Современная математика. Фундаментальные направления. Том 67, № 4 (2021). С. 620–633
Contemporary Mathematics. Fundamental Directions. ISSN 2413-3639 (Print)

DOI: 10.22363/2413-3639-2021-67-4-620-633 УДК 517.55

α-СУБГАРМОНИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ

© 2021 г. **Б. И. АБДУЛЛАЕВ, С. А. ИМОМКУЛОВ, Р. А. ШАРИПОВ**

Аннотация. В этой работе изучается класс α-субгармонических функций. Доказывается ряд важных свойств α-субгармонических функций, дается эквивалентное, более удобное определение α-субгармоничности. Описывается также геометрическая структура устранимых особенностей некоторых классов α-субгармонических функций.

ОГЛАВЛЕНИЕ

1. Введение

Хорошо известная классическая теория потенциала строится на основе оператора Лапласа и класса субгармонических функций. Естественно, возникает потребность изучения своеобразных расширений класса субгармонических функций, встречающийся в тех или иных задачах комплексного анализа.

Как известно, дважды гладкая функция $u(x) \in C^2(D)$ в области $D \subset \mathbb{R}^n$ называется субгармонической, если оператор Лапласа $\Delta u \geqslant 0$ в D. В пространстве $\mathbb{C}^n \approx \mathbb{R}^{2n}$ это условие эквивалентно тому, что дифференциальная форма $dd^c u \wedge \beta^{n-1}$ бистепени (n, n) положительна, $dd^c u \wedge \beta^{n-1} \geqslant 0$, где $\beta = dd^c |z|^2$ — форма объема в пространстве $\mathbb{C}^n$, $d = \partial + \overline{\partial}$, $d^c = \dfrac{\partial - \overline{\partial}}{4i}$ — стандартные обозначения в многомерном комплексном анализе.

Для произвольных полунепрерывных сверху функций положительность $dd^c u \wedge \beta^{n-1} \geqslant 0$ понимается в обобщенном смысле, в смысле потоков:

$$\int u(z)\, \beta^{n-1}(z)\, dd^c \omega(z) \geqslant 0,\ \forall \omega \in F(D),\ \omega \geqslant 0, \tag{1.1}$$

где $F(D) = \{\omega \in C^\infty(D),\ \operatorname{supp} \omega \Subset D\}$ — пространство основных функций.

В теории сильно m-субгармонических (sh_m) функций часто используются так называемые α-субгармонические функции, когда вместо строго положительной дифференциальной формы

$$\beta^{n-1} = \left(\frac{i}{2}\right)^{n-1} (n-1)! \sum_{j=1}^{n} dz[j] \wedge d\overline{z}[j]$$

бистепени $(n-1,n-1)$ будет стоять произвольная строго положительная дифференциальная форма

$$\alpha=\left(\frac{i}{2}\right)^{n-1}\sum_{j,k=1}^{n}\alpha_{jk}(z)dz\,[j]\wedge d\overline{z}\,[k]\,, \tag{1.2}$$

т. е. вместо оператора $dd^cu\wedge\beta^{n-1}$ рассматривается оператор $dd^cu\wedge\alpha$. Здесь $d\,z\,[j]=d\,z_1\wedge\ldots\wedge d\,z_{j-1}\wedge d\,z_{j+1}\wedge\ldots\wedge d\,z_n$, $d\,\bar z\,[k]=d\,\bar z_1\wedge\ldots\wedge d\,\bar z_{k-1}\wedge d\,\bar z_{k+1}\wedge\ldots\wedge d\,\bar z_n$ (см. [2]).

Для классов субгармонических и плюрисубгармонических функций имеются достаточно полные результаты об устранимых особых множествах. Так, в терминах хаусдорфовой меры, условия устранения особого множества гармонических функций класса Lip_λ изучены в работах Л. Карлесона [9] (для $0<\lambda\leqslant 1$) и Е. П. Долженко [8] (для $1<\lambda\leqslant 2$). Особые множества субгармонических функций из класса Lip_λ изучены в работе В. Л. Шапиро [25] (случай $(0<\lambda<1)$ и в работе А. Садуллаева и Ж. Р. Ярметова [17] (случай $(1\leqslant\lambda\leqslant 2)$. В работах Р. Харви и Дж. Полкинга [22], В. Г. Мазья и В. П. Хавина [12] получен ряд теорем об устранения особенностей гармонических функций из класса $L^{k,p}(G)$, аналогичные результаты в случае субгармонических функций из класса $L^{k,p}(G)$ получены в работах Б. Абдуллаева и С. Имомкулова [1], а также Б. Абдуллаева и Ж. Ярметова [3]. Здесь $L^{k,p}(G)$ — класс функций, имеющих производные до k-го порядка, причем производные k-го порядка принадлежат пространству L^p.

Отметим также, что структура устранимых особых множеств плюрисубгармонических в $\mathbb{C}^n$ функций рассмотрены в работах У. Сегрела [19], Е. Чирки [20] и для голоморфных функций многих переменных из класса $L^{2,1}_{loc}(G)$ — в недавней работе Ж. Рихентауса [24].

Изучение устранимых особых множеств сильно m-субгармонических функций (sh_m) показало, что здесь требуется исследовать структуру особых множеств для α-субгармонических функций. В этом направлении в статье А. Садуллаева, Б. И. Абдуллаева и Р. А. Шарипова [16] была доказана устранимость замкнутого полярного множества, т. е. множества нулевой ньютоновой емкости для класса ограниченных сверху сильно m-субгармонических (sh_m) функций $(1\leqslant m\leqslant n)$. Ниже мы изучим структуру устранимых особенностей некоторых классов α-субгармонических функций (раздел 7). Для этой цели в разделе 6 вводится емкостная величина $C_{q,l}$-емкости, в терминах которой описывается метрическая структура устранимых особых множеств α-субгармонических функций. В разделах 2–5 изучаются свойства класса α-субгармонических функций, приводятся различные их определения.

2. Определение α-субгармонических функций

Пусть α — произвольная замкнутая, строго положительная дифференциальная форма бистепени $(n-1,n-1)$ в области $D\subset\mathbb{C}^n$:

$$\alpha=\left(\frac{i}{2}\right)^{n-1}\sum_{j,k=1}^{n}\alpha_{jk}(z)dz\,[j]\wedge d\overline{z}\,[k]\,,\ \alpha_{jk}(z)\in C^1\,(D)\,,\ \ d\alpha=0. \tag{2.1}$$

Строго положительность α означает, что для любой компактной области $G\Subset D$ существует число $\varepsilon>0$ такое, что дифференциальная форма $\alpha-\varepsilon\beta^{n-1}\geqslant 0$.

Определение 2.1 (см. [6]). Дважды гладкая функция $u(z)\in C^2(D)$ называется *α-субгармонической* в области $D\subset\mathbb{C}^n$, если дифференциальная форма $dd^cu\wedge\alpha\geqslant 0$ в D. Функция $u(z)\in L^1_{loc}(D)$ называется *α-субгармонической* в области $D\subset\mathbb{C}^n$, если

1. она полунепрерывна сверху в D, т. е. $u\left(z^0\right)\geqslant\overline{\lim\limits_{z\to z^0}}\,u\left(z\right),\ \forall\,z^0\in D$;
2. оператор $dd^cu\wedge\alpha$ положителен в обобщенном смысле, т. е.

$$\int u\left(z\right)\alpha\left(z\right)\wedge dd^c\omega\left(z\right)\geqslant 0,\ \forall\omega\in F\left(D\right),\ \omega\geqslant 0.$$

Класс α-субгармонических функций обозначается через $\alpha-sh(D)$, причем для удобства включаем в этот класс и функцию $u(z)\equiv-\infty$. Для $\alpha=\beta^{n-1}=\left(dd^c\left|z\right|^2\right)^{n-1}$ мы будем иметь классические субгармонические функции. Заметим, что $dd^cu\wedge\beta^{n-1}=(n-1)!\Delta udV$. При $n=1$ на комплексной плоскости α-субгармоничность функции эквивалентна обычной субгармоничности. Они хорошо изучены, и мы опускаем этот случай и считаем ниже, что $n \geqslant 2$.

Определение 2.2. Дважды гладкая в области $D \subset \mathbb{C}^n$ функция $u(z) \in C^2(D)$ называется *α-гармонической*, если $dd^c u \wedge \alpha = 0$ в D.

В работе М. Ваисовой [6] для строго положительной, замкнутой дифференциальной формы α бистепени $(n-1, n-1)$ показано, что оператор $dd^c u \wedge \alpha$ является равномерно эллиптическим оператором в D.

Аналогично оператору Лапласа Δu определим и запишем оператор $\Delta_\alpha u$ в вещественной форме пространства $\mathbb{R}^{2n}(x_1, \ldots, x_{2n})$, $z_j = x_j + ix_{n+j}$. Для любой дважды гладкой функции $u(z) \in C^2(D)$ представим $dd^c u \wedge \alpha$ в виде

$$dd^c u \wedge \alpha = \left[\frac{i}{2}\sum_{j,k=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial z_j \partial \overline{z}_k} dz_j \wedge d\overline{z}_k\right] \wedge \left[\left(\frac{i}{2}\right)^{n-1} \sum_{j,k=1}^{n} \alpha_{jk}(z)\, dz[j] \wedge d\overline{z}[k]\right] =$$

$$= \left(\frac{i}{2}\right)^{n} \sum_{j,k=1}^{n} \alpha_{jk}(z)\, \frac{\partial^2 u}{\partial z_j \partial \overline{z}_k} dz \wedge d\overline{z} = \left[\sum_{j,k=1}^{n} \alpha_{jk}(z)\, \frac{\partial^2 u}{\partial z_j \partial \overline{z}_k}\right] \left[\left(\frac{i}{2}\right)^{n} dz \wedge d\overline{z}\right] =$$

$$= \left[\sum_{j,k=1}^{n} \alpha_{jk}(z)\, \frac{\partial^2 u}{\partial z_j \partial \overline{z}_k}\right] dV.$$

Заметим, что если обозначить $\mathcal{D}_j = \dfrac{\partial}{\partial x_j}$, $j = \overline{1, 2n}$, то

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z_j \partial \overline{z}_k} = \left(\frac{\partial}{\partial x_j} - i\frac{\partial}{\partial x_{n+j}}\right)\left(\frac{\partial}{\partial x_k} + i\frac{\partial}{\partial x_{n+k}}\right) u(z) = (\mathcal{D}_j - i\mathcal{D}_{n+j})(\mathcal{D}_k + i\mathcal{D}_{n+k})\, u(z).$$

Следовательно,

$$dd^c u \wedge \alpha = \left[\sum_{j,k=1}^{n} \alpha_{jk}(z)\, \frac{\partial^2 u}{\partial z_j \partial \overline{z}_k}\right] dV = \left[\sum_{j,k=1}^{n} \alpha_{jk}(z)\, (\mathcal{D}_j - i\mathcal{D}_{n+j})(\mathcal{D}_k + i\mathcal{D}_{n+k})\, u(z)\right] dV.$$

Положим

$$\Delta_\alpha u = \sum_{j,k=1}^{n} \alpha_{jk}(z)\, (\mathcal{D}_j - i\mathcal{D}_{n+j})(\mathcal{D}_k + i\mathcal{D}_{n+k})\, u(z).$$

Теорема 2.1. *Если α-строго положительная, замкнутая дифференциальная форма бистепени $(n-1, n-1)$ в области D, то оператор $\Delta_\alpha u$ является самосопряженным оператором.*

Доказательство. Мы представим оператор $\Delta_\alpha u$ в виде

$$\Delta_\alpha u = \sum_{j,k=1}^{2n} a_{jk} \frac{\partial^2 u}{\partial x_j \partial x_k},$$

где

$$a_{jk} = \begin{cases} (-1)^{j+k}\mathrm{Re}\alpha_{jk}(z), & 1 \leqslant j \leqslant n,\ 1 \leqslant k \leqslant n, \\ (-1)^{j+k}\mathrm{Im}\alpha_{j,k-n}(z), & 1 \leqslant j \leqslant n,\ n+1 \leqslant k \leqslant 2n, \\ (-1)^{j+k}\mathrm{Im}\alpha_{j-n,k}(z), & n+1 \leqslant j \leqslant 2n,\ 1 \leqslant k \leqslant n, \\ (-1)^{j+k}\mathrm{Re}\alpha_{j-n,k-n}(z), & n+1 \leqslant j \leqslant 2n,\ n+1 \leqslant k \leqslant 2n. \end{cases} \tag{2.2}$$

Так как $a_{jk} \in C^1(D)$, то оператору Δ_α можно придать вид

$$\Delta_\alpha u = \sum_{j,k=1}^{2n} \frac{\partial}{\partial x_k}\left(a_{jk}\frac{\partial u}{\partial x_j}\right) - \sum_{j=1}^{2n}\left(\sum_{k=1}^{2n} \frac{\partial a_{jk}}{\partial x_k}\right)\frac{\partial u}{\partial x_j}. \tag{2.3}$$

Тогда оператор

$$\Delta_\alpha^* \vartheta = \sum_{j,k=1}^{2n} \frac{\partial}{\partial x_k}\left(a_{jk}\frac{\partial \vartheta}{\partial x_j}\right) + \sum_{j=1}^{2n} \frac{\partial}{\partial x_j}\left[\left(\sum_{k=1}^{2n} \frac{\partial a_{jk}}{\partial x_k}\right)\vartheta\right] \tag{2.4}$$

называется *сопряженным оператором* (см. [14, с. 18-19]), и если $\Delta_\alpha^* = \Delta_\alpha$, то оператор называется *самосопряженным*.

Как видно из определения, для самосопряженности оператора Δ_α достаточно выполнения условия

$$\sum_{k=1}^{2n} \frac{\partial a_{jk}}{\partial x_k} = 0, \quad \forall\, j = \overline{1, 2n}.$$

Чтобы доказать эти равенства, воспользуемся замкнутостью формы α. Действительно, если $d\alpha = 0$, то $\partial\alpha = \bar\partial\alpha = 0$. С другой стороны,

$$\bar\partial\alpha = \bar\partial\left(\left(\frac{i}{2}\right)^{n-1} \sum_{j,k} \alpha_{jk}(z)\, dz[j] \wedge d\bar z[k]\right) = \left(\frac{i}{2}\right)^{n-1} \sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{k=1}^{n} (-1)^{n+k-2} \frac{\partial \alpha_{jk}(z)}{\partial \bar z_k}\right) dz[j] \wedge d\bar z = 0.$$

Следовательно,

$$\sum_{k=1}^{n} (-1)^{n+k} \frac{\partial \alpha_{jk}(z)}{\partial \bar z_k} = 0.$$

Переходя к вещественным координатам, получим

$$\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} (-1)^{n+k}\left(\frac{\partial \alpha_{jk}(z)}{\partial x_k} + i\frac{\partial \alpha_{jk}(z)}{\partial x_{n+k}}\right) = 0,$$

или

$$\sum_{k=1}^{2n} \frac{\partial a_{jk}}{\partial x_k} = 0, \quad \forall j = \overline{1, 2n}. \tag{2.5}$$

Теперь возьмем произвольные функции $u, \vartheta \in C^2(D)$ и рассмотрим разность $u\Delta_\alpha\vartheta - \vartheta\Delta_\alpha^* u$. Учитывая соотношения (2.5) получим

$$u\Delta_\alpha\vartheta - \vartheta\Delta_\alpha^* u = \sum_{j,k=1}^{2n} \frac{\partial}{\partial x_k}\left[a_{jk}\left(u\frac{\partial\vartheta}{\partial x_j} - \vartheta\frac{\partial u}{\partial x_j}\right)\right] + \sum_{j=1}^{2n}\frac{\partial}{\partial x_j}\left[\left(\sum_{k=1}^{2n}\frac{\partial a_{jk}}{\partial x_k}\right) u\,\vartheta\right] =$$

$$= \sum_{k=1}^{2n}\frac{\partial a_{jk}}{\partial x_k}\cdot\sum_{j=1}^{2n}\left(u\frac{\partial\vartheta}{\partial x_j} - \vartheta\frac{\partial u}{\partial x_j}\right) + \sum_{j,k=1}^{2n} a_{jk}\left(\frac{\partial u}{\partial x_k}\cdot\frac{\partial\vartheta}{\partial x_j} + u\frac{\partial^2\vartheta}{\partial x_j\partial x_k} - \frac{\partial\vartheta}{\partial x_k}\cdot\frac{\partial u}{\partial x_j} - \vartheta\frac{\partial^2 u}{\partial x_j\partial x_k}\right) =$$

$$= \sum_{j,k=1}^{2n} a_{jk}\left(u\frac{\partial^2\vartheta}{\partial x_j\partial x_k} - \vartheta\frac{\partial^2 u}{\partial x_j\partial x_k}\right) = u\Delta_\alpha\vartheta - \vartheta\Delta_\alpha u.$$

Отсюда в силу произвольности функции ϑ следует, что $\Delta_\alpha^* u = \Delta_\alpha u$, т. е. оператор Δ_α является самосопряженным оператором. □

Так как $dd^c u \wedge \alpha$ является эллиптическим оператором второго порядка, то мы можем применять общую теорию эллиптических операторов. В частности, если коэффициенты $\alpha_{jk} \in C^{l+\lambda}(D)$, где $C^{l+\lambda}$ — класс l-раз дифференцируемых функций, причем l-е частные производные принадлежат классу Гельдера Lip_λ, $0 < \lambda < 1$, то решение уравнения $dd^c u \wedge \alpha = 0$ существует и принадлежит классу $C^{l+2+\lambda}(D)$ (см. [5, с. 143-144]).

3. Представление Рисса

Согласно теории эллиптических операторов, самосопряженный оператор $dd^c u \wedge \alpha$ имеет *симметрическое* фундаментальное решение $K_\alpha(z, w)$, которое обладает следующими свойствами (см. [6]):

а) $K_\alpha(z, w) \in C^{2+\lambda}(D \setminus \{w\})$, $0 < \lambda < 1$, $K_\alpha(w, w) = -\infty$ (напомним, что $\alpha \in C^1(D)$);
б) $K_\alpha(z, w)$ является α-субгармонической функцией в D, причем она α-гармоническая при $z \neq w$;
в) существует константы $c_1 > 0$ и $c_2 > 0$ такие, что

$$\frac{c_1}{|z - w|^{2n-2}} \leqslant |K_\alpha(z, w)| \leqslant \frac{c_2}{|z - w|^{2n-2}}, \quad w \in D,\ z \in B(w, r) \Subset D. \tag{3.1}$$

Если $u(z)$ — α-субгармоническая функция в области D, то по определению, оператор $dd^c u \wedge \alpha \geqslant 0$ в обобщенном смысле, т. е. обобщенная функция

$$dd^c u\,(z) \wedge \alpha\,(z)\,(\omega) = \int u\,(z)\ \alpha\,(z) \wedge dd^c \omega\,(z) \geqslant 0,\ \forall \omega \in F\,(D)\,,\ \omega \geqslant 0.$$

Следовательно, положительная обобщенная функция $dd^c u \wedge \alpha$ является борелевской мерой в области D, $dd^c u \wedge \alpha = \mu$. Это означает, что $dd^c u\,(z) \wedge \alpha\,(z)\,(\omega) = \int \omega\,(z)\,d\mu,\ \forall \omega \in F\,(D)$. Эта мера называется *ассоциированной мерой* с функцией $u\,(z)$.

Теорема 3.1. *Для любого подобласти $G \Subset D$ имеет место представление*

$$u(z) = \int\limits_G K_\alpha\,(z,w)\,d\mu\,(w) + g(z), \tag{3.2}$$

где $\mu = dd^c u \wedge \alpha$ и $g(z)$ — α-гармоническая функция в G.

4. Функция Грина и интеграл Пуассона для α-субгармонических функций

Пусть функции u и ϑ дважды непрерывно дифференцируемы на замыкании ограниченной области $D \subset \mathbb{C}^n$ с гладкой границей ∂D. Нетрудно видеть, что

$$\vartheta\,(z)\,\Delta_\alpha u\,(z) - u\,(z)\,\Delta_\alpha \vartheta\,(z) = \sum_{j,k=1}^{2n} \frac{\partial}{\partial x_k}\left[a_{jk}\,(z)\left(\vartheta\,(z)\,\frac{\partial u\,(z)}{\partial x_j} - u\,(z)\,\frac{\partial \vartheta\,(z)}{\partial x_j}\right)\right].$$

Следовательно, формула Грина с оператором Δ_α принимает вид (см. [14])

$$\int\limits_D \left(\vartheta\,(z)\,\Delta_\alpha u\,(z) - u\,(z)\,\Delta_\alpha \vartheta\,(z)\right) dV\,(z) = \int\limits_{\partial D} a(\xi)\left(\vartheta\,(\xi)\,\frac{\partial u}{\partial \nu}\,(\xi) - u\,(\xi)\,\frac{\partial \vartheta}{\partial \nu}\,(\xi)\right) d\sigma(\xi), \tag{4.1}$$

где $\nu(\xi) = (\nu_1(\xi), \nu_2(\xi), \ldots, \nu_{2n}(\xi))$ — внешняя нормаль к границе ∂D в точки ξ, а $\dfrac{\partial u}{\partial \nu}$ и $\dfrac{\partial \vartheta}{\partial \nu}$ — производные от функций u и ϑ, соответственно, по направлению нормали ν, а функция $a(\xi)$ определяется формулой

$$a(\xi) = \left[\sum_{j=1}^{2n}\left(\sum_{k=1}^{2n} a_{jk}(\xi)\nu_k(\xi)\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}. \tag{4.2}$$

Предположим теперь, что D является α-регулярной (например, с гладкой границей) областью. α-Регулярность области означает, что существует функция Грина $G_\alpha\,(z,w)\,,\ (z,w) \in D \times D$, обладающая (при фиксированном $w \in D$) следующими свойствами (см. [4, 23]):

а) $G_\alpha(z,w) \in C\left(\bar{D} \setminus \{w\}\right),\quad G_\alpha(w,w) = -\infty$;
б) $G_\alpha(z,w) < 0$, $\forall\, z, w \in D$ и $G_\alpha(z,w\,)|_{\partial D} = 0$;
в) $G_\alpha(z,w)$ является α-субгармонической функцией в D, причем она α-гармоническая при $z \neq w$;
г) разность $G_\alpha(z,w) - K_\alpha(z,w)$ ограничена в некоторой окрестности точки $w \in D$;
д) функция Грина $G_\alpha(z,w)$ симметрична относительно точек z и w, т. е. $G_\alpha(z,w) = G_\alpha(w,z)$ для любых $z, w \in D$ (см. [14, с. 28]).

Функция $P_\alpha(z,\xi) = a(\xi)\left.\dfrac{\partial G_\alpha(z,w)}{\partial \nu}\right|_{w=\xi}$, где $z \in D$ и $\xi \in \partial D$, существует и называется *ядром Пуассона*. Ядро Пуассона $P_\alpha(z,\xi)$ является α-гармонической по $z \in D$ при фиксированном $\xi \in \partial D$ и непрерывной по $\xi \in \partial D$ при фиксированном $z \in D$ функцией. Из свойства б) функции Грина вытекает, что $P_\alpha(z,\xi) \geqslant 0$. Кроме того, всякая α-субгармоническая функция в некоторой окрестности замыкания $\bar{D}$ функция $u(z)$ представляется в виде

$$u(z) = \int\limits_D G_\alpha(z,w)d\mu\,(w) + \int\limits_{\partial D} P_\alpha(z,\xi)u(\xi)d\sigma(\xi),\ z \in D. \tag{4.3}$$

Отметим, что формула

$$\vartheta(z)=\int\limits_{\partial D} P_\alpha(z,\xi)\varphi(\xi)d\sigma(\xi) \tag{4.4}$$

для заданной функции $\varphi(\xi)\in C(\partial D)$ дает нам решение задачи Дирихле

$$\Delta_\alpha\vartheta=0,$$
$$\vartheta|_{\partial D}=\varphi.$$

В частности, если фунция $u(z)$ α-гармоническая и непрерывная вплоть до границы области D, то

$$u(z)=\int\limits_{\partial D} P_\alpha(z,\xi)u(\xi)d\sigma(\xi).$$

5. Эквивалентные определения α-субгармонических функций

С помощью интегральных представлений (4.3) мы можем вводить понятие α-субгармоничности по-другому.

Определение 5.1. Функция $u(z)$ называется *α-субгармонической* в области D, если выполняются следующие условия:

1. $u(z)$ полунепрерывна сверху в области D;
2. для любого шара $B\Subset D$ справедливо неравенство

$$u(z)\leqslant \int\limits_{\partial B(z^0,r)} P_\alpha(z,\xi)u(\xi)d\sigma(\xi),\ \forall z\in B.$$

Здесь $P_\alpha(z,\xi)$ — ядро Пуассона для шара B.

Теорема 5.1. *Определение* 2.1 *эквивалентно определению* 5.1.

Из этой теоремы легко вытекает, что функция $u: D\to[-\infty,\infty)$ является α-субгармонической в области D тогда и только тогда, когда она полунепрерывна сверху в D и для любого шара $B\Subset D$ и любой α-гармонической в B и непрерывной в $\bar B$ функции ϑ, удовлетворяющей условию $\vartheta\geqslant u$ на ∂B, следует, что $\vartheta\geqslant u$ в B.

Такую функцию ϑ будем называть *α-гармонической мажорантой* функции u для шара B.

Доказательство. Согласно формуле (4.3) из определения 2.1 легко следует определение 5.1. Нам остается только показать обратное, т. е. что из определения 5.1 следует определение 2.1.

Для этого сначала предположим, что $u(z)\in C^2(D)$, и для любого шара $B(z^0,r)\Subset D$ напишем неравенство

$$u(z)\leqslant \int\limits_{\partial B(z^0,r)} P_\alpha(z,\xi)u(\xi)d\sigma(\xi),\ z\in B(z^0,r).$$

Если в некоторой точке $z=\xi$ выполняется $dd^cu(z)\wedge\alpha(z)|_{z=\xi}<0$, то в силу непрерывности $dd^cu(z)\wedge\alpha(z)<0$ в некоторой окрестности $B=B(\xi,\delta),\ \delta>0$. Так как, кроме того, $G_\alpha(z,w)<0$, то согласно формуле (4.3) получим

$$u(z)=\int\limits_B G_\alpha(z,w)d\mu(w)+\int\limits_{\partial B} P_\alpha(z,\xi)u(\xi)d\sigma(\xi)>\int\limits_{\partial B} P_\alpha(z,\xi)u(\xi)d\sigma(\xi),$$

что противоречит определению 5.1.

Пусть теперь $u(z)\in L^1_{loc}(D)$ — произвольная функция. При помощи стандартной свертки (см., например, [15]) определим аппроксимацию $u_j(z)$:

$$u_j(z)=\int u(z+w)K_{\frac1j}(w)dV(w),$$

где $K_{\frac1j}(z)\in C^\infty(\mathbb{C}^n)$, $\operatorname{supp}K_{\frac1j}=B\left(0,\ \frac1j\right)$, причем $\int K_{\frac1j}(z)dV=1$. Тогда

$$u_j(z)\in\alpha-sh\cap C^\infty\left(D_{\frac1j}\right),$$

где $D_{\frac{1}{j}} = \left\{ z \in D : \ \rho\left(z, \partial D\right) > \frac{1}{j} \right\}$, и $\|u_j(z) - u(z)\|_{L^1_{loc}} \to 0$ при $j \to \infty$. Так как функция $u(z)$ и последовательность $u_j(z)$ локально равномерно ограничены сверху, то по теореме Лебега

$$\int u(z)\alpha(z) \wedge dd^c\omega(z) = \lim_{j\to\infty} \int u_j(z)\alpha(z) \wedge dd^c\omega(z) = \lim_{j\to\infty} \int dd^c u_j(z) \wedge \alpha(z)\omega(z) \geqslant 0, \ \ \forall \omega \geqslant 0.$$

Это означает, что $u(z)$ — α-субгармоническая функция по определению 2.1. □

Следующее определение α-субгармонических функций является более простым и удобным в употреблении.

Определение 5.2. Функция $u(z)$, заданная в области D, называется *α-субгармонической*, если выполняются следующие условия:

1. $u(z)$ полунепрерывна сверху в области D;
2. для любых $z^0 \in D$ и достаточно малых $r > 0$: $B(z^0, r) \Subset D$, имеет место неравенство

$$u(z^0) \leqslant \int\limits_{\partial B(z^0,r)} P_\alpha(z^0, \xi) u(\xi) d\sigma(\xi).$$

Ясно, что из определения 5.1 тривиальным образом вытекает определение 5.2. Для обратного утверждения мы воспользуемся следующим принципом максимума.

Теорема 5.2 (принцип максимума). *Если $u(z) \not\equiv const$ и α-субгармонична в смысле определения 5.2 в области $D \subset \mathbb{C}^n$ функция, то*

$$u(z) < \sup_{w\in D} u(w), \ \forall z \in D,$$

т. е. на компактных подмножествах $G \Subset D$ функция достигает своего максимума только на границе ∂G.

В самом деле, предположим, что существует точка $z^0 \in D : u(z^0) = \sup\limits_{w\in D} u(w)$. Обозначим через $M = \left\{ z \in D : \ u\left(z\right) = u\left(z^0\right) \right\}$. Тогда $M \neq \varnothing$, ибо $z^0 \in M$. Оно замкнуто в D, ибо $M = \left\{ z \in D : \ u\left(z\right) \geqslant u\left(z^0\right) \right\}$. Остается показать, что оно открытое. Если существует $w^0 \in M$, являющаяся граничной (не внутренней) точкой, то для достаточно маленьких $r > 0$

$$u\left(z^0\right) = u\left(w^0\right) \leqslant \int\limits_{\partial B(w^0,r)} P_\alpha(w^0, \xi) u(\xi) d\sigma(\xi) < u\left(z^0\right),$$

ибо в последнем интеграле $P_\alpha(w^0, \xi) \ \geqslant \ 0$, $\int\limits_{\partial B(w^0,r)} P_\alpha(w^0, \xi) d\sigma(\xi) \ = \ 1$ и из полунепрерывности сверху функции $u(z)$, а также из $w^0 \in \partial M$, вытекает, что открытое множество $\left\{ \xi \in \partial B\left(w^0, r\right) : \ u\left(\xi\right) < u\left(z^0\right) \right\} \neq \varnothing$.

Отсюда следует, что $M = D$ и $u\left(z\right) \equiv u\left(z^0\right)$.

Следствие 5.1. *Если функция $u : D \to [-\infty, \infty)$ является α-субгармонической в области D в смысле определения 5.2, то для любого шара $B \Subset D$ и любой α-гармонической в B и непрерывной в $\bar{B}$ функции ϑ, удовлетворяющей условию $\vartheta \geqslant u$ на ∂B, следует, что $\vartheta \geqslant u$ в B.*

Доказательство легко вытекает, если мы применяем теорему 5.2 для разности $u - \vartheta$. Более того, такая функция $u(z)$ непременно удовлетворяет неравенству

$$u(z) \leqslant \int\limits_{\partial B(z^0,r)} P_\alpha(z, \xi) u(\xi) d\sigma(\xi) \ \forall z \in B,$$

ибо функция $\vartheta\left(z\right) = \int\limits_{\partial B(z^0,r)} P_\alpha(z, \xi) u(\xi) d\sigma(\xi)$ является α-гармонической в B и $\vartheta|_{\partial B} \geqslant u|_{\partial B}$. Все это показывает, что из определения 5.2 следует определение 5.1.

В заключении пункта отметим, что α-субгармонические функции обладают всеми элементарными свойствами, присущими субгармоническим функциям, и их формулировки мы опускаем.

6. $C_{q,l}$-ЕМКОСТИ

Рассмотрим потенциал Рисса:

$$U_l^{\mu}(z) = \int \frac{d\mu(w)}{|z-w|^{2n-l}}, \ z \in \mathbb{C}^n,$$

где $0 < l < 2n$, μ — положительная борелевская мера с компактным носителем $\operatorname{supp}\mu \Subset \mathbb{C}^n$.

Для произвольного компактного множества $E \subset \mathbb{C}^n$ емкостная величина определяется следующим образом.

Определение 6.1 (см. [12, 13]).

$$C_{q,l}(E) = \sup_{\mu} \mu(E), \ \ 1 < q < +\infty, \ \ ql < 2n,$$

где верхняя грань берется по всем положительным, сосредоточенным на множестве E борелевским мерам, удовлетворяющим условию

$$\left\|U_l^{\mu}(z)\right\|_p = \left[\int\limits_{\mathbb{C}^n} \left|U_l^{\mu}(z)\right|^p dV\right]^{\frac{1}{p}} \leqslant 1, \ \ \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

Если $ql \geqslant 2n$, то потенциал Рисса $U_l^{\mu}(z) \notin L^p(\mathbb{C}^n)$. Для определения емкости $C_{q,l}(E)$ в этом случае мы предполагаем, что $E \subset B(0,1)$, где $B(0,1) = \{z \in \mathbb{C}^n : \ |z| \leqslant 1\}$, и определяем емкость как

$$C_{q,l}(E) = \sup \mu(E), \ \ 1 < q < +\infty,$$

где верхняя грань берется по всем положительным, сосредоточенным на множестве E борелевским мерам, удовлетворяющим условию

$$\left\|U_l^{\mu}(z)\right\|_p = \left[\int\limits_{B(0,1)} \left|U_l^{\mu}(z)\right|^p dV\right]^{\frac{1}{p}} \leqslant 1, \ \ \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

Отметим, что при $ql > 2n$ емкость $C_{q,l}(E) = 0$ тогда и только тогда, когда множество E пусто (см. [12, 13]).

При $ql \leqslant 2n$ множества $C_{q,l}$-емкости нуль, $C_{n-s,q}(E) = 0$, имеют следующие метрические свойства (см. [12]):

а) если $ql < 2n$, $0 < \lambda < 2n - ql$ и $H_\lambda(E) = 0$, то $C_{q,l}(E) = 0$;
б) если $ql < 2n$, $2n - ql < \lambda$ и $H_\lambda(E) > 0$, то $C_{q,l}(E) > 0$;
в) если $ql = 2n$, $\ \varphi(r) = |\ln r|^{1-q}$, $\ q > 1$ и $H_\varphi(E) < \infty$, то $C_{q,l}(E) = 0$;
г) если $ql = 2n$, $\ \lambda > 0$ и $H_\lambda(E) > 0$, то $C_{q,l}(E) > 0$.

Из а), б), в) и г) следует, что размерность множества нулевой $C_{q,l}$-емкости равна $2n - ql$.

7. УСТРАНИМЫЕ ОСОБЕННОСТИ α-СУБГАРМОНИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

Определение 7.1. Множество $E \subset D$ называется *α-полярным* множеством в области D, если существует α-субгармоническая в D функция $u(z)$, $z \in \mathbb{C}^n$, такая, что $u \not\equiv -\infty$ и $u(z)\big|_E = -\infty$.

Теорема 7.1. *Пусть E — компактное подмножество области $D \subset \mathbb{C}^n$, $n \geqslant 2$. Множество E устранимо для всех α-субгармонических в $D \backslash E$, локально ограниченных сверху в D функций тогда и только тогда, когда E α-полярно в D.*

Доказательство. Необходимость. Предположим обратное: пусть существует не α-полярный компакт E, который устраним для всех α-субгармонических в $D\backslash E$ и локально ограниченных сверху в D функций. Тогда существует положительная мера μ с носителем на E такая, что потенциал

$$u(z) = -\int\limits_E K_\alpha(z,w)d\mu$$

является ограниченным сверху и α-(суб)гармоническим вне E (см. [7]). Но эта функция не является всюду α-субгармонической, т. е. компакт E не является устранимым. Мы пришли к противоречию, которое указывает на то, что устранимое особое множество E всегда должно быть α-полярным.

Достаточность. Сначала для каждого $z \in E \cap D$ положим $u(z) = \overline{\lim\limits_{\substack{\xi\to z\\ \xi\notin E}}} u(\xi)$. Ясно, что при таком определении на множестве E функция $u(z)$ становится полунепрерывной сверху функцией в D. Теперь покажем, что для произвольного шара $B = B(z^0, r) \Subset D$ имеет место неравенство

$$u(z) \leqslant \int\limits_{\partial B} P_\alpha(z,w)u(w)d\sigma(w) \quad \forall z \in B. \tag{7.1}$$

Так как множество E α-полярное, оно имеет нулевую $(2n-1)$-мерную меру. Следовательно, значение интеграла Пуассона (7.1) не зависит от значений функции $u(w)$, $w \in \partial B \cap E$.

Фиксируем α-субгармоническую функцию $\omega(z), z \in D$, такую, что $\omega(z) \not\equiv -\infty$, $\omega(z)|_E = -\infty$. Положим $\tilde{E} = \{z \in D: \ \omega(z) = -\infty\}$, $\tilde{E} \supset E$. Без ограничения общности считаем, что $\omega(z) < 0$ в заданном шаре $B \Subset D$.

И наконец, построим на сфере ∂B последовательность непрерывных функций $u_j(\xi)$, такую, что $u_j(\xi) \geqslant u_{j+1}(\xi)$, $u_j(\xi) \downarrow u(\xi)$.

Рассмотрим функцию

$$V_\varepsilon^{(j)}(z) = u(z) + \varepsilon\omega(z) - \vartheta_j(z), \ \ \varepsilon > 0, \ z \in B,$$

где

$$\vartheta_j(z) = \int\limits_{\partial B} P_\alpha(z,\xi)u_j(\xi)d\sigma(\xi), \tag{7.2}$$

Ясно, что функция $V_\varepsilon^{(j)}(z)$ является α-субгармонической вне E, и так как $V_\varepsilon^{(j)}(z)\Big|_E = -\infty$, то из определения 5.1 $V_\varepsilon^{(j)}(z)$ является α-субгармонической и в точках E, т. е. $V_\varepsilon^{(j)}(z) \in \alpha - sh\,(B)$. Кроме того, во всех точках $\psi \in \partial B(z^0, r)$ выполняется неравенство

$$V_\varepsilon^{(j)}(\xi) \leqslant u(\xi) - \vartheta_j(\xi) \leqslant u_j(\xi) - \vartheta_j(\xi) \leqslant 0.$$

Следовательно, $V_\varepsilon^{(j)}(z) \leqslant 0$ в шаре B, т. е. $u(z) + \varepsilon\omega(z) \leqslant \vartheta_j(z)$, $\ z \in B$. Для точек $z \notin \tilde{E}$, устремляя ε к нулю, заключаем, что $u(\xi) \leqslant \vartheta_j(\xi)$. Согласно полунепрерывности $u(z)$ и непрерывности $\vartheta_j(z)$, это неравенство остается верным для всех точек $\tilde{E} \supset E$. Наконец, при $j \to +\infty$ получим неравенство (7.1). □

Теорема 7.2. *Пусть E — компактное подмножество области $D \subset \mathbb{C}^n$, $n \geqslant 2$. Множество E устранимо для всех α-субгармонических в $D\backslash E$ функций $u(z)$ из класса $L^p_{loc}(D)$, $\dfrac{2n}{2n-2} \leqslant p < +\infty$, тогда и только тогда, когда емкость $C_{q,2}(E) = 0$, $q = \dfrac{p}{p-1}$.*

Теорема 7.3. *Пусть E — компактное подмножество области $D \subset \mathbb{C}^n$, $n \geqslant 2$. Множество E устранимо для всех α-субгармонических в $D\backslash E$ функций $u(z)$ из класса $L^{1,p}_{loc}(D)$, $\dfrac{2n}{2n-1} \leqslant p < +\infty$, тогда и только тогда, когда емкость $C_{q,1}(E) = 0$, $q = \dfrac{p}{p-1}$.*

Доказательство теоремы 7.2. *Необходимость.* Предположим противное, что существует компактное множество E, которое устранимо для всех α-субгармонических в $D\backslash E$ функций из класса

$L^p_{loc}(D)$, $\dfrac{2n}{2n-2} \leqslant p < +\infty$, причем $C_{q,2}(E) > 0$, $q = \dfrac{p}{p-1}$. Тогда по определению $C_{q,2}$ емкости существует положительная борелевская мера с носителем на E такая, что $\mu(E) > 0$ и потенциал

$$U^\mu(z) = \int \frac{d\mu(w)}{|z-w|^{2n-2}}$$

при $\dfrac{2n}{2n-2} \leqslant p < +\infty$ принадлежит классу $L^p_{loc}(D)$. Отсюда согласно оценке (3.1) получим, что α-потенциал

$$U^\mu_\alpha(z) = -\int K_\alpha(z,w)\, d\mu(w)$$

также принадлежит классу $L^p_{loc}(D)$, $\dfrac{2n}{2n-2} \leqslant p < +\infty$. Кроме того, α-потенциал $U^\mu_\alpha(z)$ является α-гармонической функцией в $D\backslash E$, но не является α-субгармонической, т. е. E не является устранимой. Это противоречие доказывает необходимость условия $C_{q,2}(E) = 0$.

Достаточность. Доказательство достаточности условия $C_{q,2}(E) = 0$ основывается на следующей лемме из работы В. Г. Мазья [11].

Лемма 7.1. *Пусть E — компактное подмножество области $D \subset \mathbb{R}^n$ ($D \subset \mathbb{C}^n \approx \mathbb{R}^{2n}$), и l — натуральное число. Тогда следующие утверждения равносильны*:

1. $C_{q,l}(E) = 0$;
2. *Множество основных функций $F(D\backslash E)$ плотно на множестве основных функций $F(D)$ по норме L^l_q.*

Предположим теперь, что $C_{q,2}(E) = 0$ и $u(z)$ — α-субгармоническая в $D\backslash E$ функция из класса $L^p_{loc}(D)$, $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$.

Рассмотрим в D функцию $\tilde{u}(z)$ такую, что

$$\tilde{u}(z) = \begin{cases} u(z) & \text{при} \quad z \in D\backslash E, \\ \varlimsup\limits_{\substack{\xi \to z \\ \xi \notin E}} u(z) & \text{при} \quad z \in E. \end{cases}$$

Покажем, что $\tilde{u}(z)$ является α-субгармоническим продолжением функции $u(z)$ на всем D.

Пусть $\psi(z)$ — положительная основная функция с носителям на D, а $\varphi_k(z)$ — последовательность положительных основных функций с носителем на $D\backslash E$, сходящаяся к $\psi(z)$ по норме L^2_q. Существование последовательности $\varphi_k(z)$ следует из леммы 7.1. Тогда имеет место неравенство

$$\left| \int\limits_D \tilde{u}(z)\, (dd^c(\psi(z) - \varphi_k(z))) \wedge \alpha \right| \leqslant c \cdot \left(\int\limits_{\operatorname{supp}\psi} |\tilde{u}(z)|^p\, dV \right)^{\frac{1}{p}} \cdot \|\psi(z) - \varphi_k(z)\|_{L^2_q},$$

где $c = const$. Из этого неравенства следует, что для любой положительной основной функции $\psi(z) \in F(D)$ имеет место

$$\lim_{k\to\infty} \int\limits_{D\backslash E} \tilde{u}(z)\, (dd^c\varphi_k(z)) \wedge \alpha = \int\limits_D \tilde{u}(z)\, (dd^c\psi(z)) \wedge \alpha \geqslant 0.$$

Отсюда следует, что функция $\tilde{u}(z)$ α-субгармоническая в D. □

Следствие 7.1. *Пусть E — множество из области $D \subset \mathbb{C}^n$, $n \geqslant 2$. Всякая α-гармоническая в $D\backslash E$ функция $u(z)$ из класса $L^p_{loc}(D)$, $\dfrac{2n}{2n-2} \leqslant p < +\infty$, α-гармонически продолжается в D тогда и только тогда, когда емкость $C_{q,2}(E) = 0$, $q = \dfrac{p}{p-1}$.*

Доказательство теоремы 7.3. *Необходимость.* Предположим, что существует компактное множество E, которое устранимо для класса α-субгармонических в $D\backslash E$ функций из класса $L^{1,p}_{loc}(D)$,

$\frac{2n}{2n-1} \leqslant p < +\infty$ и $C_{q,1}(E) > 0$, $q = \frac{p}{p-1}$. Тогда по определению емкости $C_{q,1}$ емкости существует положительная борелевская мера с носителем на E такая, что $\mu(E) > 0$ и потенциал

$$U^{\mu}(z) = \int \frac{d\mu(w)}{|z-w|^{2n-1}}$$

при $\frac{2n}{2n-1} \leqslant p < +\infty$ принадлежит классу $L^{1,p}_{loc}(D)$. Отсюда в силу оценки

$$\left| \frac{\partial K_{\alpha}(z,w)}{\partial z_j} \right| \leqslant \frac{const}{|z-w|^{2n-1}}, \quad j = \overline{1,n},$$

$z, w \in \mathbb{C}^n$ (см. [4]), следует, что α-потенциал

$$U^{\mu}_{\alpha}(z) = -\int K_{\alpha}(z,w)\, d\mu$$

также принадлежит классу $L^{1,p}_{loc}(D)$, $\frac{2n}{2n-1} \leqslant p < +\infty$. Кроме того, α-потенциал $U^{\mu}_{\alpha}(z)$ является α-гармоническим в $D\backslash E$, но не является α-субгармоническим, т. е. E не является устранимым. Это противоречие доказывает необходимость условия $C_{q,1}(E) = 0$.

Достаточность. Предположим теперь, что $C_{q,1}(E) = 0$ и $u(z)$ — α-субгармоническая в $D\backslash E$ функция из класса $L^{1,p}_{loc}(D)$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

Рассмотрим в D функцию $\tilde{u}(z)$ такую, что

$$\tilde{u}(z) = \begin{cases} u(z) & \text{при} \quad z \in D\backslash E, \\ \overline{\lim\limits_{\substack{\xi\to z \\ \xi\notin E}}}\, u(z) & \text{при} \quad z \in E. \end{cases}$$

Покажем, что $\tilde{u}(z)$ является α-субгармоническим продолжением функции $u(z)$ на всем D. Согласно лемме 7.1, мы берем произвольную положительную функцию $\psi(z) \in F(D)$ и последовательность положительных функций $\varphi_k(z) \in F(D\backslash E)$, сходящуюся к $\psi(z)$ по норме L^1_q. Тогда имеет место неравенство

$$\left| \int\limits_D \tilde{u}(z)\left(dd^c(\psi(z) - \varphi_k(z))\right) \wedge \alpha \right| \leqslant c \cdot \|\tilde{u}(z)\|_{L^{1,p}_{loc}(D)} \cdot \|\psi(z) - \varphi_k(z)\|_{L^1_q(D)},$$

где $c = const$. Из этого неравенства следует, что для любой положительной основной функции $\psi(z) \in F(D)$

$$\lim_{k\to\infty} \int\limits_{D\backslash E} \tilde{u}(z)\left(dd^c\varphi_k(z)\right) \wedge \alpha = \int\limits_D \tilde{u}(z)\left(dd^c\psi(z)\right) \wedge \alpha \geqslant 0.$$

Отсюда следует, что функция $\tilde{u}(z)$ — α-субгармоническая в D. □

Следствие 7.2. *Пусть E — компактное подмножество области $D \subset \mathbb{C}^n$, $n \geqslant 2$. Множество E устранимо для всех α-гармонических в $D\backslash E$ функций $u(z)$ из класса $L^{1,p}_{loc}(D)$, $\frac{2n}{2n-1} \leqslant p < +\infty$, тогда и только тогда, когда емкость $C_{q,1}(E) = 0$, $q = \frac{p}{p-1}$.*

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Абдуллаев Б., Имомкулов С.* Устранимые особенности субгармонических функций из класса L_p и L^1_p// Узб. мат. ж. — 1997. — № 4. — С. 10–14.
2. *Абдуллаев Б., Садуллаев А.* Теория потенциалов в классе m-субгармонических функций // Тр. МИАН. — 2012. — *279*. — С. 166–192.
3. *Абдуллаев Б.И., Ярметов Ж.Р.* Об особых множествах субрешений эллиптических операторов// Вестн. Крас. ГУ. — 2006. — № 9. — С. 74–80.
4. *Алимов Ш.А.* Дробные степени эллиптических операторов и изоморфизм классов дифференцируемых функций// Дифф. уравн. — 1972. — *8*, № 9. — С. 1609–1626.

5. *Берс Л., Джон Ф., Шехтер М.* Уравнения с частными производными. — М.: Мир, 1966.
6. *Ваисова М.* Теория потенциала в классе α-субгармонических функций// Узб. мат. ж. — 2016. — № 3. — С. 46–52.
7. *Ваисова М.* Емкость в классе α-субгармонических функций и ее свойства// Илм сарчашмалари. — 2018. — № 6. — С. 8–13.
8. *Долженко Е. П.* Об особых точках непрерывных гармонических функций// Изв. АН СССР. — 1964. — *28*, № 6. — С. 1251–1270.
9. *Карлесон Л.* Избранные проблемы теории исключительных множеств. — М.: Мир, 1971.
10. *Ландкоф Н. С.* Основы современной теории потенциала. — М.: Наука, 1966.
11. *Мазья В. Г.* Классы множеств и мер, связанные с теоремами вложения// В сб.: «Теоремы вложения и их приложения». — М.: Наука, 1970. — С. 142–159.
12. *Мазья В. Г., Хавин В. П.* Нелинейная теория потенциала// Усп. мат. наук. — 1972. — *27*, № 6. — С. 67–138.
13. *Мельников М. С., Синанян С. О.* Вопросы теории приближений функций одного комплексного переменного// Итоги науки и техн. Соврем. пробл. мат. — 1975. — *4*. — С. 143–250.
14. *Миранда К.* Уравнения с частными производными эллиптического типа. — М.: ИЛ, 1957.
15. *Садуллаев А.* Плюрисубгармонические функции// Соврем. пробл. мат. Фундам. направл. — 1985. — *8*. — С. 65–111.
16. *Садуллаев А., Абдуллаев Б., Шарипов Р.* Устранимые особенности ограниченных сверху $m-sh$ функций// Узб. мат. ж. — 2016. — № 3. — С. 118–124.
17. *Садуллаев А., Ярметов Ж. Р.* Устранимые особенности субгармонических функций класса Lip_α// Мат. сб. — 1995. — *186*, № 1. — С. 131–148.
18. *Хейман У., Кеннеди П.* Субгармонические функции. — М.: Мир, 1980.
19. *Cegrell U.* Sur les ensembles singuliers impropes des plurisubharmonic// C.R. Math. Acad. Sci. Paris. — 1975. — *281*. — С. 905–908.
20. *Chirka E. M.* On the removal of subharmonic singularities of plurisubharmonic functions// Ann. Polon. Math. — 2003. — *80*. — С. 113–116.
21. *Demailly J.-P.* Complex analytic and differential geometry. — Saint-Martin d'Héres: Universite de Grenoble I, 1997.
22. *Harve R., Polking J. C.* A notion of capacity which characterizes removable singularites// Trans. Am. Math. Soc. — 1968. — *169*. — С. 183–195.
23. *Littman W., Stampasshia G., Weinberger H. F.* Regular points for elliptic equations with discontinuous coefficients// Ann. Sc. Norm. Super. Pisa Cl. Sci. (3). — 1963. — *17*. — С. 43–77.
24. *Riihentaus J.* A removability results for holomorphic functions of several complex variables// J. Basic Appl. Sci. — 2016. — *12*. — С. 50–52.
25. *Shapiro V. L.* Subharmonic functions and Hausdorff measure// J. Differ. Equ. — 1978. — *27*, № 1. — С. 28–45.

Б. И. Абдуллаев
Ургенчский государственный университет им. Аль-Хорезми, Ургенч, Узбекистан
E-mail: abakhrom1968@mail.ru

С. А. Имомкулов
Ургенчский государственный университет им. Аль-Хорезми, Ургенч, Узбекистан
E-mail: sevdiyor_i@mail.ru

Р. А. Шарипов
Ургенчский государственный университет им. Аль-Хорезми, Ургенч, Узбекистан
E-mail: sharipovr80@mail.ru

DOI: 10.22363/2413-3639-2021-67-4-620-633 UDC 517.55

α-Subharmonic Functions

© 2021 **B. I. Abdullaev, S. A. Imomkulov, R. A. Sharipov**

Abstract. In this paper, we study the class of α-subharmonic functions. A number of important properties of α-subharmonic functions are proved, and an equivalent, more convenient definition of α-subharmonicity is given. The geometric structure of removable singularities for some classes of α-subharmonic functions is also described.

REFERENCES

1. B. Abdullaev and S. Imomkulov, “Ustranimye osobennosti subgarmonicheskikh funktsiy iz klassa L_p i L_p^1” [Removable singularities of subharmonic functions from the classes L_p and L_p^1], *Uzb. mat. zh.* [Uzb. Math. J.], 1997, No. 4, 10–14 (in Russian).
2. B. Abdullaev and A. Sadullaev, “Teoriya potentsialov v klasse m-cubgarmonicheskikh funktsiy” [Potential theory in the class of m-subharmonic functions], *Tr. MIAN* [Proc. Math. Inst. Russ. Acad. Sci.], 2012, **279**, 166–192 (in Russian).
3. B. I. Abdullaev and Zh. R. Yarmetov, “Ob osobykh mnozhestvakh subresheniy ellipticheskikh operatorov” [On singular sets of subsolutions of elliptic operators], *Vestn. Kras. GU* [Bull. Kras. State Univ.], 2006, No. 9, 74–80 (in Russian).
4. Sh. A. Alimov, “Drobnye stepeni ellipticheskikh operatorov i izomorfizm klassov differentsiruemykh funktsiy” [Fractional powers of elliptic operators and isomorphism of classes of differentiable functions], *Diff. uravn.* [Differ. Equ.], 1972, **8**, No. 9, 1609–1626 (in Russian).
5. L. Bers, F. John, and M. Schechter, *Uravneniya s chastnymi proizvodnymi* [Partial Differential Equations], Mir, Moscow, 1966 (Russian translation).
6. M. Vaisova, “Teoriya potentsiala v klasse α-subgarmonicheskikh funktsiy” [Potential theory in the class of α-subharmonic functions], *Uzb. mat. zh.* [Uzb. Math. J.], 2016, No. 3, 46–52 (in Russian).
7. M. Vaisova, “Emkost’ v klasse α-subgarmonicheskikh funktsiy i ee svoystva” [Capacity in the class of α-subharmonic functions and its properties], *Ilm sarchashmalari* [Sources of Knowledge], 2018, No. 6, 8–13 (in Russian).
8. E. P. Dolzhenko, “Ob osobykh tochkakh nepreryvnykh garmonicheskikh funktsiy” [On singular points of continuous harmonic functions], *Izv. AN CCSR* [Bull. Acad. Sci. USSR], 1964, **28**, No. 6, 1251–1270 (in Russian).
9. L. Karleson, *Izbrannye problemy teorii isklyuchitel’nykh mnozhestv* [Selected Problems of Exceptional Sets], Mir, Moscow, 1971 (Russian translation).
10. N. S. Landkof, *Osnovy sovremennoy teorii potentsiala* [Foundations of Modern Potential Theory], Nauka, Moscow, 1966 (in Russian).
11. V. G. Maz’ya, “Klassy mnozhestv i mer, svyazannye s teoremami vlozheniya” [Classes of sets and measures related to embedding theorems], In: *Teoremy vlozheniya i ikh prilozheniya* [Embedding Theorems and Their Applications], Nauka, Moscow, 1970, pp. 142–159 (in Russian).
12. V. G. Maz’ya and V. P. Khavin, “Nelineynaya teoriya potentsiala” [Nonlinear potential theory], *Usp. mat. nauk* [Progr. Math. Sci.], 1972, **27**, No. 6, 67–138 (in Russian).
13. M. S. Mel’nikov and S. O. Sinanyan, “Voprosy teorii priblizheniy funktsiy odnogo kompleksnogo peremennogo” [Questions of the theory of approximations of functions of one complex variable], *Itogi nauki i tekhn. Sovrem. probl. mat.* [Totals Sci. Tech. Contemp. Probl. Math.], 1975, **4**, 143–250 (in Russian).

14. K. Miranda, *Uravneniya s chastnymi proizvodnymi ellipticheskogo tipa* [Partial Differential Equations of Elliptic Type], IL, Moscow, 1957 (in Russian).
15. A. Sadullaev, "Plyurisubgarmonicheskie funktsii" [Plurisubharmonic functions], *Sovrem. probl. mat. Fundam. napravl.* [Contemp. Math. Fundam. Directions], 1985, **8**, 65–111 (in Russian).
16. A. Sadullaev, B. Abdullaev, and R. Sharipov, "Ustranimye osobennosti ogranichennykh sverkhu $m - sh$ funktsiy" [Removable singularities of upper-bounded $m - sh$ functions], *Uzb. mat. zh.* [Uzb. Math. J.], 2016, No. 3, 118–124 (in Russian).
17. A. Sadullaev and Zh. R. Yarmetov, "Ustranimye osobennosti subgarmonicheskikh funktsiy klassa Lip_α" [Removable singularities of subharmonic functions of the class Lip_α], *Mat. sb.* [Math. Digest], 1995, **186**, No. 1, 131–148 (in Russian).
18. W. Hayman and P. Kennedy, *Subgarmonicheskie funktsii* [Subharmonic Functions], Mir, Moscow, 1980 (Russian translation).
19. U. Cegrell, "Sur les ensembles singuliers impropes des plurisubharmonic," *C.R. Math. Acad. Sci. Paris*, 1975, **281**, 905–908.
20. E. M. Chirka, "On the removal of subharmonic singularities of plurisubharmonic functions," *Ann. Polon. Math.*, 2003, **80**, 113–116.
21. J.-P. Demailly, *Complex analytic and differential geometry*, Universite de Grenoble I, Saint-Martin d'Héres, 1997.
22. R. Harve and J. C. Polking, "A notion of capacity which characterizes removable singularites," *Trans. Am. Math. Soc.*, 1968, **169**, 183–195.
23. W. Littman, G. Stampasshia, and H. F. Weinberger, "Regular points for elliptic equations with discontinuous coefficients," *Ann. Sc. Norm. Super. Pisa Cl. Sci. (3)*, 1963, **17**, 43–77.
24. J. Riihentaus, "A removability results for holomorphic functions of several complex variables," *J. Basic Appl. Sci.*, 2016, **12**, 50–52.
25. V. L. Shapiro, "Subharmonic functions and Hausdorff measure," *J. Differ. Equ.*, 1978, **27**, No. 1, 28–45.

B. I. Abdullaev
Urgench State University named after Al-Khorezmi, Urgench, Uzbekistan
E-mail: abakhrom1968@mail.ru

S. A. Imomkulov
Urgench State University named after Al-Khorezmi, Urgench, Uzbekistan
E-mail: sevdiyor_i@mail.ru

R. A. Sharipov
Urgench State University named after Al-Khorezmi, Urgench, Uzbekistan
E-mail: sharipovr80@mail.ru