). *Пусть $f \in L_p(\mathbb{R}^N)$, $2 \leqslant p < 2N/(N-1)$ и $f = 0$ в открытой области $\Omega \subset \mathbb{R}^N$. Тогда*

$$\lim_{\lambda \to \infty} E_\lambda f(x) = 0 \tag{2.3}$$

почти всюду в Ω.

Ранее это утверждение для функций $f \in L_2(\mathbb{R}^N)$ с компактным носителем было получено Шелином [34].

Метод, предложенный в работе [23], практически не зависит от вида частичных сумм. Так, в работе [17] с помощью этого метода доказан следующий результат.

Теорема 2.2. *Пусть $A(\xi)$ — произвольный однородный эллиптический полиномом. Тогда, если $f \in L_p(\mathbb{R}^N)$, $2 \leqslant p < 2N/(N-1)$ и $f = 0$ в открытой области $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, то $\lim\limits_{\lambda \to \infty} E_\lambda(A) f(x) = 0$ почти всюду в Ω.*

Таким образом, для частичных интегралов $E_\lambda(A) f(x)$, определенных посредством совершенно произвольного эллиптического полинома, справедлив тот же результат, что и для сферических сумм $E_\lambda f(x)$. Следует отметить, что в отличие от обобщенной локализации, условия, обеспечивающие классическую локализацию Римана для $E_\lambda(A) f(x)$, существенно зависят от геометрии области $\Omega_A = \{\xi \in \mathbb{R}^N : A(\xi) < 1\}$, а именно, от числа отличных от нуля главных кривизн поверхности $\partial\Omega_A = \{\xi \in \mathbb{R}^N : A(\xi) = 1\}$ (см. [3, 5]).

Что касается справедливости обобщенной локализации в классах $L_p(\mathbb{R}^N)$, когда p находится вне отрезка $[2, 2N/(N-1))$, известно только следующее: если $1 \leqslant p < 2$ то, как доказал А. Бастис [13], локализация исчезает как для кратных рядов, так и для кратных интегралов Фурье. Поскольку полученные результаты формулируются одинаково, мы приведем их лишь для кратных рядов Фурье.

Теорема 2.3. *Пусть $1 \leqslant p < 2$. Тогда существует функция $f \in L_p(\mathbb{T}^N)$ такая, что на некотором множестве с положительной мерой, содержащейся в $\mathbb{T}^N \setminus \operatorname{supp} f$, имеем*

$$\overline{\lim_{\lambda \to \infty}} |S_\lambda f(x)| = +\infty.$$

Пусть теперь порядок интегрируемости p удовлетворяет условию $p \geqslant 2N/(N-1)$. В этом случае мы можем только утверждать отсутствие сходимости почти всюду сферических частичных сумм кратных интегралов Фурье. Это вытекает из следующего наблюдения, высказанного Ж. Рубио де Франсия [23].

Предположим, что $E_\lambda f$ сходится почти всюду для всех $f \in L_p(\mathbb{R}^N)$. Тогда, в частности, $E_1 f$ должно быть по крайней мере распределением умеренного роста S' и в силу дуальности, $E_1 : S \to L_q(\mathbb{R}^N)$, $q = p/(p-1)$. Следовательно, если выбрать f так, чтобы $\hat{f} = 1$ в шаре $\{\xi \in \mathbb{R}^N : |\xi| \leqslant 1\}$, то необходимым условием выполнения нашего предположения является включение: $E_1 f(x) = e(x,1) \in L_q(\mathbb{R}^N)$. Из явного вида $e(x,1)$ (см. (2.1)) и асимптотики функции Бесселя ясно, что это возможно только при $q > 2N/(N+1)$, т. е. при $p < 2N/(N-1)$.

Итак, если $p \geqslant 2N/(N-1)$, то для функций из класса $L_p(\mathbb{R}^N)$ отсутствует сходимость почти всюду кратных интегралов Фурье. В связи с этим можно сформулировать следующую задачу.

Верно ли, что и принцип обобщенной локализации отсутствует для сферических частичных сумм $E_\lambda f$ в классах $L_p(\mathbb{R}^N)$, если порядок интегрируемости p удовлетворяет условию $p \geqslant 2N/(N-1)$?

Что касается сходимости почти всюду кратных интегралов Фурье, то вопрос остается открытым для функций из классов $L_p(\mathbb{R}^N)$ при $2 \leqslant p < 2N/(N-1)$ (напомним, что при $1 \leqslant p < 2$ отсутствует даже обобщенная локализация).

Как было отмечено выше, прямоугольные частичные суммы кратных рядов Фурье непрерывных функций расходятся всюду. Для справедливости даже классической локализации Римана требуется, чтобы разлагаемая функция была достаточно гладкой (см. [1]). Поэтому изучение обобщенной локализации для прямоугольных частичных сумм является актуальным. Исследованию этого вопроса посвящен ряд работ И. Л. Блошанского (см. [1]). В работе [14] автору удалось доказать, что обобщенная локализация для прямоугольных частичных сумм относится к тем характеристикам, которыми различаются двух- и трехкратные ряды Фурье. Именно, доказано, что обобщенная локализация в классах $L_p(\mathbb{T}^N)$, $p > 1$, имеет место при $N = 2$ и не имеет места при $N \geqslant 3$.

Обобщенный принцип локализации В. А. Ильина изучен также и для многомерных сферически симметричных непрерывных всплеск-разложений [10]. Следует отметить, что поточечная сходимость одномерных и многомерных непрерывных всплеск-разложений изучена многими авторами (подробный обзор работ можно найти в статье Р. Ашурова и А. Бутаева [19]). При этом, для того, чтобы обеспечить сходимость почти всюду многомерных (и даже одномерных) сферически симметричных непрерывных всплеск-разложений, необходимо требовать достаточно быстрое убывание на бесконечности соответствующих всплесков. Однако, как показано в указанной выше работе [10], обобщенный принцип локализации справедлив для совершенно произвольных всплесков в тех же классах $L_p(\mathbb{R}^N)$, что и в теореме Карбери и Сория.

Следует также отметить, что в работах [18, 20] изучены разложения распределений с компактными носителями в кратные интегралы Фурье. Рассмотрены как сферические, так и частичные интегралы, определенные посредством произвольных однородных эллиптических полиномов. Найдены необходимые и достаточные условия на разлагаемое распределение, которые обеспечат справедливость принципа обобщенной локализации.

Возвращаясь к вопросу об обобщенной локализации для сферических частичных сумм кратных рядов Фурье, отметим, что еще в 1976 году в работе [2] был поставлен вопрос о ее справедливости в классе $L_2(\mathbb{T}^2)$ для двукратных рядов. Недавно, в работе [16] (см. также [8]) автором этой статьи дан положительный ответ на этот вопрос в случае N-кратных рядов Фурье, т. е. доказано следующее утверждение.

Теорема 2.4. *Пусть $f \in L_2(\mathbb{T}^N)$ и $f = 0$ на некотором множестве $\Omega \subset \mathbb{T}^N$. Тогда равенство $\lim\limits_{\lambda\to\infty} S_\lambda f(x) = 0$ имеет место почти всюду в Ω.*

Таким образом, проблема обобщенной локализации для S_λ полностью решена в классах $L_p(\mathbb{T}^N)$, $p \geqslant 1$: если $p \geqslant 2$, то имеет место локализация, а если $p < 2$, то, как показано в теореме 2.3, локализация отсутствует.

Доказательство этой теоремы основано на методе, предложенном в работе [23], где авторы рассматривали функции из классов $L_p(\mathbb{R}^N)$. Если же носитель функции является ограниченным множеством, то данный метод сильно упрощается. Покажем это на примере доказательства упомянутой выше теоремы Шелина.

Теорема 2.5. *Пусть $f \in L_2(\mathbb{R}^N)$ — функция с компактным носителем. Тогда равенство $\lim\limits_{\lambda\to\infty} E_\lambda f(x) = 0$ имеет место почти всюду в $\mathbb{R}^N \setminus \operatorname{supp} f$.*

Нам удобно обозначить $E'_\lambda f(x) \equiv E_{\lambda^2} f(x)$ и изучить сходимость $E'_\lambda f(x)$ при $\lambda \to \infty$. Хорошо известно (см. например, [1]), что для функций $f \in L_p(\mathbb{R}^N)$ достаточным условием сходимости почти всюду $E'_\lambda f(x)$ является ограниченность в $L_p(\mathbb{R}^N)$ максимального оператора $E_\star f(x) = \sup\limits_{\lambda>0} |E'_\lambda f(x)|$.

Кроме того, для доказательства теоремы достаточно предположить, что разлагаемая функция обращается в нуль в некотором шаре $\{|x| < R\} \subset \mathbb{R}^N$ и доказать сходимость $\lim\limits_{\lambda\to\infty} E'_\lambda f(x) = 0$ почти всюду внутри этого шара.

Следовательно, утверждение теоремы является следствием оценки

$$\int\limits_{|x|\leqslant r} |E_\star f(x)|^2 dx \leqslant C \int\limits_{\mathbb{R}^N} |f(x)|^2 dx, \tag{2.4}$$

справедливой для любого $r < R$ с некоторой константой $C = C(R, r)$.

Ключевым моментом доказательства является замена ядра $e(x, \lambda^2)$ интегрального оператора $E_{\lambda^2} f(x)$ на функцию $e_\lambda(x) = e(x, \lambda^2)\chi(x)$ с некоторой радиальной функцией $\chi(x) \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$:

$$\chi(x) = \begin{cases} 0, & |x| < R - r, \\ 1, & 2(R - r) < |x| \leqslant A, \end{cases}$$

где A — достаточно большое число. При этом для всех $|x| \leqslant r$ имеет место равенство

$$E'_\lambda f(x) = \int\limits_{\mathbb{R}^N} e_\lambda(x - y) f(y) dy.$$

Следует особо отметить, что именно для выполнения этого равенства нам необходима ограниченность носителя функции f. По этой же причине аналогичную замену ядра можно произвести и для интегрального оператора $S_\lambda f(x)$.

Подчеркнем важность рассмотрения ядра $e_\lambda(x)$ вместо ядра $e(x, \lambda^2)$. Преобразование Фурье функции $e(x, \lambda^2)$ имеет вид

$$\hat{e}(\eta, \lambda^2) = \begin{cases} 1, & \lambda > |\eta|, \\ 0, & \lambda \leqslant |\eta|. \end{cases}$$

Эта функция не убывает при $\lambda \to \infty$, в то время как функция $\hat{e}_\lambda(\eta)$ имеет необходимое для нашего рассуждения убывание на бесконечности (см. оценку (2.6)).

Для доказательства оценки (2.4) достаточно установить справедливость неравенства

$$\int\limits_{\mathbb{R}^N} \sup_{\lambda>0} |e_\lambda * f|^2 \, dx \leqslant C \int\limits_{\mathbb{R}^N} |f(x)|^2 dx. \tag{2.5}$$

При этом нам необходима следующая оценка для преобразования Фурье $\widehat{e}_\lambda(\eta)$ функции $e_\lambda(x)$, доказанная в работе [23].

Лемма 2.1. *Для любого $l \in \mathbb{N}$ существует константа C_l, зависящая от l, r и R, такая, что для всех $\lambda \in \mathbb{R}$ и $\eta \in \mathbb{R}^N$ справедлива оценка*

$$\left|\frac{d^j}{d\lambda^j} \widehat{e}_\lambda(\eta)\right| \leqslant \frac{C_l}{(1 + ||\eta| - \lambda|)^l}, \quad j = 0, 1. \tag{2.6}$$

Доказательство. Докажем оценку (2.6) при $j = 0$; для $j = 1$ она доказывается аналогично.

По определению преобразования Фурье имеем

$$\widehat{e}_\lambda(\eta) = (2\pi)^{-\frac{3}{2}N} \int\limits_{\mathbb{R}^N} \left(\int\limits_{|\xi|<\lambda} e^{ix\xi} d\xi \chi(x) \right) e^{-ix\eta} dx = (2\pi)^{-N} \int\limits_{|\xi|<\lambda} (2\pi)^{-\frac{N}{2}} \int\limits_{\mathbb{R}^N} \chi(x) e^{-ix(\eta-\xi)} dx d\xi =$$

$$= (2\pi)^{-N} \int\limits_{|\xi|<\lambda} \widehat{\chi}(\eta - \xi) d\xi = (-2\pi)^{-N} \int\limits_{|\eta-\xi|<\lambda} \widehat{\chi}(\xi) d\xi.$$

Пусть сначала $|\eta|<\lambda$. Так как $\chi(0)=0$ и для любого j справедлива оценка $|\widehat{\chi}(\xi)|\leqslant C_j(1+|\xi|)^{-j}$, то

$$|\widehat{e}_\lambda(\eta)|=|-(-2\pi)^{-N}\int\limits_{|\eta-\xi|\geqslant\lambda}\widehat{\chi}(\xi)d\xi|\leqslant C_j\int\limits_{|\eta-\xi|\geqslant\lambda}(1+|\xi|)^{-j}d\xi\leqslant$$

$$\leqslant C_j\int\limits_{|\xi|>\lambda-|\eta|}(1+|\xi|)^{-j}d\xi\leqslant\frac{C_l}{(1+||\eta|-\lambda|)^l}.$$

Аналогично, если $|\eta|>\lambda$, то

$$|\widehat{e}_\lambda(\eta)|=|(-2\pi)^{-N}\int\limits_{|\eta-\xi|<\lambda}\widehat{\chi}(\xi)d\xi|\leqslant C_j\int\limits_{|\xi|>|\eta|-\lambda}(1+|\xi|)^{-j}d\xi\leqslant\frac{C_l}{(1+||\eta|-\lambda|)^l}.$$

Следовательно, лемма 2.1 доказана. □

Интегрируя (2.6) по λ, получим равномерную по $\eta\in\mathbb{R}^N$ оценку

$$\int\limits_0^\infty|\frac{d^j}{d\lambda^j}\widehat{e}_\lambda(\eta)|^2d\lambda<C,\quad j=0,1. \tag{2.7}$$

Доказательство оценки (2.5) завершается следующим образом. Так как

$$[e_\lambda*f]^2=2\int\limits_0^\lambda(e_t*f)\frac{d}{dt}(e_t*f)dt$$

и $2ab\leqslant a^2+b^2$, то

$$\sup_{\lambda>0}|e_\lambda*f|^2\leqslant\int\limits_0^\infty|e_t*f|^2dt+\int\limits_0^\infty|\frac{d}{dt}e_t*f|^2dt,$$

или

$$\int\limits_{\mathbb{R}^N}\sup_{\lambda>0}|e_\lambda*f|^2\leqslant\int\limits_{\mathbb{R}^N}|\widehat{f}(\eta)|^2\int\limits_0^\infty|\widehat{e}_t(\eta)|^2dtd\eta+\int\limits_{\mathbb{R}^N}|\widehat{f}(\eta)|^2\int\limits_0^\infty|\frac{d}{dt}\widehat{e}_t(\eta)|^2dtd\eta.$$

Требуемая оценка (2.5) теперь вытекает из неравенств (2.7). Таким образом, доказательство теоремы Шелина завершено.

Далее изложим краткую схему доказательства теоремы 2.4. Для этого введем максимальный оператор

$$S_\star f(x)=\sup_{\lambda>0}|S_\lambda f(x)|$$

и предположим, что $f\in L_2(\mathbb{T}^N)$ и $f=0$ в шаре $\{|x|<R\}$, $R<1$. Тогда нетрудно убедиться, что утверждение теоремы вытекает из следующей оценки: для любого $r<R$ существует константа $C=C(R,r)$ такая, что

$$\int\limits_{|x|\leqslant r}|S_\star f(x)|^2dx\leqslant C\int\limits_{\mathbb{T}^N}|f(x)|^2dx. \tag{2.8}$$

Пусть $\chi_b(t)$ — характеристическая функция сегмента $[0,b]$. Обозначим через $\varphi_1(t)$ гладкую функцию такую, что $\chi_{(R-r)/3}(t)\leqslant\varphi_1(t)\leqslant\chi_{2(R-r)/3}(t)$, и положим $\varphi_2(t)=1-\varphi_1(t)$. Определим 2π-периодическую по каждому переменному x_j функцию $\psi(x)$, положив $\psi(x)=\varphi_2(|x|)$, $x\in\mathbb{T}^N$.

Обозначим $\theta_\lambda(x)=\theta(x,\lambda)\psi(x)$. Тогда, так как носитель функции f есть множество $\{|x|\geqslant R\}$, для любого x из шара $|x|\leqslant r$ справедливо равенство

$$S_\lambda f(x)=\int\limits_{\mathbb{T}^N}\theta_\lambda(x-y)f(y)dy.$$

Поэтому, если обозначить этот интеграл через $\theta_\lambda * f$, то для доказательства оценки (2.8) достаточно установить справедливость неравенства

$$\int\limits_{\mathbb{T}^N} \sup_{j>0} |\theta_j * f|^2\, dx \leqslant C \int\limits_{\mathbb{T}^N} |f(x)|^2 dx, \tag{2.9}$$

где sup берется по всем натуральным числам.

Обратим внимание на то, что поскольку в определение (1.1) суммирование ведется по множеству $\{n \in \mathbb{Z}^N : |n|^2 < \lambda\}$, то здесь достаточно взять sup только по всем натуральным числам.

Для коэффициентов Фурье $(\theta_j)_n$ функции $\theta_j(x)$ имеют место оценки

$$|(\theta_j)_n| \leqslant \frac{C_l}{(1+||n|-\sqrt{j}|)^l}, \tag{2.10}$$

справедливые для любого $l, j \in \mathbb{N}$ и $n \in \mathbb{Z}^N$ с некоторой константой C_l, зависящей от l, r и R. Оценка (2.10) доказывается аналогично с неравенством (2.6).

Роль производной $\dfrac{d}{d\lambda}\widehat{e}_\lambda(\eta)$ в данном случае играют числа $(\Theta_j)_n = (\theta_{j+1})_n - (\theta_j)_n$, т. е.

$$(\Theta_j)_n = (2\pi)^{-N} \sum_{|m|^2=j} \psi_{m-n} = (2\pi)^{-N} \sum_{|n-m|^2=j} \psi_m.$$

Следует отметить, что в силу (2.10), оценка суммы $(\theta_j)_n$ по j, в отличии от оценки (2.7), не является равномерной по n, т. е.

$$\sum_{j=0}^{\infty} |(\theta_j)_n|^2 = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{k\leqslant\sqrt{j}<k+1} |(\theta_j)_n|^2 \leqslant C\cdot|n|.$$

Что бы компенсировать это обстоятельство, нам необходимо получить лучшую оценку для суммы чисел $(\Theta_j)_n$. Для этого множество чисел $\{j,\ k \leqslant \sqrt{j} < k+1\}$ запишем как $Q^k = \{j = k^2 + p,\ p = 0, 1, \ldots, 2k\}$. В работе [16] доказана следующая оценка для указанной суммы.

Лемма 2.2. *Существуют множества Q_q^k, $q = 0, 1, \ldots, 2k-1$, такие, что $\bigcup\limits_{q=0}^{2k-1} Q_q^k = Q^k$ и для всех целых $l \geqslant 0$ справедливо неравенство*

$$\sum_{q=0}^{2k-1} (q+1)^2 \sum_{p\in Q_q^k} |(\Theta_{k^2+p})_n|^2 \leqslant \frac{C_l}{(1+\sqrt{||n|-k|})^l}. \tag{2.11}$$

Из этой леммы следует равномерная по $n \in \mathbb{Z}^N$ оценка

$$\sum_{k=0}^{\infty} \sum_{q=0}^{2k-1} (q+1)^2 \sum_{p\in Q_q^k} |(\Theta_{k^2+p})_n|^2 \leqslant C. \tag{2.12}$$

С другой стороны, для коэффициентов Фурье $(\theta_j)_n$, в силу (2.10), имеем равномерную по $n \in \mathbb{Z}^N$ оценку

$$\sum_{k=0}^{\infty} \sum_{q=0}^{2k-1} (q+1)^{-2} \sum_{p\in Q_q^k} |(\theta_{k^2+p})_n|^2 \leqslant C. \tag{2.13}$$

Переходим к доказательству неравенства (2.9). Имеем

$$[\theta_q * f]^2 = \sum_{j=0}^{q-1} [\Theta_j * f]^2 + 2\sum_{j=0}^{q-1} [\Theta_j * f][\theta_j * f].$$

Поэтому

$$\sup_{q\in\mathbb{N}} |\theta_q * f|^2 \leqslant \sum_{j=0}^{\infty} |\Theta_j * f|^2 + 2\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{q=0}^{2k-1}\sum_{p\in Q_q^k} |\Theta_{k^2+p} * f|(q+1)|\theta_{k^2+p} * f|(q+1)^{-1}.$$

Интегрируя по $\mathbb{T}^N$ и привлекая оценки (2.12) и (2.13), будем иметь

$$\int\limits_{\mathbb{T}^N} \sup_{q\in\mathbb{N}} |\theta_q * f|^2 \leqslant \sum_n |f_n|^2 \sum_{j=0}^{\infty} |(\Theta_j)_n|^2 + \sum_n |f_n|^2 \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{q=0}^{2k-1} (q+1)^2 \sum_{p\in Q_q^k} |(\Theta_{k^2+p})_n|^2 +$$

$$+ \sum_n |f_n|^2 \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{q=0}^{2k-1} (q+1)^{-2} \sum_{p\in Q_q^k} |(\theta_{k^2+p})_n|^2 \leqslant C \sum_n |f_n|^2 = C \int\limits_{\mathbb{T}^N} |f(x)|^2 dx.$$

Таким образом, оценка (2.9) получена, следовательно, и теорема 2.4 доказана.

Как было показано в теореме 2.2, для произвольного эллиптического полинома $A(\xi)$ обобщенная локализация для $E_\lambda(A)f$ имеет место в тех же классах $L_p(\mathbb{R}^N)$, что и в случае сферических частичных интегралов. В связи с этим возникает следующий вопрос: верно ли, что для частичных сумм $S_\lambda(A)f$, определенных посредством совершенно произвольного эллиптического полинома $A(\xi)$, принцип обобщенной локализации справедлив в классе $L_2(\mathbb{T}^N)$?

3. Суммируемость рядов Фурье

Еще одна более простая задача возникает, когда вместо сходимости частичных сумм S_λ изучается их суммируемость некоторыми методами суммирования. Наиболее удобным методом суммирования в данном случае является метод Рисса. *Средние Рисса* $S_\lambda^s f(x)$ порядка $s \geqslant 0$ сферических частичных сумм $S_\lambda f(x)$ определяются посредством равенства

$$S_\lambda^s f(x) = \sum_{|n|^2<\lambda} \left(1 - \frac{|n|^2}{\lambda}\right)^s f_n\, e^{inx}. \tag{3.1}$$

Очевидно, $S_\lambda^0 f = S_\lambda f$.

Частичные суммы S_λ называются *суммируемыми к* f *методом Рисса порядка* s, если $S_\lambda^s f(x) \to f(x)$.

Средние Рисса представляют собой регуляризацию исходных частичных сумм и во многих случаях их асимптотическое поведение улучшается с увеличением $\operatorname{Re} s$.

Выше было отмечено, что достаточным условием сходимости почти всюду рядов Фурье $S_\lambda f$ является ограниченность соответствующего максимального оператора $S_\star f$ в пространстве $L_p(\mathbb{T}^N)$. Аналогичное утверждение справедливо и для средних $S_\lambda^s f$. Поэтому изучение сходимости почти всюду средних Рисса $S_\lambda^s f$ для функций из классов $L_p(\mathbb{T}^N)$ опирается на оценки мажорант $S_\star^s f$. При этом мажоранту достаточно оценить при $p = 1$ и $p = 2$, поскольку для любого p из интервала $1 < p < 2$ необходимая оценка доказывается применением к полученным оценкам интерполяционной теоремы Стейна. В связи с этим заметим, что сумма в равенстве (3.1) сохраняет смысл для любого комплексного s с $\operatorname{Re} s \geqslant 0$, благодаря чему можно воспользоваться при изучении средних Рисса интерполяционными теоремами.

Сходимость почти всюду средних Рисса $S_\lambda^s f \to f$ любого положительного порядка $s > 0$ для функций из $L_2(\mathbb{T}^N)$ (следовательно, из $L_p(\mathbb{T}^N)$, $p \geqslant 2$) доказана Митчеллом [32]. Доказательство ограниченности максимального оператора в L_2 в этой работе опирается на то, что для ортогональных рядов функций из L_2, как доказано С. Качмажем (см. [1]), все риссовские средние различных положительных порядков в смысле сходимости почти всюду эквивалентны. Иначе говоря, если средние $S_\star^a$ какого-нибудь положительного порядка a ограничены в L_2, то ограничены и средние $S_\star^s$ любого другого положительного порядка $s > 0$. Следовательно, дело сводится к доказательству ограниченности в L_2 средних $S_\star^s$ какого-нибудь высокого порядка $s > \dfrac{N-1}{2}$, при которых попадаем под действие метода суммирования Пуассона. Напомним, метод суммирования Пуассона сводит изучение ядра оператора $S_\lambda^s f$ к изучению ядра интегрального оператора $E_\lambda^s f$, что является, в виду явного вида ядра (2.1), несомненно более простой задачей.

Сходимость почти всюду сферических частичных сумм кратных рядов и интегралов Фурье для функций из классов L_p при $1 \leqslant p < 2$ изучалась Э. Стейном [36]. Поскольку полученные результаты формулируются одинаково, мы приведем их лишь для кратных рядов.

Теорема 3.1 (Стейн). *Пусть*

$$s > (N-1)\Big(\frac{1}{p} - \frac{1}{2}\Big), \quad 1 \leqslant p \leqslant 2. \tag{3.2}$$

Тогда $S_\lambda^s f(x) \to f(x)$ почти всюду в $\mathbb{T}^N$ для любой функции $f \in L_p(\mathbb{T}^N)$. Кроме того, при $1 < p \leqslant 2$ максимальный оператор $S_\star^s : L_p(\mathbb{T}^N) \to L_p(\mathbb{T}^N)$ ограничен.

Если $p = 1$, то точность условия этой теоремы на порядок средних Рисса вытекает из следующего результата Стейна (см. [39]): если $s = \dfrac{N-1}{2}$, то существует функция $f \in L_1(\mathbb{T}^N)$ такая, что $S_\lambda^s f(x)$ расходятся всюду на $\mathbb{T}^N$.

При $p > 1$ известен только следующий результат К. И. Бабенко [11] (справедливый и для кратных интегралов Фурье $E_\lambda^s f(x)$): если

$$0 \leqslant s \leqslant N\Big(\frac{1}{p} - \frac{1}{2}\Big) - \frac{1}{2}, \quad 1 \leqslant p \leqslant \frac{2N}{N+1}, \tag{3.3}$$

то существует функция $f \in L_p(\mathbb{T}^N)$, средние Рисса $S_\lambda^s f(x)$ которой расходятся на множестве положительной меры.

Сопоставляя полученный положительный результат (3.2) с отрицательным (3.3), мы видим, что при $1 < p < \dfrac{2N}{N+1}$ они имеют расхождение на величину $1 - \dfrac{1}{p} > 0$. Для интегралов Фурье этот «зазор» удалось частично устранить (хотя и не так, как ожидалось) благодаря двум замечательным результатам Теренса Тао, которые приведены ниже.

Следует отметить, что точно такой же зазор, как и между (3.2) и (3.3), существовал и между необходимыми и достаточными условиями сходимости $E_\lambda^s f$ в $L_p(\mathbb{R}^N)$, $1 < p \leqslant 2$. В двумерном случае теорема Карлесона—Шелина полностью устранила этот зазор, утверждая, что при всех p и s из этого зазора есть сходимость. Кроме того, в N-мерном случае теоремы Фeффермана, В. З. Мешкова и последующих авторов постепенно закрывают этот зазор положительными результатами (см. [1, 30, 31, 40]). Следовательно, поскольку $E_\lambda^s f$ поточечно сходится при $\lambda \to \infty$ для функций $f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$, то естественно было предположить, что и в зазоре в условиях сходимости почти всюду отрицательные результаты являются точными и отмеченное расхождение вызвано недостаточно совершенными положительными результатами. Однако, как показал следующий результат Тао, это предположение оказалось неверным.

Теорема 3.2 (Тао, см. [40]). *Пусть*

$$s < N\Big(\frac{1}{p} - \frac{1}{2}\Big) - \frac{1}{2p}, \quad 1 < p < 2 - \frac{1}{N}. \tag{3.4}$$

Тогда максимальный оператор $E_\star^s$ не имеет слабого типа (p, p).

Заметим, что в силу известного результата Стейна (определение оператора слабого типа и этот результат имеется в работе [37]) при $1 \leqslant p \leqslant 2$ сходимость почти всюду $E_\lambda^s f(x)$ эквивалентна тому, что оператор $E_\star^s$ имеет слабый тип (p, p).

Пусть преобразование Фурье оператора $\widetilde{E}_\lambda^s f$ определено посредством равенства $\widehat{(\widetilde{E}_\lambda^s f)} = (1 - |\xi|^2)_+^s \varphi(\xi) \hat{f}(\xi)$, где функция $\varphi(\xi) \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ имеет носитель в шаре $|\xi - (\tilde{0}, \xi_N)| < \dfrac{1}{4}$ (см. [40]). Здесь и далее обозначено $\xi = (\tilde{\xi}, \xi_N) \in \mathbb{R}^{N-1} \times \mathbb{R}$. Теренс Тао показал, что для доказательства утверждения теоремы достаточно построить контрпример к следующей оценке:

$$|| \sup_{\lambda \sim 1} |\widetilde{E}_\lambda^s f| ||_{L_p(\mathbb{R}^N)} \leqslant C ||f||_{L_p(\mathbb{R}^N)}, \tag{3.5}$$

где sup берется по некоторой окрестности точки $\lambda = 1$; в качестве контрпримера он рассмотрел функцию

$$f(\tilde{y}, y_N) = e^{i y_N} \psi(\tilde{y}, R^{-1/2} y_N), \quad R >> 1,$$

где $\psi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$. Заметим, что $||f||_{L_p(\mathbb{R}^N)} = O(R^{1/2p})$.

Автору удалось показать, что функцию ψ с достаточно малым носителем можно выбрать так, что при $0 < x_N = O(|x|) = O(R)$ и $\lambda = \dfrac{|x|}{x_N}$ имеет место оценка $|E^s_\lambda f(x)| = O(R^{-s-\frac{N}{2}})$. Отсюда следует, что

$$||E^s_\lambda f||_{L_p(\mathbb{R}^N)} \geqslant R^{N/p} R^{-s-\frac{N}{2}}.$$

Тогда, учитывая оценку нормы функции f, нетрудно получить противоречие с (3.5).

В этой же работе [40] Теренс Тао высказал гипотезу:

Максимальный оператор $E^s_\star$ имеет слабый тип (p,p) тогда и только тогда когда

$$s \geqslant \max\Big\{0, N\Big(\frac{1}{p} - \frac{1}{2}\Big) - \frac{1}{2p}\Big\}, \quad 1 < p < 2. \tag{3.6}$$

Следующий результат Тао частично показывает справедливость этой гипотезы.

Теорема 3.3 (Тао, см. [41]). *Пусть*

$$s > \max\Big\{\frac{3}{4p} - \frac{3}{8}, \ \frac{7}{6p} - \frac{2}{3}\Big\}, \quad 1 < p < 2. \tag{3.7}$$

Тогда для любой функция $f \in L_p(\mathbb{R}^2)$ средние Рисса $E^s_\lambda f(x)$ сходятся почти всюду при $\lambda \to \infty$ к функции $f(x)$.

Доказательство этой теоремы Тао технически весьма сложно и существенно использует то, что $N = 2$. Фактически она доказана при значениях параметров $p = \dfrac{10}{7}$ и $s = \dfrac{3}{20} + \varepsilon$, где ε — произвольное положительное число, и далее применена интерполяционная теорема к классическим результатам Митчелла и Стейна, сформулированным выше.

Обратим внимание на то, что даже при $N = 2$ между условиями (3.4) и (3.7) все еще остается зазор:

$$\max\Big\{0, 2\Big(\frac{1}{p} - \frac{1}{2}\Big) - \frac{1}{2p}\Big\} \leqslant s \leqslant \max\Big\{\frac{3}{4p} - \frac{3}{8}, \frac{7}{6p} - \frac{2}{3}\Big\}, \quad 1 < p < 2.$$

Представляет также интерес проблема получения аналога последней теоремы Тао для интеграла Фурье при $N \geqslant 3$.

При $p \geqslant 2$ вопрос о сходимости почти всюду средних Рисса $E^s_\lambda f$ для функций из классов $L_p(\mathbb{R}^N)$ закрыт полностью: если

$$s > \max\Big\{0, N\Big(\frac{1}{2} - \frac{1}{p}\Big) - \frac{1}{2}\Big\}, \tag{3.8}$$

то, как доказано в работе А. Карбери и соавторов [22], средние Рисса $E^s_\lambda f(x)$ сходятся почти всюду к $f(x)$ (многие частные случае этого результата были известны ранее; см. [22, 30]), если же выполняется обратное к (3.8) неравенство, то, используя асимптотическое поведение функции Бесселя, нетрудно убедиться, что сходимость почти всюду отсутствует.

Перейдем теперь к рассмотрению кратных интегралов Фурье $E_\lambda(A)f$ (см. (1.3)), определенных посредством однородного эллиптического полинома $A(\xi)$ порядка m. В силу определения преобразования Фурье имеем

$$E_\lambda f(x) = \int\limits_{\mathbb{R}^N} e_A(x-y, \lambda) f(y) dy, \tag{3.9}$$

где ядро имеет вид

$$e_A(x,\lambda) = (2\pi)^{-N} \int\limits_{A(\xi)<\lambda} e^{ix\xi} d\xi = (2\pi)^{-N} \lambda^{\frac{N}{m}} \int\limits_{\Omega_A} e^{i\lambda^{\frac{1}{m}} x\xi} d\xi.$$

Здесь символом Ω_A, как и в разделе 2, обозначено множество $\Omega_A = \{\xi \in \mathbb{R}^N : A(\xi) < 1\}$.

Множество Ω_A называют *строго выпуклым*, если все главные кривизны поверхности $\partial\Omega_A$ строго положительны. Например, если $A(\xi) = |\xi|^2$, то множество Ω_A есть шар, и поэтому оно строго выпукло. При этом $E^s_\lambda(A)f$ совпадает со сферическими частичными интегралами. Важность строгой выпуклости множества Ω_A заключается в том, что в этом случае фазовая функция осциллирующего интеграла $e_A(x,\lambda)$ будет морсовской и в силу метода стационарной фазы асимптотика интеграла будет аналогичной с (2.1). Поэтому, повторяя те же рассуждения, как и в работе [36], можно показать, что как для $E_\lambda^s(A)f$, так и для $S_\lambda^s(A)f$ справедливы утверждения теоремы Стейна.

Если же множество Ω_A является выпуклым, но не строго выпуклым (например, в случае $A(\xi) = \xi_1^4 + \xi_2^4$ при $N = 2$), то некоторые из главных кривизн могут обращаться в нуль в отдельных точках. По методу стационарной фазы в асимптотической оценке $e_A(x, \lambda)$ появится особенность, т. е. в знаменателе будет участвовать гауссова кривизна, которая обращается в нуль в некоторых точках. Однако, как доказал Б. Рэндол [33], эта особенность является интегрируемой, и слегка изменив метод работы [36], удается доказать те же теоремы и в этом случае [4, 6].

В связи с этими результатами возникает следующая задача.

Пусть $A(\xi)$ — произвольный эллиптический полином (или пусть множество Ω_A является выпуклым или, может быть, строго выпуклым). Являются ли условия Тао (3.7) достаточными для сходимости почти всюду $E_\lambda^s(A)f$? Аналогичный вопрос остается открытым и в отношении условия Карбери и др. (3.8).

До появления замечательной работы С. Кенига и П. Томаса [29] (1980 г.) исследование сходимости почти всюду средних Рисса кратных рядов Фурье сводилось, как отмечалось выше, с помощью метода суммирования Пуассона к изучению средних Рисса кратных интегралов Фурье, что несомненно является более простой задачей. Однако для справедливости метода Пуассона требовалось, что бы порядок средних Рисса был достаточно большим: $s > \dfrac{N-1}{2}$. А теорема С. Кенига и П. Томаса фактически утверждает, что для сходимости почти всюду средних $S_\lambda^s(A)f$ любого неотрицательного порядка необходима и достаточна сходимость почти всюду средних Рисса $E_\lambda^s(A)f$. Переходим к точной формулировке этой теоремы.

Функцию M из $L_\infty(\mathbb{R}^N)$ назовем *регулярной*, если каждая точка $\mathbb{R}^N$ является точкой Лебега для M (см. [29]). Для любого числа $\lambda > 0$ определим оператор $E_{M,\lambda}$ в $L_2(\mathbb{R}^N)$ равенством $\widehat{E_{M,\lambda}f}(\xi) = M(\xi/\lambda)\hat{f}(\xi)$ и оператор $S_{M,\lambda}$ в $L_2(\mathbb{T}^N)$ равенством $\widehat{S_{M,\lambda}F}(n) = M(n/\lambda)\hat{F}(n)$. Обозначим символами $E_M^\star f(x)$ и $S_M^\star F(x)$ соответствующие максимальные операторы, т. е. $E_M^\star f(x) = \sup\limits_{\lambda>0} |E_{M,\lambda}f(x)|$ и $S_M^\star F(x) = \sup\limits_{\lambda>0} |S_{M,\lambda}F(x)|$. Функция M называется *p-максимальной* на $\mathbb{R}^N$ (или *слабо p-максимальной* на $\mathbb{R}^N$), если оператор $E_M^\star$ ограничен (или слабо ограничен) в $L_p(\mathbb{R}^N)$; аналогично для $S_M^\star$ в $L_p(\mathbb{T}^N)$.

Теорема 3.4 (С. Кениг и П. Томас, [29]). *Пусть функция $M \in L_\infty(\mathbb{R}^N)$ является регулярной, и пусть $1 < p < \infty$. Тогда функция M является p-максимальной или слабо p-максимальной на $\mathbb{R}^N$ тогда и только тогда, когда M является p-максимальной или слабо p-максимальной на $\mathbb{T}^N$.*

Доказательство теоремы основано на линеаризации проблемы (см. также следующий раздел) и последующем применении техники доказательства теоремы де Лю (см. [39]) о связи мультипликаторов в $L_p(\mathbb{R}^N)$ и $L_p(\mathbb{T}^N)$. Отметим также, что развернутое доказательство этой теоремы имеется в работе [27].

Если, например, взять функцию $M(\xi) = (1 - |\xi|^2)_+^s$, $s \geqslant 0$, то из этой теоремы вытекает эквивалентность сходимости почти всюду средних Рисса порядка s сферических частичных сумм $S_\lambda^s F(x)$ и интегралов Фурье $E_\lambda^s f(x)$.

Отметим, что в работе Тао [41] фактически доказана слабая p-максимальность на $\mathbb{R}^2$ функции $M(\xi) = (1-|\xi|^2)_+^s$ при выполнении условий (3.7). Следовательно, в силу теоремы Кенига и Томаса, выполнение этих условий гарантируют сходимость почти всюду на $\mathbb{T}^2$ рядов Фурье:

$$\sum_{n_1^2+n_2^2<\lambda} \left(1 - \frac{n_1^2+n_2^2}{\lambda}\right)^s f_{n_1,n_2} e^{i(n_1x_1+n_2x_2)} \to f(x_1, x_2).$$

Применяя теорему Кенига и Томаса, можно также убедиться, что при выполнении условий (3.4) отсутствует сходимость почти всюду средних $S_\lambda^s f$ для функций из классов $L_p(\mathbb{T}^N)$.

Отметим также, что если $A(\xi)$ — однородный эллиптический полином, то утверждение теоремы Кенига и Томаса справедливо и для пары операторов $E_\lambda^s(A)f$ и $S_\lambda^s(A)f$.

4. Сходимость рядов Фурье гладких функций

Как альтернативный способ упрощения ситуации можно рассматривать исследование сходимости $S_\lambda f(x) \to f(x)$ не для функций из пространства $L_p(\mathbb{T}^N)$, а для функций из подпространства $L_p(\mathbb{T}^N)$, которые обладают некоторой гладкостью. Наиболее распространенными подпространствами такого рода являются пространства Соболева.

Функция $f \in L_p(\mathbb{T}^N)$, $p \geqslant 1$, принадлежит *пространству Соболева* $L_p^a(\mathbb{T}^N)$ с действительным числом $a > 0$, если конечна норма

$$||f||_{L_p^a(T^N)} = || \sum_{n \in Z^N} (1 + |n|^2)^{\frac{a}{2}} f_n e^{inx} ||_{L_p(T^N)}. \tag{4.1}$$

Когда a не целое, то это пространство также называется *пространством Лиувилля*.

В работе [23] Карбери и Сория, наряду с другими вопросами, изучена также сходимость почти всюду интегралов Фурье $E_\lambda f(x)$ для функций f из классов Соболева $L_p^a(\mathbb{R}^N)$. Напомним, что норма в этом пространстве определяется аналогично с нормой (4.1):

$$||f||_{L_p^a(\mathbb{R}^N)} = || \int_{\mathbb{R}^N} (1 + |\xi|^2)^{\frac{a}{2}} \hat{f}(\xi) e^{ix\xi} d\xi ||_{L_p(\mathbb{R}^N)}. \tag{4.2}$$

Теорема 4.1 (Карбери и Сория [23]). *Пусть $N \geqslant 2$. Если*

$$a > (N-1)\Big(\frac{1}{p} - \frac{1}{2}\Big), \quad 1 < p \leqslant 2, \tag{4.3}$$

то для любой функции $f \in L_p^a(\mathbb{R}^N)$ кратные интегралы $E_\lambda f$ сходятся почти всюду к f.

Обратим внимание на то, что условие на показатель гладкости a в этой теореме совпадает с условием Стейна (3.2) на показатель средних Рисса s.

В работе [7] утверждение этой теоремы доказано для спектральных разложений произвольного эллиптического псевдодифференциального оператора, определенного в $L_2(\Omega)$, $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$. При этом условия сходимости для функций из класса Соболева $L_p^a(\Omega)$ имеют вид: $1 \leqslant p \leqslant 2$ и $a > N\Big(\frac{1}{p} - \frac{1}{2}\Big)$. Следует особо отметить, что, как доказано в этой же работе, эти условия являются окончательными в классе всех эллиптических псевдодифференциальных операторов.

Если в теореме Карбери и Сория вместо самых разложений $E_\lambda f$ рассмотреть их средние $E_\lambda^s f$, то естественно ожидать, что утверждение теоремы будет справедливо для менее гладких функций. То, что это действительно так, доказано в следующей теореме.

Теорема 4.2 (см. [9]). *Пусть $A(\xi)$ — произвольный эллиптический полином и пусть множество Ω_A строго выпукло. Тогда, если числа $s \geqslant 0$ и $a > 0$ удовлетворяют условиям*

$$a + s > (N-1)\Big(\frac{1}{p} - \frac{1}{2}\Big), \quad 1 \leqslant p \leqslant 2, \tag{4.4}$$

то для любой функции $f \in L_p^a(\mathbb{R}^N)$ с компактным носителем средние Рисса $E_\lambda^s(A)f$ сходятся почти всюду к f.

Следующая теорема показывает, что даже для сферических частичных интегралов условие (4.4) при $p = 1$ существенно улучшить не возможно.

Теорема 4.3 (см. [9]). *Пусть $A(D) = -\Delta$, $0 < a + s < \dfrac{N-1}{2}$. Тогда существует функция $f \in L_1^a(\mathbb{R}^N)$ с компактным носителем такая, что*

$$\lim_{\lambda \to \infty} |E_\lambda^s(A) f(x)| = +\infty$$

на некотором множестве E положительной меры.

В связи с этими результатами возникают следующие задачи.

Будут ли справедливы теорема 3.3 и теорема Карбери и др. [22] (см. условие (3.8)), сформулированные в предыдущем разделе, если вместо средних Рисса рассмотреть гладкие функции с показателем a? Более того, можно ли заменить в этих теоремах показатель средних s на $a+s$ и рассмотреть гладкие функции с показателем a?

Другой вопрос: насколько важным является условие строгой выпуклости множества Ω_A в условиях теоремы 4.2?

Переходим к рассмотрению кратных рядов Фурье функций из классов Соболева. Следует отметить, что в этих классах теорема Кенига и Томаса не действует. Поэтому результаты о сходимости кратных интегралов Фурье не переходят автоматически к рядам Фурье. Однако, используя метод доказательства этой теоремы, покажем, что те же условия Карбери и др. (4.3) гарантируют сходимость почти всюду кратных рядов Фурье.

Теорема 4.4. *Пусть параметры a и p удовлетворяют условиям* (4.3). *Тогда для любой функции $F \in L_p^a(\mathbb{T}^N)$ частичные суммы $S_\lambda F(x)$ сходятся к $F(x)$ почти всюду в $\mathbb{T}^N$. Более того, максимальный оператор $S_\star F(x) = \sup\limits_{\lambda>0} |S_\lambda F(x)|$ имеет оценку*

$$||S_\star F||_{L_p(\mathbb{T}^N)} \leqslant C_{p,a} ||F||_{L_p^a(\mathbb{T}^N)}. \tag{4.5}$$

Для доказательства теоремы необходимо прежде всего перейти от пространств $L_p^a(\mathbb{T}^N)$ к классам $L_p(\mathbb{T}^N)$. Для этого с помощью оператора Лапласа Δ напишем

$$E_\lambda f = (1-\Delta)^{-\frac{a}{2}} E_\lambda (1-\Delta)^{\frac{a}{2}} f = (1-\Delta)^{-\frac{a}{2}} E_\lambda g,$$

где $g = (1-\Delta)^{\frac{a}{2}} f \in L_p(\mathbb{R}^N)$. Для любой функции $g \in L_p(\mathbb{R}^N)$ введем оператор

$$E_{(\lambda,a)} g = (1-\Delta)^{-\frac{a}{2}} E_\lambda g = (2\pi)^{-\frac{N}{2}} \int\limits_{|\xi|^2<\lambda} (1+|\xi|^2)^{-\frac{a}{2}} \hat{g}(\xi) e^{ix\xi} d\xi.$$

Аналогично определим оператор $S_{(\lambda,a)} G$, $G \in L_p(\mathbb{T}^N)$ на торе $\mathbb{T}^N$:

$$S_{(\lambda,a)} G = \sum_{|n|^2<\lambda} (1+|n|^2)^{-\frac{a}{2}} G_n e^{inx}, \quad G \in L_p(\mathbb{T}^N).$$

Пусть $E_{(a)}^\star$ и $S_{(a)}^\star$ — соответствующие максимальные операторы.

Нетрудно убедиться в том, что ни при каких функциях M операторы $E_{(\lambda,a)}$ и $S_{(\lambda,a)}$ не представимы в виде $E_{M,\lambda}$ и $S_{M,\lambda}$. Поэтому мы не можем применить теорему Кенига и Томаса к паре операторов $E_{(\lambda,a)}$ и $S_{(\lambda,a)}$. Тем не менее, имеет место следующее утверждение.

Теорема 4.5. *Пусть $1 < p < \infty$. Если оператор $E_{(a)}^\star$ ограничен* (*или слабо ограничен*) *в $L_p(\mathbb{R}^N)$, тогда и оператор $S_{(a)}^\star$ ограничен* (*или слабо ограничен*) *в $L_p(\mathbb{T}^N)$.*

Заметим, что в отличие от теоремы Кенига и Томаса здесь даются только достаточные условия ограниченности (или слабой ограниченности) операторов $S_{(a)}^\star$.

Определим банахово пространство $L_p(\Omega, l^\infty(\mathbb{Z}^+))$ как множество последовательностей функций $\{f_k\}$ из $L_p(\Omega)$, для которых ограничена норма $||\sup\limits_k |f_k|||_{L_p(\Omega)}$. Банахово пространство $L_p(\Omega, l^1(\mathbb{Z}^+))$ определяется аналогично. Тогда $E_{(a)}^\star$ можно рассматривать как оператор, определенный в $L_p(\mathbb{R}^N)$ и принимающий значения из $L_p(\mathbb{R}^N, l^\infty(\mathbb{Z}^+))$. Аналогично, $S_{(a)}^\star$ можно рассматривать как оператор с областью определения $L_p(\mathbb{T}^N)$ и со значениями в $L_p(\mathbb{T}^N, l^\infty(\mathbb{Z}^+))$. Используя эту редукцию и принцип дуальности, следующая линеаризация максимальных операторов может быть доказана повтором тех же рассуждений, что и в работе [29] (см. также [27, с. 229]).

Лемма 4.1 (о линеаризации). *Пусть $1 < p < \infty$ и $q = \dfrac{p}{p-1}$. Оператор $E_{(a)}^\star$ ограничен в $L_p(\mathbb{R}^N)$ тогда и только тогда, когда*

$$||\sum_k E_{(\lambda_k,a)} f_k||_{L_q(\mathbb{R}^N)} \leqslant C||\sum_k |f_k|||_{L_q(\mathbb{R}^N)}, \quad \{f_k\} \in L_q(\mathbb{R}^N, l^1(\mathbb{Z}^+)), \tag{4.6}$$

равномерно по всем последовательностям положительных чисел $\{\lambda_k\}$.

Аналогично, оператор $S^\star_{(a)}$ ограничен в $L_p(\mathbb{T}^N)$ тогда и только тогда, когда

$$||\sum_k S_{(\lambda_k,a)}F_k||_{L_q(\mathbb{T}^N)} \leqslant C||\sum_k |F_k|||_{L_q(\mathbb{T}^N)}, \quad \{F_k\}\in L_q(\mathbb{T}^N, l^1(\mathbb{Z}^+)), \tag{4.7}$$

равномерно по всем последовательностям положительных чисел $\{\lambda_k\}$.

Подобные результаты справедливы и для слабой ограниченности операторов $E^\star_{(a)}$ и $S^\star_{(a)}$. Именно, пара неравенств

$$||E^\star_{(a)}f||_{L_{p,\infty}(\mathbb{R}^N)} \leqslant ||f||_{L_p(\mathbb{R}^N)}, \quad f\in L_p(\mathbb{R}^N),$$
$$||S^\star_{(a)}F||_{L_{p,\infty}(\mathbb{T}^N)} \leqslant ||F||_{L_p(\mathbb{T}^N)}, \quad F\in L_p(\mathbb{T}^N),$$

эквивалентна следующим оценкам:

$$||\sum_k E_{(\lambda_k,a)}f_k||_{L_q(\mathbb{R}^N)} \leqslant C||\sum_k |f_k|||_{L_{q,1}(\mathbb{R}^N)}, \quad \{f_k\}\in L_{q,1}(\mathbb{R}^N, l^1(\mathbb{Z}^+)), \tag{4.8}$$

$$||\sum_k S_{(\lambda_k,a)}F_k||_{L_q(\mathbb{T}^N)} \leqslant C||\sum_k |F_k|||_{L_{q,1}(\mathbb{T}^N)}, \quad \{F_k\}\in L_{q,1}(\mathbb{T}^N, l^1(\mathbb{Z}^+)). \tag{4.9}$$

Здесь символом $L_{p,q}$ обозначено пространство Лоренца (см., например, [27]).

Замечание 4.1. В связи с теоремой Кенига и Томаса естественно возникает следующий вопрос: следует ли утверждение теоремы 2.4 из теоремы 2.1 Карбери и Сория с использованием теоремы Кенига и Томаса? Ответ на этот вопрос отрицательный, так как доказательство теоремы 2.1 основано на оценке, аналогичной с (2.4), а применение принципа дуальности, который играет ключевую роль в доказательстве леммы о линеаризации, для этой оценки не дает нужного результата. Причина здесь в том, что в левой части (2.4) интеграл берется не по всему пространству $\mathbb{R}^N$, а по шару радиуса r.

Переходим к доказательству теоремы 4.5. Покажем сначала, что ограниченность оператора $S^\star_{(a)}$ в $L_p(\mathbb{T}^N)$ вытекает из ограниченности оператора $E^\star_{(a)}$ в $L_p(\mathbb{R}^N)$.

В силу леммы о линеаризации достаточно доказать, что из оценки (4.6), равномерной относительно всех последовательностей λ_k, следует оценка (4.7), равномерная по всем последователям λ_k.

Пусть имеет место неравенство (4.6). Достаточно доказать (4.7) для произвольных тригонометрических полиномов $F_k(x)=P_k(x)$. Если $Q(x)$ — произвольный тригонометрический полином в $\mathbb{T}^N$ и $L_\varepsilon(x)=e^{-\varepsilon\pi|x|^2}$, то справедливо равенство

$$\int_{\mathbb{T}^N}\sum_k S_{(\lambda_k,a)}P_k(x)Q(x)dx = \lim_{\varepsilon\to 0}\varepsilon^{\frac{N}{2}}\int_{\mathbb{R}^N}\sum_k E_{(\lambda_k,a)}(P_kL_{\varepsilon/q})Q(x)L_{\varepsilon/p}(x)dx.$$

В случае операторов $S_{M,\lambda}$ и $E_{M,\lambda}$ доказательство этого равенства содержится в [39, с. 261]. Поскольку в этом доказательстве используется только ограниченность и непрерывность функции M, то легко убедиться в том, что оно справедливо и в рассматриваемом случае.

В силу этого равенства и оценки (4.6) имеем

$$\left|\int_{\mathbb{T}^N}\sum_k S_{(\lambda_k,a)}P_k(x)Q(x)dx\right| \leqslant C_p\limsup_{\varepsilon\to 0}\left[\varepsilon^{\frac{N}{2}}||\sum_k |P_k|L_{\varepsilon/q}||_{L_q(\mathbb{R}^N)}||QL_{\varepsilon/p}||_{L_p(\mathbb{R}^N)}\right]=$$

$$= C_p\limsup_{\varepsilon\to 0}\left[||\varepsilon^{\frac{N}{2}}\sum_k |P_k|L_{\varepsilon/q}||_{L_q(\mathbb{R}^N)}||\varepsilon^{\frac{N}{2}}QL_{\varepsilon/p}||_{L_p(\mathbb{R}^N)}\right] = C||\sum_k |P_k|||_{L_q(\mathbb{T}^N)}||Q||_{L_p(\mathbb{T}^N)}.$$

Взяв супремум по всем тригонометрическим полиномам Q с L_p нормой 1, получим (4.7), что завершает доказательство теоремы относительно ограниченности операторов.

Что касается слабой ограниченности операторов, то доказательство аналогичное: мы вновь воспользуемся леммой о линеаризации, и для доказательства (4.9) в предположении (4.8) достаточно заметить, что

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\varepsilon^{\frac{N}{2q}}||\sum_k |P_k|L_{\varepsilon/q}||_{L_{q,1}(\mathbb{R}^N)} = \sum_k |P_k|||_{L_{q,1}(\mathbb{T}^N)}.$$

Это равенство легко вытекает из метода суммирования Пуассона (см. [27, с. 225, 231]).

Далее покажем, как теорема 4.4 следует из теоремы 4.5 и из оценок, доказанных в работе [23] для кратных интегралов.

Пусть $1 < p \leqslant 2$, $q = \dfrac{2N}{N-1+2/p}$ и $a = \dfrac{N-1}{2}$. Применение интерполяционной теоремы Марцинкевича к оценкам, полученных в [23, разделы 3, 4], дает

$$||E^\star_{(a)}f||_{L_q(\mathbb{R}^N)} \leqslant C||f||_{L_p(\mathbb{R}^N)}, \quad f \in L_p(\mathbb{R}^N).$$

Следовательно, $E^\star_{(a)}f$ ограничен почти всюду в $\mathbb{R}^N$ для каждой функции $f \in L_p(\mathbb{R}^N)$, $p > 1$. Тогда по теореме Стейна [37] о последовательности линейных операторов, инвариантных относительно сдвига, действующих из $L_p(\mathbb{R}^N)$ в $L_p(\mathbb{R}^N)$, $1 \leqslant p \leqslant 2$, можно утверждать, что

$$||E^\star_{(a)}f||_{L_{p,\infty}(\mathbb{R}^N)} \leqslant C||f||_{L_p(\mathbb{R}^N)}, \quad f \in L_p(\mathbb{R}^N), \quad p > 1, \quad a = \frac{N-1}{2}.$$

Отсюда, в силу теоремы 4.5, при тех же значениях параметров p и a имеем

$$||S^\star_{(a)}F||_{L_{p,\infty}(\mathbb{T}^N)} \leqslant C||F||_{L_p(\mathbb{T}^N)}, \quad F \in L_p(\mathbb{T}^N). \tag{4.10}$$

С другой стороны, из оценок, полученных в [23, раздел 3], следует

$$||E^\star_{(a)}f||_{L_2(\mathbb{R}^N)} \leqslant C_a||f||_{L_2(\mathbb{R}^N)}, \quad f \in L_2(\mathbb{R}^N), \quad a > 0,$$

или, вновь в силу теоремы 4.5,

$$||S^\star_{(a)}F||_{L_2(\mathbb{T}^N)} \leqslant C_a||F||_{L_2(\mathbb{T}^N)}, \quad F \in L_2(\mathbb{T}^N), \quad a > 0. \tag{4.11}$$

Применяя сначала интерполяционную теорему Марцинкевича к оценкам (4.10) и (4.11) (при $a = \dfrac{N-1}{2}$), получим

$$||S^\star_{(a)}F||_{L_p(\mathbb{T}^N)} \leqslant C||F||_{L_p(\mathbb{T}^N)}, \quad F \in L_p(\mathbb{T}^N), \quad p > 1, \quad a = \frac{N-1}{2}.$$

Затем, применяя к этой оценке и оценке (4.11) (при $a > 0$) интерполяционную теорему Стейна о семействе аналитически зависящих от параметра линейных операторов (см., например, [1, с. 46]), будем иметь

$$||S^\star_{(a)}F||_{L_p(\mathbb{T}^N)} \leqslant C_{p,a}||F||_{L_p(\mathbb{R}^N)}, \quad F \in L_p(\mathbb{T}^N),$$

где

$$1 < p \leqslant 2, \quad a > (N-1)\Big(\frac{1}{p} - \frac{1}{2}\Big).$$

Возвращаясь к пространствам Соболева, эту оценку перепишем в виде

$$||S_\star G||_{L_p(\mathbb{T}^N)} \leqslant C_{p,a}||G||_{L_p^a(\mathbb{T}^N)}, \quad G \in L_p^a(\mathbb{T}^N),$$

где p и a такие же, как и выше.

Это и есть оценка (4.5). Первая часть утверждения теоремы 4.4 вытекает из этой оценки.

Автор приносит глубокую благодарность Ш. А. Алимову за обсуждение результатов работы, а также благодарит С. Р. Умарова за поддержку и гостеприимство.

Данная работа выполнена при поддержке Фонда поддержки фундаментальных исследований республики Узбекистан (номер проекта OT-F4-88).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Алимов Ш. А., Ашуров Р. Р., Пулатов А. К.* Кратные ряды и интегралы Фурье// Итоги науки и техн. Соврем. пробл. мат. — 1989. — *42.* — С. 7–104.
2. *Алимов Ш. А., Ильин В. А., Никишин Е. М.* Проблемы сходимости кратных тригонометрических рядов и спектральных разложений. I// Усп. мат. наук. — 1976. — *31.* — С. 29–86.
3. *Ашуров Р. Р.* Об условиях локализации для спектральных разложений эллиптических операторов с постоянными коэффициентами// Мат. заметки. — 1983. — *33.* — С. 434–439.
4. *Ашуров Р. Р.* Суммируемость почти всюду рядов Фурье функций из L_p по собственным функциям// Мат. заметки. — 1983. — *34.* — С. 837–843.
5. *Ашуров Р. Р.* Об условиях локализации для тригонометрических рядов Фурье// Докл. АН СССР. — 1985. — *31.* — С. 496–499.

6. *Ашуров Р. Р.* Суммируемость кратных тригонометрических рядов Фурье// Мат. заметки. — 1991. — *49.* — С. 563–568.
7. *Ашуров Р. Р.* О спектральных разложениях эллиптических псевдодифференциальных операторов// Узб. мат. ж. — 1998. — *6.* — С. 20–29.
8. *Ашуров Р. Р.* Обобщенная локализация для шаровых частичных сумм кратных рядов Фурье// Докл. РАН. — 2019. — *489.* — С. 7–10.
9. *Ашуров Р. Р., Буваев К. Т.* Суммируемость почти всюду кратных интегралов Фурье// Дифф. уравн. — 2017. — *53.* — С. 750–760.
10. *Ашуров Р. Р., Файзиев Ю. Э.* Принцип обобщенной локализации для непрерывных всплеск-разложений// Мат. заметки. — 2019. — *106.* — С. 75–81.
11. *Бабенко К. И.* О суммируемости и сходимости разложений по собственным функциям дифференциального оператора// Мат. сб. — 1973. — *91.* — С. 147–201.
12. *Бастис А. Й.* Обобщенный принцип локализации для N-кратного интеграла Фурье// Докл. АН СССР. — 1984. — *278.* — С. 777–778.
13. *Бастис А. Й.* Обобщенная локализация для рядов Фурье по собственным функциям оператора Лапласа в классах L_p// Литов. мат. сб. — 1991. — *31.* — С. 387–405.
14. *Блошанский И. Л.* О равномерной сходимости тригонометрических рядов и интегралов Фурье// Мат. заметки. — 1975. — *18.* — С. 675–684.
15. *Ильин В. А.* Об обобщенной интерпретации принципа локализации для рядов Фурье по фундаментальным системам функций// Сиб. мат. ж. — 1968. — *9*, № 5. — С. 1093–1106.
16. *Ashurov R. R.* Generalized localization for spherical partial sums of multiple Fourier series// J. Fourier Anal. Appl. — 2019. — *25*, № 6. — С. 3174–3183.
17. *Ashurov R. R., Ahmedov A., Mahmud Ahmad Rodzi B.* The generalized localization for multiple Fourier integrals// J. Math. Anal. Appl. — 2010. — *371.* — С. 832–841.
18. *Ashurov R. R., Butaev A.* On generalized localization of fourier inversion for distributions// В сб.: «Topics in functional analysis and algebra», USA—Uzbekistan Conf. on Anal. and Math. Phys., California State Univ., Fullerton, USA, May 20–23, 2014. — Providence: American Mathematical Society, 2016. — С. 33–50.
19. *Ashurov R. R., Butaev A.* On pointwise convergence of continuous wavelet transforms// Uzb. Mat. Zh. — 2018. — *1.* — С. 2–24.
20. *Ashurov R. R., Butaev A., Pradhan B.* On generalized localization of fourier inversion associated with an elliptic operator for distributions// Abstr. Appl. Anal. — 2012. — *2012.* — 649848.
21. *Carbery A., Romera E., Soria F.* Radial weights and mixed norm inequalities for the disc multiplier// J. Funct. Anal. — 1992. — *109.* — С. 52–75.
22. *Carbery A., Rubio de Francia J. L., Vega L.* Almost everywhere summability of Fourier integrals// J. London Math. Soc. (2). — 1988. — *38.* — С. 513–524.
23. *Carbery A., Soria F.* Almost everywhere convergence of Fourier integrals for functions in Sobolev spaces, and an L_2-localization principle// Rev. Mat. Iberoam. — 1988. — *4.* — С. 319–337.
24. *Carbery A., Soria F.* Pointwise Fourier inversion and localization in R^n// J. Fourier Anal. Appl. — 1997. — *3*, Special Issue. — С. 847–858.
25. *Carleson L.* On convergence and growth of partial sums of Fourier series// Acta Math. — 1966. — *116.* — С. 135–157.
26. *Fefferman C.* On the divergence of multiple Fourier series// Bull. Am. Math. Soc. — 1971. — *77.* — С. 191–195.
27. *Grafakos L.* Classical Fourier analysis. — New York: Springer, 2008.
28. *Hunt R. A.* On convergence of Fourier series// Proc. Conf. on Orthogonal Expansions and Their Continuous Analogues. — Edwardsville—Carbondale: Univ. Press, 1968. — С. 235–255.
29. *Kenig C. E., Tomas P. A.* Maximal operators defined by Fourier multipliers// Studia Math. — 1980. — *68.* — С. 79–83.
30. *Lee S.* Improved bounds for Bochner—Riesz and maximal Bochner—Riesz operators// Duke Math. J. — 2004. — *122.* — С. 205–232.
31. *Lu Sh.* Conjectures and problems in Bochner—Riesz means// Front. Math. China. — 2013. — *8.* — С. 1237–1251.
32. *Mitchell J.* On the summability of multiple orthogonal series// Trans. Am. Math. Soc. — 1951. — *71.* — С. 136–151.
33. *Randol B.* On the asymptotic behavior of the Fourier transform of the indicator function of the convex set// Trans. Am. Math. Soc. — 1969. — *139.* — С. 279–285.

34. *Sjölin P.* Convergence almost everywhere of certain singular integrals and multiple Fourier series// Ark. Mat. — 1971. — *9.* — C. 65–90.
35. *Sjölin P.* Regularity and integrability of spherical means// Monatsh. Math. — 1983. — *96.* — C. 277–291.
36. *Stein E. M.* Localization and summability of multiple Fourier series// Acta Math. — 1958. — *1-2.* — C. 93–147.
37. *Stein E. M.* On limits of sequences of operators// Ann. Math. — 1961. — *74.* — C. 140–170.
38. *Stein E. M.* Some problems in harmonic analysis// В сб.: «Harmonic analysis in Euclidean spaces. Part 1». — Providence: Am. Math. Soc, 1978. — C. 3–20.
39. *Stein E. M., Weiss G.* Itroduction to Fourier analysis on Euclidean spaces. — Princeton: Princeton University Press, 1971.
40. *Tao T.* The weak-type endpoint Bochner—Riesz conjecture and related topics// Indiana Univ. Math. J. — 1998. — *47.* — C. 1097–1124.
41. *Tao T.* On the maximal Bochner—Riesz conjecture in the plane for $p < 2$// Trans. Am. Math. Soc. — 2002. — *354.* — C. 1947–1959.

Р. Р. Ашуров

Национальный университет Узбекистана им. М. Улугбека, Институт математики АН РУз, Ташкент, Узбекистан

E-mail: ashurovr@gmail.com

DOI: 10.22363/2413-3639-2021-67-4-634-653 UDC 517.95

Generalized Localization and Summability Almost Everywhere of Multiple Fourier Series and Integrals

© 2021 **R. R. Ashurov**

Abstract. It is well known that Luzin's conjecture has a positive solution for one-dimensional trigonometric Fourier series, but in the multidimensional case it has not yet found its confirmation for spherical partial sums of multiple Fourier series. Historically, progress in solving Luzin's hypothesis has been achieved by considering simpler problems. In this paper, we consider three of these problems for spherical partial sums: the principle of generalized localization, summability almost everywhere, and convergence almost everywhere of multiple Fourier series of smooth functions. A brief overview of the work in these areas is given and unsolved problems are mentioned and new problems are formulated. Moreover, at the end of the work, a new result on the convergence of spherical sums for functions from Sobolev classes is proved.

REFERENCES

1. Sh. A. Alimov, R. R. Ashurov, and A. K. Pulatov, "Kratnye ryady i integraly Fur'e" [Multiple Fourier series and integrals], *Itogi nauki i tekhn. Sovrem. probl. mat.* [Totals Sci. Tech. Contemp. Probl. Math.], 1989, **42**, 7–104 (in Russian).
2. Sh. A. Alimov, V. A. Il'in, and E. M. Nikishin, "Problemy skhodimosti kratnykh trigonometricheskikh ryadov i spektral'nykh razlozheniy. I" [Convergence problems for multiple trigonometric series and spectral expansions. I], *Usp. mat. nauk* [Progr. Math. Sci.], 1976, **31**, 29–86 (in Russian).
3. R. R. Ashurov, "Ob usloviyakh lokalizatsii dlya spektral'nykh razlozheniy ellipticheskikh operatorov s postoyannymi koeffitsientami" [On localization conditions for spectral expansions of elliptic operators with constant coefficients], *Mat. zametki* [Math. Notes], 1983, **33**, 434–439 (in Russian).

4. R. R. Ashurov, "Summiruemost' pochti vsyudu ryadov Fur'e funktsiy iz L_p po sobstvennym funktsiyam" [Summability almost everywhere of Fourier series of functions from L_p in eigenfunctions], *Mat. zametki* [Math. Notes], 1983, **34**, 837–843 (in Russian).
5. R. R. Ashurov, "Ob usloviyakh lokalizatsii dlya trigonometricheskikh ryadov Fur'e" [Localization conditions for trigonometric Fourier series], *Dokl. AN SSSR* [Rep. Acad. Sci. USSR], 1985, **31**, 496–499 (in Russian).
6. R. R. Ashurov, "Summiruemost' kratnykh trigonometricheskikh ryadov Fur'e" [Summability of multiple trigonometric Fourier series], *Mat. zametki* [Math. Notes], 1991, **49**, 563–568 (in Russian).
7. R. R. Ashurov, "O spektral'nykh razlozheniyakh ellipticheskikh psevdodifferentsial'nykh operatorov" [Spectral decompositions of elliptic pseudodifferential operators], *Uzb. mat. zh.* [Uzb. Math. J.], 1998, **6**, 20–29 (in Russian).
8. R. R. Ashurov, "Obobshchennaya lokalizatsiya dlya sharovykh chastichnykh summ kratnykh ryadov Fur'e" [Generalized localization for spherical partial sums of multiple Fourier series], *Dokl. RAN* [Rep. Russ. Acad. Sci.], 2019, **489**, 7–10 (in Russian).
9. R. R. Ashurov and K. T. Buvaev, "Summiruemost' pochti vsyudu kratnykh integralov Fur'e" [Summability almost everywhere of multiple Fourier integrals], *Diff. uravn.* [Differ. Equ.], 2017, **53**, 750–760 (in Russian).
10. R.R. Ashurov and Yu. E. Fayziev, "Printsip obobshchennoy lokalizatsii dlya nepreryvnykh vsplesk-razlozheniy" [Generalized localization principle for continuous wavelet expansions], *Mat. zametki* [Math. Notes], 2019, **106**, 75–81 (in Russian).
11. K. I. Babenko, "O summiruemosti i skhodimosti razlozheniy po sobstvennym funktsiyam differentsial'nogo operatora" [On summability and convergence of expansions in eigenfunctions of a differential operator], *Mat. sb.* [Math. Digest], 1973, **91**, 147–201 (in Russian).
12. A. Y. Bastis, "Obobshchennyy printsip lokalizatsii dlya N-kratnogo integrala Fur'e" [Generalized localization principle for N-fold Fourier integral], *Dokl. AN SSSR* [Rep. Acad. Sci. USSR], 1984, **278**, 777–778 (in Russian).
13. A. Y. Bastis, "Obobshchennaya lokalizatsiya dlya ryadov Fur'e po sobstvennym funktsiyam operatora Laplasa v klassakh L_p" [Generalized localization for Fourier series in eigenfunctions of the Laplace operator in the L_p classes], *Litov. mat. sb.* [Lithuanian Math. Digest], 1991, **31**, 387–405 (in Russian).
14. I. L. Bloshanskiy, "O ravnomernoy skhodimosti trigonometricheskikh ryadov i integralov Fur'e" [On uniform convergence of trigonometric series and Fourier integrals], *Mat. zametki* [Math. Notes], 1975, **18**, 675–684 (in Russian).
15. V. A. Il'in, "Ob obobshchennoy interpretatsii printsipa lokalizatsii dlya ryadov Fur'e po fundamental'nym sistemam funktsiy" [On generalized interpretation of the localization principle for Fourier series in fundamental systems of functions], *Sib. mat. zh.* [Siberian Math. J.], 1968, **9**, No. 5, 1093–1106 (in Russian).
16. R. R. Ashurov, "Generalized localization for spherical partial sums of multiple Fourier series," *J. Fourier Anal. Appl.*, 2019, **25**, No. 6, 3174–3183.
17. R.R. Ashurov, A. Ahmedov, and B. Mahmud Ahmad Rodzi, "The generalized localization for multiple Fourier integrals," *J. Math. Anal. Appl.*, 2010, **371**, 832–841.
18. R. R. Ashurov and A. Butaev, "On generalized localization of fourier inversion for distributions," In: *Topics in functional analysis and algebra*, USA–Uzbekistan Conf. on Anal. and Math. Phys., California State Univ., Fullerton, USA, May 20–23, 2014, American Mathematical Society, Providence, 2016, pp. 33–50.
19. R. R. Ashurov and A. Butaev, "On pointwise convergence of continuous wavelet transforms," *Uzb. Math. J.*, 2018, **1**, 2–24.
20. R. R. Ashurov, A. Butaev, and B. Pradhan, "On generalized localization of fourier inversion associated with an elliptic operator for distributions," *Abstr. Appl. Anal.*, 2012, **2012**, 649848.
21. A. Carbery, E. Romera, and F. Soria, "Radial weights and mixed norm inequalities for the disc multiplier," *J. Funct. Anal.*, 1992, **109**, 52–75.
22. A. Carbery, J. L. Rubio de Francia, and L. Vega, "Almost everywhere summability of Fourier integrals," *J. London Math. Soc. (2)*, 1988, **38**, 513–524.
23. A. Carbery and F. Soria, "Almost everywhere convergence of Fourier integrals for functions in Sobolev spaces, and an L_2-localization principle," *Rev. Mat. Iberoam.*, 1988, **4**, 319–337.
24. A. Carbery and F. Soria, "Pointwise Fourier inversion and localization in R^n," *J. Fourier Anal. Appl.*, 1997, **3**, Special Issue, 847–858.
25. L. Carleson, "On convergence and growth of partial sums of Fourier series," *Acta Math.*, 1966, **116**, 135–157.
26. C. Fefferman, "On the divergence of multiple Fourier series," *Bull. Am. Math. Soc.*, 1971, **77**, 191–195.
27. L. Grafakos, *Classical Fourier analysis*, Springer, New York, 2008.

28. R. A. Hunt, "On convergence of Fourier series," *Proc. Conf. on Orthogonal Expansions and Their Continuous Analogues*, Univ. Press, Edwardsville–Carbondale, 1968, pp. 235–255.
29. C. E. Kenig and P. A. Tomas, "Maximal operators defined by Fourier multipliers," *Studia Math.*, 1980, **68**, 79–83.
30. S. Lee, "Improved bounds for Bochner–Riesz and maximal Bochner–Riesz operators," *Duke Math. J.*, 2004, **122**, 205–232.
31. Sh. Lu, "Conjectures and problems in Bochner–Riesz means," *Front. Math. China.*, 2013, **8**, 1237–1251.
32. J. Mitchell, "On the summability of multiple orthogonal series," *Trans. Am. Math. Soc.*, 1951, **71**, 136–151.
33. B. Randol, "On the asymptotic behavior of the Fourier transform of the indicator function of the convex set," *Trans. Am. Math. Soc.*, 1969, **139**, 279–285.
34. P. Sjölin, "Convergence almost everywhere of certain singular integrals and multiple Fourier series," *Ark. Mat.*, 1971, **9**, 65–90.
35. P. Sjölin, "Regularity and integrability of spherical means," *Monatsh. Math.*, 1983, **96**, 277–291.
36. E. M. Stein, "Localization and summability of multiple Fourier series," *Acta Math.*, 1958, **1-2**, 93–147.
37. E. M. Stein, "On limits of sequences of operators," *Ann. Math.*, 1961, **74**, 140–170.
38. E. M. Stein, "Some problems in harmonic analysis," In: *Harmonic analysis in Euclidean spaces. Part 1*, Am. Math. Soc, Providence, 1978, pp. 3–20.
39. E. M. Stein and G. Weiss, *Itroduction to Fourier analysis on Euclidean spaces*, Princeton University Press, Princeton, 1971.
40. T. Tao, "The weak-type endpoint Bochner–Riesz conjecture and related topics," *Indiana Univ. Math. J.*, 1998, **47**, 1097–1124.
41. T. Tao, "On the maximal Bochner–Riesz conjecture in the plane for $p < 2$," *Trans. Am. Math. Soc.*, 2002, **354**, 1947–1959.

R. R. Ashurov

National University of Uzbekistan named after M. Ulugbek, Institute of Mathematics of the Academy of Sciences of Uzbekistan, Tashkent, Uzbekistan

E-mail: ashurovr@gmail.com