Современная математика. Фундаментальные направления. Том 67, № 3 (2021). С. 564–575
Contemporary Mathematics. Fundamental Directions. ISSN 2413-3639 (Print)

DOI: 10.22363/2413-3639-2021-67-3-564-575 УДК 517.956

О РАЗРЕШИМОСТИ ОБОБЩЕННОЙ ЗАДАЧИ НЕЙМАНА ДЛЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ ВЫСОКОГО ПОРЯДКА В БЕСКОНЕЧНОЙ ОБЛАСТИ

© 2021 г. **Б. Д. КОШАНОВ, А. П. СОЛДАТОВ**

Аннотация. Для эллиптического уравнения $2l$-го порядка с постоянными старшими вещественными коэффициентами в бесконечной области, содержащей внешность некоторого круга и ограниченной достаточно гладким контуром, рассмотрена обобщенная задача Неймана. Она заключается в задании нормальных производных (k_j-1)-го порядков, где $1 \leqslant k_1 < \ldots < k_l \leqslant 2l$; при $k_j = j$ она переходит в задачу Дирихле, а при $k_j = j+1$ — в задачу Неймана. При некоторых предположениях относительно коэффициентов уравнения на бесконечности получено необходимое и достаточное условие фредгольмовости этой задачи и приведена формула ее индекса в гельдеровских пространствах.

ОГЛАВЛЕНИЕ

1. Введение

В области D на плоскости, ограниченной простым гладким контуром Γ, рассмотрим эллиптическое уравнение $2l$-го порядка

$$\sum_{r=0}^{2l} a_r \frac{\partial^{2l} u}{\partial x^{2l-r}\partial y^r} + \sum_{0\leqslant r\leqslant k\leqslant 2l-1} a_{rk}(z)\frac{\partial^k u}{\partial x^{k-r}\partial y^r} = f(z), \quad z = x+iy \in D, \tag{1.1}$$

с постоянными старшими коэффициентами $a_r \in \mathbb{R}$.

Исходя из набора $1 = k_1 < \ldots < k_l \leqslant 2l$ натуральных чисел, задача Неймана для этого уравнения определяется краевыми условиями

$$\left.\frac{\partial^{k_j-1} u}{\partial n^{k_j-1}}\right|_\Gamma = f_j, \quad j = 1,\ldots,l, \tag{1.2}$$

где $n = n_1 + in_2$ означает единичную внешнюю нормаль.

Здесь и ниже под нормальной производной $(\partial/\partial n)^k$ порядка k понимается граничный оператор

$$\left(n_1\frac{\partial}{\partial x} + n_2\frac{\partial}{\partial y}\right)^k = \sum_{r=0}^{k}\binom{k}{r} n_1^{k-r} n_2^r \frac{\partial^k}{\partial x^{k-r}\partial y^r},$$

и аналогичный смысл имеет граничный оператор $(\partial/\partial e)^k$ по отношению к единичному касательному вектору

$$e = e_1 + ie_2 = i(n_1 + in_2). \tag{1.3}$$

Постановка конкретной задачи (1.1), (1.2) при $k_{j+1} - k_j \equiv 1$ для полигармонического уравнения восходит к А. В. Бицадзе [1], где при $k_1 \geqslant 2$ она названа обобщенной задачей Неймана. Это название в дальнейшем сохраняем и для произвольного набора показателей k_j, вводя для задачи обозначение $\mathcal{N}$. Символ $\mathcal{N}_0$ сохраняем для задачи, когда все младшие коэффициенты a_{rk} в (1.1) равны нулю, т. е. для уравнения $L_a u = f$, определяемого дифференциальным оператором

$$L_a = \sum_{r=0}^{2l} a_r \frac{\partial^{2l} u}{\partial x^{2l-r} \partial y^r} \tag{1.4}$$

с постоянными коэффициентами.

В конечной односвязной области D задача $\mathcal{N}$ подробно исследовалась в работах [4, 5, 10, 11, 13]. В [4, 5] эта задача изучалась задача в классе

$$\{u \in C^{2l}(D) \cap C^{2l-1,\mu}(\overline{D}), \quad L_a u \in C^{\mu}(\overline{D})\}.$$

В более узком стандартном классе $C^{2l,\mu}(\overline{D})$, включая случай многосвязной области, эта задача была рассмотрена в [10] (см. также [13]). В обоих классах условия фредгольмовости и формула индекса выглядят одинаково. Другая форма критерия фредгольмовости задачи, удобная для использования, приведена в [11].

Чтобы сформулировать этот критерий, обозначим ν_k, $1 \leqslant k \leqslant m$, все различные корни в верхней полуплоскости характеристического многочлена

$$\chi(z) = a_{2l} \prod_{k=1}^{m} (z - \nu_k)^{l_k} \prod_{k=1}^{m} (z - \overline{\nu}_k)^{l_k}$$

так, что сумма кратностей $l_1 + \ldots + l_m$ этих корней равна l. Условие эллиптичности заключается в том, что $a_{2l} \neq 0$ и корни характеристического многочлена $\chi(z) = a_0 + a_1 z + \ldots + a_{2l} z^{2l}$ не лежат на вещественной оси. Введем дробно-линейные по z функции

$$\omega(e, \nu) = \frac{-e_2 + e_1 \nu}{e_1 + e_2 \nu}, \quad 1 \leqslant j \leqslant l, \tag{1.5}$$

где зависимость от единичного касательного вектора $e = e_1 + ie_2$ к контуру Γ, фигурирующему в (1.3), указана явно.

Исходя из l-вектор-функции $g(\zeta) = (g_1(\zeta), \ldots, g_l(\zeta))$, аналитической в окрестности точек $\zeta_1, \ldots, \zeta_m$, введем блочную $l \times l$-матрицу

$$W_g(\zeta_1, \ldots, \zeta_m) = (W_g(\zeta_1), \ldots, W_g(\zeta_m)), \tag{1.6}$$

где матрица $W_g(\zeta_k) \in \mathbb{C}^{l \times l_k}$ составлена из векторов-столбцов

$$g(\zeta_k), g'(\zeta_k), \ldots, \frac{1}{(l_k - 1)!} g^{(l_k - 1)}(\zeta_k).$$

В этих обозначениях условие

$$\det W_g[\omega(e, \nu_1), \ldots, \omega(e, \nu_m)] \neq 0, \quad e \in \mathbb{T}, \tag{1.7}$$

где $g(\zeta) = (\zeta^{k_1 - 1}, \ldots, \zeta^{k_l - 1})$ и $\mathbb{T}$ означает единичную окружность, необходимо и достаточно для фредгольмовости задачи $\mathcal{N}$ в классе $C^{2l,\mu}(\overline{D})$.

Как обычно, фредгольмовость и индекс задачи понимаются по отношению к ее оператору, который ограничен

$$C^{2l,\mu}(\overline{D}) \to C^{\mu}(\overline{D}) \times \prod_{j=1}^{l} C^{2l - k_j + 1,\mu}(\Gamma).$$

Как будет показано ниже, этот индекс определяется целым числом

$$\varkappa_0 = \frac{1}{2\pi} [\arg \det W_g[\omega(e, \nu_1), \ldots, \omega(e, \nu_m)]]\big|_{\mathbb{T}}, \tag{1.8}$$

приращение непрерывной ветви аргумента окружности на $\mathbb{T}$ берется против часовой стрелки.

Очевидно, условие (1.7) зависит только от набора $k_1, k_2, \ldots, k_l$. Следовательно, при фиксированных k_j при выполнении этого условия задача $\mathcal{N}$ фредгольмова в любой конечной области D с достаточно гладкой границей.

С точки зрения общей эллиптической теории [7] задача $\mathcal{N}$ фредгольмова в пространстве $C^{2l,\mu}(\overline{D})$ тогда и только тогда, когда ее краевые условия удовлетворяют так называемому *условию дополнительности* (или *условию Шапиро—Лопатинского*). В этом случае говорят также (см. [15]), что краевые условия (1.2) *накрывают* дифференциальный оператор L_a, фигурирующий в (1.4). В работе [11] показано, что это условие равносильно (1.7), так что центр тяжести переносится на исследование формулы индекса (1.8). Поэтому в этой статье дано более явное описание формулы индекса при некоторых дополнительных предположениях относительно корней характеристического уравнения.

В данной работе рассмотрим случай бесконечной области. В этом случае поведение решения уравнения (1.1) и его коэффициентов на бесконечности необходимо требуют дополнительного описания. Отметим, что для неоднородного эллиптического уравнения с постоянными коэффициентами исследованию характера этого поведения посвящены многочисленные работы (см. например, [2, 3, 6, 14]).

Пусть область D бесконечна и ограничена контуром $\Gamma \in C^{2l,\nu}$, связные компоненты которого обозначим $\Gamma_0, \ldots, \Gamma_n$. Следуя [9], введем пространство Гельдера $C^{\mu}_{\lambda}(\overline{D}, \infty)$, $\lambda \in \mathbb{R}$, функций со степенным поведением $O(|z|^{\lambda})$ на бесконечности. Более точно, при $\lambda = 0$ оно состоит из ограниченных функций φ, для которых $\psi(z) = |z|^{\mu}\varphi(z)$ удовлетворяет условию Гельдера с показателем μ. Относительно нормы

$$|\varphi| = \sup_{z\in D} |\varphi(z)| + \sup_{z_1\neq z_2} \frac{|\psi(z_1) - \psi(z_2)|}{|z_1 - z_2|^{\mu}}$$

это пространство банахово, причем оно является банаховой алгеброй по умножению. В общем случае произвольного λ банахово пространство $C^{\mu}_{\lambda}(\overline{D}, \infty)$ определим как класс функций φ, для которых $(1+|z|)^{-\lambda}\varphi(z) \in C^{\mu}_{0}(\overline{D}, \infty)$, снабженный перенесенной нормой. Соответствующие банаховы пространства $C^{n,\mu}_{\lambda}(\overline{D}, \infty)$ дифференцируемых функций определим индуктивно условиями

$$\varphi \in C^n(D) \cap C^{n-1,\mu}_{\lambda}(\overline{D}, \infty), \quad \frac{\partial\varphi}{\partial x}, \frac{\partial\varphi}{\partial y} \in C^{n-1,\mu}_{\lambda-1}(\overline{D}, \infty).$$

Оно является банаховым относительно соответствующей нормы.

Поскольку в дальнейшем бесконечная область D фиксирована, пространства $C^{n,\mu}_{\lambda}(\overline{D}, \infty)$ всюду ниже обозначаем кратко $C^{n,\mu}_{\lambda}$. В более общей ситуации конечного множества особых точек они были детально изучены в [9]. В частности, при этом произведение функций ограничено как билинейное отображение $C^{n,\mu}_{\lambda'} \times C^{n,\mu}_{\lambda''} \to C^{n,\mu}_{\lambda'+\lambda''}$.

Задачу $\mathcal{N}$ рассмотрим в классе $C^{2l,\mu}_{\lambda}$, $-1 < \lambda < 0$, функций, исчезающих на бесконечности. Для нее справедлив следующий результат.

Теорема 1.1. *Пусть бесконечная область D ограничена контуром Γ класса $C^{2l,\nu}$, $\mu < \nu < 1$, состоящим из компонент $\Gamma_0, \ldots, \Gamma_n$, младшие коэффициенты уравнения* (1.1) *удовлетворяют требованию*

$$a_{rk} \in C^{\mu}_{k-2l-0}(\overline{D}, \infty) = \cup_{\varepsilon>0} C^{\mu}_{k-2l-\varepsilon} \tag{1.9}$$

и выполнено условие (1.7).

Тогда задача $\mathcal{N}$ фредгольмова в классе $C^{2l,\mu}_{\lambda}$, $-1 < \lambda < 0$, и в обозначениях (1.8) *ее индекс дается формулой*

$$\varkappa = 2(n+1)\left[\varkappa_0 + 2\sum_{i<j} l_i l_j\right] - l(2l-1). \tag{1.10}$$

Обозначим $\mathcal{N}_0$ задачу с коэффициентами $a_{rk} = 0$ в (1.1). Следующая лемма показывает, что с точки зрения фредгольмовой теории можно ограничиться этой задачей.

Лемма 1.1. *Задачи $\mathcal{N}$ и $\mathcal{N}_0$ в классе $C^{2l,\mu}_{\lambda}$, $-1 < \lambda < 0$, фредгольмово эквивалентны, и их индексы совпадают.*

Доказательство. В силу известных свойств фредгольмовых операторов (см. [8, 9]) достаточно убедиться, что оператор

$$Mu = \sum_{0\leqslant r\leqslant k\leqslant 2l-1} a_{rk}(z)\frac{\partial^k u}{\partial x^{k-r}\partial y^r}$$

компактен $C^{2l,\mu}_\lambda \to C^\mu_{\lambda-2l}$.

Предполагая для определенности $0 \notin \overline{D}$, рассмотрим в D весовую функцию $\rho_\nu(z) = |z|^\nu$ порядка ν, которая принадлежит $C^{n,\mu}_\nu$ для любого натурального n и $\nu \in \mathbb{R}$. При этом оператор умножения $\varphi \to \rho_\nu\varphi$ ограничен $C^{n,\mu}_\lambda \to C^{n,\mu}_{\lambda+\nu}$. По условию (1.9) существует столь малое $\varepsilon > 0$, что $-a_{2l}^{-1}a_{rk} = \rho_{k-2l-\varepsilon}a^0_{rk}$ с некоторыми $a^0_{rk} \in C^\mu_0$. Соответственно можем записать

$$Mu = \sum_{0\leqslant r\leqslant k\leqslant 2l-1} a^0_{rk}M_{rk}u, \quad M_{rk}u = \rho_{k-2l-\varepsilon}\frac{\partial^k u}{\partial x^{k-r}\partial y^r}.$$

Очевидно, оператор M_{rk} ограничен $C^{2l,\mu}_\lambda \to C^{1,\mu}_{\lambda-2l-\varepsilon}$. С другой стороны, как установлено в [9], вложение $C^{1,\mu}_{\nu-\varepsilon} \subseteq C^\mu_\nu$ компактно. В результате приходим и к компактности исходного оператора $M:\ C^{2l,\mu}_\lambda \to\to C^\mu_{\lambda-2l}$. □

Отметим, что задача $\mathcal{N}_0$ для уравнения $L_a u = 0$ в случае конечной области D изучена в [5]. Совершенно аналогично она может быть изучена и в рассматриваемом случае бесконечной области. Это следует из того, что любое решение $u(z)$ этого уравнения, которое при $|z| \to \infty$ стремится к нулю и первые производные которого имеют поведение $O(|z|^{\lambda-1})$ с некоторым $-1 < \lambda < 0$, автоматически принадлежит классу $C^{2l}_\lambda(\overline{D}_0, \infty)$ в области $\overline{D}_0 = \{|z| \geqslant r\} \subseteq D$. Поэтому в случае существования ограниченного оператора $L_a^{(-1)} : C^\mu_{\lambda-2l} \to C^{2l,\mu}_\lambda$, который является правым обратным к L_a в смысле тождества

$$L_a L_a^{(-1)}\varphi = \varphi, \quad \varphi \in C^\mu_{\lambda-2l},$$

задача $\mathcal{N}_0$ может быть сведена к случаю $L_a u = 0$. Однако вопрос существования этого оператора открыт даже для простейшего случая $L_a = \Delta$ оператора Лапласа. В самом деле, в этом случае свойством (1.10) обладает оператор свертки с фундаментальным решением, однако неизвестно, будет ли этот оператор ограничен $C^\mu_{\lambda-2l} \to C^{2l,\mu}_\lambda$.

Доказательство теоремы 1.1 осуществляется в следующем разделе 2 по схеме, использованной в [10] для конечной области. Она заключается в эквивалентной редукции задачи $\mathcal{N}_0$ к задаче Римана—Гильберта для соответствующей эллиптической системы первого порядка.

2. Задача Римана—Гильберта

Обозначим для краткости X банахово пространство $(C^{1,\mu}_{\lambda-2l+1})^{2l}$ вектор-функций $U = (U_1, \dots, U_{2l})$ и его замкнутое подпространство X_0, выделяемое условиями

$$\frac{\partial U_j}{\partial y} = \frac{\partial U_{j+1}}{\partial x}, \quad 1 \leqslant j \leqslant 2l-1. \tag{2.1}$$

Рассмотрим оператор

$$\mathcal{D}u = \left(\frac{\partial^{2l-1}u}{\partial^{2l-j}x\partial^{j-1}y},\ 1 \leqslant j \leqslant 2l\right),$$

который, очевидно, ограничен $C^{2l}_\lambda \to X_0$. Его ядро $\ker\mathcal{D}$ представляет собой пересечение C^{2l}_λ с классом P_{2l-2} всех многочленов степени не выше $2l-2$ и, следовательно, нулевое. Образ $\operatorname{im}\mathcal{D}$ этого оператора обозначим $\mathcal{X}_0$.

Лемма 2.1. *Подпространство $\mathcal{X}_0 \subseteq X_0$ замкнуто и имеет конечную коразмерность, равную*

$$\dim(X_0/\mathcal{X}_0) = nl(2l-1), \tag{2.2}$$

где $n+1$ есть число связных компонент контура Γ.

Доказательство. Пусть подобласть $D_0 \subseteq D$ конечна и односвязна. Тогда уравнение $\mathcal{D}u = U$ с правой частью $U \in [C^{2l-1}(\overline{D}_0)]^{2l}$, удовлетворяющей условию (2.1), всегда разрешимо и его решение определяется последовательным интегрированием вдоль дуги, соединяющей произвольную точку $z \in D_0$ с фиксированной точкой z_0. Например, для $l = 1$

$$u(z) = \int_{z_0}^{z} U_1 dx + U_2 dy.$$

Аналогично для $l = 2$ следует положить

$$u_{1,j}(z) = \int_{z_0}^{z} U_j dx + U_{j+1} dy, \quad 1 \leqslant j \leqslant 3,$$

$$u_{2,j}(z) = \int_{z_0}^{z} u_{1,j} dx + u_{2,j+1} dy, \quad j = 1, 2; \quad (\mathcal{D}^{(-1)}U)(z) = \int_{z_0}^{z} u_{2,1} dx + u_{2,2} dy,$$

и т. д.

Согласно [9, теорема 2.10.1] аналогичный факт справедлив и в случае, когда $D_0 = \{|z| > R\} \subseteq D$ представляет собой внешность круга. Более точно, уравнение $\mathcal{D}u = U$ с правой частью $U \in [C^{2l-1}_{\lambda-2l+1}(\overline{D}_0, \infty)]^{2l}$, удовлетворяющей условию (2.1), всегда разрешимо в классе $C^{2l}_{\lambda}(\overline{D}_0, \infty)$. Здесь роль z_0 играет бесконечно удаленная точка, т. е. интегрирование ведется вдоль луча $\{sz, \ s \geqslant 1\}$.

По отношению к исходной области D решением уравнения $\mathcal{D}u = U$ с правой частью $U \in X_0$ служит многозначная функция u, принадлежащая классу $C^{2l,\mu}$ в конечных односвязных подобластях D_0 и классу $C^{2l,\mu}_{\lambda}(\overline{D}_0, \infty)$ во внешности круга. При обходе связных компонент контура она получает приращение в виде некоторого многочлена $p \in P_{2l-2}$. Этот факт можем выразить следующим образом. Пусть Γ состоит из простых контуров $\Gamma_0, \ldots, \Gamma_n$. Соединим внутри $D \setminus \{z_0\}$ контуры Γ_0 и Γ_j, $1 \leqslant j \leqslant n$, дугой L_j, считая эти дуги попарно непересекающимися. Тогда в области $D_0 = D \setminus (L_1 \cup \ldots \cup L_n)$ решение u рассматриваемого уравнения однозначно. Предполагая дуги L_j ориентируемыми, для односторонних предельных значений $u_j^{\pm}$ на L_j функции u будем иметь соотношения

$$u_j^{+} - u_j^{-} = p_j\big|_{L_j}, \quad 1 \leqslant j \leqslant n,$$

с некоторыми $p_j \in P_{2l-2}$, причем аналогичные соотношения выполняются и для частных производных функций u и p_j до порядка $k-1$ включительно. Очевидно, отображение $U \to (p_1, \ldots, p_n)$ переводит пространство X на все $(P_{2l-2})^n$, и класс $\mathcal{X}_0$ описывается условиями $p_1 = \ldots = p_n = 0$ в этих соотношениях. Поскольку $\dim P_{2l-2} = l(2l-1)$, отсюда следует равенство (2.2). $\square$

Обратимся к уравнению (1.1) с коэффициентами $a_{rk} = 0$. Пользуясь обратным оператором $\mathcal{D}^{-1} : \mathcal{X}_0 \to C^{2l,\mu}_{\lambda}$, это уравнение вместе с соотношениями (2.1), определяющими пространство $X_0 \supseteq \mathcal{X}_0$, можем записать в форме эллиптической системы первого порядка для вектора $U \in \mathcal{X}_0$. Она определяется дифференциальным оператором

$$L_A U = \frac{\partial U}{\partial y} - A \frac{\partial U}{\partial x}, \quad U \in X, \tag{2.3}$$

с постоянной $2l \times 2l$-матрицей

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \ldots & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 \\ -a_{2l}^{-1}a_0 & -a_{2l}^{-1}a_1 & -a_{2l}^{-1}a_2 & \ldots & -a_{2l}^{-1}a_{2l-1} \end{pmatrix}.$$

Очевидно, этот оператор ограничен $X \to Y$, где для краткости положено $Y = (C^{\mu}_{\lambda-2l})^{2l}$. В пространстве Y вектор-функций $F = (F_1, \ldots, F_{2l})$ выделим подпространство Y_0 по условиям $F_1 = \ldots = F_{2l-1} = 0$. В частности, подпространство $X_0 \subseteq X$, выделяемое условиями (2.1), можно трактовать как прообраз

$$X_0 = L_A^{-1}(Y_0). \tag{2.4}$$

В принятых обозначениях упомянутая выше эллиптическая система первого порядка для вектора $U \in \mathcal{X}_0$ запишется в виде

$$L_A U = F \tag{2.5}$$

с вектором $F = (0, \dots, 0, f) \in Y_0$.

Отметим следующее важное свойство оператора L_A.

Лемма 2.2. *Оператор L_A допускает правый обратный, т. е. такой ограниченный линейный оператор $L_A^{(-1)} : Y \to X$, что $L_A L_A^{(-1)} F = F$ для всех $F \in Y$. В частности, подпространство $X_0 \subseteq X$ дополняемо, т. е. $X = X_0 \oplus X_1$ для некоторого замкнутого подпространства $X_1 \subseteq X$.*

Доказательство. Хорошо известно, что собственные значения матрицы A совпадают с корнями характеристического многочлена χ уравнения (1.1). В частности, для любого ненулевого комплексного числа $\xi = \xi_1 + i\xi_2$ матрица $\xi_A = \xi_1 1 + \xi_2 A$ обратима. Исходя из $2l$-вектор-функции $\varphi \in C^{\mu}_{\lambda-1}(\mathbb{C}, \infty)$, заданной на всей плоскости, рассмотрим интеграл

$$(T\varphi)(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{D^{\pm}} (t - z)_A^{-1} \varphi(t) d_2 t, \quad z \in D^{\pm}, \tag{2.6}$$

где $d_2 t$ означает элемент площади. В случае скалярной матрицы $A = i$ с точностью до множителя $2i$ интеграл $T\varphi$ представляет собой классический интеграл Помпейю. Поэтому естественно в общем случае матрицы A этот интеграл называть обобщенным интегралом Помпейю.

Также легко проверяется, что при дополнительном условии $\varphi^1 \in C^1$ функция $U = T\varphi$ также непрерывно дифференцируема и удовлетворяет неоднородной системе

$$L_A(T\varphi) = \varphi. \tag{2.7}$$

В действительности этот факт справедлив и для функций φ, локально удовлетворяющих условию Гельдера (см., например, [9, лемма 3.4.2]).

Более точное поведение этих интегралов вблизи контура Γ изучено в [9] для более общих ядер, однородных степени -1, в терминах пространств Гельдера C^{μ} и $C^{1,\mu}$. В частности, оператор T ограничен $C^{\mu}_{\lambda-1}(\mathbb{C}, \infty) \to C^{1,\mu}_{\lambda}(\mathbb{C}, \infty)$, $-1 < \lambda < 0$, и, следовательно, служит правым обратным к L_A в указанных пространствах.

Применим его к построению правого обратного $L_A^{(-1)} : C^{\mu}_{\lambda-2l} \to C^{1,\mu}_{\lambda-2l+1}$ в области D. Не ограничивая общности, можно считать, что $0 \notin \overline{D}$, так что для любого целого k матрица-функция $H_k(z) = z_A^k$ бесконечно дифференцируема в области D. При $k = -1$ она уже использовалась в (2.6). Согласно [9], однородная степени нуль функция $|z|^{-k} H_k(z)$ принадлежит $C_0^{n,\mu}$, так что оператор умножения $F \to H_k F$ осуществляет изоморфизм $C^{n,\mu}_{\nu} \to C^{n,\mu}_{\nu+k}$. Легко видеть, что матрица-функция H_k удовлетворяет однородному уравнению $L_A H_k = 0$, т. е.

$$\frac{\partial H_k}{\partial y} - A \frac{\partial H_k}{\partial x} = 0.$$

Кроме того, ее значения $H_k(z)$ коммутируют с A, так что

$$L_A(H_k F) = H_k L F \tag{2.8}$$

для любой вектор-функции F.

Введем теперь оператор $L_A^{(-1)}$ по формуле

$$(L_A^{(-1)} F)(z) = H_{-2l+1}(z)[T(H_{2l-1}F)^*](z), \quad z \in D,$$

который, очевидно, ограничен $C^{\mu}_{\lambda-2l} \to C^{1,\mu}_{\lambda-2l+1}$. В силу (2.7), (2.8) он действительно является правым обратным к L_A, что осуществляется прямой проверкой:

$$[L_A(L_A^{(-1)} F)](z) = H_{-2l+1}(z)(H_{2l-1}F)^*(z) = F(z), \quad z \in D.$$

Что касается второго утверждения леммы, то запишем $Y = Y_0 \oplus Y_1$, где Y_1 состоит из векторов $F = (F_1, \dots, F_{2l-1}, 0)$, и положим $X_1 = L_A^{(-1)}(Y_1)$. В силу равенства $L_A L_A^{(-1)} = 1$ подпространство X_1 замкнуто. Если $U \in X_0 \cap X_1$, то по определению $U = L_A^{(-1)} F$ для некоторого $F \in Y_1$ и $L_A U \in Y_0$. Но тогда $F = L_A U \in Y_0 \cap Y_1$ и, значит, $F = 0$ и $U = L_A^{(-1)} F = 0$. С другой стороны, для $U \in X$

запишем $L_A = F_{(0)} + F_{(1)}$ с $F_{(k)} \in Y_k$. Тогда $U_{(1)} = L_A^{(-1)} F_{(1)} \in X_1$ и $L_A(U - U_{(1)}) = F_{(0)}$, так что $U_{(0)} = U - U_{(1)} \in X_0$. Следовательно, $X = X_0 \oplus X_1$. □

Обратимся к краевому условию (1.2) задачи $\mathcal{N}_0$. Аналогично [5], порядки дифференцирования в краевом условии (1.2) можем выровнять с помощью видоизмененного оператора касательного дифференцирования на контуре Γ. Напомним, что он состоит из связных компонент $\Gamma_0, \Gamma_1, \ldots, \Gamma_n$. Для функции $\varphi \in C^1(\Gamma)$ положим

$$d\varphi = \varphi' + d^0\varphi, \quad (d^0\varphi)\big|_{\Gamma_i} = \frac{1}{|\Gamma_i|}\int\limits_{\Gamma_i} \varphi(t) d_1 t,$$

где штрих означает дифференцирование по параметру длины дуги, $|\Gamma_i|$ — длина контура Γ_i и $d_1 t$ означает элемент длины дуги. Смысл этого определения в том, что оператор d обратим $C^1(\Gamma) \to C(\Gamma)$. Действуя на j-ое уравнение краевого условия (1.2), его можем записать в виде

$$\left[\left(\frac{\partial}{\partial e}\right)^{2l-k_j}\left(\frac{\partial}{\partial n}\right)^{k_j-1} u + c_j^0 u\right]\bigg|_{\Gamma} = d^{k-k_j} f_j,$$

где

$$c_j^0 u = \sum_{0 \leqslant r \leqslant s \leqslant 2l-2} c_{rsj}^0 \frac{\partial^s u}{\partial^{s-r} x \partial^r y} + d^0\left(\frac{\partial^{k_j-1} u}{\partial n^{k_j-1}}\right)$$

с некоторыми $c_{rsj}^0 \in C^{1,\nu}(\Gamma)$. По отношению к $l \times 2l$-матрице-функции $C = (C_{jk}) \in C^{1,\nu}(\Gamma)$, элементы которой определяются из соотношений

$$\sum_{k=1}^{2l} C_{jk}(t) z^{k-1} = [e_1(t) + e_2(t) z]^{2l-k_j}[-e_2(t) + e_1(t) z]^{k_j-1}, \quad 1 \leqslant j \leqslant l, \tag{2.9}$$

аналогично предыдущему, эти краевые условия можем представить в виде

$$CU^+ + C^0 U = f^0, \tag{2.10}$$

где знак + указывает на граничное значение функций, оператор $C^0 = c^0 \mathcal{D}^{-1}$ ограничен $\mathcal{X}_0 \to [C^{1,\mu}(\Gamma)]^l$ и положено $f_j^0 = d^{k-k_j} f_j$. Поскольку операторы c_j^0 ограничены $C_\lambda^{2l,\mu} \to C^{2,\mu}(\Gamma)$, в действительности оператор C^0 компактен $\mathcal{X}_0 \to [C^{1,\mu}(\Gamma)]^l$.

В результате получаем задачу (2.5), (2.10) в классе $\mathcal{X}_0$, которая эквивалентна задаче $\mathcal{N}_0$ и которую обозначим символом $\mathcal{R}_0$. Целесообразно ее распространить на более широкий класс X, на котором оператор C^0 не определен. Это препятствие можно обойти следующим образом. В силу лемм 2.1, 2.2 существует проектор P банахова пространства X на его замкнутое подпространство $\mathcal{X}_0$. С помощью него можем рассмотреть обобщенную задачу Римана—Гильберта

$$L_A U = f^1, \quad (CU^+ + C^0 PU)\big|_{\Gamma} = f^0 \tag{2.11}$$

в классе X, где для единообразия положено $f^1 = F$. Эту задачу в классах X и X_0 обозначим, соответственно, R и R_0, а в классе $\mathcal{X}_0$ она переходит в задачу $\mathcal{R}_0$.

Следующая лемма устанавливает связь между индексами этих задач.

Лемма 2.3. *Если задача R фредгольмова, то фредгольмовы и задачи $R_0, \mathcal{R}_0$, причем индексы этих задач связаны соотношениями*

$$\operatorname{ind} R_0 - \operatorname{ind} \mathcal{R}_0 = nl(2l-1), \quad \operatorname{ind} R = \operatorname{ind} R_0. \tag{2.12}$$

Доказательство. Пусть для краткости $Z = [C^{1,\mu}(\Gamma)]^l$. Тогда операторы задач R, R_0 и $\mathcal{R}_0$, которые обозначим теми же символами, действуют, соответственно, $X \to Y \times Z$, $X_0 \to Y_0 \times Z$ и $\mathcal{X}_0 \to Y_0 \times Z$.

Предположим, что задача R фредгольмова. Тогда по определению ядро $\ker R$, т. е. класс решений $U \in X$ однородной задачи, конечномерно и существуют такие линейно независимые функционалы $(y_i^*, z_i^*) \in Y^* \times Z^*$, $1 \leqslant i \leqslant s$, что в обозначениях (2.11) условия «ортогональности»

$$y_i^*(f^1) + z_i^*(f^0) = 0, \quad 1 \leqslant i \leqslant s, \tag{2.13}$$

необходимы и достаточны для разрешимости неоднородной задачи R. При этом разность между размерностью $\dim(\ker R)$ и s определяет индекс $\operatorname{ind} R$ задачи.

В силу (2.4) ядро $\ker R_0$ задачи R_0 совпадает с $\ker R$, а функционалы (y_i^*, z_i^*) непрерывны и на $Y_0 \times Z$, поэтому с учетом (2.4) условия (2.13) достаточны и для разрешимости задачи R_0 с правыми частями $(f^1, f^0) \in Y_0 \times Z$. Однако, вообще говоря, эти функционалы, рассматриваемые как элементы $Y_0^* \times Z^*$, не являются линейно независимыми.

Однако в рассматриваемой ситуации их линейная независимость обеспечивается леммой 2.2. В самом деле, на основании этой леммы функционалы y_i^* и z_i^* связаны соотношением

$$y_i^*(f^1) = -z_i^*[(C^+ + C^0P)(L_A^{(-1)} f^0)], \quad 1 \leqslant i \leqslant s. \tag{2.14}$$

Поэтому пусть для некоторой линейной комбинации линейный функционалов (y_i^*, z_i^*) выполняется тождество

$$\sum_1^s \lambda_i[y_i^*(f^1) + z_i^*(f^0)] = 0, \quad (f^1, f^0) \in Y^0 \times Z,$$

так что, в частности, линейные функционалы z_i^* линейно зависимы. Но тогда в силу (2.14) этим свойством обладают и (y_i^*, z_i^*), что невозможно.

Таким образом, задача R_0 фредгольмова и ее индекс совпадает с индексом задачи R. Согласно лемме 2.1 оператор R_0 получен расширением $\mathcal{R}_0$ на $nl(2l-1)$ измерений, поэтому на основании известных свойств фредгольмовых операторов (см. [8,9]) отсюда следует фредгольмовость оператора $\mathcal{R}_0$ и первое равенство в (2.12). ☐

Совместно с леммами 1.1, 2.3 следующая теорема о фредгольмовой разрешимости задачи R приводит к справедливости теоремы 1.1.

Теорема 2.1. *В предположении* (1.7) *задача R фредгольмова в классе X и в обозначениях* (1.8) *ее индекс дается формулой*

$$\operatorname{ind} R = 2(n+1)\varkappa_0 + 2(n+1)\sum_{j=1}^m l_j(2l - l_j) - 2l(2l-1) - (n+1)l. \tag{2.15}$$

Доказательство. Аналогично (1.6) введем $2l \times l$-матрицу $B = W_h(\nu_1, \dots, \nu_m)$ по отношению к $2l$-вектору $h(z) = (1, z, \dots, z^{2l-1})$. Вместе с комплексно сопряженной $\overline{B}$ она образует $2l \times 2l$-матрицу $\widetilde{B} = (B\,\overline{B})$. Как показано в [5], эта матрица обратима и приводит матрицу A в (2.3) к жордановой блочно-диагональной форме:

$$\widetilde{B}^{-1}A\widetilde{B} = \operatorname{diag}(J, \overline{J}), \quad J = \operatorname{diag}(J_1, \dots, J_m), \tag{2.16}$$

где $J_k \in \mathbb{C}^{l_k \times l_k}$ является клеткой Жордана, отвечающей корню ν_k характеристического многочлена. Исходя из $l \times 2l$-матрицы $C(t)$, фигурирующей в (2.9), (2.10), составим $l \times l$-матрицу-функцию $C(t)B$ на Γ.

Как и при доказательстве леммы 2.2, без ограничения общности можно считать, что точка $z = 0$ лежит вне замкнутой области $\overline{D}$. Рассмотрим матрицу-функцию $H(z) = z_A^{1-2l}$, уже встречающуюся в этой лемме. Оператор умножения $V \to HV$ на эту функцию осуществляет изоморфизм пространства $C_\lambda^{1,\mu}$ на $X = C_{\lambda-2l+1}^{1,\mu}$. Поэтому подстановка $U = H\widetilde{U}$ сводит задачу (2.11) к эквивалентной задаче

$$L_A\widetilde{U} = \widetilde{F}, \quad (CH^+)\widetilde{U}^+ + C^0(H\widetilde{U}) = f^0 \tag{2.17}$$

в классе $C_\lambda^{1,\mu}$ с соответствующей правой частью $\widetilde{F} = H^{-1}F \in C_{\lambda-1}^\mu$. Согласно [12, теорема 4] в предположении

$$\det[\widetilde{C}(t)B] \neq 0, \quad t \in \Gamma, \tag{2.18}$$

задача (2.17) фредгольмова в классе $C_\lambda^{1,\mu}$ и ее индекс дается формулой

$$\operatorname{ind} \widetilde{R} = -\frac{1}{\pi}[\arg\det(CH^+B)]\big|_\Gamma - (n+1)l,$$

где приращение непрерывной ветви аргумента на контуре Γ осуществляется в направлении, оставляющем область D слева.

В силу (2.16) имеем равенство $z_AB = Bz_J$ с матрицей $(x+iy)_J = x1 + yJ$, так что $HB = Bz_J^{1-2l}$. Поэтому (2.18) равносильно

$$\det[C(t)B] \neq 0, \quad t \in \Gamma, \tag{2.19}$$

и предыдущая формула переходит в

$$\operatorname{ind}\widetilde{R} = -\frac{1}{\pi}[\arg\det(CB)]\big|_\Gamma - \frac{1}{\pi}[\arg\det(t_J^{1-2l})]\big|_\Gamma - (n+1)l. \tag{2.20}$$

Очевидно,

$$\det z_J = \prod_{j=1}^m (x+\nu_j y)^{(1-2l)l_j}.$$

По условию, точка $z=0$ лежит внутри одного из $n+1$ простых контуров, составляющих Γ (пусть она лежит внутри Γ_0). Тогда

$$\frac{1}{2\pi}[\arg\det(t_J^{1-2l})]_{\Gamma_0} = (2l-1)l, \quad \frac{1}{2\pi}[\arg\det(t_J^{1-2l})]_{\Gamma_j} = 0,\ 1\leqslant j\leqslant n, \tag{2.21}$$

где учтено, что положительное по отношению к D направление на Γ осуществляется по часовой стрелке.

Матрицу $C(t)B$ можно записать в форме

$$C(t)B = W_p(\nu_1,\dots,\nu_m),$$

где в обозначениях (1.5) вектор $p(z)=p(e,z)$ определяется компонентами $p_j(e,z) = (e_1 + e_2 z)^{2l-1}[\omega(e,z)]^{k_j-1}$. Как показано в [4], отсюда

$$\det[C(t)B] = \prod_{j=1}^m (e_1+e_2\nu_j)^{l_j(2l-l_j)} \det W_g[\omega(e,\nu_1),\dots,\omega(e,\nu_m)],$$

где в правой части равенства под $e\in\mathbb{T}$ понимается единичный касательный к Γ вектор $e(t)$. В частности, условие (2.19) равносильно (1.7).

Поскольку при движении на Γ в положительном направлении (т. е. по часовой стрелке) вектор $e(t)$ меняется на $\mathbb{T}$ по часовой стрелке, можем написать

$$-\frac{1}{\pi}[\arg\det W_g[\omega(e,\nu_1),\dots,\omega(e,\nu_m)]]\big|_\Gamma = 2(n+1)\varkappa_0,$$

$$\frac{1}{2\pi}\arg(e_1+\nu_j e_2)\big|_\Gamma = \sum_{j=0}^n \frac{1}{2\pi}\arg(e_1+\nu_j e_2)\big|_{\Gamma_j} = -n-1.$$

Следовательно,

$$-\frac{1}{\pi}[\arg\det(CB)]\big|_\Gamma = 2(n+1)\varkappa_0 + 2(n+1)\sum_{j=1}^m l_j(2l-l_j).$$

Подстановка этого равенства вместе с (2.21) в (2.20) приводит к справедливости формулы (2.16). □

3. Заключительные замечания

Результат, аналогичный теореме 1.1, справедлив и для случая конечной области с той разницей, что для индекса имеем выражение

$$\varkappa = 2(n-1)\left[\varkappa_0 + 2\sum_{i<j} l_i l_j\right], \tag{3.1}$$

которое в случае $n=0$ односвязной области D полностью совпадает с формулой, приведенной в [4]. Отметим в этой связи, что в формуле индекса, указанной в работе [11], допущена ошибка вместе с соответствующим пробелом в ее доказательстве. Этот пробел легко восполнить с помощью приведенных выше рассуждений.

Итак, пусть область D конечна и ограничена контуром $\Gamma\in C^{2l,\nu}$, составленным из простых контуров $\Gamma_0,\dots,\Gamma_m$. При этом предполагается, что контур Γ_0 является внешним и охватывает остальные компоненты. Рассмотрим задачу $\mathcal{N}$ в классе $C^{2l,\mu}(\overline{D})$ для уравнения (1.1) с коэффициентами $a_{r,k}\in C^\mu(\overline{D})$. Как и выше, с ней свяжем задачу $\mathcal{R}$ в классе $X=C^{1,\mu}(\overline{D})$ для системы (2.3), определяемой краевым условием (2.11). Тогда аналогом леммы 2.3 здесь является следующая связь между индексами $\varkappa$ и $\operatorname{ind} R$ этих задач:

$$\varkappa = (1-n)l(2l-1) + \operatorname{ind} R. \tag{3.2}$$

Согласно [12, теорема 1] в предположении (2.19) задача R фредгольмова и ее индекс дается формулой

$$\operatorname{ind} R = -\frac{1}{\pi}[\arg\det(CB)]\big|_\Gamma - (n-1)l. \tag{3.3}$$

Поскольку контур Γ_0 ориентирован против часовой стрелки, а контуры $\Gamma_j,\ 1 \leqslant j \leqslant n,$ — по часовой стрелке, предыдущие рассуждения дают равенство

$$-\frac{1}{\pi}[\arg\det(CB)]\big|_\Gamma = 2(n-1)\varkappa_0 + 2(n-1)\sum_{j=1}^m l_j(2l-l_j),$$

которое совместно с (3.2) и (3.3) приводит к формуле (3.1).

Как показано в [4], для следующих частных случаев корней характеристического уравнения и набора порядков $k_1, \ldots, k_l$ величина $\varkappa_0$ в (1.8) вычисляется явно:

$$\varkappa_0 = \begin{cases} -2\sum\limits_{i<j} l_i l_j, & k_{j+1} - k_j \equiv 1, \\ 0, & m = 1. \end{cases}$$

Отметим еще, что теорему 2 работы [11] можно переформулировать следующим образом.

Теорема 3.1. *Условие* (1.7) *равносильно тому, что рациональная функция*

$$R(\zeta) = (\det W_g)[\gamma_1(\zeta), \ldots, \gamma_m(\zeta)], \quad \gamma_k(\zeta) = \frac{\nu_k - \zeta}{1 + \nu_k\zeta},$$

не имеет вещественных нулей на расширенной действительной прямой $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\infty\}$, *и при выполнении этого условия величина* $-2\varkappa_0$ *совпадает с числом нулей этой функции в нижней полуплоскости, взятое с учетом их кратности.*

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Бицадзе А. В.* О некоторых свойствах полигармонических функций// Дифф. уравн. — 1988. — *24*, № 5. — С. 825–831.
2. *Кондратьев В. А., Олейник О. А.* О периодических решениях параболического уравнения второго порядка во внешних областях// Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Мат. Мех. — 1985. — *4*. — С. 38–47.
3. *Кошанов Б. Д., Кулимбек Ж. К.* Поведение решений уравнения Пуассона и бигармонического уравнения// Мат. ж. — 2016. — *16*, № 1. — С. 118–134.
4. *Кошанов Б., Солдатов А. П.* Краевая задача с нормальными производными для эллиптического уравнения на плоскости// Дифф. уравн. — 2016. — *52*, № 12. — С. 1666–1681.
5. *Малахова Н. А., Солдатов А. П.* Об одной краевой задаче для эллиптического уравнения высокого порядка// Дифф. уравн. — 2008. — *44*, № 8. — С. 1077–1083.
6. *Матевосян О. А.* О единственности решения первой краевой задачи теории упругости для неограниченных областей// Усп. мат. наук. — 1993. — *48*, № 6. — С. 159-160.
7. *Назаров С. А., Пламеневский Б. А.* Эллиптические задачи в областях с кусочно гладкой границей. — М.: Наука, 1991.
8. *Пале Р.* Семинар по теореме Атьи—Зингера об индексе. — М.: Мир, 1970.
9. *Солдатов А. П.* Сингулярные интегральные операторы и эллиптические краевые задачи// Соврем. мат. Фундам. направл. — 2016. — *63*, № 1. — С. 1–179.
10. *Солдатов А. П.* Об одной краевой задаче для эллиптического уравнения на плоскости в многосвязной области// Владикавказ. мат. ж. — 2017. — *19*, № 3. — С. 51–58.
11. *Солдатов А. П.* О фредгольмовости и индексе обобщенной задачи Неймана// Дифф. уравн. — 2020. — *56*, № 2. — С. 217–225.
12. *Солдатов А. П., Чернова О. В.* Задача Римана—Гильберта для эллиптических систем первого порядка на плоскости с постоянными старшими коэффициентами// Итоги науки и техн. Сер. Соврем. мат. и ее прил. — 2018. — *149*. — С. 95–102.
13. *Koshanov B. D., Soldatov A. P.* About the generalized Dirichlet—Neumann problem for an elliptic equation of high order// AIP Conference Proceedings. — 2018. — *1997*. — 020013.

14. *Matevossian O. A.* On solutions of the Neumann problem for the biharmonic equation in unbounded domains// Math. Notes. — 2015. — *98*. — С. 990–994.
15. *Schechter M.* General boundary value problems for elliptic partial differential equations// Commun. Pure Appl. Math. — 1950. — *12*. — С. 467–480.

Б. Д. Кошанов
Институт математики и математического моделирования Министерства образования и науки Республики Казахстан, Алматы, Казахстан
E-mail: koshanov@list.ru

А. П. Солдатов
Федеральный исследовательский центр «Информатика и управление» Российской академии наук, Москва, Россия
E-mail: soldatov48@gmail.com

DOI: 10.22363/2413-3639-2021-67-3-564-575 UDC 517.956

On the Solvability of the Generalized Neumann Problem for a Higher-Order Elliptic Equation in an Infinite Domain

© 2021 **B. D. Koshanov, A. P. Soldatov**

Abstract. We consider the generalized Neumann problem for a $2l$th-order elliptic equation with constant real higher-order coefficients in an infinite domain containing the exterior of some circle and bounded by a sufficiently smooth contour. It consists in specifying of the $(k_j - 1)$th-order normal derivatives where $1 \leqslant k_1 < \ldots < k_l \leqslant 2l$; for $k_j = j$ it turns into the Dirichlet problem, and for $k_j = j + 1$ into the Neumann problem. Under certain assumptions about the coefficients of the equation at infinity, a necessary and sufficient condition for the Fredholm property of this problem is obtained and a formula for its index in Hölder spaces is given.

REFERENCES

1. A. V. Bitsadze, "O nekotorykh svoystvakh poligarmonicheskikh funktsiy" [Some properties of polyharmonic functions], *Diff. uravn.* [Differ. Equ.], 1988, **24**, No. 5, 825–831 (in Russian).
2. V. A. Kondrat'ev and O. A. Oleynik, "O periodicheskikh resheniyakh parabolicheskogo uravneniya vtorogo poryadka vo vneshnikh oblastyakh" [On periodic solutions of a second-order parabolic equation in outer domains], *Vestn. Mosk. un-ta. Ser. 1. Mat. Mekh.* [Bull. Moscow Univ. Ser. 1. Math. Mech.], 1985, **4**, 38–47 (in Russian).
3. B. D. Koshanov and Zh. K. Kulimbek, "Povedenie resheniy uravneniya Puassona i bigarmonicheskogo uravneniya" [Behavior of solutions of the Poisson equation and the biharmonic equation], *Mat. zh.* [Math. J.], 2016, **16**, No. 1, 118–134 (in Russian).
4. B. Koshanov and A. P. Soldatov, "Kraevaya zadacha s normal'nymi proizvodnymi dlya ellipticheskogo uravneniya na ploskosti" [Boundary-value problem with normal derivatives for an elliptic equation on a plane], *Diff. uravn.* [Differ. Equ.], 2016, **52**, No. 12, 1666–1681 (in Russian).
5. N. A. Malakhova and A. P. Soldatov, "Ob odnoy kraevoy zadache dlya ellipticheskogo uravneniya vysokogo poryadka" [On a boundary-value problem for a higher-order elliptic equation], *Diff. uravn.* [Differ. Equ.], 2008, **44**, No. 8, 1077–1083 (in Russian).

6. O. A. Matevosyan, “O edinstvennosti resheniya pervoy kraevoy zadachi teorii uprugosti dlya neogranichennykh oblastey” [On the uniqueness of the solution of the first boundary-value problem of elasticity theory for unbounded domains], *Usp. mat. nauk* [Progr. Math. Sci.], 1993, **48**, No. 6, 159-160 (in Russian).
7. S. A. Nazarov and B. A. Plamenevskii, *Ellipticheskie zadachi v oblastyakh s kusochno gladkoy granitsey* [Elliptic Problems in Domains with Piecewise Smooth Boundaries], Nauka, Moscow, 1991 (in Russian).
8. R. Palais, *Seminar po teoreme At'i—Zingera ob indekse* [Seminar on the Atiyah–Singer Index Theorem], Mir, Moscow, 1970 (Russian translation).
9. A. P. Soldatov, “Singulyarnye integral'nye operatory i ellipticheskie kraevye zadachi” [Singular integral operators and elliptic boundary-value problems], *Sovrem. mat. Fundam. napravl.* [Contemp. Math. Fundam. Directions], 2016, **63**, No. 1, 1–179 (in Russian).
10. A. P. Soldatov, “Ob odnoy kraevoy zadache dlya ellipticheskogo uravneniya na ploskosti v mnogosvyaznoy oblasti” [On one boundary-value problem for an elliptic equation on a plane in a multiply connected domain], *Vladikavkaz. mat. zh.* [Vladikavkaz. Math. J.], 2017, **19**, No. 3, 51–58 (in Russian).
11. A. P. Soldatov, “O fredgol'movosti i indekse obobshchennoy zadachi Neymana” [On the Fredholm property and the index of the generalized Neumann problem], *Diff. uravn.* [Differ. Equ.], 2020, **56**, No. 2, 217–225 (in Russian).
12. A. P. Soldatov and O. V. Chernova, “Zadacha Rimana—Gil'berta dlya ellipticheskikh sistem pervogo poryadka na ploskosti s postoyannymi starshimi koeffitsientami” [The Riemann–Hilbert problem for first-order elliptic systems on a plane with constant higher-order coefficients], *Itogi nauki i tekhn. Ser. Sovrem. mat. i ee pril.* [Totals Sci. Tech. Contemp. Math. Appl.], 2018, **149**, 95–102 (in Russian).
13. B. D. Koshanov and A. P. Soldatov, “About the generalized Dirichlet—Neumann problem for an elliptic equation of high order,” *AIP Conference Proceedings*, 2018, **1997**, 020013.
14. O. A. Matevossian, “On solutions of the Neumann problem for the biharmonic equation in unbounded domains,” *Math. Notes*, 2015, **98**, 990–994.
15. M. Schechter, “General boundary value problems for elliptic partial differential equations,” *Commun. Pure Appl. Math.*, 1950, **12**, 467–480.

B. D. Koshanov

Institute of Mathematics and Mathematical Modeling, Almaty, Kazakhstan

E-mail: koshanov@list.ru

A. P. Soldatov

Federal Research Center “Computer Science and Control” of the Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia

E-mail: soldatov48@gmail.com