Современная математика. Фундаментальные направления. Том 67, № 3 (2021). С. 596–608
Contemporary Mathematics. Fundamental Directions. ISSN 2413-3639 (Print)

DOI: 10.22363/2413-3639-2021-67-3-596-608 УДК 517.9

БИВАРИАЦИОННОСТЬ, СИММЕТРИИ И ПРИБЛИЖЕННЫЕ РЕШЕНИЯ

© 2021 г. **В. М. ФИЛИППОВ, В. М. САВЧИН, С. А. БУДОЧКИНА**

Аннотация. Подразумевая под бивариационной системой любую систему уравнений, порожденную двумя разными гамильтоновыми действиями, мы устанавливаем связь между их вариационными симметриями. Для диссипативной задачи мы показываем эффективность использования неклассических гамильтоновых действий для построения приближенных решений с высокой точностью. Для заданного операторного уравнения с второй производной по времени мы исследуем его потенциальность, строим соответствующий функционал и находим необходимые и достаточные условия того, что оператор S является генератором симметрии построенного функционала. Теоретические результаты иллюстрируются примерами.

ОГЛАВЛЕНИЕ

1. Введение

Краевые задачи с непотенциальными операторами описывают многие физические явления (см. [13]). Для их вариационного анализа нужен соответствующий функционал — гамильтоново действие. Возможна ситуация, когда такого действия не найдется среди классических функционалов, но оно существует (при определенных условиях) в так называемых неэйлеровых классах функционалов. Множество работ посвящено построению функционалов для различных типов уравнений и их систем: для обыкновенных дифференциальных уравнений, уравнений в частных производных, дифференциально-разностных уравнений, стохастических дифференциальных уравнений (см., например, [4, 5, 7–9, 12, 13, 16, 17, 19–23]). Возможна и ситуация, когда существуют два (или более) альтернативных функционала, порождающих заданную задачу. Соответственно, возникает вопрос о связи их вариационных симметрий (см. [3]). Главная цель настоящей работы — установить эту связь для общих операторных уравнений и показать возможность эффективного использования альтернативных гамильтоновых действий для построения (с высокой точностью) приближенных решений конкретной диссипативной задачи. Впервые интерес к таким результатам был обоснован в [13]. В качественном анализе конечномерных систем симметрии широко используются (см. [2]). Развитие таких идей для бесконечномерных систем является актуальной и интересной задачей (см. [1, 4, 6, 10, 11, 18]).

Вариационные принципы играют важную роль в развитии различных областей физики. Наиболее отчетливо это можно заметить на примерах из механики — как классической, так и квантовой.

В течение долгого времени все преимущества вариационных принципов использовались только для узкого класса так называемых потенциальных линейных операторов. Чтобы обобщить их на новые обширные классы нелинейных уравнений (операторы которых, вообще говоря, непотенциальны), требуется ввести неэйлеровы функционалы (см. [13]). Это может привести к ситуации, когда заданная система порождается разными гамильтоновыми действиями.

В настоящей работе используются понятия и методы нелинейного функционального анализа и современного вариационного исчисления.

2. Бивариационность и симметрия

Рассмотрим операторное уравнение

$$N(u) = 0, \qquad u \in D(N), \tag{2.1}$$

где $N : D(N) \subset U \to V$ — оператор, дифференцируемый в смысле Гато, U и V — линейные нормированные пространства над полем $\mathbb{R}$ вещественных чисел, $D(N)$ — область определения оператора N. Будем считать, что $D(N)$ — выпуклое множество, $\overline{D(N)} = U$ и $U \subseteq V$.

Предположим, что оператор N(2.1) потенциален на $D(N)$ относительно билинейной формы

$$\Phi(\cdot,\cdot) : V \times V \to \mathbb{R}. \tag{2.2}$$

Это означает, что существует такой функционал $F_N : D(F_N) = D(N) \to \mathbb{R}$, что его дифференциал Гато $\delta F_N[u,h] = \Phi(N(u),h)$ $\forall u \in D(N)$, $\forall h \in D(N'_u)$, где N'_u — производная Гато оператора N в точке $u \in D(N)$. Функционал F_N, называемый *гамильтоновым действием*, можно найти по формуле

$$F_N[u] = \int\limits_0^1 \Phi(N(\tilde{u}(\lambda)), u - u_0)d\lambda + \mathrm{const}, \tag{2.3}$$

где $\tilde{u}(\lambda) = u_0 + \lambda(u - u_0)$, u_0 — фиксированный элемент $D(N)$.

Определение 2.1. Оператор $N : D(N) \subset U \to V$ называется *B-потенциальным* на множестве $D(N)$ относительно билинейной формы (2.2), если существуют такой функционал $G_N : D(G_N) = D(N) \to \mathbb{R}$ и такой линейный оператор $B : D(B) \subset V \to V$, что

$$\delta G_N[u,h] = \Phi(N(u), Bh) \quad \forall u \in D(N),\ \forall h \in D(N'_u, B) \equiv D(N'_u) \cap D(B).$$

Если $B = I$ — тождественный оператор, то оператор N является потенциальным. Функционал $G_N[u]$ можно найти по формуле (см. [13])

$$G_N[u] = \int\limits_0^1 \langle N(\tilde{u}(\lambda)), B(u - u_0)\rangle\, d\lambda + \mathrm{const}\,. \tag{2.4}$$

Определение 2.2. Обратимый линейный оператор $M_u : D(M_u) \subset R(N) \to V$ (зависящий, вообще говоря, от u) называется *вариационным мультипликатором* для оператора $N : D(N) \subset U \to V$, если оператор $\tilde{N} = M_u N$ потенциален на множестве $D(N)$ относительно данной билинейной формы.

Следствие 2.1. *Если оператор N уравнения* (2.1) *B-потенциален на множестве $D(N)$ относительно билинейной формы* (2.2)*, то сопряженный оператор B^** (*если он существует, см.* [14]) *можно считать вариационным мультипликатором.*

Определение 2.3. Операторное уравнение (2.1) называется *бивариационным* на множестве $D(N)$ относительно билинейной формы (2.2), если существуют такие функционалы $F_{i,N} : D(F_{i,N}) = D(N) \to \mathbb{R}$ и операторы $B_i : D(B_i) \subset V \to V$, что

$$\delta F_{i,N}[u,h] = \Phi(N(u), B_i h) \quad \forall u \in D(N), \quad \forall h \in D(N'_u, B_i),\ i = 1,2.$$

В дальнейшем нам потребуется следующая теорема.

Теорема 2.1 (см. [4]). *Пусть оператор* $N : D(N) \subset U \to V$ *и билинейная форма* $\Phi(\cdot,\cdot) : V \times V \to \mathbb{R}$ *таковы, что для любых фиксированных элементов* $u \in D(N)$, $g, h \in D(N'_u, B)$ *функция* $\psi(\varepsilon) = \Phi(N(u+\varepsilon h), Bg)$ *принадлежит классу* $C^1[0,1]$. *Тогда для того, чтобы* N *был* B*-потенциальным на выпуклом множестве* $D(N)$ *относительно* Φ, *необходимо и достаточно, чтобы*

$$\Phi(N'_u h, Bg) = \Phi(N'_u g, Bh) \quad \forall u \in D(N), \quad \forall g, h \in D(N'_u, B). \tag{2.5}$$

Рассмотрим на $D(N)$ инфинитезимальное преобразование

$$\bar{u} = u + \varepsilon S(u), \tag{2.6}$$

где $S : D(N) \to D(N'_u)$ — дифференцируемый в смысле Гато оператор, называемый *генератором преобразования*, а $\overline{R(S)} = U$.

Определение 2.4. Функционал $F : D(F) = D(N) \subset U \to \mathbb{R}$ называется *инвариантным* относительно преобразования (2.6), если справедливо соотношение

$$F[u+\varepsilon S(u)] = F[u] + r(u, \varepsilon S(u)) \quad \forall u \in D(N), \tag{2.7}$$

где r таково, что $\lim\limits_{\varepsilon\to 0} \dfrac{r(u,\varepsilon S(u))}{\varepsilon} = 0$.

В этом случае преобразование (2.6) называется *симметрией функционала* $F[u]$, а оператор S называется *генератором симметрии*.

Предположим, что оператор N или оператор $\tilde{N} = M_u N$, где M_u — вариационный мультипликатор, потенциален и B-потенциален ($B \neq I$) относительно билинейной формы (2.2). Тогда у нас есть два различных гамильтоновых действия $F_N[u]$ и $G_N[u]$.

Теорема 2.2. *Функционал* (2.4) *инвариантен относительно преобразования* (2.6) *тогда и только тогда, когда*

$$\Phi(N(u), BS(u)) = 0 \quad \forall u \in D(N). \tag{2.8}$$

Доказательство. Пусть функционал (2.4) инвариантен относительно преобразования (2.6). Тогда, используя формулу

$$N(u+\varepsilon h) = N(u) + \varepsilon N'_u h + r(u, \varepsilon h), \quad u \in D(N),$$

получаем соотношение

$$G_N[u+\varepsilon S(u)] = G_N[u] + \varepsilon \int\limits_0^1 [\Phi(N(\tilde{u}(\lambda)), BS(u)) + \Phi(N'_{\tilde{u}(\lambda)}\lambda S(u), B(u-u_0))]d\lambda + r(u, \varepsilon S(u)).$$

Следовательно, (2.7) можно записать в виде

$$\int\limits_0^1 [\Phi(N(\tilde{u}(\lambda)), BS(u)) + \Phi(N'_{\tilde{u}(\lambda)}\lambda S(u), B(u-u_0)))]d\lambda = 0 \quad \forall u \in D(N). \tag{2.9}$$

В силу B-потенциальности оператора N имеем соотношение

$$\Phi(N'_{\tilde{u}(\lambda)}\lambda S(u), B(u-u_0)) = \Phi(N'_{\tilde{u}(\lambda)}(u-u_0), \lambda BS(u)) \quad \forall u \in D(N).$$

Учитывая это соотношение, из (2.9) получаем, что

$$\int\limits_0^1 [\Phi(N(\tilde{u}(\lambda)), BS(u)) + \Phi(\lambda N'_{\tilde{u}(\lambda)}(u-u_0), BS(u))]d\lambda = 0 \quad \forall u \in D(N). \tag{2.10}$$

Поскольку

$$\Phi(\lambda N'_{\tilde{u}(\lambda)}(u-u_0), BS(u)) = \frac{d}{d\lambda}\Phi(\lambda N(\tilde{u}(\lambda)), BS(u)) - \Phi(N(\tilde{u}(\lambda)), BS(u)),$$

из (2.10) следует, что

$$\Phi(N(u), BS(u)) = 0 \quad \forall u \in D(N).$$

Этим доказана необходимость условия (2.8). Рассуждая в обратную сторону, можно доказать его достаточность. □

Следствие 2.2. *Если функционал F_N инвариантен относительно преобразования $\bar{u} = u + \varepsilon S_1(u)$, а функционал $G_N[u]$ инвариантен относительно преобразования $\bar{u} = u + \varepsilon S_2(u)$, то функционал F_N инвариантен относительно преобразования $\bar{u} = u + \varepsilon(\alpha_1 S_1(u) + \alpha_2 BS_2(u))$ $\forall \alpha_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, 2$.*

Доказательство. Справедливы соотношения

$$\Phi(N(u), S_1(u)) = 0 \quad \forall u \in D(N),$$
$$\Phi(N(u), BS_2(u)) = 0 \quad \forall u \in D(N).$$

Следовательно,

$$\Phi(N(u), \alpha_1 S_1(u) + \alpha_2 BS_2(u)) = 0 \quad \forall u \in D(N),\ \forall \alpha_i \in \mathbb{R},\ i = 1, 2.$$

Таким образом, функционал F_N инвариантен относительно преобразования

$$\bar{u} = u + \varepsilon(\alpha_1 S_1(u) + \alpha_2 BS_2(u_1)).$$

$\square$

3. Операторное уравнение с второй производной по времени и вариационными симметриями

Рассмотрим операторное уравнение

$$N(u) \equiv P_{2u,t} u_{tt} + P_{3u,t} u_t^2 + P_{1u,t} u_t + Q(t, u) = 0, \tag{3.1}$$

$$u \in D(N) \subseteq U \subseteq V, \quad t \in [t_0, t_1] \subset \mathbb{R}; \quad u_t \equiv D_t u \equiv \frac{d}{dt} u, \qquad u_{tt} \equiv \frac{d^2}{dt^2} u,$$

где $\forall t \in [t_0, t_1]$, $\forall u \in U_1$, $P_{iu,t} : U_1 \to V_1$ $(i = \overline{1,3})$ — линейные операторы, $Q : [t_0, t_1] \times U_1 \to V_1$ — произвольный оператор, $D(N)$ — область определения оператора N,

$$D(N) = \{u \in U : u|_{t=t_0} = \varphi_1,\ u|_{t=t_1} = \varphi_2,\ u_t|_{t=t_0} = \varphi_3,\ u_t|_{t=t_1} = \varphi_4,\ \varphi_i \in U_1,\ i = \overline{1,4}\}, \tag{3.2}$$

$U = C^2([t_0, t_1]; U_1)$, $V = C([t_0, t_1]; V_1)$, U_1, V_1 — линейные нормированные пространства, $U_1 \subseteq V_1$.

Предположим, что для любого $t \in (t_0, t_1)$ и любых $g(t), u(t) \in U_1$ функции $P_{1u,t} g(t)$, $P_{3u,t} g(t)$ непрерывно дифференцируемы. Предположим, что $P_{2u,t} g(t)$ дважды непрерывно дифференцируема на (t_0, t_1). Функция $u \in D(N)$ называется *решением задачи* (3.1), если она удовлетворяет уравнению (3.1).

Далее мы будем писать

$$N(u) \equiv P_{2u} u_{tt} + P_{3u} u_t^2 + P_{1u} u_t + Q(u) = 0,$$

имея в виду, что операторы P_{1u}, P_{2u}, P_{3u} и Q могут зависеть еще и от t; символ $(\dots)^*$ обозначает оператор, сопряженный к $(\dots)$.

Рассмотрим такую билинейную форму

$$\Phi(\cdot, \cdot) \equiv \int_{t_0}^{t_1} \langle \cdot, \cdot \rangle \, dt : V \times V \to \mathbb{R}, \tag{3.3}$$

что билинейное отображение $\Phi_1(\cdot, \cdot) \equiv \langle \cdot, \cdot \rangle$ удовлетворяет следующим условиям:

$$\langle v_1(t), v_2(t) \rangle = \langle v_2(t), v_1(t) \rangle \qquad \forall v_1(t), v_2(t) \in V_1,$$
$$D_t \langle v(t), g(t) \rangle = \langle D_t v(t), g(t) \rangle + \langle v(t), D_t g(t) \rangle \ \ \forall v, g \in C^1([t_0, t_1]; V_1).$$

Теорема 3.1. *Если D_t кососимметрична на $D(N'_u, B)$, то оператор N уравнения* (3.1) *является B-потенциальным на $D(N)$ относительно билинейной формы* (3.3) *тогда и только тогда, когда $\forall u \in D(N)$, $\forall t \in [t_0, t_1]$ на $D(N'_u, B)$ выполняются следующие условия*:

$$B^* P_{2u} - P_{2u}^* B = 0, \tag{3.4}$$

$$u_t P_{3u}^* B - P_{2u}^{*\prime}(B(\cdot); u_t) + B^* P_{3u}(u_t(\cdot)) = 0, \tag{3.5}$$

$$-2 \frac{\partial}{\partial t}(P_{2u}^* B) + P_{1u}^* B + B^* P_{1u} = 0, \tag{3.6}$$

$$-\frac{\partial^2}{\partial t^2}(P_{2u}^* B) + \frac{\partial}{\partial t}(P_{1u}^* B) + B^* Q_u' - Q_u'^* B = 0, \tag{3.7}$$

$$P_{1u}^{*\prime}(B(\cdot); u_t) + B^* P_{1u}'(u_t; \cdot) - [P_{1u}'(u_t; \cdot)]^* B + 2u_t \frac{\partial}{\partial t}(P_{3u}^* B) - 2\frac{\partial}{\partial t} P_{2u}^{*\prime}(B(\cdot); u_t) = 0, \tag{3.8}$$

$$B^* P_{2u}'(u_{tt}; \cdot) - P_{2u}^{*\prime}(B(\cdot); u_{tt}) - [P_{2u}'(u_{tt}; \cdot)]^* B + 2u_{tt} P_{3u}^* B = 0, \tag{3.9}$$

$$-P_{2u}^{*\prime\prime}(B(\cdot); u_t; u_t) + B^* P_{3u}'(u_t^2; \cdot) - [P_{3u}'(u_t^2; \cdot)]^* B + 2u_t P_{3u}^{*\prime}(B(\cdot); u_t) = 0. \tag{3.10}$$

Доказательство. Используя (3.1), получаем соотношение

$$N_u' h = 2P_{3u}(u_t h_t) + P_{3u}'(u_t^2; h) + P_{2u} h_{tt} + P_{2u}'(u_{tt}; h) + P_{1u} h_t + P_{1u}'(u_t; h) + Q_u' h.$$

В этом случае условие (2.5) можно записать в виде

$$\int_{t_0}^{t_1} \left\langle 2P_{3u}(u_t h_t) + P_{3u}'(u_t^2; h) + P_{2u} h_{tt} + P_{2u}'(u_{tt}; h) + P_{1u} h_t + P_{1u}'(u_t; h) + Q_u' h, Bg \right\rangle dt =$$

$$= \int_{t_0}^{t_1} \left\langle 2P_{3u}(u_t g_t) + P_{3u}'(u_t^2; g) + P_{2u} g_{tt} + P_{2u}'(u_{tt}; g) + P_{1u} g_t + P_{1u}'(u_t; g) + Q_u' g, h \right\rangle dt,$$

то есть — в виде

$$\int_{t_0}^{t_1} (\langle 2B^* P_{3u}(u_t h_t) + B^* P_{3u}'(u_t^2; h) + B^* P_{2u} h_{tt} + B^* P_{2u}'(u_{tt}; h) + B^* P_{1u} h_t +$$

$$+ B^* P_{1u}'(u_t; h) + B^* Q_u' h, g > - < -2D_t(u_t P_{3u}^* Bh) + [P_{3u}'(u_t^2; \cdot)]^* Bh + D_t^2(P_{2u}^* Bh) +$$

$$+ [P_{2u}'(u_{tt}; \cdot)]^* Bh - D_t(P_{1u}^* B_u h) + [P_{1u}'(u_t; \cdot)]^* Bh + Q_u'^* Bh, g \rangle) dt = 0 \tag{3.11}$$

$$\forall u \in D(N), \quad \forall g, h \in D(N_u', B).$$

Вычислим вторую производную Гато:

$$D_t^2(P_{2u}^* Bh) = D_t(D_t(P_{2u}^* Bh)) = D_t \left(P_{2u}^* Bh_t + \frac{\partial}{\partial t}(P_{2u}^* B)h + P_{2u}^{*\prime}(Bh; u_t) \right) =$$

$$= \frac{\partial^2}{\partial t^2}(P_{2u}^* B)h + 2\frac{\partial}{\partial t} P_{2u}^{*\prime}(Bh; u_t) + 2\frac{\partial}{\partial t}(P_{2u}^* B)h_t + P_{2u}^{*\prime\prime}(Bh; u_t; u_t) + 2P_{2u}^{*\prime}(Bh_t; u_t) +$$

$$+ P_{2u}^{*\prime}(Bh; u_{tt}) + P_{2u}^* Bh_{tt}. \tag{3.12}$$

Далее,

$$D_t(P_{1u}^* Bh) = \frac{\partial}{\partial t}(P_{1u}^* B)h + P_{1u}^{*\prime}(Bh; u_t) + P_{1u}^* Bh_t, \tag{3.13}$$

$$D_t(u_t P_{3u}^* Bh) = u_{tt} P_{3u}^* Bh + u_t \frac{\partial}{\partial t}(P_{3u}^* B)h + u_t P_{3u}^{*\prime}(Bh; u_t) + u_t P_{3u}^* Bh_t. \tag{3.14}$$

Из (3.11)–(3.14) следует, что

$$\int_{t_0}^{t_1} \Big\langle 2B^* P_{3u}(u_t h_t) + B^* P_{3u}'(u_t^2; h) + B^* P_{2u} h_{tt} + B^* P_{2u}'(u_{tt}; h) + B^* P_{1u} h_t +$$

$$+ B^* P_{1u}'(u_t; h) + B^* Q_u' h - \frac{\partial^2}{\partial t^2}(P_{2u}^* B)h - 2\frac{\partial}{\partial t} P_{2u}^{*\prime}(Bh; u_t) - 2\frac{\partial}{\partial t}(P_{2u}^* B)h_t -$$

$$- P_{2u}^{*\prime\prime}(Bh; u_t; u_t) - 2P_{2u}^{*\prime}(Bh_t; u_t) - P_{2u}^{*\prime}(Bh; u_{tt}) - P_{2u}^* Bh_{tt} -$$

$$- [P_{2u}'(u_{tt}; \cdot)]^* Bh + 2u_{tt} P_{3u}^* Bh + 2u_t \frac{\partial}{\partial t}(P_{3u}^* B)h + 2u_t P_{3u}^{*\prime}(Bh; u_t) + 2u_t P_{3u}^* Bh_t -$$

$$- [P_{3u}'(u_t^2; \cdot)]^* Bh + P_{1u}^* Bh_t + \frac{\partial}{\partial t}(P_{1u}^* B)h + P_{1u}^{*\prime}(Bh; u_t) - [P_{1u}'(u_t; \cdot)]^* Bh - Q_u'^* Bh, g \Big\rangle \, dt = 0.$$

Таким образом, условие (3.11) представляется в виде

$$\int\limits_{t_0}^{t_1} \langle (B^*P_{2u} - P^*_{2u}B)\, h_{tt} + (2B^*P_{3u}(u_t(\cdot)) + B^*P_{1u} + 2u_tP^*_{3u}B -$$
$$- 2\frac{\partial}{\partial t}(P^*_{2u}B) - 2P^{*\prime}_{2u}(B(\cdot); u_t) + P^*_{1u}B)\, h_t + B^*P'_{3u}(u_t^2; h) +$$
$$+ B^*P'_{2u}(u_{tt}; h) + B^*P'_{1u}(u_t; h) + B^*Q'_u h + 2u_{tt}P^*_{3u}Bh + 2u_t\frac{\partial}{\partial t}(P^*_{3u}B)h +$$
$$+ 2u_tP^{*\prime}_{3u}(Bh; u_t) - [P'_{3u}(u_t^2; \cdot)]^*Bh - \frac{\partial^2}{\partial t^2}(P^*_{2u}B)h - 2\frac{\partial}{\partial t}P^{*\prime}_{2u}(Bh; u_t) -$$
$$- P^{*\prime\prime}_{2u}(Bh; u_t; u_t) - P^{*\prime}_{2u}(Bh; u_{tt}) - [P'_{2u}(u_{tt}; \cdot)]^*Bh + \frac{\partial}{\partial t}(P^*_{1u}B)h + P^{*\prime}_{1u}(Bh; u_t) -$$
$$-[P'_{1u}(u_t; \cdot)]^*Bh - Q'^*_u Bh, g\rangle\, dt = 0 \quad \forall u \in D(N), \quad \forall g, h \in D(N'_u, B).$$

Оно тождественно выполняется тогда и только тогда, когда

$$(B^*P_{2u} - P^*_{2u}B)\, h_{tt} + (2B^*P_{3u}(u_t(\cdot)) + B^*P_{1u} + 2u_tP^*_{3u}B - 2\frac{\partial}{\partial t}(P^*_{2u}B) -$$
$$- 2P^{*\prime}_{2u}(B(\cdot); u_t) + P^*_{1u}B)\, h_t + B^*P'_{3u}(u_t^2; h) + B^*P'_{2u}(u_{tt}; h) + B^*P'_{1u}(u_t; h) +$$
$$+ B^*Q'_u h + 2u_{tt}P^*_{3u}Bh + 2u_t\frac{\partial}{\partial t}(P^*_{3u}B)h + 2u_tP^{*\prime}_{3u}(Bh; u_t) -$$
$$- [P'_{3u}(u_t^2; \cdot)]^*Bh - \frac{\partial^2}{\partial t^2}(P^*_{2u}B)h - 2\frac{\partial}{\partial t}P^{*\prime}_{2u}(Bh; u_t) - P^{*\prime\prime}_{2u}(Bh; u_t; u_t) -$$
$$- P^{*\prime}_{2u}(Bh; u_{tt}) - [P'_{2u}(u_{tt}; \cdot)]^*Bh + \frac{\partial}{\partial t}(P^*_{1u}B)h + P^{*\prime}_{1u}(Bh; u_t) -$$
$$- [P'_{1u}(u_t; \cdot)]^*Bh - Q'^*_u Bh = 0 \quad \forall u \in D(N), \quad \forall h \in D(N'_u, B).$$

Чтобы это равенство было справедливо, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условия (3.4)–(3.10). □

Теорема 3.2. *Если $D^*_t = -D_t$ на $D(N'_u, B)$, а оператор N, заданный формулой* (3.1)*, B-потенциален относительно билинейной формы* (3.3) *на множестве $D(N)$, заданном формулой* (3.2)*, то функционал F_N представляется в виде*

$$F_N[u] = \int\limits_{t_0}^{t_1} \left\{ \langle R_{3u}(u_tu), Bu_t\rangle + \langle R_{2u}u_t, Bu_t\rangle + \langle R_1(u), Bu_t\rangle - \left\langle \frac{\partial}{\partial t}(B^*R_{2u})u, u_t \right\rangle + K[u] \right\} dt, \tag{3.15}$$

где

$$\Phi(R_1(u), Bu_t) = \int\limits_{t_0}^{t_1}\int\limits_0^1 \left\langle -P_{1\tilde u(\lambda)}(u - u_0), B\frac{\partial \tilde u(\lambda)}{\partial t}\right\rangle d\lambda dt,$$
$$\Phi(R_{2u}u_t, Bu_t) = \int\limits_{t_0}^{t_1}\int\limits_0^1 \left\langle -P_{2\tilde u(\lambda)}(u_t - u_{0_t}), B\frac{\partial \tilde u(\lambda)}{\partial t}\right\rangle d\lambda dt,$$
$$\Phi(R_{3u}(u_tu), Bu_t) = \int\limits_{t_0}^{t_1}\int\limits_0^1 \left\langle -P_{3\tilde u(\lambda)}\left(\frac{\partial \tilde u(\lambda)}{\partial t}(u - u_0)\right), B\frac{\partial \tilde u(\lambda)}{\partial t}\right\rangle d\lambda dt,$$

$$K[u] = \int\limits_0^1 \left[\langle Q(\tilde u(\lambda)), B(u - u_0)\rangle + \lambda \left\langle \frac{\partial}{\partial t}(B^*P_{1\tilde u(\lambda)})(u - u_0), u - u_0 \right\rangle - \right.$$
$$\left. - \lambda \left\langle \frac{\partial^2}{\partial t^2}(B^*P_{2\tilde u(\lambda)})(u - u_0), u - u_0 \right\rangle \right] d\lambda,$$

а u_0 — фиксированный элемент $D(N)$.

Доказательство теоремы 3.2 аналогично доказательству [5, теорема 2].

Рассмотрим однопараметрическую группу преобразований

$$\tilde{G}:\begin{cases}\overline{t}=t+\varepsilon\varphi(t,u),\\ \overline{u}(\overline{t})=u(t)+\varepsilon\psi(t,u),\end{cases}\tag{3.16}$$

где φ,ψ — некоторые операторы.

Используя преобразование (3.16), можно определить функцию $\overline{u}(t,\varepsilon)$ следующим образом:

$$\overline{u}=u+\varepsilon S(u),\tag{3.17}$$

где $S(u)=\psi(t,u)-u_t\varphi(t,u)$.

Определение 3.1. Функционал (3.15) называется *инвариантным относительно преобразования* (3.17), если

$$F_N[u+\varepsilon S(u)]=F_N[u]+r(u,\varepsilon S(u))\quad\forall T_1:t_0\leqslant T_1\leqslant t_1,\tag{3.18}$$

где r таково, что $\lim\limits_{\varepsilon\to0}\dfrac{r(u,\varepsilon S(u))}{\varepsilon}=0$.

Теорема 3.3. *Преобразование* (3.17) *является симметрией функционала* (3.15) *тогда и только тогда, когда*

$$\langle N(u),BS(u)\rangle+D_t\Bigg\{\langle R_{3u}(u_tu),BS(u)\rangle+\langle R_{3u}(uS(u)),Bu_t\rangle+\langle R_{2u}u_t,BS(u)\rangle+$$
$$+\langle R_{2u}S(u),Bu_t\rangle+\langle R_1(u),BS(u)\rangle-\left\langle\frac{\partial}{\partial t}(B^*R_{2u})u,S(u)\right\rangle\Bigg\}=0\quad\forall u\in W,\ t_0\leqslant t\leqslant t_1.$$

Доказательство теоремы 3.3 аналогично доказательству [1, теорема 1].

4. Пример

Рассмотрим следующее уравнение в частных производных:

$$N(u)\equiv u_{tt}+2\beta v(t)u_{tx}+u_{xxxx}+v^2(t)u_{xx}+\beta v'(t)u_x=0,\tag{4.1}$$
$$(x,t)\in Q_T=(a,b)\times(0,T).$$

Определим $D(N)$ следующим образом:

$$D(N)=\{u\in U=C^{2,4}_{t,x}(\overline{Q_T}):u|_{t=0}=\phi_1(x),\ u|_{t=T}=\phi_2(x)\ (x\in(a,b)),\tag{4.2}$$
$$u|_{x=a}=\psi_1(t),\ u|_{x=b}=\psi_2(t),\ u_x|_{x=a}=\psi_3(t),\ u_x|_{x=b}=\psi_4(t)\ (t\in(0,T))\},$$

где $\phi_i,\psi_j(i=1,2,\ j=\overline{1,4})$ — заданные непрерывные функции.

Отметим, что оператор N, заданный уравнением (4.1), потенциален в области (4.2) относительно классической билинейной формы

$$\Phi(v,g)=\int_0^T\int_a^b v(x,t)g(x,t)\,dxdt.$$

Уравнение (4.1) — это частный случай уравнения (3.1). Действительно, в этом случае справедливы равенства

$$P_2=I,\qquad P_1=2\beta v(t)D_x,\qquad P_1^*=-2\beta v(t)D_x,\qquad \frac{\partial P_1^*}{\partial t}=-2\beta v'(t)D_x,$$
$$P_3=0,\qquad Q'_u=D_x^4+v^2(t)D_x^2+\beta v'(t)D_x,\qquad Q'^*_u=D_x^4+v^2(t)D_x^2-\beta v'(t)D_x$$

и импликации (3.4) $\Longrightarrow I-I=0$, (3.5) $\Longrightarrow 0=0$, (3.6) $\Longrightarrow 2\beta v(t)D_x-2\beta v(t)D_x=0$, (3.7) $\Longrightarrow$ $-2\beta v'(t)D_x+D_x^4+v^2(t)D_x^2+\beta v'(t)D_x-D_x^4-v^2(t)D_x^2+\beta v'(t)D_x=0$, (3.8) $\Longrightarrow 0=0$, (3.9) $\Longrightarrow 0=0$, (3.10) $\Longrightarrow 0=0$.

Согласно теореме 3.2, справедливы соотношения

$$R_2=-\frac{1}{2}I,\ R_1=-\beta v(t)D_x,\ K[u]=\frac{1}{2}\int_a^b\left\{u_{xx}^2-v(t)u_x^2\right\}dx,$$

где I — тождественный оператор.

Таким образом, соответствующий функционал есть

$$F_N[u] = \frac{1}{2}\int_0^T\int_a^b \left\{-u_t^2 - 2\beta v(t)u_x u_t + u_{xx}^2 - v(t)u_x^2\right\} dxdt. \tag{4.3}$$

Отметим, что если $u \in C^{2,\infty}_{t,x}(\overline{Q_T})$, то операторы

$$S_k(u) = \frac{\partial^{2k+1}u}{\partial x^{2k+1}}, \quad k = 0, 1, 2, \dots,$$

являются генераторами симметрий функционала (4.3).

Соответствующие первые интегралы равны

$$I_k[u] = \int_a^b \left(u \cdot \frac{\partial^{2k+2}u}{\partial^{2k+1}\partial t} + (-1)^{k+1}\beta v(t)\left(\frac{\partial^{k+1}u}{\partial x^{k+1}}\right)^2\right) dx, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

5. Альтернативные лагранжианы и численные решения диссипативной задачи

Продемонстрируем (численно) работу вариационного метода на простом линейном обыкновенном дифференциальном уравнении с непотенциальным оператором.

Рассмотрим следующую задачу:

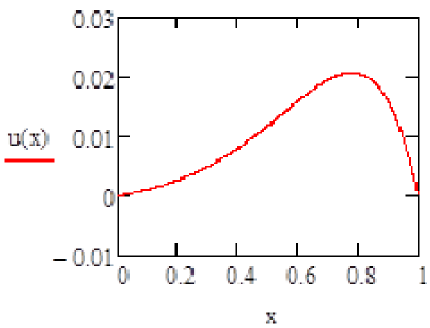
$$N(u) \equiv \frac{d^2u}{dx^2} - 4\frac{du}{dx} + x^3 = 0,$$
$$u(0) = u(1) = 0. \tag{5.1}$$

Через $D(N) = \{u \in C^2[0,1] : u(0) = u(1) = 0\}$ обозначим область определения оператора N.

График точного решения

$$u(x) = \frac{25}{128(e^4-1)}(1 - e^{4x}) + \frac{1}{16}(x^4 + x^3) + \frac{3}{64}x^2 + \frac{3}{128}x$$

задачи (5.1) имеет вид:



Сам оператор (5.1) не является потенциальным относительно классической билинейной формы

$$\Phi(\nu, g) = \int_0^1 \nu(x)g(x)dx. \tag{5.2}$$

Однако существует такой вариационный мультипликатор (а именно, $M(x) = e^{-4x}$), что оператор $\tilde{N}(u) = M(x)N(u)$ потенциален относительно билинейной формы (5.2).

Соответствующий функционал для $\tilde{N}(u)$ имеет вид

$$F_{\tilde{N}}[u] = \int_0^1 e^{-4x}\left[u(x)x^3 - \frac{1}{2}\left(\frac{du(x)}{dx}\right)^2\right] dx.$$

Применяя метод Ритца (см. [15]), находим три приближенных решения задачи (5.1), имеющих следующий вид:

$$\tilde{u}(x) = x(1-x)\left[\sum_{i=0}^{\infty}(c_i x^i)\right].$$

Первое решение равно

$$u_1(x) = 0{,}02117x(1-x),$$

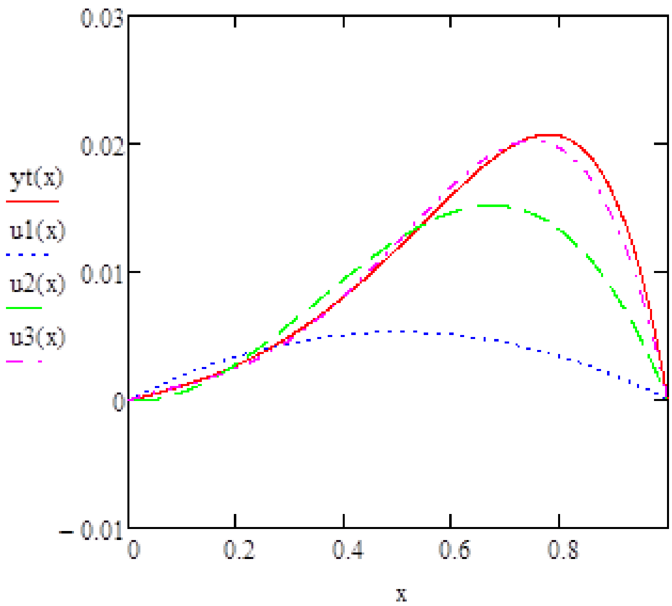
второе решение

$$u_2(x) = x(1-x)(-0{,}00429 + 0{,}10889x),$$

и третье решение

$$u_3(x) = x(1-x)(0{,}2158x^2 - 0{,}03699x + 0{,}01416).$$

График точного решения и графики вышеуказанных приближенных решений имеют вид:



Выберем вспомогательный оператор B вида $Bu(x) = u(1-x)$ и рассмотрим сверточную билинейную форму

$$\Phi_1(\nu, g) = \int_0^1 \nu(1-x)g(x)dx.$$

Оператор N, заданный формулой (5.1), потенциален относительно этой билинейной формы, а соответствующий функционал есть

$$G_N[u] = \int_0^1 \left[\frac{1}{2}u'(x)u'(1-x) - 2u(1-x)u'(x) + x^3u(1-x)\right]dx, \tag{5.3}$$

где $u'(x) = \dfrac{du(x)}{dx}$.

Применяя метод Ритца из [15], находим три приближенных решения задачи (5.1).

Первое приближенное решение равно

$$u_{s_1}(x) = \frac{x(1-x)}{10},$$

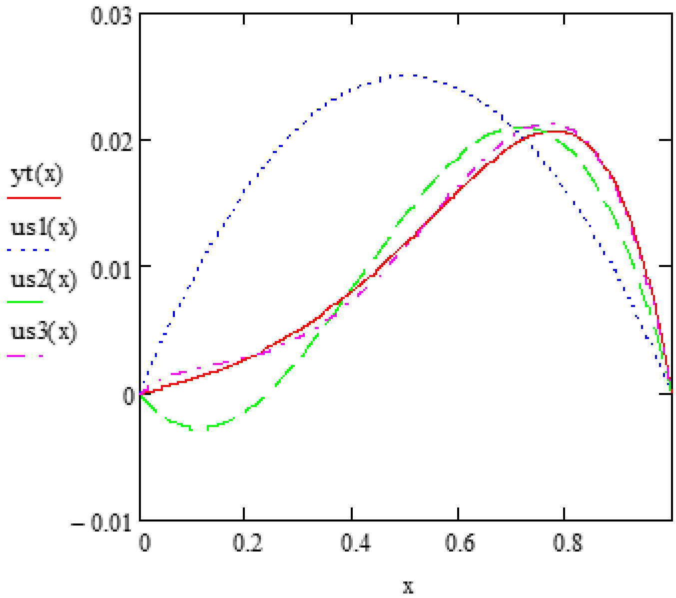
второе приближенное решение

$$u_{s_2}(x) = x(1-x)\left(\frac{29x}{133} - \frac{1}{19}\right),$$

и третье приближенное решение

$$u_{s_3}(x) = x(1-x)\left(\frac{73x^2}{232} - \frac{x}{8} + \frac{7}{232}\right).$$

Графики точного решения и приближенных решений, найденных с помощью функционала (5.3), имеют вид



Оценим отклонения приближенных решений от точного по норме пространства L_2:

$$I(f) = \left[\int_0^1 (f(x))^2 dx\right]^{\frac{1}{2}}.$$

Вначале рассмотрим приближенные решения, найденные с помощью классической билинейной формы. Их отклонения от точного решения $u(x)$ равны $I_1 = 0{,}009469$, $I_2 = 0{,}003695$ и $I_3 = 0{,}00076$ соответственно.

Отклонения от точного решения $u(x)$ приближенных решений, найденных с помощью сверточной билинейной формы, равны $I_{s_1} = 0{,}1029$, $I_{s_2} = 0{,}002513$ и $I_{s_3} = 0{,}000539$ соответственно.

6. Заключение

Задача о построении функционала, множество критических (экстремальных или стационарных) точек которого совпадает с множеством решений заданного уравнения, остается важной и актуальной. Ее решение может быть не единственным. Поэтому для ее исследования могут использоваться различные гамильтоновы действия, порождающие данную систему. Представляет интерес исследование их свойств.

Мы устанавливаем связь между вариационными симметриями двух разных гамильтоновых действий, порождающих одну ту же систему. Для заданного эволюционного операторного уравнения второго порядка найдены необходимые и достаточные условия существования непрямых решений обратной задачи вариационного исчисления. Задача сводится к поиску вспомогательного оператора, удовлетворяющего выведенным уравнениям. При данных условиях возможно получить непрямые вариационные формулировки данных проблем в рамках неэйлеровых классов функционалов. Их использование для поиска приближенных решений указанных задач и первых интегралов эволюционных систем интересно и актуально.

7. Благодарности

Настоящая работа выполнена при поддержке Программы стратегического академического лидерства РУДН и при частичной поддержке РФФИ, грант № 19-08-00261а.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Будочкина С. А., Савчин В. М.* Вариационные симметрии эйлеровых и неэйлеровых функционалов// Дифф. уравн. — 2011. — *47*, № 6. — С. 811–818.
2. *Козлов В. В.* Симметрии, топология и резонансы в гамильтоновой механике. — Ижевск: Изд-во Удмуртского гос. ун-та, 1995.
3. *Олвер П.* Приложения групп Ли к дифференциальным уравнениям. — М.: Мир, 1989.
4. *Савчин В. М.* Математические методы механики бесконечномерных непотенциальных систем. — М.: РУДН, 1991.
5. *Савчин В. М., Будочкина С. А.* О существовании вариационного принципа для операторного уравнения со второй производной по «времени»// Мат. заметки. — 2006. — *80*, № 1. — С. 87–94.
6. *Савчин В. М., Будочкина С. А.* Симметрии и первые интегралы в механике бесконечномерных систем// Докл. РАН. — 2009. — *425*, № 2. — С. 169–171.
7. *Филиппов В. М.* Вариационные принципы для непотенциальных операторов. — М.: РУДН, 1985.
8. *Филиппов В. М.* О вариационном принципе для гипоэллиптических уравнений с постоянными коэффициентами// Дифф. уравн. — 1986. — *22*, № 2. — С. 338–343.
9. *Филиппов В. М.* О полуограниченных решениях обратных задач вариационного исчисления// Дифф. уравн. — 1987. — *23*, № 9. — С. 1599–1607.
10. *Budochkina S. A.* Symmetries and first integrals of a second order evolutionary operator equation// Eurasian Math. J. — 2012. — *3*, № 1. — С. 18–28.
11. *Budochkina S. A.* On connection between variational symmetries and algebraic structures// Ufa Math. J. — 2021. — *13*, № 1. — С. 46–55.
12. *Filippov V. M., Savchin V. M., Budochkina S. A.* On the existence of variational principles for differential-difference evolution equations// Proc. Steklov Inst. Math. — 2013. — *283*. — С. 20–34.
13. *Filippov V. M., Savchin V. M., Shorokhov S. G.* Variational principles for nonpotential operators// J. Math. Sci. (N.Y.). — 1994. — *68*, № 3. — С. 275–398.
14. *Marchuk G. I.* Construction of adjoint operators in non-linear problems of mathematical physics// Sb. Math. — 1998. — *189*, № 10. — С. 1505–1516.
15. *Mikhlin S. G.* Numerical performance of variational methods. — Groningen: Wolters-Noordhoff Publ., 1965.
16. *Popov A. M.* Potentiality conditions for differential-difference equations// Differ. Equ. — 1998. — *34*, № 3. — С. 423–426.
17. *Popov A. M.* Inverse problem of the calculus of variations for systems of differential-difference equations of second order// Math. Notes. — 2002. — *72*, № 5. — С. 687–691.
18. *Savchin V. M., Budochkina S. A.* Invariance of functionals and related Euler–Lagrange equations// Russ. Math. — 2017. — *61*, № 2. — С. 49–54.
19. *Tleubergenov M. I., Azhymbaev D. T.* On the solvability of stochastic Helmholtz problem// J. Math. Sci. — 2021. — *253*. — С. 297–305.
20. *Tleubergenov M. I., Ibraeva G. T.* On inverse problem of closure of differential systems with degenerate diffusion// Eurasian Math. J. — 2019. — *10*, № 2. — С. 93–102.
21. *Tleubergenov M. I., Ibraeva G. T.* On the solvability of the main inverse problem for stochastic differential systems// Ukr. Math. J. — 2019. — *71*, № 1. — С. 157–165.
22. *Tonti E.* On the variational formulation for linear initial value problems// Ann. Mat. Pura Appl. — 1973. — *95*. — С. 331–359.
23. *Tonti E.* Variational formulation for every nonlinear problem// Int. J. Eng. Sci. — 1984. — *22*, № 11-12. — С. 1343–1371.

В. М. Филиппов
Российский университет дружбы народов, Москва, Россия
E-mail: `v.filippov@rudn.ru`

В. М. Савчин
Российский университет дружбы народов, Москва, Россия
E-mail: `savchin-vm@rudn.ru`

С. А. Будочкина
Российский университет дружбы народов, Москва, Россия
E-mail: `budochkina-sa@rudn.ru`

DOI: 10.22363/2413-3639-2021-67-3-596-608 UDC 517.9

Bi-Variationality, Symmetries and Approximate Solutions

© 2021 **V. Filippov, V. Savchin, S. Budochkina**

Abstract. By a bi-variational system we mean any system of equations generated by two different Hamiltonian actions. A connection between their variational symmetries is established. The effective use of the nonclassical Hamiltonian actions for the construction of approximate solutions with the high accuracy for the given dissipative problem is demonstrated. We also investigate the potentiality of the given operator equation with the second-order time derivative, construct the corresponding functional and find necessary and sufficient conditions for the operator S to be a generator of symmetry of the constructed functional. Theoretical results are illustrated by some examples.

REFERENCES

1. S. A. Budochkina and V. M. Savchin, “Variatsionnye simmetrii eylerovykh i neeylerovykh funktsionalov” [Variational symmetries of Euler and non-Euler functionals], *Diff. uravn.* [Differ. Equ.], **47**, No. 6, 811–818 (2011).
2. V. V. Kozlov, *Simmetrii, topologiya i rezonansy v gamil’tonovoy mekhanike* [Symmetries, Topology and Resonances in the Hamiltonian Mechanics], Udmurt State University Press, Izhevsk (1995).
3. P. Olver, *Prilozheniya grupp Li k differentsial’nym uravneniyam* [Applications of Lie Groups to Differential Equations], Mir, Moscow (1989).
4. V. M. Savchin, *Matematicheskie metody mekhaniki beskonechnomernykh nepotentsial’nykh sistem* [Mathematical Methods of the Mechanics of Infinite Dimensional Systems], Peoples’ Friendship University Press, Moscow (1991).
5. V. M. Savchin and S. A. Budochkina, “O sushchestvovanii variatsionnogo printsipa dlya operatornogo uravneniya so vtoroy proizvodnoy po «vremeni»” [On the existence of a variational principle for an operator equation with the second derivative with respect to «time»], *Mat. zametki* [Math. Notes], **80**, No. 1, 87–94 (2006).
6. V. M. Savchin and S. A. Budochkina, “Simmetrii i pervye integraly v mekhanike beskonechnomernykh sistem” [Symmetries and first integrals in the mechanics of infinite-dimensional systems], *Dokl. RAN* [Dokl. Math.], **425**, No. 2, 169–171 (2009).
7. V. M. Filippov, *Variatsionnye printsipy dlya nepotentsial’nykh operatorov* [Variational Principles for Nonpotential Operators], Peoples’ Friendship University Press, Moscow (1985).
8. V. M. Filippov, “O variatsionnom printsipe dlya gipoellipticheskikh uravneniy s postoyannymi koeffitsientami” [The variational principle for hypoelliptic equations with constant coefficients], *Diff. uravn.* [Differ. Equ.], **22**, No. 2, 338–343 (1986).
9. V. M. Filippov, “O poluogranichennykh resheniyakh obratnykh zadach variatsionnogo ischisleniya” [Semibounded solutions of inverse problems of the calculus of variations], *Diff. uravn.* [Differ. Equ.], **23**, No. 9, 1599–1607 (1987).
10. S. A. Budochkina, “Symmetries and first integrals of a second order evolutionary operator equation,” *Eurasian Math. J.*, **3**, No. 1, 18–28 (2012).
11. S. A. Budochkina, “On connection between variational symmetries and algebraic structures,” *Ufa Math. J.*, **13**, No. 1, 46–55 (2021).
12. V. M. Filippov, V. M. Savchin, and S. A. Budochkina, “On the existence of variational principles for differential-difference evolution equations,” *Proc. Steklov Inst. Math.*, **283**, 20–34 (2013).
13. V. M. Filippov, V. M. Savchin, and S. G. Shorokhov, “Variational principles for nonpotential operators,” *J. Math. Sci. (N.Y.)*, **68**, No. 3, 275–398 (1994).

14. G. I. Marchuk, “Construction of adjoint operators in non-linear problems of mathematical physics,” *Sb. Math.*, **189**, No. 10, 1505–1516 (1998).
15. S. G. Mikhlin, *Numerical Performance of Variational Methods*, Wolters-Noordhoff Publishing, Groningen (1965).
16. A. M. Popov, “Potentiality conditions for differential-difference equations,” *Differ. Equ.*, **34**, No. 3, 423–426 (1998).
17. A. M. Popov, “Inverse problem of the calculus of variations for systems of differential-difference equations of second order,” *Math. Notes*, **72**, No. 5, 687–691 (2002).
18. V. M. Savchin and S. A. Budochkina, “Invariance of functionals and related Euler–Lagrange equations,” *Russ. Math.*, **61**, No. 2, 49–54 (2017).
19. M. I. Tleubergenov and D. T. Azhymbaev, “On the solvability of stochastic Helmholtz problem,” *J. Math. Sci.*, **253**, 297–305 (2021).
20. M. I. Tleubergenov and G. T. Ibraeva, “On inverse problem of closure of differential systems with degenerate diffusion,” *Eurasian Math. J.*, **10**, No. 2, 93–102 (2019).
21. M. I. Tleubergenov and G. T. Ibraeva, “On the solvability of the main inverse problem for stochastic differential systems,” *Ukr. Math. J.*, **71**, No. 1, 157–165 (2019).
22. E. Tonti, “On the variational formulation for linear initial value problems,” *Ann. Mat. Pura Appl.*, **95**, 331–359 (1973).
23. E. Tonti, “Variational formulation for every nonlinear problem,” *Int. J. Eng. Sci.*, **22**, No. 11-12, 1343–1371 (1984).

Vladimir Filippov
Department of Comparative Educational Policy,
Peoples’ Friendship University of Russia (RUDN University), Moscow, Russia
E-mail: `v.filippov@rudn.ru`

Vladimir Savchin
S. M. Nikol’skii Institute of Mathematics,
Peoples’ Friendship University of Russia (RUDN University), Moscow, Russia
E-mail: `savchin-vm@rudn.ru`

Svetlana Budochkina
S. M. Nikol’skii Institute of Mathematics,
Peoples’ Friendship University of Russia (RUDN University), Moscow, Russia
E-mail: `budochkina-sa@rudn.ru`