Современная математика. Фундаментальные направления. Том 67, № 3 (2021). С. 576–595
Contemporary Mathematics. Fundamental Directions. ISSN 2413-3639 (Print)

DOI: 10.22363/2413-3639-2021-67-3-576-595 УДК 517.929

ОБ ОБОБЩЕННЫХ РЕШЕНИЯХ ВТОРОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО-РАЗНОСТНЫХ УРАВНЕНИЙ С ПЕРЕМЕННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

© 2021 г. **А. Л. СКУБАЧЕВСКИЙ, Н. О. ИВАНОВ**

Аннотация. В работе рассматривается вторая краевая задача для дифференциально-разностного уравнения второго порядка с переменными коэффициентами на интервале $(0, d)$. Исследован вопрос существования обобщенного решения. Получены условия на правую часть уравнения, обеспечивающие гладкость обобщенных решений на всем интервале $(0, d)$.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Введение

Обобщенные решения первой краевой задачи для функционально-дифференциальных уравнений нейтрального типа на конечном интервале впервые рассматривались в работах [2, 3]. Было показано, что решения такой задачи обладают целым рядом принципиально новых свойств. Например, гладкость обобщенных решений может нарушаться во внутренних точках интервала даже при бесконечно дифференцируемой правой части. В работах [4, 15] были получены условия на правые части уравнения, обеспечивающие гладкость обобщенных решений первой краевой задачи для дифференциально-разностных уравнений на всем интервале. Вопрос о нахождении таких условий в случае второй краевой задачи является открытым. В работах [10, 14] в случаях как первой, так и второй краевых задач были получены условия на коэффициенты дифференциально-разностного уравнения, при выполнении которых гладкость обобщенных решений дифференциально-разностного уравнения сохраняется на всем интервале для любой правой части. Краевые задачи для функционально-дифференциальных уравнений возникают во многих важных приложениях, в частности, в задаче об успокоении системы управления с последействием [6, 8, 11, 12, 15].

Первый автор был поддержан РФФИ, грант № 20-01-00288.

В настоящей работе исследуется вопрос о разрешимости второй краевой задачи для дифференциально-разностных уравнений с переменными коэффициентами на интервале $(0, d)$, а также получены условия на правую часть уравнения, при выполнении которых гладкость обобщенных решений сохраняется на всем интервале $(0, d)$.

Рассматривается задача

$$-\left(R_Q u'\right)' = f(x), \quad x \in Q, \tag{1}$$

$$(R_Q u')(0) = (R_Q u')(d) = 0. \tag{2}$$

Здесь $Q = (0, d)$, $d = n + \theta$, $n \in \mathbb{N}$, $0 < \theta \leqslant 1$, $f \in L_2(Q)$ — комплекснозначная функция, разностный оператор R_Q будет определен позже.

Статья построена следующим образом. В разделе 1 описываются разностные операторы R_Q, действующие на интервале Q. В разделе 2 излагаются некоторые известные результаты из вариационной теории абстрактных краевых задач, необходимые в дальнейшем. В разделе 3 исследуется вопрос существования обобщенного решения задачи (1), (2). Разделы 4 и 5 посвящены гладкости обобщенных решений задачи (1), (2). В дальнейшем в неравенствах через c, c_i и k_j будем обозначать положительные постоянные, которые не зависят от функций, входящих в неравенства, если не оговорены другие условия на эти константы.

1. Разностные операторы на интервале Q

Введем операторы $R : L_2(\mathbb{R}) \to L_2(\mathbb{R})$, $I_Q : L_2(Q) \to L_2(\mathbb{R})$ и $P_Q : L_2(\mathbb{R}) \to L_2(Q)$ следующим образом:

$$(Ru)(x) = \sum_{j=-n}^{n} a_j(x) u(x + j), \tag{1.3}$$

$$(I_Q v)(x) = v(x), \quad x \in Q; \quad (I_Q v)(x) = 0, \quad x \in \mathbb{R} \setminus Q; \tag{1.4}$$

$$(P_Q v)(x) = v(x), \quad x \in Q; \tag{1.5}$$

где $a_j(x) \in C^\infty(\mathbb{R})$ — комплекснозначные функции. Сдвиги аргументов $x \mapsto x + j$ оператора R могут отображать точки интервала Q в $\mathbb{R} \setminus Q$. С учетом этих отображений краевые условия для уравнения (1) следует задавать не только на границе Q, но и на множестве $\mathbb{R} \setminus Q$. Для рассмотрения однородных краевых условий вводится оператор I_Q, который является оператором продолжения нулем функции из $L_2(Q)$ в $\mathbb{R} \setminus Q$. Для изучения дифференциально-разностного уравнения не на всем множестве $\mathbb{R}$, а только лишь на интервале $Q = (0, d)$, вводится оператор P_Q, являющийся оператором сужения функции из $L_2(\mathbb{R})$ на Q.

Введем также оператор $R_Q : L_2(Q) \to L_2(Q)$ по формуле

$$R_Q = P_Q R I_Q. \tag{1.6}$$

Лемма 1.1. *$I_Q^* = P_Q$, $P_Q^* = I_Q$, т. е. для всех $u \in L_2(Q)$, $v \in L_2(\mathbb{R})$ имеем*

$$(I_Q u, v)_{L_2(\mathbb{R})} = (u, P_Q v)_{L_2(Q)}.$$

Доказательство следует из (1.4), (1.5).

Лемма 1.2. *Операторы $R : L_2(\mathbb{R}) \to L_2(\mathbb{R})$, $R_Q : L_2(Q) \to L_2(Q)$ ограниченные*;

$$(R^* u)(x) = \sum_{j=-n}^{n} \overline{a_j(x - j)} u(x - j), \quad R_Q^* = P_Q R^* I_Q.$$

Доказательство следует из леммы 1.1.

Лемма 1.3. *Если оператор $R : L_2(\mathbb{R}) \to L_2(\mathbb{R})$ самосопряженный, то самосопряженным является и оператор $R_Q : L_2(Q) \to L_2(Q)$.*

Доказательство следует из лемм 1.1 и 1.2.

Введенные операторы используются для изучения краевой задачи (1), (2).

Рассмотрим разбиение интервала $Q = (0, d)$ на подынтервалы, которые образуются из этого интервала выбрасыванием орбит его концов, порождаемых группой целочисленных сдвигов. Другими словами, указанные подынтервалы являются связными компонентами множества

$(0,d) \setminus (\{j\}_1^n \cup \{d-j\}_1^n)$. В зависимости от значения θ получим один или два класса непересекающихся подынтервалов. Если $\theta = 1$, то получим один класс непересекающихся подынтервалов $Q_{1k} = (k-1,k)$ при $k = 1,\dots,n+1$; если же $0 < \theta < 1$, то мы рассматриваем два класса непересекающихся подынтервалов: $Q_{1k} = (k-1, k-1+\theta)$ при $k = 1,\dots,n+1$ и $Q_{2k} = (k-1+\theta, k)$ при $k = 1,\dots,n$. Отметим, что все подынтервалы одного класса получаются друг из друга сдвигом на некоторое целое число.

Пример 1.1. Пусть $d = 2$. Тогда $n = 1$, $\theta = 1$. Получим один класс подынтервалов $Q_{11} = (0,1)$ и $Q_{12} = (1,2)$ (рис. 1).

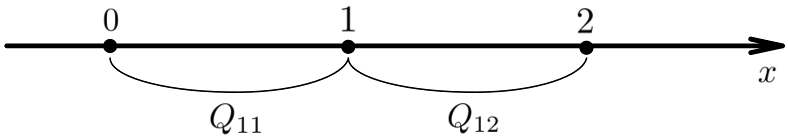

Рис. 1. $\theta = 1$

Пример 1.2. Пусть $d = e$. Тогда $n = 2$, $\theta = e - 2$. Получим два класса подынтервалов $Q_{11} = (0, e-2)$, $Q_{12} = (1, e-1)$, $Q_{13} = (2, e)$ и $Q_{21} = (e-2, 1)$, $Q_{22} = (e-1, 2)$ (рис. 2).

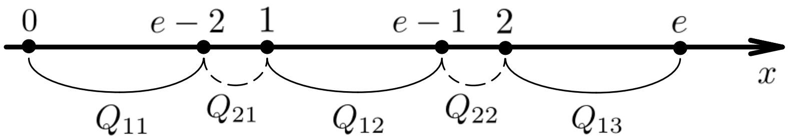

Рис. 2. $\theta = e - 2$

Через $L_2\Big(\bigcup\limits_k Q_{sk}\Big)$ обозначим подпространство функций из $L_2(Q)$, равных нулю вне $\bigcup\limits_k Q_{sk}$, $k = 1,\dots,N(s)$, где $N(1) = n+1$, $N(2) = n$; $s = 1,2$, если $0 < \theta < 1$; $s = 1$, если $\theta = 1$. Очевидно, $L_2\Big(\bigcup\limits_k Q_{1k}\Big) = L_2(Q)$, если $\theta = 1$. Обозначим через $P_s : L_2(Q) \to L_2\Big(\bigcup\limits_k Q_{sk}\Big)$ оператор ортогонального проектирования функций на $L_2\Big(\bigcup\limits_k Q_{sk}\Big)$ в пространстве $L_2(Q)$.

Очевидно,

$$L_2(Q) = \bigoplus_s L_2\Big(\bigcup_k Q_{sk}\Big). \tag{1.7}$$

Заметим, что при $\theta = 1$ оператор $P_1 : L_2(Q) \to L_2\Big(\bigcup\limits_k Q_{1k}\Big)$ является единичным оператором. Здесь, как и ранее, $Q_{1k} = (k-1,k)$ при $k = 1,\dots,n+1$.

Из определений введенных операторов и подынтервалов вытекает следующая лемма.

Лемма 1.4. *Пространство функций* $L_2\Big(\bigcup\limits_k Q_{sk}\Big)$ *есть инвариантное подпространство оператора* R_Q.

Построим изоморфизм гильбертовых пространств

$$U_s : L_2\Big(\bigcup_k Q_{sk}\Big) \to L_2^N(Q_{s1}),$$

определив вектор-функцию $(U_s u)(x)$ следующим равенством:

$$(U_s u)_k(x) = u(x+k-1),\ x \in Q_{sk},\ k = 1,\dots,N; \tag{1.8}$$

$$L_2^N(Q_{s1}) = \prod_{k=1}^N L_2(Q_{s1}),$$

где $N = n + 1$ при $s = 1$; $N = n$ при $s = 2$.

Обозначим через $R_s = R_s(x)$, $x \in \overline{Q}_{s1}$, матрицу порядка $N(s) \times N(s)$ с элементами

$$r_{ij}^s(x) = a_{j-i}(x + i - 1), \quad x \in \mathbb{R}; \quad i, j = 1, \ldots, N(s). \tag{1.9}$$

Таким образом, матрица $R_1 = R_1(x)$ имеет вид

$$R_1 = \begin{pmatrix} a_0(x) & a_1(x) & \ldots & a_n(x) \\ a_{-1}(x+1) & a_0(x+1) & \ldots & a_{n-1}(x+1) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{-n}(x+n) & a_{-n+1}(x+n) & \ldots & a_0(x+n) \end{pmatrix}, \quad x \in \mathbb{R},$$

а матрица $R_2 = R_2(x)$ имеет вид

$$R_2 = \begin{pmatrix} a_0(x) & a_1(x) & \ldots & a_{n-1}(x) \\ a_{-1}(x+1) & a_0(x+1) & \ldots & a_{n-2}(x+1) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{-n+1}(x+n-1) & a_{-n+2}(x+n-1) & \ldots & a_0(x+n-1) \end{pmatrix}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Очевидно, матрица R_2 может быть получена из матрицы R_1 вычеркиванием последней строки и последнего столбца. В дальнейшем будем рассматривать матрицы $R_1(x)$ при $x \in \overline{Q}_{11}$, а $R_2(x)$ при $x \in \overline{Q}_{21}$.

Лемма 1.5. *Оператор $R_{Qs} = U_s R_Q U_s^{-1} : L_2^N(Q_{s1}) \to L_2^N(Q_{s1})$ является оператором умножения на квадратную матрицу $R_s(x)$.*

Доказательство. Положим $V \in L_2^N(Q_{s1})$ и обозначим $u = U_s^{-1}V \in L_2\Big(\bigcup\limits_k Q_{sk}\Big)$. В силу (1.8) и (1.9) получим

$$(R_{Qs}V)_i(x) = \big(U_s R_Q U_s^{-1} V\big)_i(x) = (U_s R_Q u)_i(x) = (R_Q u)(x + i - 1) =$$
$$= \sum_l a_l(x + i - 1) u(x + i - 1 + l) = \sum_{j=1}^N r_{ij}^s(x) (U_s u)_j(x) = \sum_{j=1}^N r_{ij}^s(x) V_j(x), \quad x \in \overline{Q}_{s1}.$$

Здесь $u(x + i - 1 + l) = 0$ при $x + i - 1 + l \notin (0, d)$. □

Пусть $A : H \to H$ — ограниченный самосопряженный оператор в гильбертовом пространстве H. Назовем оператор A *положительным* (*неотрицательным*), если $(Ax, x) > 0$ ($(Ax, x) \geqslant 0$) для всех $x \in H$, $x \neq 0$. Назовем оператор A *положительно определенным*, если $(Ax, x) > c_1(x, x)$ для всех $x \in H$. В случае оператора умножения на эрмитову матрицу в конечномерном пространстве понятия положительного и положительно определенного операторов совпадают.

Лемма 1.6. *Оператор $R_Q + R_Q^* : L_2(Q) \to L_2(Q)$ является положительно определенным тогда и только тогда, когда матрицы $R_s(x) + R_s^*(x)$ положительно определены для всех $x \in \overline{Q}_{s1}$, $s = 1$, если $\theta = 1$; $s = 1, 2$, если $0 < \theta < 1$; $R_s^*(x)$ — эрмитово сопряженные матрицы.*

Определение 1.1. Будем говорить, что дифференциально-разностное уравнение (1) удовлетворяет *условию сильной эллиптичности*, если матрицы $R_s(x) + R_s^*(x)$ положительно определены для всех $x \in \overline{Q}_{s1}$, $s = 1$, если $\theta = 1$; $s = 1, 2$, если $0 < \theta < 1$.

Очевидно, условие сильной эллиптичности для уравнения (1) эквивалентно выполнению неравенства

$$\operatorname{Re}(R_s Y, Y) \geqslant c\|Y\|^2 \tag{1.10}$$

для всех $x \in \overline{Q}_{s1}$, s и $Y \in \mathbb{C}^{N(s)}$, где $s = 1, 2$, если $0 < \theta < 1$, и $s = 1$, если $\theta = 1$; $c > 0$ не зависит от x и Y; $(\cdot, \cdot)$ и $\|\cdot, \cdot\|$ — скалярное произведение и норма в $\mathbb{C}^{N(s)}$ соответственно. Далее будем предполагать, что уравнение (1) удовлетворяет условию сильной эллиптичности.

Замечание 1.1. По своим свойствам и методам исследования краевые задачи для обыкновенных функционально-дифференциальных уравнений находятся значительно ближе к краевым задачам для эллиптических дифференциальных уравнений, чем к краевым задачам для обыкновенных дифференциальных уравнений (см. [15]). Например, если R_Q — оператор умножения на вещественную гладкую функцию $k(x) \neq 0$, то уравнение (1) превращается в обыкновенное дифференциальное уравнение, соответствующий дифференциальный оператор будет самосопряженным, а его спектр — вещественным, дискретным и полуограниченным. Если же коэффициенты оператора R_Q — вещественные числа, а матрицы R_s $(s = 1, 2)$ симметричные, невырожденные, но не знакоопределенные, то соответствующий дифференциально-разностный оператор в уравнении (1) будет самосопряженным, а его спектр вещественным и дискретным, но не будет полуограниченным (см. [15, пример 23.2]). Таким образом, термин «сильно эллиптическое дифференциально-разностное уравнение» представляется оправданным.

Определение 1.2. Краевую задачу (1), (2) будем называть *второй краевой задачей* для сильно эллиптического дифференциально-разностного уравнения.

Пусть $W_2^k(Q)$ — пространство Соболева комплекснозначных функций из $L_2(Q)$, имеющих все обобщенные производные вплоть до k-ого порядка из $L_2(Q)$. Скалярное произведение для $u, v \in W_2^k(Q)$ вводится по формуле

$$(u, v)_{W_2^k(Q)} = \sum_{i=0}^{k} \int_0^d u^{(i)} \overline{v^{(i)}} dx.$$

Лемма 1.7. *Пусть* $\det R_s(x) \neq 0$ *при* $x \in \overline{Q}_{s1}$, $s = 1, 2$, *если* $0 < \theta < 1$, *и* $\det R_1(x) \neq 0$ *при* $x \in \overline{Q}_{11}$, *если* $\theta = 1$. *Тогда оператор* $R_Q : L_2(Q) \to L_2(Q)$ *имеет ограниченный обратный. Пусть, кроме того,* $w \in W_2^k(Q_{sj})$ $(s = 1, 2;\ j = 1, \ldots, N(s)$, *если* $0 < \theta < 1$, *и* $s = 1$, $j = 1, \ldots, n+1$, *если* $\theta = 1)$. *Тогда* $R_Q^{-1} w \in W_2^k(Q_{si})$ *и*

$$\|R_Q^{-1} w\|_{W_2^k(Q_{si})} \leqslant c_0 \sum_{j=1}^{N(s)} \|w\|_{W_2^k(Q_{sj})}, \tag{1.11}$$

где $c_0 > 0$ *не зависит от* w.

Доказательство аналогично доказательству леммы 2.12 из [15, гл. 1, §2].

2. Некоторые сведения из вариационной теории краевых задач

Ниже мы изложим некоторые определения и результаты, содержащиеся в [9, гл. 2, §9]. Пусть V и H — гильбертовы пространства, причем V непрерывно и плотно вложено в H. Пространство H совпадает со своим антидвойственным, и если V' антидвойственно к V, то поскольку V плотно в H, можно отождествить H с подпространством пространства V'. Таким образом, $V \subset H \subset V'$.

Обозначим через $(\cdot, \cdot)$ скалярное произведение в H, а через $|\cdot|$ норму в H. Если $f \in V'$, а $v \in V$, то действие антилинейного функционала f на v мы обозначим через $\langle f, v \rangle$. В случае $f \in H$, $v \in V$ мы имеем $\langle f, v \rangle = (f, v)$.

Обозначим через $(\cdot, \cdot)_V$ и $\|\cdot\|_V$ скалярное произведение в пространстве V и норму в V соответственно.

Пусть $b(u, v)$ — полуторалинейная непрерывная форма в $V \times V$.

Определение 2.1. Полуторалинейная непрерывная форма $b(u, v)$ в $V \times V$ называется V-*эллиптической*, если

$$\operatorname{Re} b(u, u) \geqslant \alpha \|u\|_V^2 \tag{2.1}$$

для любого $u \in V$, где $\alpha > 0$ не зависит от u.

Рассмотрим следующую задачу: найти элемент $u \in V$ такой, что

$$b(u, v) = \langle f, v \rangle \tag{2.2}$$

для любого $v \in V$, где $f \in V'$.

В силу непрерывности полуторалинейной формы $b(u,v)$ в $V \times V$ мы можем представить ее в виде

$$b(u,v) = \langle Au, v\rangle, \quad u,v \in V, \tag{2.3}$$

где $A : V \to V'$ — линейный ограниченный оператор. Тогда задача нахождения решения $u \in V$, удовлетворяющего тождеству (2.2), эквивалентна линейному операторному уравнению вида

$$Au = f. \tag{2.4}$$

Отметим, что в случае краевых задач для сильно эллиптических дифференциальных уравнений абстрактные задачи (2.2) и (2.4) служат эквивалентными определениями обобщенных решений. В разделе 3 мы используем эти формулировки для определения обобщенных решений второй краевой задачи для дифференциально-разностного уравнения.

Лемма 2.1. *Пусть полуторалинейная форма $b(u,v)$ является V-эллиптической. Тогда для любого $f \in V'$ существует единственное решение $u \in V$ тождества* (2.2)*, при этом*

$$\|u\|_V \leqslant c_0 \|f\|_{V'}, \tag{2.5}$$

где $c_0 > 0$ не зависит от f.

Наряду с задачей о нахождении решения тождества (2.2) рассмотрим следующую задачу: найти элемент $u \in V$ такой, что

$$b(u,v) + \lambda(u,v) = \langle f, v\rangle \tag{2.6}$$

для любого $v \in V$, где $\lambda \in \mathbb{C}$ задано.

Определение 2.2. Полуторалинейная непрерывная форма $b(u,v)$ в $V \times V$ называется *V-коэрцитивной*, если существуют константы $\lambda_0 \in \mathbb{R}$ и $\alpha > 0$ такие, что

$$\operatorname{Re} b(u,u) + \lambda_0 |u|^2 \geqslant \alpha \|u\|_V^2 \tag{2.7}$$

для любого $u \in V$.

Из леммы 2.1 вытекает

Следствие 2.1. *Пусть полуторалинейная форма $b(u,v)$ является V-коэрцитивной. Тогда при $\lambda \in \mathbb{C}$ таком, что $\operatorname{Re}\lambda \geqslant \lambda_0$, для любого $f \in V'$ существует единственное решение $u \in V$ тождества* (2.6)*, при этом*

$$\|u\|_V \leqslant c_\lambda \|f\|_{V'}, \tag{2.8}$$

где $c_\lambda > 0$ не зависит от f.

Эквивалентное изложение абстрактного подхода к исследованию краевых задач для сильно эллиптических дифференциальных уравнений можно найти также в [5, гл. VI].

3. Разрешимость второй краевой задачи для дифференциально-разностного уравнения

Введем в $W_2^1(0,d) \times W_2^1(0,d)$ полуторалинейную форму по формуле

$$b_R(u,v) = \left(R_Q u', v'\right)_{L_2(0,d)}.$$

Лемма 3.1. *Существует постоянная $c_1 > 0$ такая, что выполнено неравенство*

$$|b_R(u,v)| \leqslant c_1 \|u\|_{W_2^1(0,d)} \|v\|_{W_2^1(0,d)}, \quad u,v \in W_2^1(0,d), \tag{3.1}$$

где $c_1 > 0$ не зависит от u и v. При этом для каждого $c_3 > 0$ существует $c_2 > 0$ такое, что для любой функции $u \in W_2^1(0,d)$ выполнено неравенство типа Гординга

$$\operatorname{Re} b_R(u,u) + c_3 \|u\|^2_{L_2(0,d)} \geqslant c_2 \|u\|^2_{W_2^1(0,d)}. \tag{3.2}$$

Доказательство. В силу ограниченности оператора $R_Q : L_2(0,d) \to L_2(0,d)$ (лемма 1.2) и неравенства Коши—Буняковского получим неравенство (3.1). Покажем, что для $u \in W_2^1(0,d)$ выполняется оценка

$$\operatorname{Re}\left(R_Q u', u'\right)_{L_2(0,d)} \geqslant c\|u'\|^2_{L_2(0,d)}.$$

Используя введенный по формуле (1.8) изоморфизм U_s и неравенство (1.10), получим

$$\operatorname{Re}\left(R_Q u', u'\right)_{L_2(Q)} = \operatorname{Re}\sum_s \Big(R_s(U_sP_su)', (U_sP_su)'\Big)_{L_2^N(Q_{s1})} \geqslant$$
$$\geqslant c\sum_s \Big((U_sP_su)', (U_sP_su)'\Big)_{L_2^N(Q_{s1})} = c\|u'\|^2_{L_2(Q)}. \tag{3.3}$$

□

Из (3.3) следует неравенство (3.2).

Замечание 3.1. Из неравенства (3.3) следует, что

$$\operatorname{Re} b_R(u,u) \geqslant c\|u'\|^2_{L_2(0,d)}, \qquad u \in W_2^1(0,d).$$

В силу леммы 3.1 полуторалинейная форма $b_R(u,v)$, $u,v \in W_2^1(Q)$, является $W_2^1(Q)$-коэрцитивной, при этом для любого $\lambda_0 > 0$ существует $\alpha > 0$ такое, что неравенство (2.7) выполняется при всех $u \in W_2^1(Q)$. Дадим теперь определение обобщенного решения задачи (1), (2), предполагая, что $f \in L_2(Q)$.

Определение 3.1. Функцию $u \in W_2^1(Q)$ будем называть *обобщенным решением* задачи (1), (2), если для всех $v \in W_2^1(Q)$ выполняется интегральное тождество

$$b_R(u,v) = (f,v)_{L_2(Q)}. \tag{3.4}$$

Из раздела 2 следует, что форму $b_R(u,v)$ можно представить в виде

$$b_R(u,v) = \langle A_R u, v\rangle\,, \quad u,v \in W_2^1(Q), \tag{3.5}$$

где $A_R : W_2^1(Q) \to (W_2^1(Q))'$ — линейный ограниченный оператор. Таким образом, можно дать следующее определение обобщенного решения задачи (1), (2), эквивалентное определению (3.1).

Определение 3.2. Функцию $u \in W_2^1(Q)$ будем называть *обобщенным решением* задачи (1), (2), если

$$A_R u = f. \tag{3.6}$$

Теорема 3.1. *Если уравнение* (1) *удовлетворяет условию сильной эллиптичности, то вторая краевая задача* (1), (2) *разрешима тогда и только тогда, когда*

$$\int_0^d f(x)dx = 0, \tag{3.7}$$

при этом существует единственное обобщенное решение $u \in W_2^1(Q)$ задачи (1), (2)*, удовлетворяющее условию*

$$\int_0^d u(x)dx = 0. \tag{3.8}$$

Доказательство. 1. Рассмотрим операторное уравнение

$$(A_R + \lambda_0 I)u = f, \tag{3.9}$$

где $\operatorname{Re}\lambda_0 > 0$.

Введем неограниченный оператор $\mathcal{A}_R : L_2(Q) \supset D(\mathcal{A}_R) \to L_2(Q)$ с областью определения $D(\mathcal{A}_R) = \left\{u \in W_2^1(Q) : A_R u \in L_2(Q)\right\}$, действующий по формуле

$$\mathcal{A}_R u = A_R u, \quad u \in D(\mathcal{A}_R).$$

В силу $W_2^1(Q)$-коэрцитивности формы $b_R(u,v)$, следствия 2.1 и непрерывности вложения $L_2(Q)$ в $\left(W_2^1(Q)\right)'$ существует ограниченный обратный оператор $(\mathcal{A}_R + \lambda_0 I)^{-1} : L_2(Q) \to L_2(Q)$, при этом

$$\|u\|_{W_2^1(Q)} \leqslant k_1\|f\|_{L_2(Q)}. \tag{3.10}$$

Таким образом, спектр оператора $\mathcal{A}_R$ принадлежит множеству $\operatorname{Re}\lambda \geqslant 0$. Кроме того, в силу компактности вложения $W_2^1(Q)$ в $L_2(Q)$ и оценки (3.10) оператор $(\mathcal{A}_R + \lambda_0 I)^{-1} : L_2(Q) \to L_2(Q)$

компактный. Поэтому в силу теоремы 6.29 из [5, гл. III, §6] спектр $\sigma(\mathcal{A}_R)$ состоит из изолированных собственных значений конечной кратности, а оператор $R(\lambda, \mathcal{A}_R) : L_2(Q) \to L_2(Q)$ компактный при $\lambda \notin \sigma(\mathcal{A}_R)$.

2. Определим сопряженную форму

$$b_R^*(u,v) = \overline{b_R(v,u)}, \quad u, v \in W_2^1(Q).$$

Аналогично тождеству (2.3) мы получаем

$$b_R^*(u,v) = \langle \widetilde{A}_R u, v\rangle, \quad u, v \in W_2^1(Q), \tag{3.11}$$

где $\widetilde{A}_R : W_2^1(Q) \to \big(W_2^1(Q)\big)'$ — линейный ограниченный оператор.

Введем неограниченный оператор $\widetilde{\mathcal{A}}_R : L_2(Q) \supset D(\widetilde{\mathcal{A}}_R) \to L_2(Q)$ с областью определения $D(\widetilde{\mathcal{A}}_R) = \{u \in W_2^1(Q) : \widetilde{A}_R u \in L_2(Q)\}$, действующий по формуле

$$\widetilde{\mathcal{A}}_R u = \widetilde{A}_R u, \quad u \in D(\widetilde{\mathcal{A}}_R).$$

Из определений операторов $\mathcal{A}_R$ и $\widetilde{\mathcal{A}}_R$ следует, что

$$(\mathcal{A}_R u, v)_{L_2(Q)} = b_R(u,v) = \overline{b_R^*(v,u)} = (u, \widetilde{\mathcal{A}}_R v)_{L_2(Q)}, \quad u \in D(\mathcal{A}_R), v \in D(\widetilde{\mathcal{A}}_R).$$

Следовательно, $\widetilde{\mathcal{A}}_R \subset \mathcal{A}_R^*$ и $\mathcal{A}_R \subset (\widetilde{\mathcal{A}}_R)^*$.

Аналогично части 1 доказательства можно показать, что спектр $\sigma(\widetilde{\mathcal{A}}_R)$ состоит из изолированных собственных значений конечной кратности. Таким образом, в силу леммы 13 из [1, гл. XIV, §6] следует, что $\widetilde{\mathcal{A}}_R = \mathcal{A}_R^*$.

3. Докажем, что оператор $\mathcal{A}_R$ фредгольмов и $\operatorname{ind} \mathcal{A}_R = 0$. Напомним, что оператор $\mathcal{A}_R$ называется фредгольмовым, если он замкнут, имеет замкнутый в $L_2(Q)$ образ $\mathcal{R}(\mathcal{A}_R)$, а его ядро $\mathcal{N}(\mathcal{A}_R)$ и коядро $\mathcal{R}(\mathcal{A}_R)^\perp$ конечномерны, при этом по определению $\operatorname{ind} \mathcal{A}_R = \dim \mathcal{N}(\mathcal{A}_R) - \operatorname{codim} \mathcal{R}(\mathcal{A}_R)$.

Пусть $\lambda_0 < 0$. Тогда $\lambda_0 \in \rho(\mathcal{A}_R)$. Как показано выше, оператор $(\mathcal{A}_R - \lambda_0 I)^{-1} : L_2(Q) \to L_2(Q)$ — компактный. Поэтому оператор $\mathcal{A}_R(\mathcal{A}_R - \lambda_0 I)^{-1} = I + \lambda_0(\mathcal{A}_R - \lambda_0 I)^{-1}$ является каноническим фредгольмовым оператором с нулевым индексом. Следовательно, оператор $\mathcal{A}_R$ фредгольмов и $\operatorname{ind} \mathcal{A}_R = 0$.

4. Если $v \in \mathcal{N}(\mathcal{A}_R)$ и $w \in \mathcal{N}(\mathcal{A}_R^*)$, то в силу (3.3), (3.5) и (3.11) $v'(x) = w'(x) = 0$ почти всюду на $(0,d)$. Следовательно, $v(x) \equiv \mathrm{const}$ и $w(x) \equiv \mathrm{const}$ почти всюду на $(0,d)$. Для существования решения задачи (1), (2) необходимо и достаточно, чтобы $(f,w)_{L_2(Q)} = 0$, при этом существует единственное обобщенное решение $u \in W_2^1(Q)$ задачи (1), (2), удовлетворяющее условию $\int\limits_0^d u(x)dx = 0$. □

Из доказательства теоремы 3.1 вытекает

Следствие 3.1. *Пусть уравнение* (1) *удовлетворяет условию сильной эллиптичности. Тогда оператор* $\mathcal{A}_R$ *фредгольмов,* $\operatorname{ind} \mathcal{A}_R = 0$, $\dim \mathcal{N}(\mathcal{A}_R) = 1$ *и* $1 \in \mathcal{N}(\mathcal{A}_R)$.

4. Гладкость обобщенных решений второй краевой задачи для дифференциально-разностного уравнения на подынтервалах

Докажем, что гладкость обобщенных решений задачи (1), (2) сохраняется на подынтервалах Q_{sk}.

Теорема 4.1. *Пусть выполняется условие сильной эллиптичности* (1.10), $u \in W_2^1(0,d)$ — *решение операторного уравнения* (3.9) *с* $\operatorname{Re} \lambda_0 > 0$ *и* $f \in L_2(0,d)$. *Тогда* $u \in W_2^2(Q_{sk})$ $(s = 1, 2;$ $k = 1, \dots, N(s)$, $N(1) = n+1$, $N(2) = n$, *если* $0 < \theta < 1$; $s = 1$; $k = 1, \dots, n+1$, *если* $\theta = 1)$, *при этом справедлива оценка*

$$\|u\|_{W_2^2(Q_{sj})} \leqslant c_4 \|f\|_{L_2(0,d)}. \tag{4.1}$$

Доказательство. Подставляя $b_R(u,v) = (R_Q u', v')_{L_2(0,d)}$ в интегральное тождество

$$b_R(u,v) + \lambda_0 (u,v)_{L_2(0,d)} = (f,v)_{L_2(0,d)},$$

получим

$$\int_0^d R_Q u' \overline{v}' dx = \int_0^d f_0 \overline{v} dx, \tag{4.2}$$

где $f_0 = f - \lambda_0 u$.

В силу (3.10)

$$\|f_0\|_{L_2(0,d)} \leqslant c_1 \|f\|_{L_2(0,d)}. \tag{4.3}$$

Пусть s — фиксированное число. В интегральном тождестве (4.2) предположим, что $v \in C_0^\infty\Big(\bigcup\limits_k Q_{sk}\Big)$, а в случае $0 < \theta < 1$ положим дополнительно, что $v(x) = 0$ при $x \notin \bigcup\limits_k Q_{sk}$. Из равенства (1.8) и леммы 1.5 вытекает, что

$$\int_{Q_{s1}} \big(R_s U_s P_s u', U_s v'\big)\, dx = \int_{Q_{s1}} (U_s P_s f_0, U_s v)\, dx,$$

где $(\cdot,\cdot)$ — скалярное произведение в $\mathbb{C}^N$, $N = N(s)$. Следовательно, вектор-функция $U_s P_s u \in W_2^{1,N}(Q_{s1})$ является обобщенным решением системы N обыкновенных дифференциальных уравнений

$$-\big(R_s U_s P_s u'\big)'(x) = (U_s P_s f_0)(x), \quad x \in Q_{s1}, \tag{4.4}$$

где $W_2^{1,N}(Q_{s1}) = \prod\limits_{j=1}^N W_2^1(Q_{s1})$.

Поскольку $U_s P_s f_0 \in L_2^N(Q_{s1})$, то $R_s U_s P_s u' \in W_2^{1,N}(Q_{s1})$. Из неравенства (1.10) следует, что $\det R_s(x) \neq 0$, $x \in \overline{Q}_{s1}$, при этом по условию элементы матрицы $R_s(x)$ — бесконечно дифференцируемые функции. Таким образом, $U_s P_s u' \in W_2^{1,N}(Q_{s1})$ и $U_s P_s u \in W_2^{2,N}(Q_{s1})$, т. е. $u \in W_2^2(Q_{sk})$, $k = 1, \ldots, N(s)$.

Применяя формулу Лейбница к левой части равенства (4.4), имеем

$$R_s(x) U_s P_s u''(x) = F(x), \quad x \in Q_{s1}, \tag{4.5}$$

где $F(x) = U_s P_s f_0(x) - R_s'(x) U_s P_s u'(x) \in L_2^N(Q_{s1})$.

Из неравенств (4.3) и (3.10) следует, что

$$\|F\|_{L_2^N(Q_{s1})} \leqslant c_2 \|f\|_{L_2(Q)}. \tag{4.6}$$

Поскольку $\det R_s(x) \neq 0$, $x \in \overline{Q}_{s1}$, из (4.5) и (4.6) следует, что

$$\|u''\|_{L_2(Q_{sj})} \leqslant c_3 \|f\|_{L_2(Q)}. \tag{4.7}$$

Наконец, из неравенств (4.7) и (3.10) вытекает оценка (4.1). □

Из теоремы 4.1 следует, что обобщенное решение $u(x)$ задачи (1), (2) также обладает соответствующей гладкостью на подынтервалах Q_{sk}. Однако, поскольку в силу теоремы 3.1 это решение не является единственным, оценка (4.1) уже не имеет места. Таким образом, мы получаем следующий результат.

Следствие 4.1. *Пусть выполняется условие сильной эллиптичности* (1.10), *а* $u \in W_2^1(0,d)$ — *решение операторного уравнения* (3.6), *т. е. функция* u *является обобщенным решением задачи* (1), (2), *где* $f \in L_2(0,d)$. *Тогда* $u \in W_2^2(Q_{sk})$ $(s = 1, 2;\ k = 1, \ldots, N(s),\ N(1) = n+1,\ N(2) = n,$ *если* $0 < \theta < 1;\ s = 1;\ k = 1, \ldots, n+1,$ *если* $\theta = 1)$.

Докажем теперь, что, если $u(x)$ — обобщенное решение задачи (1), (2), то уравнение (1) выполняется почти всюду на $(0,d)$, и справедливы краевые условия (2).

Следствие 4.2. *Пусть имеет место неравенство* (1.10), *а* $u \in W_2^1(0,d)$ — *обобщенное решение задачи* (1), (2), *где* $f \in L_2(0,d)$. *Тогда* $R_Q u' \in W_2^1(0,d)$, *уравнение* (1) *удовлетворяется почти всюду на* $(0,d)$, *при этом выполняются краевые условия* (2).

Доказательство.

1. Полагая, что в интегральном тождестве (3.4) $v \in C_0^\infty(0,d)$, и используя определение обобщенной производной в пространстве распределений $D'(0,d)$, получим

$$\left\langle -(R_Q u')', v \right\rangle = (f,v)_{L_2(0,d)}.$$

Поскольку $f \in L_2(0,d)$, а $v \in C_0^\infty(0,d)$ — произвольная функция, имеем

$$-(R_Q u')'(x) = f(x) \tag{4.8}$$

почти всюду на $(0,d)$ и $(R_Q u')' \in L_2(0,d)$, т. е.

$$R_Q u' \in W_2^1(0,d). \tag{4.9}$$

2. Положим теперь, что в интегральном тождестве (3.4) $v \in W_2^1(0,d)$ — произвольная функция. Из (4.9) следует, что $R_Q u' \in C[0,d]$. Тогда, интегрируя по частям левую часть равенства (3.4), получим

$$-\int_0^d (R_Q u')' \overline{v} dx + (R_Q u')(d)\overline{v}(d) - (R_Q u')(0)\overline{v}(0) = \int_0^d f \overline{v} dx.$$

Отсюда и из (4.8) вытекает равенство

$$(R_Q u')(d)\overline{v}(d) - (R_Q u')(0)\overline{v}(0) = 0. \tag{4.10}$$

Поскольку $v \in W_2^1(0,d)$ — произвольная функция, тождество (4.10) влечет за собой выполнение равенств

$$(R_Q u')(0) = (R_Q u')(d) = 0.$$

□

5. Гладкость обобщенных решений второй краевой задачи для дифференциально-разностного уравнения на интервале целой длины

Для того, чтобы сформулировать результат о гладкости обобщенных решений на интервале целой длины $d = n+1$, докажем вначале вспомогательные результаты, а перед этим введем некоторые обозначения.

Рассмотрим блочную матрицу $\mathbf{R}_1$ порядка $(n+2) \times (2n+2)$ вида

$$\mathbf{R}_1 = \left(\widetilde{R}_1 | \widetilde{R}_2 \right),$$

где $\widetilde{R}_1$, $\widetilde{R}_2$ — матрицы порядка $(n+2) \times (n+1)$, которые имеют вид

$$\widetilde{R}_1 = \begin{pmatrix} R_1(0) \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \widetilde{R}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ R_1(1) \end{pmatrix},$$

при этом 0 обозначает нулевую строку длины $n+1$. Другими словами,

$$\mathbf{R}_1 = \begin{pmatrix} a_0(0) & a_1(0) & \dots & a_n(0) & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_{-1}(1) & a_0(1) & \dots & a_{n-1}(1) & a_0(1) & a_1(1) & \dots & a_n(1) \\ a_{-2}(2) & a_{-1}(2) & \dots & a_{n-2}(2) & a_{-1}(2) & a_0(2) & \dots & a_{n-1}(2) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{-n}(n) & a_{-n+1}(n) & \dots & a_0(n) & a_{-n+1}(n) & a_{-n+2}(n) & \dots & a_1(n) \\ 0 & 0 & \dots & 0 & a_{-n}(n+1) & a_{-n+1}(n+1) & \dots & a_0(n+1) \end{pmatrix}.$$

Обозначим через $\mathbf{R}_1^1$ ($\mathbf{R}_1^2$) матрицу порядка $(n+2)\times(2n+1)$, полученную из матрицы $\mathbf{R}_1$ вычеркиванием первого (последнего) столбца соответственно, а через $\mathbf{R}_1^0$ матрицу порядка $(n+2) \times 2n$, полученную из $\mathbf{R}_1$ вычеркиванием первого и последнего столбцов.

Замечание 5.1. Первые $n+1$ столбцов матрицы $\mathbf{R}_1$ используются для описания линейных комбинаций правых производных решения в точках $0, 1, \dots, n$, а последние $n+1$ столбцов матрицы $\mathbf{R}_1$ — для описания линейных комбинаций левых производных решения в точках $1, 2, \dots, n+1$. Первая строка матрицы $\mathbf{R}_1$ задает линейную комбинацию значений правых производных в точках $0, 1, \dots, n$, соответствующую краевому условию $(R_Q u')(0) = 0$, а последняя строка этой матрицы задает линейную комбинацию значений левых производных в точках $1, 2, \dots, n+1$, соответствующую краевому условию $(R_Q u')(d) = 0$, см. (5.26). Строки матрицы $\mathbf{R}_1$ с номерами $2, \dots, n$ задают равенства $(R_Q u')(i+0) = (R_Q u')(i-0)$, $i = 1, \dots, n$, вытекающие из уравнения (1) и условия $f \in L_2(0, d)$, см. (5.18). Матрицы $\mathbf{R}_1^1$, $\mathbf{R}_1^2$ и $\mathbf{R}_1^0$ используются для подсчета числа линейно независимых функций, которым должна быть ортогональна правая часть уравнения (1), чтобы обеспечить выполнение равенств $u'(i+0) = u'(i-0)$, $i = 1, \dots, n$, т. е. гладкость обобщенных решений на всем интервале.

Будем предполагать далее, что выполняется условие

$$\sum_{k=1}^{n} \left(|a_k(0)| + |a_{-k}(n+1)|\right) \neq 0. \tag{5.1}$$

Замечание 5.2. Из условий (1.10), (5.1) следует, что рассматриваемое дифференциально-разностное уравнение (1) является уравнением нейтрального типа в точке $x = 0 + 0$ или в точке $x = n + 1 - 0$.

Действительно, из (1.10) следует, что

$$a_0(0) \neq 0, \tag{5.2}$$

$$a_0(n+1) \neq 0. \tag{5.3}$$

Из (5.1) следует существование числа m, $1 \leqslant m \leqslant n$, такого, что либо

$$a_m(0) \neq 0, \tag{5.4}$$

либо

$$a_{-m}(n+1) \neq 0. \tag{5.5}$$

Пусть, например, выполнено неравенство (5.4). Обозначим через M, $m \leqslant M \leqslant n$, наибольшее число такое, что $a_M(0) \neq 0$. Тогда в точке $x = 0 + 0$ уравнение (1) с точностью до производных первого порядка примет вид

$$a_M(0) u''(x + M) + \dots + a_0(0) u''(x) + \dots = f(x). \tag{5.6}$$

Сделаем замену переменных $x + M = y$. Тогда уравнение (5.6) примет канонический вид в точке $y = M + 0$

$$a_M(0) u''(y) + \dots + a_0(0) u''(y - M) + \dots = f(y - M). \tag{5.7}$$

Поскольку $a_M(0) \neq 0$ и в силу (5.2) $a_0(0) \neq 0$, то уравнение (5.6) имеет нейтральный тип в точке $x = 0 + 0$ (см. [13, гл. II]). В случае выполнения неравенства (5.5) аналогично можно показать, что уравнение (1) имеет нейтральный тип в точке $x = n + 1 - 0$. В силу теоремы 4.1 $u \in W_2^2(Q_{1k})$, $k = 1, \dots, n+1$. Поскольку мы рассматриваем уравнение (1) в достаточно малой правой полуокрестности точки $x = 0$, наши рассуждения являются обоснованными.

Лемма 5.1. *Пусть выполнены условия* (1.10) *и* (5.1). *Тогда* $\operatorname{rank} \boldsymbol{R}_1 = n + 2$ *и* $\operatorname{rank} \boldsymbol{R}_1^0 \geqslant n + 1$.

Доказательство. 1. Докажем, что $\operatorname{rank} \mathbf{R}_1 = n+2$. Рассмотрим минор M_{n+2} порядка $n+2$ матрицы $\mathbf{R}_1$, составленный из первого столбца этой матрицы, а также $(n+2)$-го, ..., $(2n+2)$-го столбцов. В силу условия (1.10) $M_{n+2} = a_0(0) \det R_1(1) \neq 0$. Следовательно, $\operatorname{rank} \mathbf{R}_1 = n + 2$.

2. Докажем теперь справедливость неравенства $\operatorname{rank} \mathbf{R}_1^0 \geqslant n + 1$. В силу условия (5.1) либо выполняется неравенство (5.4), либо справедливо неравенство (5.5). Кроме того, в силу (1.10) $\det R_2(1) \neq 0$. Тогда $(n+1)$-ая строка матрицы порядка $(n+1) \times n$, полученной из матрицы $R_1(1)$ вычеркиванием последнего столбца, равна нетривиальной линейной комбинации строк матрицы $R_2(1)$ порядка $n \times n$. С другой стороны, $(n+2)$-ая строка матрицы порядка $(n+2) \times n$, полученная из матрицы $\widetilde{R}_1$ вычеркиванием первого столбца, является нулевой. Следовательно, она равна тривиальной линейной комбинации строк матрицы $R_2(1)$. Таким образом, $(n+2)$-ая строка матрицы $\mathbf{R}_1^0$ не может быть равна линейной комбинации второй, третьей, ..., $(n+1)$-ой строк этой матрицы. Это означает, что $\operatorname{rank} \mathbf{R}_1^0 \geqslant n + 1$. □

Рассмотрим матричное уравнение
$$\mathbf{R}_1\Phi = 0, \tag{5.8}$$
где $\Phi := (\varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_n, -\psi_1, -\psi_2, \ldots, -\psi_{n+1})^T$.

Обозначим $H_1 := (a_0(0), a_{-1}(1), \ldots, a_{-n}(n), 0)^T$ и $H_2 := (0, a_n(1), \ldots, a_1(n), a_0(n+1))^T$. Перенося в уравнении (5.8) члены $\varphi_0 H_1$ и $-\psi_{n+1}H_2$ в правую часть, получим
$$\mathbf{R}_1^0\Phi^0 = -\varphi_0 H_1 + \psi_{n+1}H_2, \tag{5.9}$$
где $\Phi^0 := (\varphi_1, \ldots, \varphi_n, -\psi_1, \ldots, -\psi_n)^T$.

В формулировке следующего вспомогательного результата мы будем предполагать, что $\operatorname{rank}\mathbf{R}_1^0 = n+1$, при этом $\operatorname{rank}\mathbf{R}_1^1 = \operatorname{rank}\mathbf{R}_1^2 = n+2$. Обозначим через $P_{\mathbf{R}_1^0}$ оператор ортогонального проектирования в $\mathbb{C}^{n+2}$ на $\mathcal{R}(\mathbf{R}_1^0)$, т. е. на образ оператора умножения на матрицу $\mathbf{R}_1^0$. В силу условия $\operatorname{rank}\mathbf{R}_1^0 = n+1$ коразмерность $\mathcal{R}(\mathbf{R}_1^0)$ равна 1. Поэтому ненулевые векторы $(I - P_{\mathbf{R}_1^0})H_1$ и $(I - P_{\mathbf{R}_1^0})H_2$ линейно зависимы. Таким образом, существует число $0 \neq \alpha_H \in \mathbb{C}$ такое, что
$$(I - P_{\mathbf{R}_1^0})H_2 = \alpha_H(I - P_{\mathbf{R}_1^0})H_1, \tag{5.10}$$
при этом в силу (1.10) $a_0(0) \neq 0$ и $a_0(n+1) \neq 0$. Следовательно, векторы H_1 и H_2 линейно независимы.

В силу теоремы Кронекера—Капелли система уравнений (5.9) совместна тогда и только тогда, когда
$$\varphi_0 = \alpha_H\psi_{n+1}, \tag{5.11}$$
поскольку это равенство эквивалентно тому, что $\operatorname{rank}\mathbf{R}_1^0 = \operatorname{rank}\mathbf{R}_1^e = n+1$, где $\mathbf{R}_1^e$ — расширенная матрица системы (5.9).

Итак, мы получили следующий результат.

Лемма 5.2. *Пусть выполнены условия* (1.10) *и* (5.1). *Пусть, кроме того,* $\operatorname{rank}\boldsymbol{R}_1^0 = n+1$, *при этом* $\operatorname{rank}\boldsymbol{R}_1^1 = \operatorname{rank}\boldsymbol{R}_1^2 = n+2$. *Тогда система уравнений* (5.9) *совместна тогда и только тогда, когда справедливо равенство* (5.11).

Докажем теперь, что в случае ортогональности правой части уравнения (1) в пространстве $L_2(0,d)$ конечному числу некоторых линейно независимых функций существует обобщенное решение задачи (1), (2), принадлежащее пространству $W_2^2(0,d)$, т. е. обладающее соответствующей гладкостью.

Предположим, что выполняются следующие условия:
$$\sum_{k=1}^{n}|a_{-k}(k)| \neq 0, \quad \sum_{k=1}^{n}|a_k(n+1-k)| \neq 0. \tag{5.12}$$

Замечание 5.3. Если коэффициенты $a_k(x)$ не зависят от x, то условие (5.1) следует из условий (5.12).

Обозначим через $G_j^1 = G_j^1(x)$ ($G_j^2 = G_j^2(x)$) j-й столбец матрицы порядка $n \times (n+1)$, полученной из матрицы $R_1 = R_1(x)$ вычеркиванием первой (последней) строки ($j = 1, \ldots, n+1$). Из условий (5.12) следует, что $G_1^1(0) \neq 0$ и $G_{n+1}^2(1) \neq 0$.

Из следствий 4.1, 4.2 вытекает, что
$$\begin{aligned} D(\mathcal{A}_R) = \big\{&u \in W_2^1(0,d) : R_Q u' \in W_2^1(0,d),\ u \in W_2^2(Q_{1k}),\ k = 1, \ldots, n+1, \\ &(R_Q u')(0) = (R_Q u')(d) = 0\big\}. \end{aligned} \tag{5.13}$$

Пусть $A_R^0 : W_2^2(0,d) \supset D(A_R^0) \to L_2(0,d)$ — ограниченный оператор с областью определения $D(A_R^0) = \left\{u \in W_2^2(0,d) : R_Q u' \in W_2^1(0,d), (R_Q u')(0) = (R_Q u')(d) = 0\right\}$, действующий по формуле $A_R^0 u = A_R u$, $u \in D(A_R^0)$. Из (5.13) получим
$$D(A_R^0) = D(\mathcal{A}_R) \cap W_2^2(0,d). \tag{5.14}$$

Теорема 5.1. *Пусть выполнены условия* (1.10) *и* (5.1), *а* $\theta = 1$. *Предположим, что столбцы* $G_1^1(0)$, $G_{n+1}^2(1)$ *линейно независимы. Тогда оператор* $A_R^0 : W_2^2(0,d) \supset D(A_R^0) \to L_2(0,d)$ *фредгольмов,* $1 \in \mathcal{N}(A_R^0)$ *и* $\dim\mathcal{N}(A_R^0) = 1$. *Если к тому же* $\operatorname{rank}\boldsymbol{R}_1^0 = \operatorname{rank}\boldsymbol{R}_1^1 = \operatorname{rank}\boldsymbol{R}_1^2$, *то* $\operatorname{codim}\mathcal{R}(A_R^0) = 3$; *если же* $\operatorname{rank}\boldsymbol{R}_1^0 < \max\left\{\operatorname{rank}\boldsymbol{R}_1^1, \operatorname{rank}\boldsymbol{R}_1^2\right\}$, *то* $\operatorname{codim}\mathcal{R}(A_R^0) = 2$.

Доказательство.

1. Очевидно, функция $u(x) \equiv 1$ принадлежит $D(A_R^0)$. В силу следствия 3.1 выполнено $1 \in \mathcal{N}(\mathcal{A}_R)$ и $\dim \mathcal{N}(\mathcal{A}_R) = 1$. Таким образом, поскольку $D(A_R^0) \subset D(\mathcal{A}_R)$, мы заключаем, что пространство $\mathcal{N}(A_R^0)$ одномерно и состоит из констант.

2. Из части 1 доказательства теоремы 3.1 следует, что операторное уравнение

$$(\mathcal{A}_R + \lambda_0 I)u = f \quad (\operatorname{Re}\lambda_0 > 0) \tag{5.15}$$

имеет единственное решение $u_f \in D(\mathcal{A}_R)$ для любого $f \in L_2(0,d)$. В силу (5.14) это решение u_f принадлежит $D(A_R^0)$ тогда и только тогда, когда

$$u_f \in W_2^2(0,d). \tag{5.16}$$

Таким образом, $\mathcal{N}(A_R^0 + \lambda_0 I) = \{0\}$, а условие принадлежности правой части уравнения (5.15) образу $\mathcal{R}(A_R^0 + \lambda_0 I)$ выражается соотношением (5.16). Перепишем это соотношение в виде условий ортогональности правой части уравнения (5.15) некоторым функциям из $L_2(0,d)$.

По условию $\theta = 1$. Тогда $d = n+1$ и разбиение интервала $(0,d)$ состоит из одного семейства подынтервалов $Q_{1k} = (k-1,k)$, $k = 1,\dots,n+1$. В силу (5.13) и теоремы вложения $u_f \in W_2^2(Q_{1k}) \subset C^1(\overline{Q}_{1k})$, $k = 1,\dots,n+1$. Поэтому определены значения производной $u_f'(x)$ на концах подынтервалов $\overline{Q}_{1k}$. Обозначим

$$\varphi_k = u_f'(k+0), \quad k = 0,\dots,n; \qquad \psi_k = u_f'(k-0), \quad k = 1,\dots,n+1.$$

Условие (5.16) можно переписать в виде

$$u_f'(k+0) = u_f'(k-0), \quad k = 1,\dots,n,$$

т. е.

$$\varphi_k = \psi_k, \quad k = 1,\dots,n. \tag{5.17}$$

С другой стороны, поскольку $u \in D(\mathcal{A}_R)$, из (5.13) следует, что

$$(R_Q u_f')(k+0) = (R_Q u_f')(k-0), \quad k = 1,\dots,n. \tag{5.18}$$

В силу равенств (1.8) и леммы 1.5 соотношения (5.18) примут вид

$$\sum_{j=1}^{n+1} r_{i+1,j}^1(0)\varphi_{j-1} = \sum_{j=1}^{n+1} r_{i,j}^1(1)\psi_j, \quad i = 1,\dots,n. \tag{5.19}$$

Из равенств (1.9) следует, что $r_{i,j}^1(1) = r_{i+1,j+1}^1(0)$. Равенства (5.19) можно переписать следующим образом:

$$r_{i+1,1}^1(0)\varphi_0 - r_{i,n+1}^1(1)\psi_{n+1} = \sum_{j=1}^{n} (r_{i,j}^1(1)\psi_j - r_{i+1,j+1}^1(0))\varphi_j = \sum_{j=1}^{n} r_{i,j}^1(1)(\psi_j - \varphi_j), \quad i = 1,\dots,n. \tag{5.20}$$

Если выполняются равенства (5.17), из (5.20) следует, что

$$\varphi_0 G_1^1(0) - \psi_{n+1} G_{n+1}^2(1) = 0. \tag{5.21}$$

По условию столбцы $G_1^1(0)$ и $G_{n+1}^2(1)$ линейно независимы. Следовательно,

$$\varphi_0 = 0,$$
$$\psi_{n+1} = 0,$$

т. е.

$$u_f'(0+0) = 0, \tag{5.22}$$

$$u_f'(n+1-0) = 0. \tag{5.23}$$

Таким образом, из условия (5.16) вытекает справедливость равенств (5.22), (5.23). С другой стороны, из равенств (5.22), (5.23), равенств (5.20) и невырожденности матрицы $R_2(1)$ (см. (1.10)) следуют равенства (5.17), т. е. условие (5.16).

В силу теоремы вложения $C^1(\overline{Q}_{1j}) \subset W_2^2(\overline{Q}_{1j})$, $j = \overline{1, n+1}$. Таким образом, из неравенства (4.1) следует, что $u_f'(0+0)$ и $u_f'(n+1-0)$ являются линейными ограниченными функционалами, зависящими от $f \in L_2(0,d)$. По теореме Рисса об общем виде функционала в гильбертовом пространстве существуют (определенные единственным образом) функции $g_1, g_2 \in L_2(0,d)$ такие, что

$$\begin{aligned} u_f'(0+0) &= (f, g_1)_{L_2(0,d)}, \\ u_f'(n+1-0) &= (f, g_2)_{L_2(0,d)}. \end{aligned} \tag{5.24}$$

Следовательно, равенства (5.22), (5.23) примут вид

$$(f, g_i)_{L_2(0,d)} = 0, \quad i = 1, 2. \tag{5.25}$$

3. Исследуем теперь, при каких условиях функции g_1, g_2 линейно независимы (то есть $\operatorname{codim} \mathcal{R}(A_R^0 + \lambda_0 I) = 2$) и при каких условиях они линейно зависимы, но $|g_1(x)| + |g_2(x)| \neq 0$ на множестве положительной меры (т. е. $\operatorname{codim} \mathcal{R}(A_R^0 + \lambda_0 I) = 1$).

Для этого вначале перепишем равенство

$$(R_Q u')(0) = (R_Q u')(d) = 0 \tag{5.26}$$

в виде

$$\sum_{j=1}^{n+1} r_{1,j}^1(0)\varphi_{j-1} = 0, \tag{5.27}$$

$$\sum_{j=1}^{n+1} r_{n+1,j}^1(1)\psi_j = 0. \tag{5.28}$$

В силу (5.13) функция $u \in W_2^1(0,d)$ такая, что $u \in W_2^2(Q_{1k})$, $k = 1, \ldots, n+1$, принадлежит $D(\mathcal{A}_R)$ тогда и только тогда, когда выполняются равенства (5.19), (5.27) и (5.28), которые можно переписать в виде матричного уравнения (5.8).

3а. Рассмотрим случай $\operatorname{rank} \mathbf{R}_1^0 = \operatorname{rank} \mathbf{R}_1^1 = \operatorname{rank} \mathbf{R}_1^2$. Докажем, что функции g_1, g_2 линейно независимы. Пусть $\alpha_1 g_1 + \alpha_2 g_2 = 0$, где $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{C}$, т. е. $\alpha_1 (f, g_1)_{L_2(0,d)} + \alpha_2 (f, g_2)_{L_2(0,d)} = 0$ для любого $f \in L_2(0,d)$. Докажем, что тогда $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$. Для того, чтобы установить справедливость последних равенств, достаточно показать, что существуют функции $f_1, f_2 \in L_2(0,d)$, обладающие свойством

$$(f_j, g_i)_{L_2(0,d)} = \delta_{ij}, \tag{5.29}$$

где δ_{ij} — символ Кронекера.

Докажем, например, что существует функция $f_1 \in L_2(0,d)$ такая, что $(f_1, g_1)_{L_2(0,d)} = 1$ и $(f_1, g_2)_{L_2(0,d)} = 0$.

Другими словами, нужно построить функцию $f_1 \in L_2(0,d)$, для которой

$$u_{f_1}'(0+0) := \widetilde{\varphi}_0 = 1, \quad u_{f_1}'(n+1-0) := \widetilde{\psi}_{n+1} = 0. \tag{5.30}$$

Введем $2n$-мерный вектор $\Phi^0 := (\varphi_1, \ldots, \varphi_n, -\psi_1, \ldots, -\psi_n)^T$ с неизвестными координатами. Полагая в (5.9) $\varphi_0 = \widetilde{\varphi}_0 = 1$ и $\psi_{n+1} = \widetilde{\psi}_{n+1} = 0$ (см. (5.30)), получим

$$\mathbf{R}_1^0 \Phi^0 = -H_1, \tag{5.31}$$

где $H_1 = (a_0(0), a_{-1}(1), \ldots, a_{-n}(n), 0)^T$. Из условия $\operatorname{rank} \mathbf{R}_1^0 = \operatorname{rank} \mathbf{R}_1^2$ и теоремы Кронекера—Капелли следует, что система уравнений (5.31) разрешима. Обозначим через $\widetilde{\Phi}^0 := (\widetilde{\varphi}_1, \ldots, \widetilde{\varphi}_n, -\widetilde{\psi}_1, \ldots, -\widetilde{\psi}_n)^T$ решение системы (5.31).

Докажем, что существует функция $f_1 \in L_2(0,d)$ такая, что решение уравнения (5.15) u_{f_1} удовлетворяет условию (5.30) и $u_{f_1}'(j+0) = \widetilde{\varphi}_j$, $u_{f_1}'(j-0) = \widetilde{\psi}_j$, $j = 1, \ldots, n$.

Введем функцию

$$w(x) := \begin{cases} \displaystyle\sum_{j=0}^{n} (x-j)\widetilde{\varphi}_j \xi(x-j), & x \in \displaystyle\bigcup_{j=0}^{n} \Big(j, j+\frac{1}{2}\Big), \\ \displaystyle\sum_{j=1}^{n+1} (x-j)\widetilde{\psi}_j \xi(x-j), & x \in \displaystyle\bigcup_{j=1}^{n+1} \Big(j-\frac{1}{2}, j\Big), \end{cases}$$

где $\xi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ — вещественнозначная функция, $0 \leqslant \xi(x) \leqslant 1$, $\xi(x) = 1$, $x \in [-1/8,\ 1/8]$, $\operatorname{supp}\xi \subset [-1/4,\ 1/4]$, $\widetilde{\varphi}_0 = 1$, $\widetilde{\psi}_{n+1} = 0$, а числа $\widetilde{\varphi}_1, \ldots, \widetilde{\varphi}_n, \widetilde{\psi}_1, \ldots, \widetilde{\psi}_n$ удовлетворяют системе линейных алгебраических уравнений (5.31). По построению $w \in D(\mathcal{A}_R)$. Положим $f_1 := (\mathcal{A}_R + \lambda_0 I)w$. Тогда, полагая $u_{f_1} := w$, получим равенства (5.30).

Аналогично, используя условие $\operatorname{rank}\mathbf{R}_1^0 = \operatorname{rank}\mathbf{R}_1^1$, можно построить функцию $f_2 \in L_2(0,d)$, для которой

$$u'_{f_2}(0+0) = 0, \quad u'_{f_2}(n+1-0) = 1.$$

Таким образом, мы доказали, что в случае $\operatorname{rank}\mathbf{R}_1^0 = \operatorname{rank}\mathbf{R}_1^1 = \operatorname{rank}\mathbf{R}_1^2$ оператор $A_R^0 + \lambda_0 I$ фредгольмов, $\dim\mathcal{N}(A_R^0 + \lambda_0 I) = 0$ и $\operatorname{codim}\mathcal{R}(A_R^0 + \lambda_0 I) = 2$.

3b. Заметим, что в силу леммы 5.1 помимо изученного в пункте 3a случая возможен лишь случай $\operatorname{rank}\mathbf{R}_1^0 = n+1 < \max\left\{\operatorname{rank}\mathbf{R}_1^1, \operatorname{rank}\mathbf{R}_1^2\right\} = n+2$.

Пусть вначале $\operatorname{rank}\mathbf{R}_1^0 = n+1$, при этом либо $\operatorname{rank}\mathbf{R}_1^1 = n+2$, $\operatorname{rank}\mathbf{R}_1^2 = n+1$, либо $\operatorname{rank}\mathbf{R}_1^1 = n+1$, $\operatorname{rank}\mathbf{R}_1^2 = n+2$. Не ограничивая общности, будем предполагать, что $\operatorname{rank}\mathbf{R}_1^2 = n+2$, $\operatorname{rank}\mathbf{R}_1^1 = n+1$. Тогда в силу теоремы Кронекера—Капелли система линейных алгебраических уравнений (5.9) несовместна, если для некоторого $f_1 \in L_2(0,d)$ выполняются равенства $u'_{f_1}(0+0) = (f_1, g_1) \neq 0$, т. е. для указанного $f_1 \in L_2(0,d)$ и $\lambda_0 > 0$ уравнение (5.15) не имеет решения $u_{f_1} \in D(\mathcal{A}_R)$ такого, что $u'_{f_1}(0+0) \neq 0$. Таким образом, для $\lambda_0 > 0$ и всех $f \in L_2(0,d)$ мы имеем $(f, g_1)_{L_2(0,d)} = u'_f(0+0) = 0$, т. е. $g_1 = 0$. С другой стороны, $\operatorname{rank}\mathbf{R}_1^1 = n+1 = \operatorname{rank}\mathbf{R}_1^0$. Поэтому в силу теоремы Кронекера—Капелли система уравнений (5.9) совместна для любых $f \in L_2(0,d)$. Аналогично части 3a доказательства можно показать, что существует функция $f_2 \in L_2(0,d)$ такая, что $(f_2, g_2)_{L_2(0,d)} = u'_{f_2}(n+1-0) = \widetilde{\psi}_{n+1} = 1$, т. е. $g_2 \neq 0$. Таким образом, оператор $A_R^0 + \lambda_0 I$ фредгольмов, $\dim\mathcal{N}(A_R^0 + \lambda_0 I) = 0$ и $\operatorname{codim}\mathcal{R}(A_R^0 + \lambda_0 I) = 1$.

Точно так же рассматривается случай $\operatorname{rank}\mathbf{R}_1^2 = n+1$, $\operatorname{rank}\mathbf{R}_1^1 = n+2$.

3c. Пусть теперь $\operatorname{rank}\mathbf{R}_1^0 = n+1$, при этом $\operatorname{rank}\mathbf{R}_1^1 = \operatorname{rank}\mathbf{R}_1^2 = n+2$. В силу леммы 5.2 система уравнений (5.9) совместна для любой $f \in L_2(0,d)$ тогда и только тогда, когда справедливо равенство (5.11). Аналогично части 3a доказательства можно показать, что существует функция $f_2 \in L_2(0,d)$ такая, что $u'_{f_2}(n+1-0) = (f_2, g_2)_{L_2(0,d)} = 1$. Таким образом, уравнение (5.15) разрешимо тогда и только тогда, когда $g_1 = \alpha_H g_2 \neq 0$. При этом $u_f \in W_2^2(0,d)$ в том и только в том случае, когда $(f, g_2)_{L_2(0,d)} = 0$. Следовательно, оператор $A_R^0 + \lambda_0 I$ фредгольмов, $\dim\mathcal{N}(A_R^0 + \lambda_0 I) = 0$ и $\operatorname{codim}\mathcal{R}(A_R^0 + \lambda_0 I) = 1$.

4. Остается доказать фредгольмовость оператора A_R^0 и свойства его индекса. Действительно, $A_R^0 = A_R^0 + \lambda_0 I - \lambda_0 I$. Таким образом, оператор A_R^0 является суммой фредгольмова оператора $A_R^0 + \lambda_0 I : W_2^2(0,d) \to L_2(0,d)$ и компактного оператора $-\lambda_0 I : W_2^2(0,d) \to L_2(0,d)$. Поэтому в силу [7, теорема 16.4] оператор $A_R^0 : W_2^2(0,d) \to L_2(0,d)$ является фредгольмовым и $\operatorname{ind} A_R^0 = \operatorname{ind}(A_R^0 + \lambda_0 I)$.

С другой стороны, в силу пункта 1 доказательства пространство $\mathcal{N}(A_R^0)$ одномерно и состоит из констант. Поэтому $\operatorname{codim}\mathcal{R}(A_R^0) = \operatorname{codim}\mathcal{R}(A_R^0 + \lambda_0 I) + 1$. Следовательно, если $\operatorname{rank}\mathbf{R}_1^0 = \operatorname{rank}\mathbf{R}_1^1 = \operatorname{rank}\mathbf{R}_1^2$, то $\operatorname{codim}\mathcal{R}(A_R^0) = 3$, а если $\operatorname{rank}\mathbf{R}_1^0 < \max\left\{\operatorname{rank}\mathbf{R}_1^1, \operatorname{rank}\mathbf{R}_1^2\right\}$, то $\operatorname{codim}\mathcal{R}(A_R^0) = 2$. $\square$

Пример 5.1. Рассмотрим оператор $R_Q : L_2(0,3) \to L_2(0,3)$, где $Q = (0,3)$, $(Ru)(x) = a_0 u(x) + a_1 u(x+1) + a_{-1} u(x-1) + a_2 u(x+2) + a_{-2} u(x-2)$, $a_i \in \mathbb{R}$, $i = 0, \pm1, \pm2$. Тогда $n = 2$, $\theta = 1$, а матрица R_1 имеет вид

$$R_1 = \begin{pmatrix} a_0 & a_1 & a_2 \\ a_{-1} & a_0 & a_1 \\ a_{-2} & a_{-1} & a_0 \end{pmatrix}.$$

Следовательно, $G_1^1 = (a_{-1}, a_{-2})^T$ и $G_3^2 = (a_2, a_1)^T$. Матрица $\mathbf{R}_1$ определяется по формуле

$$\mathbf{R}_1 = \begin{pmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & 0 & 0 & 0 \\ a_{-1} & a_0 & a_1 & a_0 & a_1 & a_2 \\ a_{-2} & a_{-1} & a_0 & a_{-1} & a_0 & a_1 \\ 0 & 0 & 0 & a_{-2} & a_{-1} & a_0 \end{pmatrix}.$$

Будем предполагать, что оператор R_Q удовлетворяет условию (1.10), а столбцы G_1^1 и G_3^2 линейно независимы. Докажем, что тогда

$$\operatorname{rank}\mathbf{R}_1^0=\operatorname{rank}\mathbf{R}_1^1=\operatorname{rank}\mathbf{R}_1^2=4. \tag{5.32}$$

Заметим, что, поскольку коэффициенты a_j постоянные, из линейной независимости столбцов G_1^1 и G_3^2 следует выполнение условия (5.1).

Очевидно,

$$\mathbf{R}_1^0=\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & 0 & 0\\ a_0 & a_1 & a_0 & a_1\\ a_{-1} & a_0 & a_{-1} & a_0\\ 0 & 0 & a_{-2} & a_{-1}\end{pmatrix}.$$

Матрица $\mathbf{R}_1^1(\mathbf{R}_1^2)$ порядка 4×5 получается из матрицы $\mathbf{R}_1$ вычеркиванием первого (последнего) столбца. Поэтому для доказательства равенств (5.32) достаточно показать, что

$$\det\mathbf{R}_1^0\neq 0.$$

Действительно,

$$\det\mathbf{R}_1^0=(a_1a_{-1}-a_0^2)(a_1a_{-1}-a_2a_{-2})=-\det\begin{pmatrix} a_0 & a_1\\ a_{-1} & a_0\end{pmatrix}\det\begin{pmatrix} a_{-1} & a_2\\ a_{-2} & a_1\end{pmatrix}.$$

Из условия (1.10) следует, что матрица

$$\begin{pmatrix} 2a_0 & a_1+a_{-1}\\ a_1+a_{-1} & 2a_0\end{pmatrix}$$

положительно определена. Поэтому

$$\det\begin{pmatrix} a_0 & a_1\\ a_{-1} & a_0\end{pmatrix}\neq 0.$$

С другой стороны,

$$\det\begin{pmatrix} a_{-1} & a_2\\ a_{-2} & a_1\end{pmatrix}\neq 0,$$

поскольку столбцы этой матрицы $G_1^1=(a_{-1},a_{-2})^T$ и $G_3^2=(a_2,a_1)^T$ по условию линейно независимы.

Таким образом, в силу теоремы 5.1 оператор $A_R^0: W_2^2(0,3)\supset D(A_R^0)\to L_2(0,3)$ фредгольмов, $1\in\mathcal{N}(A_R^0)$ и $\dim\mathcal{N}(A_R^0)=1$, при этом $\operatorname{codim}\mathcal{R}(A_R^0)=3$. Следовательно, $\operatorname{ind}A_R^0=-2$.

Замечание 5.4. Остается открытым вопрос: всегда ли в случае $\theta=1$ при выполнении условия (1.10) и линейной независимости столбцов G_1^1 и G_3^2 справедливо равенство (5.32) или есть примеры, когда равенство (5.32) не выполняется?

Далее в этом разделе мы будем предполагать, что столбцы $G_1^1(0)$ и $G_{n+1}^2(1)$ линейно зависимы. В силу условий (5.12) $G_1^1(0)\neq 0$, $G_{n+1}^2(1)\neq 0$ и существует такое $0\neq\alpha\in\mathbb{C}$, что

$$G_{n+1}^2(1)=\alpha G_1^1(0). \tag{5.33}$$

Теорема 5.2. *Пусть выполнены условия* (1.10), (5.1) *и* (5.12). *Предположим, что столбцы* $G_1^1(0)$ *и* $G_{n+1}^2(1)$ *линейно зависимы. Тогда оператор* $A_R^0: W_2^2(0,d)\supset D(A_R^0)\to L_2(0,d)$ *фредгольмов,* $1\in\mathcal{N}(A_R^0)$ *и* $\dim\mathcal{N}(A_R^0)=1$, *при этом справедливы следующие утверждения*:

1. *Если* $\operatorname{rank}\boldsymbol{R}_1^0=\operatorname{rank}\boldsymbol{R}_1^1$ *или* $\operatorname{rank}\boldsymbol{R}_1^0=\operatorname{rank}\boldsymbol{R}_1^2$, *то* $\operatorname{codim}\mathcal{R}(A_R^0)=2$.
2. *Если* $\operatorname{rank}\boldsymbol{R}_1^0=n+1$, $\operatorname{rank}\boldsymbol{R}_1^1=\operatorname{rank}\boldsymbol{R}_1^2=n+2$ *и* $\alpha\neq\alpha_H$ (*см.* (5.11)), *то* $\operatorname{codim}\mathcal{R}(A_R^0)=2$.
3. *Если* $\operatorname{rank}\boldsymbol{R}_1^0=n+1$, $\operatorname{rank}\boldsymbol{R}_1^1=\operatorname{rank}\boldsymbol{R}_1^2=n+2$ *и* $\alpha=\alpha_H$, *то* $\operatorname{codim}\mathcal{R}(A_R^0)=1$.

Доказательство.

1. Аналогично части 1 доказательства теоремы 5.1 мы заключаем, что пространство $\mathcal{N}(A_R^0)$ одномерно и состоит из констант.

2. Из части 1 доказательства теоремы 3.1 следует также, что операторное уравнение (5.15) имеет единственное решение $u_f \in D(\mathcal{A}_R)$ для любого $f \in L_2(0,d)$. В силу (5.14) это решение u_f принадлежит $D(A_R^0)$ тогда и только тогда, когда

$$u_f \in W_2^2(0,d). \tag{5.34}$$

Таким образом, $\mathcal{N}(A_R^0 + \lambda_0 I) = \{0\}$, а условие принадлежности правой части уравнения

$$(\mathcal{A}_R + \lambda_0 I)u = f \tag{5.35}$$

образу $\mathcal{R}(A_R^0 + \lambda_0 I)$ выражается соотношением (5.34). Перепишем это соотношение в виде условий ортогональности правой части уравнения (5.35) некоторым функциям из $L_2(0,d)$.

Сохраняя обозначения, введенные в доказательстве теоремы 5.1, для любого решения $u_f \in D(\mathcal{A}_R)$ уравнения (5.35) получим следующие равенства (см. (5.20)):

$$r^1_{i+1,1}(0)\varphi_0 - r^1_{i,n+1}(1)\psi_{n+1} = \sum_{j=1}^{n}(r^1_{i,j}(1)\psi_j - r^1_{i+1,j+1}(0))\varphi_j = \sum_{j=1}^{n} r^1_{i,j}(1)(\psi_j - \varphi_j), \quad i = 1,\dots,n. \tag{5.36}$$

Если выполняются равенства (5.17), из (5.36) следует, что

$$\varphi_0 G_1^1(0) - \psi_{n+1}G^2_{n+1}(1) = 0. \tag{5.37}$$

В силу (5.12) и (5.33) $G_1^1(0) \neq 0$, $G^2_{n+1}(1) \neq 0$ и существует такое $0 \neq \alpha \in \mathbb{C}$, что $G^2_{n+1}(1) = \alpha G_1^1(0)$. Таким образом, из (5.37) получим $(\varphi_0 - \alpha\psi_{n+1})G_1^1(0) = 0$, т. е.

$$\varphi_0 = \alpha\psi_{n+1}. \tag{5.38}$$

Другими словами, из условий (5.12) и (5.33) следует, что для получения решения уравнения (5.35), удовлетворяющего условию гладкости (5.34), правая часть уравнения (5.35) должна удовлетворять равенству

$$(f,g)_{L_2(0,d)} = 0, \tag{5.39}$$

где $g = g_1 - \alpha g_2$, а функции g_1 и g_2 определяются равенствами $(f,g_1)_{L_2(0,d)} = u_f'(0+0) = \varphi_0$ и $(f,g_2)_{L_2(0,d)} = u_f'(n+1-0) = \psi_{n+1}$.

Обратно, пусть выполняется равенство (5.39). Тогда $\varphi_0 - \alpha\psi_{n+1} = 0$, т. е.

$$\varphi_0 G_1^1(0) = \alpha\psi_{n+1}G_1^1(0) = \psi_{n+1}G^2_{n+1}(1).$$

Следовательно, справедливо равенство (5.37). Отсюда и из (5.36) в силу невырожденности матрицы $R_2(1)$ следует (5.17). Таким образом, если столбцы $G_1^1(0)$ и $G^2_{n+1}(1)$ линейно зависимы, то соотношение (5.34) выполняется тогда и только тогда, когда функция f ортогональна в $L_2(0,d)$ функции $g = g_1 - \alpha g_2 \in L_2(0,d)$.

3. Рассмотрим вопрос о том, когда $g \neq 0$. Из доказательства теоремы 5.1 следует, что условия (5.18), (5.26) можно переписать в виде матричного уравнения (5.8).

3а. Рассмотрим случай, когда $\operatorname{rank}\mathbf{R}_1^0 = \operatorname{rank}\mathbf{R}_1^1$ или $\operatorname{rank}\mathbf{R}_1^0 = \operatorname{rank}\mathbf{R}_1^2$. Не ограничивая общности, будем предполагать, что $\operatorname{rank}\mathbf{R}_1^0 = \operatorname{rank}\mathbf{R}_1^2$. Докажем, что $g \neq 0$.

Для этого достаточно доказать существование функции $f_0 \in L_2(0,d)$ такой, что $(f_0,g_1)_{L_2(0,d)} = 1$ и $(f_0,g_2)_{L_2(0,d)} = 0$, т. е. $(f_0,g)_{L_2(0,d)} = 1$. Другими словами, достаточно построить функцию $f_0 \in L_2(0,d)$, для которой

$$u'_{f_0}(0+0) := \widetilde{\varphi}_0 = 1, \quad u'_{f_0}(n+1-0) := \widetilde{\psi}_{n+1} = 0. \tag{5.40}$$

Введем $2n$-мерный вектор $\Phi^0 := (\varphi_1,\dots,\varphi_n,-\psi_1,\dots,-\psi_n)^T$ с неизвестными координатами. Обозначим $H_1 := (a_0(0), a_{-1}(1),\dots,a_{-n}(n),0)^T$. Полагая в (5.9) $\varphi_0 = \widetilde{\varphi}_0 = 1$ и $\psi_{n+1} = \widetilde{\psi}_{n+1} = 0$, получим

$$\mathbf{R}_1^0\Phi^0 = -H_1. \tag{5.41}$$

Из условия $\operatorname{rank}\mathbf{R}_1^0 = \operatorname{rank}\mathbf{R}_1^2$ и теоремы Кронекера—Капелли следует, что система уравнений (5.41) разрешима. Обозначим через $\widetilde{\Phi}^0 := (\widetilde{\varphi}_1,\dots,\widetilde{\varphi}_n,-\widetilde{\psi}_1,\dots,-\widetilde{\psi}_n)^T$ решение системы (5.41).

Докажем, что существует функция $f_0 \in L_2(0,d)$ такая, что при $f = f_0$ решение уравнения (5.35) u_{f_0} удовлетворяет условию (5.40) и $u'_{f_0}(j+0) = \widetilde{\varphi}_j$, $u'_{f_0}(j-0) = \widetilde{\psi}_j$, $j = 1,\dots,n$.

Введем функцию

$$w(x) := \begin{cases} \sum\limits_{j=0}^{n} (x-j)\widetilde{\varphi}_j \xi(x-j), & x \in \bigcup\limits_{j=0}^{n} \Big(j, j+\dfrac{1}{2}\Big), \\ \sum\limits_{j=1}^{n+1} (x-j)\widetilde{\psi}_j \xi(x-j), & x \in \bigcup\limits_{j=1}^{n+1} \Big(j-\dfrac{1}{2}, j\Big), \end{cases}$$

где $\xi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ — вещественнозначная функция, $0 \leqslant \xi(x) \leqslant 1$, $\xi(x) = 1$, $x \in [-1/8,\ 1/8]$, $\operatorname{supp}\xi \subset [-1/4,\ 1/4]$, $\widetilde{\varphi}_0 = 1$, $\widetilde{\psi}_{n+1} = 0$, а числа $\widetilde{\varphi}_1, \dots, \widetilde{\varphi}_n$, $\widetilde{\psi}_1, \dots, \widetilde{\psi}_n$ удовлетворяют системе линейных алгебраических уравнений (5.41).

По построению $w \in D(\mathcal{A}_R)$. Положим $f_0 := (\mathcal{A}_R + \lambda_0 I)w$. Полагая $u_{f_0} := w$, получим равенства (5.40). Таким образом, мы доказали, что в случае $\operatorname{rank}\mathbf{R}_1^0 = \operatorname{rank}\mathbf{R}_1^2$ выполняется соотношение $g \neq 0$. Следовательно, оператор $A_R^0 + \lambda_0 I$ фредгольмов, $\dim\mathcal{N}(A_R^0 + \lambda_0 I) = 0$ и $\operatorname{codim}\mathcal{R}(A_R^0 + \lambda_0 I) = 1$.

3b. Пусть теперь $\operatorname{rank}\mathbf{R}_1^0 = n+1$ и при этом $\operatorname{rank}\mathbf{R}_1^1 = \operatorname{rank}\mathbf{R}_1^2 = n+2$. В силу леммы 5.2 система уравнений (5.9) совместна для любой $f \in L_2(0,d)$ тогда и только тогда, когда справедливо равенство (5.11). С другой стороны, $u_f \in W_2^2(0,d)$ в том и только в том случае, когда выполняется равенство (5.38).

Рассмотрим вначале случай $\alpha \neq \alpha_H$. В силу (5.24) условие (5.38) можно записать в виде $(f,g)_{L_2(0,d)} = \varphi_0 - \alpha\psi_{n+1} = u'_f(0+0) - \alpha u'_f(n+1-0) = 0$. Докажем, что $g \neq 0$. Для этого достаточно доказать существование функции $f_1 \in L_2(0,d)$ такой, что $(f_1, g_1)_{L_2(0,d)} = \alpha_H$ и $(f_1, g_2)_{L_2(0,d)} = 1$. Другими словами, достаточно построить функцию $f_1 \in L_2(0,d)$, для которой

$$u'_{f_1}(0+0) := \widetilde{\varphi}_0 = \alpha_H, \quad u'_{f_1}(n+1-0) := \widetilde{\psi}_{n+1} = 1. \tag{5.42}$$

Тогда $(f_1, g)_{L_2(0,d)} = (f_1, g_1 - \alpha g_2)_{L_2(0,d)} = (f_1, g_1 - \alpha_H g_2)_{L_2(0,d)} + (f_1, (\alpha_H - \alpha) g_2)_{L_2(0,d)} = (\alpha_H - \alpha)(f_1, g_2)_{L_2(0,d)} = \alpha_H - \alpha \neq 0$.

Введем $2n$-мерный вектор $\Phi^0 := (\varphi_1, \dots, \varphi_n, -\psi_1, \dots, -\psi_n)^T$ с неизвестными координатами. Полагая в (5.9) $\varphi_0 = \widetilde{\varphi}_0 = \alpha_H$ и $\psi_{n+1} = \widetilde{\psi}_{n+1} = 1$, получим

$$\mathbf{R}_1^0 \Phi^0 = -\alpha_H H_1 + H_2. \tag{5.43}$$

Из условия (5.11) и леммы 5.2 следует, что система уравнений (5.43) разрешима. Обозначим через $\widetilde{\Phi}^0 := (\widetilde{\varphi}_1, \dots, \widetilde{\varphi}_n, -\widetilde{\psi}_1, \dots, -\widetilde{\psi}_n)^T$ решение системы (5.43).

Аналогично части 3a можно доказать существование функции $f_1 \in L_2(0,d)$ такой, что при $f = f_1$ решение уравнения (5.35) u_{f_1} удовлетворяет условию (5.42) и $u'_{f_1}(j+0) = \widetilde{\varphi}_j$, $u'_{f_1}(j-0) = \widetilde{\psi}_j$, $j = 1, \dots, n$. Следовательно, $g \neq 0$. Таким образом оператор $A_R^0 + \lambda_0 I$ фредгольмов, $\dim\mathcal{N}(A_R^0 + \lambda_0 I) = 0$ и $\operatorname{codim}\mathcal{R}(A_R^0 + \lambda_0 I) = 1$.

Рассмотрим, наконец, случай $\alpha = \alpha_H$. В этом случае для любой $f \in L_2(0,d)$ решение уравнения (5.35) u_f удовлетворяет системе уравнений (5.9). Поэтому в силу леммы 5.2 и равенства $\alpha = \alpha_H$ справедливо равенство (5.38), которое гарантирует, что $u_f \in W_2^2(0,d)$ для любых $f \in L_2(0,d)$. Таким образом, оператор $A_R^0 + \lambda_0 I$ имеет ограниченный обратный $(A_R^0 + \lambda_0 I)^{-1} : L_2(0,d) \to D(A_R^0)$. Следовательно, $\dim\mathcal{N}(A_R^0 + \lambda_0 I) = 0$ и $\mathcal{R}(A_R^0 + \lambda_0 I) = L_2(0,d)$.

4. Доказательство свойств оператора A_R^0 следует из [7, теорема 16.4] и следствия 3.1. $\square$

Авторы благодарят рецензентов за ряд замечаний, способствовавших улучшению работы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Данфорд Н., Шварц Дж.* Линейные операторы. Спектральная теория. Самосопряженные операторы в гильбертовом пространстве. — М.: Мир, 1966.
2. *Каменский А. Г.* Краевые задачи для уравнений с формально симметричными дифференциально-разностными операторами// Дифф. уравн. — 1976. — *12*. — С. 815–824.
3. *Каменский Г. А., Мышкис А. Д.* Постановка краевых задач для дифференциальных уравнений с отклоняющимися аргументами в старших членах// Дифф. уравн. — 1974. — *10*. — С. 409–418.
4. *Каменский Г. А., Мышкис А. Д., Скубачевский А. Л.* О гладких решениях краевой задачи для дифференциально-разностного уравнения нейтрального типа// Укр. мат. ж. — 1985. — *37*, № 5. — С. 581–585.

5. *Като Т.* Теория возмущений линейных операторов. — М.: Мир, 1972.
6. *Красовский Н. Н.* Теория управления движением. Линейные системы. — М.: Наука, 1968.
7. *Крейн С. Г.* Линейные уравнения в банаховых пространствах. — М.: Наука, 1971.
8. *Кряжимский А. В., Максимов В. И., Осипов Ю. С.* О позиционном моделировании в динамических системах// Прикл. мат. мех. — 1983. — *47*, № 6. — С. 883–890.
9. *Лионс Ж. Л., Мадженес Э.* Неоднородные граничные задачи и их приложения. — М.: Мир, 1971.
10. *Неверова Д. А., Скубачевский А. Л.* О классических и обобщенных решениях краевых задач для дифференциально-разностных уравнений с переменными коэффициентами// Мат. заметки. — 2013. — *94*, № 5. — С. 702–719.
11. *Осипов Ю. С.* О стабилизации управляемых систем с запаздыванием// Дифф. уравн. — 1965. — *1*, № 5. — С. 605–618.
12. *Скубачевский А. Л.* К задаче об успокоении системы управления с последействием// Докл. РАН. — 1994. — *335*, № 2. — С. 157–160.
13. *Эльсгольц Л. Э., Норкин С. Б.* Введение в теорию дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом. — М.: Наука, 1971.
14. *Neverova D. A.* Generalized and classical solutions to the second and third boundary-value problem for differential-difference equations// Functional Differential Equations. — 2014. — *21*. — С. 47–65.
15. *Skubachevskii A. L.* Elliptic Functional Differential Equations and Applications. — Basel—Boston—Berlin: Birkhäuser, 1997.

А. Л. Скубачевский
Российский университет дружбы народов, Москва, Россия;
Центр фундаментальной и прикладной математики МГУ, Москва, Россия
E-mail: skublector@gmail.com

Н. О. Иванов
Российский университет дружбы народов, Москва, Россия
E-mail: noivanov1@gmail.com

DOI: 10.22363/2413-3639-2021-67-3-576-595 UDC 517.929

On Generalized Solutions of the Second Boundary-Value Problem for Differential-Difference Equations with Variable Coefficients

© 2021 **A. L. Skubachevskii, N. O. Ivanov**

Abstract. We consider the second boundary-value problem for a second-order differential-difference equation with variable coefficients on the interval $(0, d)$. We investigate the existence of a generalized solution and obtain conditions on the right-hand side of the equation which ensure the smoothness of generalized solutions on the entire interval $(0, d)$.

REFERENCES

1. N. Dunford and J. Schwartz, *Lineynye operatory. Spektral'naya teoriya. Samosopryazhennye operatory v gil'bertovom prostranstve* [Linear Operators. Part II: Spectral Theory. Self-Adjoint Operators in Hilbert Space], Mir, Moscow, 1966 (Russian translation).

2. A. G. Kamenskii, “Kraevye zadachi dlya uravneniy s formal’no simmetrichnymi differentsial’no-raznostnymi operatorami” [Boundary-value problems for equations with formally symmetric differential-difference operators], *Diff. uravn.* [Differ. Equ.], 1976, **12**, 815–824 (in Russian).
3. G. A. Kamenskii and A. D. Myshkis, “Postanovka kraevykh zadach dlya differentsial’nykh uravneniy s otklonyayushchimisya argumentami v starshikh chlenakh” [Formulation of boundary-value problems for differential equations with deviating arguments in higher-order terms], *Diff. uravn.* [Differ. Equ.], 1974, **10**, 409–418 (in Russian).
4. G. A. Kamenskii, A. D. Myshkis, and A. L. Skubachevskii, “O gladkikh resheniyakh kraevoy zadachi dlya differentsial’no-raznostnogo uravneniya neytral’nogo tipa” [On smooth solutions of a boundary-value problem for a differential-difference equation of neutral type], *Ukr. mat. zh.* [Ukr. Math. J.], 1985, **37**, No. 5, 581–585 (in Russian).
5. T. Kato, *Teoriya vozmushcheniy lineynykh operatorov* [Perturbation Theory for Linear Operators], Mir, Moscow, 1972 (Russian translation).
6. N. N. Krasovskii, *Teoriya upravleniya dvizheniem. Lineynye sistemy* [Motion Control Theory. Linear Systems], Nauka, Moscow, 1968 (in Russian).
7. S. G. Kreyn, *Lineynye uravneniya v banakhovykh prostranstvakh* [Linear Equations in Banach Spaces], Nauka, Moscow, 1971 (in Russian).
8. A. V. Kryazhimskii, V. I. Maksimov, and Yu. S. Osipov, “O pozitsionnom modelirovanii v dinamicheskikh sistemakh” [On positional modeling in dynamic systems], *Prikl. mat. mekh.* [Appl. Math. Mech.], 1983, **47**, No. 6, 883–890 (in Russian).
9. J.-L. Lions and E. Magenes, *Neodnorodnye granichnye zadachi i ikh prilozheniya* [Non-Homogeneous Boundary-Value Problems and Their Applications], Mir, Moscow, 1971 (Russian translation).
10. D. A. Neverova and A. L. Skubachevskii, “O klassicheskikh i obobshchennykh resheniyakh kraevykh zadach dlya differentsial’no-raznostnykh uravneniy s peremennymi koeffitsientami” [On classical and generalized solutions of boundary-value problems for differential-difference equations with variable coefficients], *Mat. zametki* [Math. Notes], 2013, **94**, No. 5, 702–719 (in Russian).
11. Yu. S. Osipov, “O stabilizatsii upravlyaemykh sistem s zapazdyvaniem” [On the stabilization of controlled systems with delay], *Diff. uravn.* [Differ. Equ.], 1965, **1**, No. 5, 605–618 (in Russian).
12. A. L. Skubachevskii, “K zadache ob uspokoenii sistemy upravleniya s posledeystviem” [On the damping problem for a control system with aftereffect], *Dokl. RAN* [Rep. Russ. Acad. Sci.], 1994, **335**, No. 2, 157–160 (in Russian).
13. L. E. El’sgol’ts and S. B. Norkin, *Vvedenie v teoriyu differentsial’nykh uravneniy s otklonyayushchimsya argumentom* [Introduction to the Theory of Differential Equations with Deviating Argument], Nauka, Moscow, 1971 (in Russian).
14. D. A. Neverova, “Generalized and classical solutions to the second and third boundary-value problem for differential-difference equations,” *Funct. Differ. Equ.*, 2014, **21**, 47–65.
15. A. L. Skubachevskii, *Elliptic Functional Differential Equations and Applications*, Birkhäuser, Basel–Boston–Berlin, 1997.

A. L. Skubachevskii
Peoples’ Friendship University of Russia (RUDN University), Moscow, Russia;
Moscow Center for Fundamental and Applied Mathematics, Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia
E-mail: skublector@gmail.com

N. O. Ivanov
Peoples’ Friendship University of Russia (RUDN University), Moscow, Russia
E-mail: noivanov1@gmail.com