Современная математика. Фундаментальные направления. Том 67, № 4 (2021). С. 609–619
Contemporary Mathematics. Fundamental Directions. ISSN 2413-3639 (Print)

DOI: 10.22363/2413-3639-2021-67-4-609-619 УДК 517.911.5

ТЕОРЕМЫ СУЩЕСТВОВАНИЯ И ЕДИНСТВЕННОСТИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ПФАФФА С НЕПРЕРЫВНЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

© 2021 г. **А. А. АБДУГАНИЕВ, А. А. АЗАМОВ, А. О. БЕГАЛИЕВ**

Аннотация. В статье рассматриваются уравнения Пфаффа с непрерывными коэффициентами. Устанавливаются аналоги теоремы Пеано о существовании и теоремы Камке о единственности решения задачи Коши, предлагается метод приближенного решения задачи Коши для уравнения Пфаффа.

ОГЛАВЛЕНИЕ

1. Введение

В статье доказываются теоремы существования и единственности решения задачи Коши для уравнения Пфаффа с непрерывными коэффициентами. Отметим, что уравнение Пфаффа, а также другие переопределенные системы уравнений в частных производных, возникли в 19-ом веке [13, 19, 24] ввиду важных приложений к термодинамике, дифференциальной геометрии и теоретической механике [21, 34]. Однако за долгие годы чуть ли не единственным существенным результатом об уравнении Пфаффа оставалась теорема Фробениуса об интегрируемости [4, 20]. За последние десятилетия интерес к таким уравнениям снова возрождается в связи с новыми применениями в теории слоений [11] и теоретической физике [33], глубже стала изучаться теория линейных систем Пфаффа [18, 38]. Особый интерес вызывают алгебраические интегралы систем Пфаффа с полиномиальными коэффициентами [12, 14, 16, 31, 39]. В работах [22, 23] рассмотрена обратная задача для уравнения Пфаффа, а в работе [36] изучено поведение интегральных поверхностей около сингулярных кривых по аналогии с теорией особых точек динамических систем. Отметим также, что в свое время С. Лефшец использовал однородное полиномиальное уравнение Пфаффа для аналитического выражения продолжения векторного поля с плоскости $\mathbb{R}^2$ на сферу Пуанкаре [25]. В работе [10] предложена модификация уравнения Лефшеца для обеспечения проективности. О других приложениях уравнения Пфаффа см. работы [17, 32]. Теории уравнений Пфаффа (под названием многомерных дифференциальных уравнений) посвящена монография [2], содержащая обширную библиографию.

С точки зрения приложений к геометрии является естественным рассмотрение уравнений Пфаффа с гладкими коэффициентами. Вместе с тем в приложениях к термодинамическим процессам такое условие является слишком жестким, так как в неоднородных средах оно, как правило, не выполняется. В связи с этим были предприняты попытки исследовать уравнения с негладкими коэффициентами. А. И. Перовым дано обобщение условия Фробениуса, когда от коэффициентов уравнения требуется непрерывность по независимым переменным [5] с сохранением условия гладкости по неизвестной. В работах [28, 29] развит подход, основанный на теории обобщенных функций (распределений), который по самому существу пригоден только для линейных систем Пфаффа (о линейных системах Пфаффа см. также [3] и [2, гл. II]). В работе [27], посвященной исследованию единственности решения задачи Коши, система Пфаффа с непрерывными коэффициентами изучается посредством аппроксимации гладкими системами, удовлетворяющими критерию Фробениуса. В настоящей работе разрабатывается подход, основанный на преобразовании задачи Коши для уравнения Пфаффа к равносильной системе интегральных уравнений. Для уравнения в пространстве $\mathbb{R}^3$ этот подход изложен в [9]. Отметим, что результат [9] на случай систем более высоких размерностей не допускает непосредственного обобщения. Еще больших технических средств в этом плане требуют системы Пфаффа, в связи с чем в настоящей работе рассматриваются только уравнения Пфаффа. Основываясь на полученной системе интегральных уравнений, приводятся аналоги теоремы Пеано о существовании и теоремы Камке о единственности, а также схема Эйлера о приближенном решении задачи Коши. Работа выполнена в рамках гранта № ОТ-Ф4-84: «Дискретно-численный метод для полиномиальных систем и его приложения к моделированию циклических и управляемых процессов». Изучению свойств решений, в том числе топологической характеристики области определения непродолжаемых решений, будет посвящена отдельная статья.

Будем рассматривать дифференциальное уравнение Пфаффа

$$\omega = a_0(X)dX_0 + a_1(X)dX_1 + \cdots + a_n(X)dX_n, \tag{1.1}$$

где $X = (X_0, X_1, \ldots, X_n) \in D$, $D \subset \mathbb{R}^{n+1}$. (В дальнейшем будем предполагать, что из области D исключены особые точки, где все коэффициенты $a_j(X)$ одновременно равняются 0.) Уравнение (1.1) задает поле гиперплоскостей в области D. Оно называется *интегрируемым* (в области D), если существует семейство многообразий коразмерности 1 (гиперповерхностей), однократно покрывающих D и в каждой своей точке касающихся к гиперплоскости поля (1.1) в этой точке, т. е. являются огибающими соответствующего поля гиперплоскостей. Такие многообразия называются *интегральными*. В случае $n = 1$ непрерывности коэффициентов $a_j(X)$, $j = 0, 1, 2, \ldots, n$, достаточно для интегрируемости (теорема Пеано), а в случае $n \geqslant 2$ даже уравнение с гладкими коэффициентами может быть неинтегрируемым. Если все коэффициенты $a_j(X)$ непрерывно дифференцируемы в области D, то условие Фробениуса

$$\omega \wedge d\omega = 0 \tag{1.2}$$

необходимо и достаточно для интегрируемости уравнения (1.1) (см. [4, 20]). При выполнении этого условия через каждую точку X^0, $X^0 \in D$, не являющейся особой, проходит единственная интегральная гиперповерхность.

Далее, для определенности предположим, что $a_0(X) \neq 0$ в некоторой односвязной окрестности D точки X^0. Тогда уравнение (1.1) будет равносильно системе

$$\frac{\partial u}{\partial x} = f(x, u), \tag{1.3}$$

где $\dfrac{\partial u}{\partial x} = \Big(\dfrac{\partial u}{\partial x_1}, \dfrac{\partial u}{\partial x_2}, \ldots, \dfrac{\partial u}{\partial x_n}\Big)$, $f = (f_1, f_2, \ldots, f_n)$, $u = X_0$, $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $x_j = X_j$, $f_j(x, u) = -a_j(X)/a_0(X)$, $j = 1, 2, \ldots, n$.

Хотя условие Фробениуса в форме (1.2) формально не требует гладкости правых частей системы (1.3), однако такое требование в неявном виде участвует в операции внешнего дифференцирования (см. [20, гл. VI, теоремы 3.1, 6.1]). Если это требование выполнено, то условие (1.2) в координатах $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ примет вид:

$$\frac{\partial f_i(x, u)}{\partial x_j} + \frac{\partial f_i(x, u)}{\partial u} f_j(x, u) = \frac{\partial f_j(x, u)}{\partial x_i} + \frac{\partial f_j(x, u)}{\partial u} f_i(x, u), \tag{1.4}$$

где $1 \leqslant i < j \leqslant n$.

В работе [27] система (1.3) изучена при условии непрерывности правых частей методом аппроксимации непрерывных функций гладкими. При этом условие (1.4) переносится на аппроксимирующие системы. Здесь предлагается другой подход, в котором система (1.3) преобразуется к системе интегральных уравнений и рассматривается сама по себе.

2. Преобразование задачи Коши к эквивалентной системе интегральных уравнений

Итак, пусть функции f_k непрерывны в области $D \subset \mathbb{R}^{n+1}$, $k = 1, 2, \ldots, n$, и $(x^0, u^0) \in D$. Рассмотрим задачу Коши

$$\frac{\partial u}{\partial x} = f(x, u), u(x^0) = u^0. \tag{2.1}$$

Вектор, полученный из x заменой координаты x_k на s_k, обозначим $x|^0 s_k$ и результат назовем *главным аргументом* (k фиксировано, $k = 1, 2, \ldots, n$). Из главного аргумента образуем *подчиненные аргументы* по следующей схеме. Расположим координаты точки $x|^0 s_k$ в вершинах правильного n-угольника. Если номер j координаты больше n, но не превосходит $2n$, то отождествим его с $j - n \in \{1,\ 2,\ \ldots,\ n\}$. Сделав в векторе $x|^0 s_k$ пару замен $s_k \to x_k^0$, $x_k + 1 \to s_k + 1$ получим *первый подчиненный аргумент* $x|^1 s_{k+1}$. Заменяя в последнем s_{k+1} на x_{k+1}^0 и x_{k+2} на s_{k+2}, получаем *второй подчиненный аргумент* $x|^2 s_{k+2}$ и т. д. При этом получится следующая последовательность аргументов:

$$\begin{gathered}
(x_1, x_2, \ldots, x_{k-1}, s_k, x_{k+1}, \ldots, x_{n-1}, x_n) \\
(x_1, x_2, \ldots, x_{k-1}, x_k^0, s_{k+1}, \ldots, x_{n-1}, x_n) \\
(x_1, x_2, \ldots, x_{k-1}, x_k^0, x_{k+1}^0, s_{k+2}, \ldots, x_{n-1}, x_n) \\
\ldots\ldots \\
(x_1, x_2, \ldots, x_{k-1}, x_k^0, x_{k+1}^0, \ldots, x_{n-2}^0, s_{n-1}, x_n) \\
(x_1, x_2, \ldots, x_{k-1}, x_k^0, x_{k+1}^0, \ldots, x_{n-2}^0, x_{n-1}^0, s_n) \\
(s_1, x_2, \ldots, x_{k-1}, x_k^0, x_{k+1}^0, \ldots, x_{n-2}^0, x_{n-1}^0, x_n^0) \\
(x_1^0, s_2, \ldots, x_{k-1}, x_k^0, x_{k+1}^0, \ldots, x_{n-1}^0, x_n^0) \\
(x_1^0, x_2^0, s_3, \ldots, x_{k-1}, x_k^0, x_{k+1}^0, \ldots, x_{n-1}^0, x_n^0) \\
\ldots\ldots \\
(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_{k-3}^0, s_{k-2}, x_{k-1}, x_k^0, x_{k+1}^0, \ldots, x_{n-1}^0, x_n^0) \\
(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_{k-3}^0, x_{k-2}^0, s_{k-1}, x_k^0, x_{k+1}^0, \ldots, x_{n-1}^0, x_n^0)
\end{gathered}$$

Последний член этого ряда $x|^{n-1} s_{k+n}$ получается из $x|^{n-2} s_{k+n-1}$ парой замен $s_{k+n-1} \to x_{k+n-1}^0$, $x_{k+n} \to s_{k+n}$; в нем все координаты суть из $x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0$, за исключением координаты с номером $k + n - 1$, которая есть s_{k+n-1}.

Лемма. *Задача Коши* (2.1) *равносильна системе из n интегральных уравнений*

$$u(x) = u_0 + \sum_{l=0}^{n-1} \int\limits_{x_{k+l}^0}^{x_{k+l}} f_{k+l}\left[x|^l s_{k+l}, u\left(x|^l s_{k+l}\right)\right] ds_{k+l}, \tag{2.2}$$

$k = 1,\ 2,\ \ldots,\ n.$

Доказательство. Под знаком суммы в (2.2) только одно слагаемое зависит от x_k, а именно, слагаемое

$$\int\limits_{x_k^0}^{x_k} f_k\left[x|^0 s_k, u\left(x|^0 s_k\right)\right] ds_k,$$

$(l = 0)$, а во всех остальных слагаемых на месте x_k стоит x_k^0. Поэтому из (2.2) вытекает $\partial u/\partial x_k = f_k(x|^0 x_k) = f_k(x)$, $k = 1,\ 2,\ \ldots,\ n$, где $f_k(x|^0 x_k)$ получено из интегранта $f_k(x|^0 s_k)$ обратной подстановкой $s_k \to x_k$. (Аналогичный смысл имеют выражения типа $x|^l y$, используемые ниже.) Условие $u(x^0) = u^0$ для (2.2) выполняется очевидным образом.

Обратное докажем рассуждениями, называемыми иногда в литературе «методом телевизионной башни» [35]. Из уравнения $\partial u(x)/\partial x_1 = f_1(x, u(x))$ следует

$$u(x) = u(x|^0 x_1^0) + \int\limits_{x_1^0}^{x_1} f_1[x|^0 s_1, u(x|^0 s_1)]ds_1. \tag{2.3}$$

Далее, подставляя $x_1 = x_1^0$ во второе уравнение системы (2.1), получаем обыкновенное дифференциальное уравнение

$$\frac{\partial u(x|^1 x_1^0)}{\partial x_2} = f_2\left[x|^1 x_1^0, u(x|^1 x_1^0)\right],$$

интегрирование которого (в пределах от x_2^0 до x_2) дает

$$u\left(x|^1 x_1^0\right) = u\left(x|^1 x_2^0\right) + \int\limits_{x_2^0}^{x_2} f_2\left[x|^1 s_2, u\left(x|^1 s_2\right)\right]ds_2. \tag{2.4}$$

Повторяя эту процедуру, на последнем шаге из последнего уравнения системы $\partial u\left(x\right)/\partial x_n = f_n\left(x, u\left(x\right)\right)$ получаем

$$\frac{\partial u\left(x|^{n-1} x_n\right)}{\partial x_n} = f_n\left[x|^{n-1} x_n, u\left(x|^{n-1} x_n\right)\right],$$

интегрирование которого приведет к соотношению

$$u\left(x|^{n-1} x_n\right) = u\left(x|^{n-1} x_n^0\right) + \int\limits_{x_n^0}^{x_n} f_n\left[x|^{n-1} s_n, u\left(x|^{n-1} s_n\right)\right]ds_n. \tag{2.5}$$

Кроме того, $u(x|^0 x_n^0) = u(x^0) = u^0$. Сложив соотношения (2.3)–(2.5) приходим к уравнению (2.2) для $k = 1$. Для $k = 2,\ 3,\ \ldots,\ n$ рассуждения аналогичны. □

Как было отмечено выше, формулировка условия интегрируемости Фробениуса в форме $\omega \wedge d\omega = 0$ без предположения дифференцируемости функций f_k, $k = 1, 2, \ldots, n$, является малосодержательной. Чтобы ослабить условие интегрируемости, прежде всего, мы должны переформулировать критерий интегрируемости в удобной форме.

Теорема 2.1. *Пусть функция f непрерывно дифференцируема. Тогда следующие предложения равносильны*:

a) *система* (1.3) *интегрируема в области D*;
b) *имеют место тождества* (1.4) *в области D*;
c) *система интегральных уравнений* (2.2) *с одной неизвестной функцией $u(x)$ имеет решение для каждой точки $(x^0, u^0) \in D$.*

Равносильность *a*) и *b*) есть критерий Фробениуса, а равносильность *a*) и *c*) непосредственно вытекает из доказанной выше Леммы.

В отличие от критерия Фробениуса, условие *c*) теоремы 2.1 не требует гладкости (даже липшицевости) функции f. При этом в доказательстве леммы использована только непрерывность f, поэтому равносильность *a*) и *c*) сохраняет силу для систем вида (1.3) с непрерывной правой частью. Это служит мотивацией для следующего определения.

Определение. Утверждение *c*) теоремы 2.1 называется *ослабленным условием интегрируемости* системы (1.3).

Отметим, что в отличие от условия Фробениуса, ослабленное условие интегрируемости может быть сформулировано индивидуально — для конкретной задачи Коши (2.1). Ясно, что если функция f непрерывно дифференцируема, то ослабленное условие равносильно условию Фробениуса (1.4). В этом случае как существование, так и единственность решения задачи Коши для (1.3) выполняются автоматически. В случае ослабленного условия интегрируемости оба свойства раздваиваются. Например, решение может не существовать по двум причинам: либо от того, что одно из интегральных уравнений (2.2) не имеет решения, либо каждое из уравнений (2.2) имеет решение, но решение переопределенной системы (1.3) отсутствует (т. е. (2.2) несовместима). В связи с этим возникает задача обеспечения существования и единственности решения отдельно взятого уравнения системы (2.2). Существование решения (3.1) может быть установлено любым из способов, применяемых для аналогичной задачи для дифференциальных уравнений [8]. С этой целью обратимся к аналогу метода Эйлера, который заодно предоставляет нам метод приближенного решения.

3. Приближенное решение задачи Коши

Предположим, что задана гладкая система (3.1), удовлетворяющая условию Фробениуса. За исключением редких случаев, решение задачи Коши, не говоря об общем интеграле, не удается найти в явном виде [37], и естественным образом возникает задача о приближенном решении. Это можно осуществить методом «телевизионной башни» — решая n задач Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений (2.3)–(2.5), у которых аргументами являются одна из переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$, а остальные будут играть роль параметра. Последнее обстоятельство сильно усложняет построение приближенного решения. Ослабленное условие интегрируемости в этом отношении предоставляет удобное средство — достаточно найти приближенное решение одного из уравнений системы (2.2).

Здесь изложим аналог метода ломаных Эйлера для $k = 1$, т. е. уравнения

$$u(x) = u_0 + \sum_{l=0}^{n-1} \int\limits_{x_{1+l}^0}^{x_{1+l}} f_{1+l} \left[x|^l s_{1+l}, u \left(x|^l s_{1+l} \right) \right] ds_{1+l} \tag{3.1}$$

по схеме [15]. Отметим, что (3.1), хотя внешне имеет вид интегрального уравнения, на самом деле представляет собой рекуррентную формулу.

Уравнение (3.1) будем рассматривать в пределах параллелепипеда $\Pi = \left\{ (x, u) \in \mathbb{R}^{n+1} \middle| \, |x| \leqslant a, \ \left| u - u^0 \right| \leqslant b \right\}$. Пусть $M = \max\limits_{(x,u) \in \Pi} |f(x, u)|$, $d = \min \left\{ a, \dfrac{b}{M} \right\}$. Зафиксировав целое положительное число N, построим соответствующую «ломаную» $\upsilon_N(x)$, определенную в кубе $K = \left\{ x \in \mathbb{R}^d \middle| \left| x_k - x_k^0 \right| \leqslant d, \ \ k = 1, \ 2, \ \ldots, \ n \right\}$. Компакт K есть объединение 2^n ортантов. Построение начнем с положительного ортанта $K^+ = \left\{ x \in \mathbb{R}^d \middle| \, x_k^0 \leqslant x_k \leqslant x_k^0 + d, \ k = 1, \ 2, \ \ldots, \ d \right\}$. Далее разделим K^+ на N^n клеток, которые пронумеруем посредством мультииндекса $\mathbb{i} = (i_1, i_2, \ldots, \ i_N)$, где $0 \leqslant i_k \leqslant N - 1$, $k = 1, \ 2, \ \ldots, \ N$. Совокупность всех мультииндексов обозначим I. Будем пользоваться также обозначениями $\nvdash = \{0, \ 0, \ \ldots, \ 0\}$, $\mathbb{1} = \{1, \ 1, \ \ldots, \ 1\}$. Далее построим сетку в K^+ с узлами. Положим $x^{\mathbb{i}} = x^0 + \mathbb{i}h$, $\mathbb{i} \in I$. Каждый $\mathbb{i} \in I$ определяет кубик деления $K_{\mathbb{i}} = \left\{ x \in \mathbb{R}^d \middle| \, x^{\mathbb{i}} \leqslant x < x^{\mathbb{i}+1} \right\}$, где неравенства $x^{\mathbf{i}} \leqslant x < x^{\mathbf{i}+1}$ понимаются покоординатно (при $i_k + 1 = N$ неравенство $x_k < x_k^{i_k+1}$ заменяется на $x_k \leqslant x_k^N$ для соответствующего k. Приближение $\upsilon_N(x)$ построим методом «телевизионной башни» [35]. Для $x \in K_0$ положим $\upsilon_N(x) \equiv u^0$. Далее, предполагая $\upsilon_N(x)$ уже построенным на $K_{(i_1, \, 0, \, \ldots, \, 0)}$, $i_1 < N$, доопределим его для $x \in K_{(i_1+1, \, 0, \, \ldots, \, 0)}$ формулой

$$\upsilon_N(x) = u_0 + \int\limits_{x_1^0+h}^{x_1} f_1 \left[s_1 - h, x_2, \ldots, x_n, \upsilon_N \left(s_1 - h, x_2, \ldots, x_n \right) \right] ds_1 + \\ + \sum_{l=1}^{n-1} \int\limits_{x_k^0}^{x_k} f_{1+l} \left[x|^l s_{1+l}, u \left(x|^l s_{1+l} \right) \right] ds_{1+l}. \tag{3.2}$$

Тем самым $\upsilon_N(x)$ определяется на полосе («тени башни на земле») $x_1^0 \leqslant x_1 \leqslant x_1^0 + d$, $x_k^0 \leqslant x_k < x_k^0 + h$, $k = 2, \ 3, \ \ldots, \ n$.

Теперь продолжим $\upsilon_N(x)$ на полосу («заметаемую тенью башни») $x_j^0 \leqslant x_j < x_j^0 + d$ для $j = 1, \ 2$ и $x_j^0 \leqslant x_j < x_j^0 + h$ для $j = 3, \ 4, \ \ldots, \ n$ рекуррентной формулой

$$\upsilon_N(x) = \upsilon_N(x_1, x_2, x_3^0, \ldots, x_n^0) + \int\limits_{x_1^0+h}^{x_1} f_1\left[x_1|^0 s_1, \upsilon_N\left(x_1|^0 s_1\right)\right] ds_1 + \\ + \int\limits_{x_2^0+h}^{x_2} f_2\left[x_2|^1 s_2 - h, \upsilon_N\left(x_2|^1 s_2 - h\right)\right] ds_2 + \\ + \sum_{l=2}^{n} \int\limits_{x_{l+1}^0}^{x_{l+1}} f_{l+1}\left[x_{l+1}|^l s_{l+1} - h, \upsilon_N\left(x_{l+1}|^l s_{l+1} - h\right)\right] ds_{l+1}. \quad (3.3)$$

На последнем шаге из полосы, определяемой условием $x_k^0 \leqslant x_k < x_k^0 + d$ для $k = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots,\ n-1$ и $x_n^0 \leqslant x_n < x_n^0 + h$, продолжаем $\upsilon_N(x)$ на ортант K^+ формулой

$$\upsilon_N(x) = \upsilon_N\left(x_n|^{n-1} x_n^0\right) + \sum_{l=0}^{n-2} \int\limits_{x_{l+1}^0}^{x_{l+1}} f_{l+1}\left[x_n|^{n-1} s_n - h, \upsilon_N\left(x_n|^{n-1} s_n - h\right)\right] ds_n. \quad (3.4)$$

Для полноты опишем схему продолжения $\upsilon_N(x)$ на весь куб K. Пусть $\Delta = \{-1, +1\}$, $\sigma \in \Delta^n$. Каждый элемент σ определяет ортант K^σ, состоящий из точек $x \in \mathbb{R}^d$, удовлетворяющих условию $x_k^0 \leqslant x_k < x_k^0 + d$, если $\sigma_k = 1$; $x_k^0 - d \leqslant x_k \leqslant x_k^0$, если $\sigma_k = -1$.

В частности, если $\sigma = 1$, то $K^\sigma = K^+$. Очевидно, $K = \bigcup\limits_{\sigma \in \Delta^n} K^\sigma$. Для определения $\upsilon_N(x)$ на ортанте K^σ следует в формуле (3.2) $x_1|^0 s_1 - h$ заменить на $x_1|^0 s_1 - \sigma_1 h$, а в формуле (3.3) — аргумент $x_2|^1 s_2 - h$ на $x_2|^1 s_2 - \sigma_2 h$ и т. д. На последнем шаге в формуле (3.4) аргумент $x_n|^{n-1} s_n - h$ следует заменить на величину $x_n|^{n-1} s_n - \sigma_n h$. Аналогично со случаем $n = 1$ выводятся оценки $|\upsilon_N(x) - u_0| \leqslant b$ и $|\upsilon_N(x) - \upsilon_N(x')| \leqslant C|x - x'|$ для некоторого $C > 0$. Поэтому по теореме Арцела—Асколи последовательность $\{\upsilon_N(x)\}$ содержит равномерно сходящуюся подпоследовательность $\upsilon_{N_m}(x)$, предел $\tilde{\upsilon}(x)$ которой является решением задачи Коши (2.1). Если при этом функция f удовлетворяет условию Липшица, то имеет место также оценка

$$|\upsilon_N(x) - \tilde{\upsilon}(x)| \leqslant C_f(e^L d - 1)h,$$

где C_f — постоянная, зависящая от f.

Теперь рассмотрим задачу о продолжении решений. В случае $n = 1$ отрезок определения решения задачи Коши продолжается лишь в двух направлениях. В отличие от него, в случае $n > 1$ приходится привлечь лемму Цорна. Пусть U — семейство всех пар $(u(\cdot), \Delta)$, где $u(\cdot)$ — решение задачи Коши (2.1), определенное в открытой области Δ. Семейство U не пусто, так как содержит построенную выше пару $(\tilde{\upsilon}(\cdot), \mathrm{K})$. Семейство U является частично упорядоченным множеством: $(u_1(\cdot), \Delta_1) \prec (u_2(\cdot), \Delta_2)$, если $\Delta_1 \subset \Delta_2$ и сужение $u_2(\cdot)$ на Δ_1 совпадает с $u_1(\cdot)$. При этом каждая цепь $V \subset U$ имеет наименьшую верхнюю грань $\left(\bar{u}(\cdot), \bar{\Delta}\right)$, у которой $\bar{\Delta} = \bigcup\limits_{(u,\Delta) \in V} \Delta$, а решение $\bar{u}(\cdot)$ определяется по следующему правилу. Пусть $x \in \bar{\Delta}$, следовательно, $x \in \tilde{\Delta}$ для некоторой пары $\left(\tilde{u}(\cdot), \tilde{\Delta}\right)$. Тогда $\bar{u}(x) = \tilde{u}(x)$ для $x \in \tilde{\Delta}$. Корректность определения $\bar{u}(\cdot)$ очевидна. Таким образом, применима лемма Цорна: семейство U имеет максимальные элементы, являющимися непродолжаемыми решениями задачи Коши (2.1). Отметим, что поскольку единственность решения не гарантируется, то продолжение может оказаться не единственным.

На рис. 1 изображены приближенные решения задачи Коши $u(0, 0) = 1$ для систем

$$\frac{\partial u}{\partial x} = y\left[2u^2 + \sin(2\pi xy)\right], \quad \frac{\partial u}{\partial y} = x\left[2u^2 + \sin(2\pi xy)\right]; \quad (3.5)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = y\left[2\sqrt[3]{u^2} - (xy)^2 - xy\right], \quad \frac{\partial u}{\partial y} = x\left[2\sqrt[3]{u^2} - (xy)^2 - xy\right]; \quad (3.6)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = y\left[\frac{1}{20}u^2 + (xy)^2 - xy\right], \quad \frac{\partial u}{\partial y} = x\left[\frac{1}{20}u^2 + (xy)^2 - xy\right]; \quad (3.7)$$

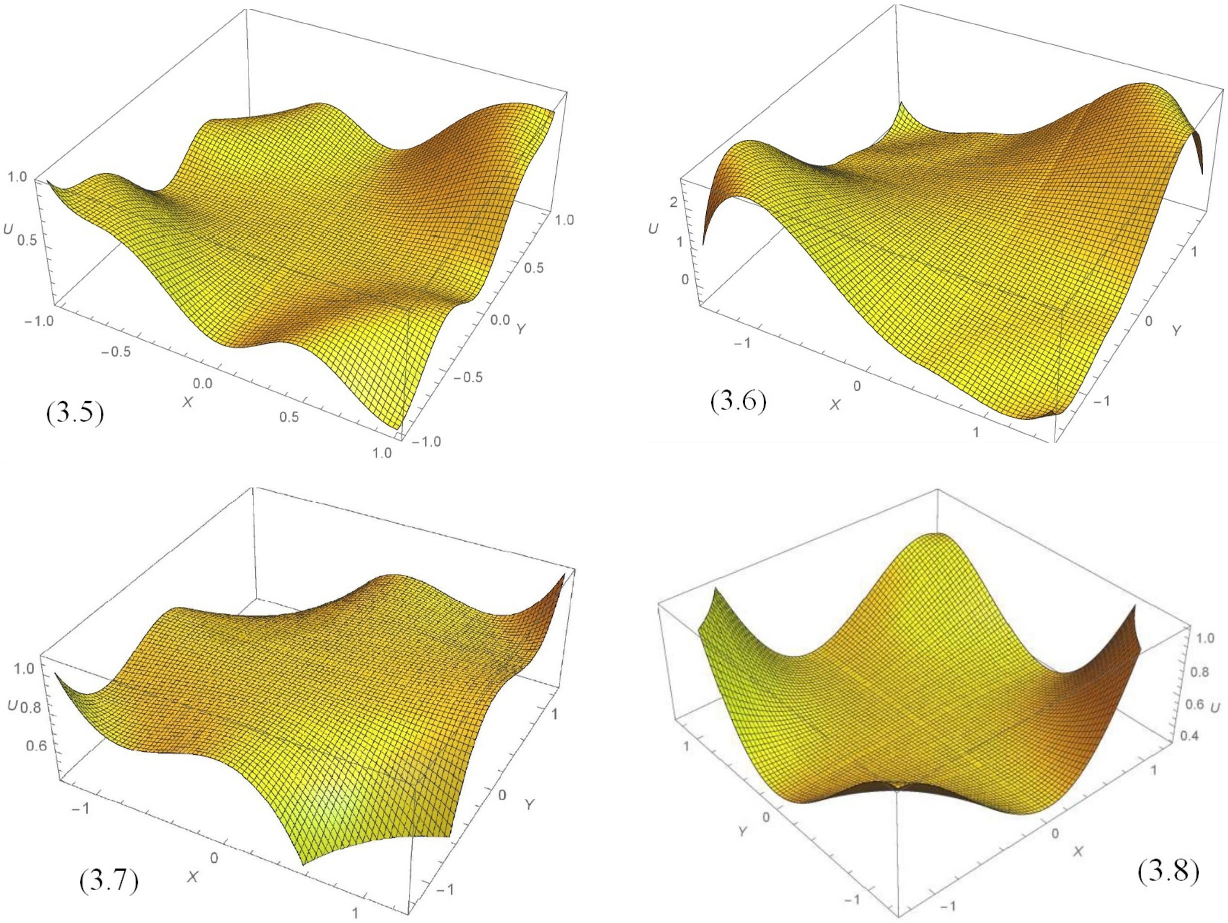

Рис. 1

$$\frac{\partial u}{\partial x} = y\left[\frac{9}{10}u^2 - (xy)^2 + xy\right], \quad \frac{\partial u}{\partial y} = x\left[\frac{9}{10}u^2 - (xy)^2 + xy\right], \tag{3.8}$$

на квадратах $|x| \leqslant 1,\ |y| \leqslant 1$ (система (3.5)); $|x| \leqslant 1,5,\ |y| \leqslant 1,5$ (система (3.6)); и $|x| \leqslant 1,25,\ |y| \leqslant 1,25$ (системы (3.7)-(3.8)) соответственно. Во всех случаях условие Фробениуса выполнено, но система не интегрируется в явном виде.

4. Единственность решения задачи Коши

Задача о единственности решения задачи Коши для уравнения Пфаффа хорошо изучена (см. статью [7] и список литературы к ней). В частности, теорема Осгуда [6,7] и ее усиление, данное в работе [26], легко переносятся на случай задачи (2.1). В статье [1] приведен аналог теоремы Нагумо [30], которая не затронута в [26]. Отметим, что во всех работах, посвященных теореме о единственности решения уравнения Пфаффа, условие на функцию $f(x, u)$, обеспечивающее это свойство, накладывается в некоторой (телесной) окрестности начальной точки (x_0, u_0). Приведенная в разделе 2 настоящей статьи лемма позволяет установить теорему единственности с минимальными требованиями в определенном смысле.

Пусть $[x]_k = [x_1^0, x_2^0, \ldots, x_{k-1}^0, x_k, x_{k+1}^0, \ldots, x_n^0]$. Рассмотрим n задач Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений, практически независимых друг от друга:

$$\frac{\partial u([x]_k)}{\partial x_k} = f[[x]_k, u([x]_k)], \quad u([x]_k)|_{x=x_k} = u^0, \tag{4.1}$$

$k = 1, 2, \ldots, n.$

Теорема 4.1. *Если для хотя бы одной из задач Коши* (4.1) *имеет место единственность решения, то задача Коши* (2.1) *имеет единственное решение.*

Например, того, что хотя бы при одном k функция $f_k(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_{k-1}^0, x_k, x_{k+1}^0, \ldots, x_n^0, u)$ удовлетворяет условию Камке по паре переменных (x_k, u) (см. [6, гл. 1, теорема 1.15.1], [20, гл. 1, теорема 6.1]), достаточно для единственности решения задачи (2.1). Таким образом, задача о единственности решения задачи Коши для системы (1.3) принципиально отличается от аналогичной задачи для уравнений других типов.

Заключительные замечания. Переформулировка условия разрешимости уравнения Пфаффа в терминах интегральных уравнений позволяет переносить на него свойства обыкновенных дифференциальных уравнений, в том числе теорему Камке о единственности, теорему существования непродолжаемых решений и метод Эйлера приближенного построения решения задачи Коши. В месте с тем задача изучения свойств непродолжаемых решений существенно отличается от случая обыкновенных дифференциальных уравнений, что обусловлено более богатой топологией плоскости и многомерных пространств по сравнению с прямой. Исследованию этих вопросов будет посвящена отдельная работа.

В заключение авторы выражают благодарность О. Ахмедову за помощь подготовке статьи к печати и рецензентам за замечания, позволившие улучшить текст статьи, а также пополнить список литературы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Азамов А., Бегалиев А. О.* Теорема существования и метод приближенного решения для уравнения Пфаффа с непрерывными коэффициентами// Тр. ИММ УрО РАН. — 2021. — *27*, № 3. — С. 12–24.
2. *Гайшун И. В.* Вполне разрешимые многомерные дифференциальные уравнения. — М.: Едиториал УРСС, 2004.
3. *Гайшун Л. Н.* О представлении решений вполне интегрируемых линейных систем// Дифф. уравн. — 1978. — *14*, № 4. — С. 728–730.
4. *Картан А.* Дифференциальное исчисление. Дифференциальные формы. — М.: Мир, 1971.
5. *Перов А. И.* Об одном обобщении теоремы Фробениуса// Дифф. уравн. — 1969. — *5*, № 10. — С. 1881–1884.
6. *Agarwal R. P., Lakshmikantham V.* Uniqueness and nonuniqueness criteria for ordinary differential equations. — Singapore: World Scientific, 1993.
7. *Araújo J. A. C.* On uniqueness criteria for systems of ordinary differential equations// J. Math. Anal. Appl. — 2003. — *281*. — C. 264–275.
8. *Arutyunov A. V.* The coincidence point problem for set-valued mappings and Ulam—Hyers stability// Dokl. Math. — 2014. — *89*, № 2. — C. 188–191.
9. *Azamov A., Begaliyev A. O.* Existence and uniqueness of the solution of a Cauchy problem for the Pfaff equation with continuous coefficients// Uzb. Math. J. — 2019. — № 2. — C. 18–26.
10. *Azamov A., Suvanov Sh., Tilavov A.* Studing of behavior at infinity of vector fields on poincare's sphere: revisited// Qual. Theory Dyn. Syst. — 2015. — *14*, № 1. — C. 2–11.
11. *Bedford E., Kalka M.* Foliations and complex Monge—Ampere equations// Commun. Pure Appl. Math. — 1991. — *30*. — C. 543–571.
12. *Brunella M., Gustavo M. L.* Bounding the degree of solutions to Pfaff equations// Publ. Mat. — 2000. — *44*, № 2. — C. 593–604.
13. *Cartan É.* Sur certaines expressions différentielles et le problème de Pfaff// Ann. Sci. Éc. Norm. Supér. (3). — 1899. — *16*. — C. 239–332.
14. *Cerveau D., Lins-Neto A.* Holomorphic foliations in $CP(2)$ having an invariant algebraic curve// Ann. Inst. Fourier (Grenoble). — 1991. — *41*, № 4. — C. 883–903.
15. *Coddington E. A., Levinson N.* Theory of ordinary differential equations. — New Dehli: TATA McGRAW-Hill Publishing Co. Ltd., 1987.
16. *Coutinho S. C.* A constructive proof of the density of algebraic Pfaff equations without algebraic solutions// Ann. Inst. Fourier (Grenoble). — 2007. — *57*, № 5. — C. 1611–1621.
17. *Dryuma V.* On geometrical properties of the spaces defined by the Pfaff equations// Bul. Acad. Ştiinţe Repub. Mold. Mat. — 2005. — *47*, № 1. — C. 69–84.
18. *Hakopian H. A., Tonoyan M. G.* Partial differential analogs of ordinary differential equations and systems// New York J. Math. — 2004. — *10*. — C. 89–116.
19. *Han C. K.* Pfaffian systems of Frobenius type and solvability of generic overdetermined PDE systems// В сб.: «Symmetries and Overdetermined Systems of Partial Differential Equations». — New York: Springer, 2008. — C. 421–429.

20. *Hartman Ph.* Ordinary differential equations. — New York: John Willey & Sons, 1964.
21. *Howard R.* Methods of thermodinamics. — New York: Blaisdell Publ. Comp., 1965.
22. *Izobov N. A.* On the existence of linear Pfaffian systems whose set of lower characteristic vectors has a positive plane mesure// Differ. Equ. — 1997. — *33*, № 12. — C. 1626–1632.
23. *Izobov N. A., Platonov A. S.* Construction of a linear Pfaff equation with arbitrarily given characteristics and lower characteristic sets// Differ. Equ. — 1998. — *34*, № 12. — C. 1600–1607.
24. *Jouanolou J. P.* Equations de Pfaff algébriques. — Berlin—Heidelberg: Springer-Verlag, 1979.
25. *Lefschetz S.* Differential equations: Geometric theory. — New York—London: Interscience Publishers, 1963.
26. *Luzatto S., Türeli S., War K.* Integrability of continuous bundles// ArXiv. — 2016. — 1606.00343v2 [math. CA].
27. *Luzatto S., Türeli S., War K.* A Frobenius theorem for corank-1 continuous distributions in dimensions two and three// ArXiv. — 2016. — 1411.5896v5 [math.DG].
28. *Mardare S.* On Pfaff systems with L^p coefficients in dimension two// C.R. Math. Acad. Sci. Paris. — 2005. — *340*. — C. 879–884.
29. *Mardare S.* On Pfaff systems with L^p coefficients and their applications in differential geometry// J. Math. Pures Appl. — 2005. — *84*. — C. 1659–1692.
30. *Mejstrik T.* Some remarks on Nagumo's theorem// Czech. Math. J. — 2012. — *62*. — C. 235–242.
31. *Mendes L. G.* Bounding the degree of solutions to Pfaff equations// Publ. Mat. — 2000. — *44*, № 2. — C. 593–604.
32. *Musen P.* On the application of Pfaff's method in the theory of variations of astronomical constants. — Washington: NASA, 1964.
33. *Popescu P., Popescu M.* Some aspects concerning the dynamics given by Pfaff forms// Physics AUC. — 2011. — *21*. — C. 195–202.
34. *Rashevskiy K. S.* Geometric theory of partial differential equations. — New York: Springer, 2001.
35. *Siu Y. T.* Partial differential equations with compatibility condition. — https://www.coursehero.com/file/8864495/Lecture-notes-1/.
36. *Spichekovo N. V.* On the behaviour of integral surfaces of a Pfaff equation with a nonclosed singular curve// Differ. Equ. — 2005. — *41*, № 10. — C. 1509–1513.
37. *Unni K. R.* Pfaffian differential expressions and equations// Master's degree thesis. — Logan: Utah State Univ., 1961. — C. 22.
38. *Vasilevich N. D., Prokhorovich T. N.* A linear Pfaff system of three equations on CP^m// Differ. Equ. — 2003. — *39*, № 6. — C. 896–898.
39. *Żoladek H.* On algebraic solutions of algebraic Pfaff equations// Studia Math. — 1995. — *114*, № 2. — C. 117–126.

А. А. Абдуганиев
Институт математики имени В. И. Романовского, Ташкент, Узбекистан
E-mail: aaa_uz@mail.ru

А. А. Азамов
Институт математики имени В. И. Романовского, Ташкент, Узбекистан
E-mail: abdulla.azamov@gmail.com

А. О. Бегалиев
Институт математики имени В. И. Романовского, Ташкент, Узбекистан
E-mail: azizuzmu@mail.ru

DOI: 10.22363/2413-3639-2021-67-4-609-619 UDC 517.911.5

Existence and Uniqueness Theorems for the Pfaff Equation with Continuous Coefficients

© 2021 **A. A. Abduganiev, A. A. Azamov, A. O. Begaliev**

Abstract. In this paper, the Pfaff equations with continuous coefficients are considered. Analogs of Peano's existence theorem and Kamke's theorem on the uniqueness of the solution to the Cauchy problem are established, and a method for the approximate solution of the Cauchy problem for the Pfaff equation is proposed.

REFERENCES

1. A. Azamov and A. O. Begaliev, "Teorema sushchestvovaniya i metod priblizhennogo resheniya dlya uravneniya Pfaffa s nepreryvnymi koeffitsientami" [Existence theorem and method of approximate solution for the Pfaff equation with continuous coefficients], *Tr. IMM UrO RAN* [Proc. IMM UrO RAS], 2021, **27**, No. 3, 12–24 (in Russian).
2. I. V. Gayshun, *Vpolne razreshimye mnogomernye differentsial'nye uravneniya* [Completely Solvable Multidimensional Differential Equations], Editorial URSS, Moscow, 2004 (in Russian).
3. L. N. Gayshun, "O predstavlenii resheniy vpolne integriruemykh lineynykh sistem" [Representation of solutions of completely integrable linear systems], *Diff. uravn.* [Differ. Equ.], 1978, **14**, No. 4, 728–730 (in Russian).
4. H. Cartan, *Differentsial'noe ischislenie. Differentsial'nye formy* [Differential Calculus. Differential Forms], Mir, Moscow, 1971 (Russian translation).
5. A. I. Perov, "Ob odnom obobshchenii teoremy Frobeniusa" [On one generalization of the Frobenius theorem], *Diff. uravn.* [Differ. Equ.], 1969, **5**, No. 10, 1881–1884 (in Russian).
6. R. P. Agarwal and V. Lakshmikantham, *Uniqueness and nonuniqueness criteria for ordinary differential equations*, World Scientific, Singapore, 1993.
7. J. A. C. Araújo, "On uniqueness criteria for systems of ordinary differential equations," *J. Math. Anal. Appl.*, 2003, **281**, 264–275.
8. A. V. Arutyunov, "The coincidence point problem for set-valued mappings and Ulam–Hyers stability," *Dokl. Math.*, 2014, **89**, No. 2, 188–191.
9. A. Azamov and A. O. Begaliyev, "Existence and uniqueness of the solution of a Cauchy problem for the Pfaff equation with continuous coefficients," *Uzb. Math. J.*, 2019, No. 2, 18–26.
10. A. Azamov, Sh. Suvanov, and A. Tilavov, "Studing of behavior at infinity of vector fields on poincare's sphere: revisited," *Qual. Theory Dyn. Syst.*, 2015, **14**, No. 1, 2–11.
11. E. Bedford and M. Kalka, "Foliations and complex Monge–Ampere equations," *Commun. Pure Appl. Math.*, 1991, **30**, 543–571.
12. M. Brunella and M. L. Gustavo, "Bounding the degree of solutions to Pfaff equations," *Publ. Mat.*, 2000, **44**, No. 2, 593–604.
13. É. Cartan, "Sur certaines expressions différentielles et le problème de Pfaff," *Ann. Sci. Éc. Norm. Supér. (3)*, 1899, **16**, 239–332.
14. D. Cerveau and A. Lins-Neto, "Holomorphic foliations in $CP(2)$ having an invariant algebraic curve," *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)*, 1991, **41**, No. 4, 883–903.
15. E. A. Coddington and N. Levinson, *Theory of ordinary differential equations*, TATA McGRAW-Hill Publishing Co. Ltd., New Dehli, 1987.

16. S. C. Coutinho, “A constructive proof of the density of algebraic Pfaff equations without algebraic solutions,” *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)*, 2007, **57**, No. 5, 1611–1621.
17. V. Dryuma, “On geometrical properties of the spaces defined by the Pfaff equations,” *Bul. Acad. Ştiinţe Repub. Mold. Mat.*, 2005, **47**, No. 1, 69–84.
18. H. A. Hakopian and M. G. Tonoyan, “Partial differential analogs of ordinary differential equations and systems,” *New York J. Math.*, 2004, **10**, 89–116.
19. C. K. Han, “Pfaffian systems of Frobenius type and solvability of generic overdetermined PDE systems,” In: *Symmetries and Overdetermined Systems of Partial Differential Equations*, Springer, New York, 2008, pp. 421–429.
20. Ph. Hartman, *Ordinary differential equations*, John Willey & Sons, New York, 1964.
21. R. Howard, *Methods of thermodinamics*, Blaisdell Publ. Comp., New York, 1965.
22. N. A. Izobov, “On the existence of linear Pfaffian systems whose set of lower characteristic vectors has a positive plane mesure,” *Differ. Equ.*, 1997, **33**, No. 12, 1626–1632.
23. N. A. Izobov and A. S. Platonov, “Construction of a linear Pfaff equation with arbitrarily given characteristics and lower characteristic sets,” *Differ. Equ.*, 1998, **34**, No. 12, 1600–1607.
24. J. P. Jouanolou, *Equations de Pfaff algébriques*, Springer-Verlag, Berlin–Heidelberg, 1979.
25. S. Lefschetz, *Differential equations: Geometric theory*, Interscience Publishers, New York–London, 1963.
26. S. Luzatto, S. Türeli, and K. War, “Integrability of continuous bundles,” *ArXiv*, 2016, 1606.00343v2 [math. CA].
27. S. Luzatto, S. Türeli, and K. War, “A Frobenius theorem for corank-1 continuous distributions in dimensions two and three,” *ArXiv*, 2016, 1411.5896v5 [math.DG].
28. S. Mardare, “On Pfaff systems with L^p coefficients in dimension two,” *C.R. Math. Acad. Sci. Paris*, 2005, **340**, 879–884.
29. S. Mardare, “On Pfaff systems with L^p coefficients and their applications in differential geometry,” *J. Math. Pures Appl.*, 2005, **84**, 1659–1692.
30. T. Mejstrik, “Some remarks on Nagumo’s theorem,” *Czech. Math. J.*, 2012, **62**, 235–242.
31. L. G. Mendes, “Bounding the degree of solutions to Pfaff equations,” *Publ. Mat.*, 2000, **44**, No. 2, 593–604.
32. P. Musen, *On the application of Pfaff’s method in the theory of variations of astronomical constants*, NASA, Washington, 1964.
33. P. Popescu and M. Popescu, “Some aspects concerning the dynamics given by Pfaff forms,” *Physics AUC*, 2011, **21**, 195–202.
34. K. S. Rashevskiy, *Geometric theory of partial differential equations*, Springer, New York, 2001.
35. Y. T. Siu, *Partial differential equations with compatibility condition*, https://www.coursehero.com/file/8864495/Lecture-notes-1/.
36. N. V. Spichekovo, “On the behaviour of integral surfaces of a Pfaff equation with a nonclosed singular curve,” *Differ. Equ.*, 2005, **41**, No. 10, 1509–1513.
37. K. R. Unni, “Pfaffian differential expressions and equations,” *Master’s degree thesis*, Logan: Utah State Univ., 1961, p. 22.
38. N. D. Vasilevich and T. N. Prokhorovich, “A linear Pfaff system of three equations on CP^m,” *Differ. Equ.*, 2003, **39**, No. 6, 896–898.
39. H. Źoladek, “On algebraic solutions of algebraic Pfaff equations,” *Studia Math.*, 1995, **114**, No. 2, 117–126.

A. A. Abduganiev
Institute of Mathematics named after V. I. Romanovsky, Tashkent, Uzbekistan
E-mail: aaa_uz@mail.ru

A. A. Azamov
Institute of Mathematics named after V. I. Romanovsky, Tashkent, Uzbekistan
E-mail: abdulla.azamov@gmail.com

A. O. Begaliev
Institute of Mathematics named after V. I. Romanovsky, Tashkent, Uzbekistan
E-mail: azizuzmu@mail.ru