Современная математика. Фундаментальные направления. Том 67, № 3 (2021). С. 549–563
Contemporary Mathematics. Fundamental Directions. ISSN 2413-3639 (Print)

DOI: 10.22363/2413-3639-2021-67-3-549-563 УДК 517.97

О РЕШЕНИИ ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ ПЕРВОГО ПОРЯДКА

© 2021 г. **В. Г. ЗАДОРОЖНИЙ, Л. Ю. КАБАНЦОВА**

Аннотация. Получены явные формулы для решения системы дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка. Находится решение системы с начальными условиями. Приведены примеры расчетов, показывающие истинность утверждений. Более сложной для решения оказалась задача нахождения математического ожидания решения системы дифференциальных уравнений в частных производных, коэффициенты которых являются случайными процессами. Рассмотрен пример с гауссовыми коэффициентами.

ОГЛАВЛЕНИЕ

1. Введение

Решения скалярных дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка могут быть записаны в квадратурах [1, 4, 8–10]. Содержательная теория и некоторые применения таких уравнений со многими переменными рассмотрены благодаря тесной связи с системами обыкновенных дифференциальных уравнений в [8]. Большой вклад в развитие теории дифференциальных уравнений первого порядка внес С. Н. Кружков [7]. Системы дифференциальных уравнений первого порядка в частных производных изучены в меньшей степени.

Пусть $\mathbb{C}$ — множество комплексных чисел, Y — вещественное n-мерное пространство. Мы рассмотрим систему дифференциальных уравнений

$$\frac{\partial y}{\partial t} = a_1(t)A\frac{\partial y}{\partial z} + a_2(t)\frac{\partial y}{\partial x} + a_3(t)y + b(t,z,x). \tag{1.1}$$

Здесь a_1, a_2, a_3 — заданные функции, $y : T \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to Y$ — искомая функция, A — линейный оператор, действующий в пространстве Y, а $b : T \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to Y$ — заданное отображение.

Базис в пространстве Y может быть выбран таким образом, чтобы матрица, соответствующая оператору A, имела верхний треугольный вид. При этом систему уравнений можно последовательно интегрировать, решая скалярные линейные дифференциальные уравнения в частных производных первого порядка. Этим способом можно находить решение и линейной системы обыкновенных дифференциальных уравнений с постоянным оператором

$$y' = Ay, \tag{1.2}$$

где $y : T \to Y$. Однако во многих случаях (см. [6, с. 76]) удобнее использовать фундаментальную операторную функцию

$$\Phi(t) = \exp(At) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(At)^k}{k!}.$$

Решение системы уравнений (1.2) с начальным условием $y(t_0) = y_0$ записывается в виде $y(t) = \Phi(t)\Phi^{-1}(t_0)y_0$.

Оказывается, решение системы дифференциальных уравнений (1.1) можно записать аналогичным образом.

Более сложной является задача нахождения математического ожидания решения линейной системы дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка, коэффициенты которой являются случайными процессами. Эта задача сводится к детерминированной системе дифференциальных уравнений с обычными и вариационными производными, для которой удается получить явную формулу решения и выписать математическое ожидание решения с использованием характеристического функционала случайных коэффициентов.

2. Операторные функции

Пусть E обозначает оператор тождественного преобразования в пространстве Y. Рассмотрим операторную функцию

$$Y_k(t,z) = d_k \left(zE + \int_{t_0}^{t} a(s)ds A \right)^k, \tag{2.1}$$

где $z \in \mathbb{C}$, a — заданная функция на отрезке $[t_0, t_1]$.

Теорема 2.1. *Пусть a — непрерывная функция на $[t_0, t_1]$, тогда существуют производные $\dfrac{\partial Y_k}{\partial t}$, $\dfrac{\partial Y_k}{\partial z}$ и Y_k является решением уравнения*

$$\frac{\partial Y}{\partial t} = a(t)A\frac{\partial Y}{\partial z}. \tag{2.2}$$

Доказательство. Пусть $\triangle z$ — приращение переменной z. По формуле бинома Ньютона [2, с. 163]

$$\left(zE + \triangle zE + A\int_{t_0}^{t} a(s)\,ds \right)^k = \sum_{m=0}^{k} C_k^m \left(zE + A\int_{t_0}^{t} a(s)\,ds \right)^{k-m} \triangle z^m E^m,$$

где $C_k^m = \dfrac{k!}{m!(k-m)!}$.

При этом

$$\frac{1}{\triangle z}\left(Y_k(t, z+\triangle z) - Y_k(t,z)\right) = \frac{1}{\triangle z}\left[\sum_{m=0}^{k} C_k^m \left(zE + A\int_{t_0}^{t} a(s)\,ds \right)^{k-m} \triangle z^m E^m - \left(zE + A\int_{t_0}^{t} a(s)\,ds \right)^{k} \right] =$$

$$= \frac{1}{\triangle z}\left[k\left(zE + A\int_{t_0}^{t} a(s)\,ds \right)^{k-1} \triangle zE + \sum_{m=2}^{k} C_k^m \left(zE + A\int_{t_0}^{t} a(s)\,ds \right)^{k-m} \triangle z^m E^m \right].$$

Переходя к пределу при $\triangle z \to 0$, получаем

$$\frac{\partial Y_k(t,z)}{\partial z} = kd_k \left(zE + A \int\limits_{t_0}^{t} a(s)ds \right)^{k-1}. \tag{2.3}$$

Пусть теперь $\triangle t$ — приращение переменной t. Воспользовавшись теоремой о среднем значении [5, с. 353] и формулой бинома Ньютона, находим

$$A \int\limits_{t_0}^{t+\triangle t} a(s)\,ds = A \int\limits_{t_0}^{t} a(s)\,ds + A \int\limits_{t}^{t+\triangle t} a(s)\,ds = A \int\limits_{t_0}^{t} a(s)\,ds + a(t)A\triangle t + o(\triangle t),$$

здесь $o(\triangle t)$ — бесконечно малая высшего порядка относительно $\triangle t$.

$$\frac{1}{\triangle t}\left(Y_k(t+\triangle t, z) - Y_k(t,z)\right) = \frac{1}{\triangle t}\left[\left(zE + A\int\limits_{t_0}^{t} a(s)\,ds + a(t)A\triangle t + o(\triangle t)\right)^k - \left(zE + A\int\limits_{t_0}^{t} a(s)\,ds\right)^k\right] =$$

$$= \frac{1}{\triangle t} k \left(zE + A\int\limits_{t_0}^{t} a(s)\,ds\right)^{k-1} (a(t)A\triangle t + o(\triangle t)) + \frac{1}{\triangle t}\sum_{m=2}^{k} C_k^m \left(zE + A\int\limits_{t_0}^{t} a(s)\,ds\right)^{k-m} (a(t)A\triangle t + o(\triangle t))^m.$$

Переходя к пределу при $\triangle t \to 0$, получаем

$$\frac{\partial Y_k(t,z)}{\partial t} = kd_k a(t) A \left(zE + A \int\limits_{t_0}^{t} a(s)ds \right)^{k-1}. \tag{2.4}$$

Подстановка (2.3), (2.4) в уравнение (2.2) показывает, что (2.1) является решением (2.2). □

Рассмотрим операторную функцию

$$Y(t,z) = \sum_{k=0}^{\infty} d_k \left(zE + \int\limits_{t_0}^{t} a(s)dsA \right)^k = \sum_{k=0}^{\infty} Y_k(t,z). \tag{2.5}$$

Подставим (2.5) в уравнение (2.2), получим

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\partial Y_k(t,z)}{\partial t} = \sum_{k=0}^{\infty} a(t) A \frac{\partial Y_k(t,z)}{\partial z}. \tag{2.6}$$

Поскольку в (2.6) записано равенство степенных рядов по переменной z и Y_k удовлетворяет равенствам (2.2), то $Y(t,z)$ является решением уравнения (2.2).

Таким образом, если функция $y(z)$ дифференцируема по $z \in \mathbb{C}$ и функция $a(t)$ непрерывна на $[t_0, t_1]$, то

$$Y(t,z) = y\left(zE + A \int\limits_{t_0}^{t} a(s)ds \right) \tag{2.7}$$

является решением уравнения (2.2), причем выполняется начальное условие $Y(t_0, z) = y(zE) = y(z)E$. Отметим, что формула (2.7) для решения линейной системы дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка (2.2) нам ранее не встречалась.

3. Система дифференциальных уравнений со специальными начальными условиями

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений

$$\frac{\partial y}{\partial t} = a_1(t)A\frac{\partial y}{\partial z} + a_2(t)\frac{\partial y}{\partial x} + a_3(t)y \tag{3.1}$$

с начальным условием

$$y(t_0, z, x) = y_0(z)y_1(x)\xi. \tag{3.2}$$

Здесь $t_0 \in \mathbb{R}$ задано, $y_0 : \mathbb{C} \to \mathbb{R}, y_1 : \mathbb{C} \to \mathbb{R}$ — известные функции, $\xi \in Y$.

Введем в рассмотрение операторную функцию

$$\Phi(t, z, x) = y_0\left(zE + A\int\limits_{t_0}^{t} a_1(s)\,ds\right) y_1\left(x + \int\limits_{t_0}^{t} a_2(s)\,ds\right). \tag{3.3}$$

Теорема 3.1. *Пусть a_1, a_2, a_3 — непрерывные функции на $[t_0, t_1]$, $y_0(z), y_1(x)$ — дифференцируемые функции, $\xi \in Y$, тогда*

$$y(t, z, x) = \Phi(t, z, x)\exp(\int\limits_{t_0}^{t} a_3(s)\,ds)\xi \tag{3.4}$$

является решением задачи (3.1)*,* (3.2).

Доказательство. Проверим выполнение начального условия (3.2):

$$y(t_0, z, x) = \Phi(t_0, z, x)\xi = y_0(zE)y_1(x)\xi = y_0(z)Ey_1(x)\xi = y_0(z)y_1(x)\xi.$$

Воспользовавшись тем, что $y_0\left(zE + A\int\limits_{t_0}^{t} a_1(s)\,ds\right)$ дифференцируемо и удовлетворяет уравнению (2.2), находим

$$\frac{\partial y}{\partial t} = \left[a_1(t)A\frac{\partial y_0\left(zE + A\int\limits_{t_0}^{t} a_1(s)\,ds\right)}{\partial z} y_1\left(x + \int\limits_{t_0}^{t} a_2(s)\,ds\right)\exp(\int\limits_{t_0}^{t} a_3(s)\,ds) + \right.$$

$$+ y_0\left(zE + A\int\limits_{t_0}^{t} a_1(s)\,ds\right) a_2(t)\frac{\partial y_1\left(x + \int\limits_{t_0}^{t} a_2(s)\,ds\right)}{\partial x}\exp(\int\limits_{t_0}^{t} a_3(s)\,ds) +$$

$$\left. + y_0\left(zE + A\int\limits_{t_0}^{t} a_1(s)\,ds\right) y_1\left(x + \int\limits_{t_0}^{t} a_2(s)\,ds\right) a_3(t)\exp(\int\limits_{t_0}^{t} a_3(s)\,ds)\right]\xi.$$

Подставив это выражение и (3.4) в (3.1), получаем равенство, т. е. (3.4) является решением задачи (3.1), (3.2). □

4. Система дифференциальных уравнений с более общими начальными условиями

Для уравнения (1.1) более естественно начальное условие вида

$$y(t_0, z, x) = y_0(z)y_1(x), \tag{4.1}$$

где y_0 — векторная функция $y_0 : \mathbb{C} \to Y$, $y_1 : \mathbb{C} \to \mathbb{R}$.

Пусть $\{e_j\}, j = 1, \ldots, n$ — базис в Y, тогда $y_0(z) = \sum\limits_{j=1}^{n} y_{0j}(z)e_j$. Пусть

$$\Phi_j(t, z, x) = y_{0j}\left(zE + A\int\limits_{t_0}^{t} a_1(s)\,ds\right) y_1\left(x + \int\limits_{t_0}^{t} a_2(s)\,ds\right), \quad j = 1, \ldots .n.$$

Теорема 4.1. *Пусть* a_1, a_2, a_3 — *непрерывные функции на* $[t_0, y_1]$, $y_0 : \mathbb{C} \to Y$, $y_1 : \mathbb{C} \to \mathbb{R}$ — *дифференцируемые отображения, тогда*

$$y(t,z,x) = \sum_{j=1}^{n} \Phi_j(t,z,x) \exp\left(\int_{t_0}^{t} a_3(s)\,ds \right) e_j \tag{4.2}$$

является решением уравнения (3.1) *с начальным условием* (4.1).

Доказательство. Уравнение (3.1) является линейным однородным дифференциальным уравнением. Решение уравнения, у которого начальное условие является конечной линейной комбинацией, является линейной комбинацией решений, соответствующих каждому слагаемому, следовательно, (4.2) — решение задачи (3.1), (4.1). □

Замечание 4.1. Если в начальном условии (4.1) $y_0 : \mathbb{C} \to \mathbb{R}$, $y_1 : \mathbb{C} \to Y$, то $y_1(x) = \sum\limits_{j=1}^{n} y_{1j}(x) e_j$. Пусть

$$\Phi_{j1}(t,z,x) = y_0 \left(zE + A \int_{t_0}^{t} a_1(s)\,ds \right) y_{1j} \left(x + \int_{t_0}^{t} a_2(s)\,ds \right), \quad j = 1, \ldots, n.$$

Тогда решение задачи (3.1), (4.1) имеет вид

$$y(t,z,x) = \sum_{j=1}^{n} \Phi_{j1}(t,z,x) \exp(\int_{t_0}^{t} a_3(s)\,ds) e_j.$$

5. Линейное неоднородное уравнение

Теорема 5.1. *Пусть в уравнении* (1.1) *функции* $a_1, a_2, a_3 : T \to \mathbb{C}$ *непрерывны,* $y_0 : \mathbb{C} \to Y$, $y_1 : \mathbb{C} \to \mathbb{R}$ — *дифференцируемые отображения,* $b : \mathbb{R} \times \mathbb{C} \times \mathbb{C} \to Y$ *непрерывная по* t *и дифференцируемая по* z *и* x *функция* $b(t,z,x) = \sum\limits_{j=1}^{n} b_j(t,z,x) e_j$, *тогда*

$$\begin{aligned} y(t,z,x) = \sum_{j=1}^{n} \Phi_j(t,z,x) \exp(\int_{t_0}^{t} a_3(s)\,ds) e_j + \\ + \sum_{j=1}^{n} \int_{t_0}^{t} b_j \left(s, zE + A \int_{s}^{t} a_1(\tau)\,d\tau, x + \int_{s}^{t} a_2(\tau)\,d\tau \right) \exp(\int_{s}^{t} a_3(\tau)\,d\tau)\,ds\, e_j \end{aligned} \tag{5.1}$$

является решением задачи Коши (1.1), (4.1).

Доказательство. Первое слагаемое — это решение линейного однородного уравнения (3.1) с начальным условием (4.1). Поскольку уравнение (1.1) линейное, то достаточно доказать, что второе слагаемое в (5.1) является решением линейного неоднородного уравнения (1.1). Пусть D_m обозначает частную производную функции y по переменной с номером m.

Вычислим производную:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\sum_{j=1}^{n} \int_{t_0}^{t} b_j \left(s, zE + A \int_{s}^{t} a_1(\tau)\,d\tau, x + \int_{s}^{t} a_2(\tau)\,d\tau \right) \exp(\int_{s}^{t} a_3(\tau)\,d\tau)\,ds\, e_j \right) =$$

$$\begin{aligned} = \sum_{j=1}^{n} b_j(t, zE, x) e_j + \sum_{j=1}^{n} \int_{t_0}^{t} a_1(t) A D_2 b_j \left(s, zE + A \int_{s}^{t} a_1(\tau)\,d\tau, x + \int_{s}^{t} a_2(\tau)\,d\tau \right) \exp(\int_{s}^{t} a_3(\tau)\,d\tau)\,ds\, e_j + \\ + \sum_{j=1}^{n} \int_{t_0}^{t} a_2(t) D_3 b_j \left(s, zE + A \int_{s}^{t} a_1(\tau)\,d\tau, x + \int_{s}^{t} a_2(\tau)\,d\tau \right) \exp(\int_{s}^{t} a_3(\tau)\,d\tau)\,ds\, e_j + \end{aligned}$$

$$+\sum_{j=1}^{n}\int_{t_0}^{t} b_j\left(s, zE + A\int_{s}^{t} a_1(\tau)\,d\tau, x + \int_{s}^{t} a_2(\tau)\,d\tau\right)\exp(\int_{s}^{t} a_3(\tau)\,d\tau)a_3(t)\,ds\,e_j.$$

Легко видеть, что это выражение равно правой части уравнения (1.1), в которую подставлено второе слагаемое выражения (5.1). □

6. Математическое ожидание решения линейной системы дифференциальных уравнений со случайными коэффициентами

Пусть $L_1(T)$ — пространство суммируемых функций на отрезке T с нормой $\|v\| = \int_T |v(t)|dt$, $\psi : L_1(T) \to \mathbb{C}$ — функционал, $h \in L_1(T)$ — приращение переменной v.

Определение 6.1. Если

$$\psi(v+h) - \psi(v) = \int_T \varphi(t,v)h(t)\,dt + o(h),$$

где $o(h)$ — бесконечно малая высшего порядка относительно h, и интеграл (Лебега) является линейным ограниченным функционалом по переменной h, тогда отображение $\varphi : T \times L_1(T) \to \mathbb{C}$ называется *вариационной производной функционала* ψ *в точке* v и обозначается $\dfrac{\delta\psi(v)}{\delta v(t)}$.

Вариационное дифференцирование аналогично обычному дифференцированию.

Пусть $\varepsilon(t,\omega)$ обозначает случайный процесс (ω — случайное событие; см. [3]). В дальнейшем случайный процесс обозначается просто $\varepsilon(t)$, а $E[\varepsilon]$ обозначает математическое ожидание случайного процесса ε.

Определение 6.2 (см. [3, с. 30])**.** Функционал

$$\psi(v) = E[\exp(i\int_T \varepsilon(s)v(s)\,ds)],$$

где $v \in L_1(T), i = \sqrt{-1}$, называется *характеристическим функционалом случайного процесса* ε.

Отметим, что с помощью характеристического функционала можно находить моментные функции случайного процесса, например (см. [3]),

$$\left.\frac{\delta\psi(v)}{\delta v(t)}\right|_{v=0} = iE[\varepsilon(t)],$$

$$\left.\frac{\delta^2\psi(v)}{\delta v(t)\delta v(\tau)}\right|_{v=0} = -E[\varepsilon(t)\varepsilon(\tau)].$$

Рассмотрим задачу Коши для системы дифференциальных уравнений первого порядка

$$\frac{\partial y}{\partial t} = \varepsilon(t)A\frac{\partial y}{\partial z} + b(t,z), \tag{6.1}$$

$$y(t_0,z) = y_0(z), \tag{6.2}$$

где $t \in T \subset \mathbb{R}$, t_0 задано, $y : T \times \mathbb{R} \to Y$ — искомое отображение, $b : T \times \mathbb{R} \to Y$ — случайный векторный процесс, A — постоянный оператор, действующий в пространстве Y, Y — конечномерное пространство со скалярным произведением $< \cdot,\cdot >$, ε — случайный процесс, $y_0(z)$ — случайный векторный процесс. Будем считать, что процессы ε и b заданы характеристическим функционалом, т. е. считаем известным

$$\psi(v_1,v_2) = E\left[\exp(i\int_T \varepsilon(s)v_1(s)\,ds + i\int_T\int_{\mathbb{R}} < b(s_1,s_2), v_2(s_1,s_2) > ds_2\,ds_1)\right].$$

Здесь $< \cdot,\cdot >$ обозначает скалярное произведение в Y.

Введем обозначение

$$w = \exp(i \int_T \varepsilon(s) v_1(s)\, ds + i \int_T \int_{\mathbb{R}} < b(s_1, s_2), v_2(s_1, s_2) > ds_2\, ds_1).$$

Умножим уравнение (6.1) на w и возьмем математическое ожидание полученного равенства. Находим

$$E\left[\frac{\partial y}{\partial t} w\right] = E\left[\varepsilon(t) A \frac{\partial y}{\partial z} w\right] + E[b(t,z)w]. \tag{6.3}$$

Введем обозначение

$$\widetilde{y}(t, z, v_1, v_2) = E[y(t,z)w].$$

Уравнение (6.3) (формально) можно записать с помощью $\widetilde{y}$. Имеем

$$\frac{\partial \widetilde{y}}{\partial t} = -iA \frac{\delta}{\delta v_1(t)} \frac{\partial \widetilde{y}}{\partial z} - i \frac{\delta \psi}{\delta v_2(t,z)}. \tag{6.4}$$

Умножив начальные условие (6.2) на w и вычислив математическое ожидание полученного равенства, получим

$$E[y(t_0, z)w] = E[y_0(z)w] = E[y_0(z)]E[w] = E[y_0(z)]\psi(v_1, v_2).$$

Здесь мы предполагаем, что y_0 не зависит от ε и b. Последнее равенство запишем в виде

$$\widetilde{y}(t_0, z, v_1, v_2) = E[y_0(z)]\psi(v_1, v_2). \tag{6.5}$$

Определение 6.3. *Математическим ожиданием $E[y(t,z)]$ решения задачи Коши* (6.1), (6.2) *называется* $\widetilde{y}(t,z,0,0)$, *где* $\widetilde{y}(t,z,v_1,v_2)$ — *решение задачи* (6.4), (6.5) *в некоторой окрестности точки* $v_1 = 0$, $v_2 = 0$.

Таким образом, для нахождения математического ожидания $E[y(t,z)]$ решения задачи (6.1), (6.2) достаточно найти решение $\widetilde{y}(t,z,v_1,v_2)$ неслучайной (детерминированной) задачи (6.4), (6.5) в малой окрестности точки $v_1 = 0$, $v_2 = 0$.

7. Решение уравнения с обычной и вариационной производными

Пусть $F_z(g(z))(\xi)$ обозначает преобразование Фурье функции g по переменной z (см. [12]).

Применив преобразование Фурье по переменной z к уравнениям (6.4), (6.5), получим

$$\frac{\partial}{\partial t} F_z(\widetilde{y}) = -\xi A \frac{\delta}{\delta v_1(t)} F_z(\widetilde{y}) - i F_z(\frac{\delta \psi}{\delta v_2(t,z)}), \tag{7.1}$$

$$F_z(\widetilde{y})(t_0, \xi, v_1, v_2) = F_z(E[y_0(z)])(\xi)\psi(v_1, v_2). \tag{7.2}$$

Уравнение (7.1) похоже на уравнение (1.1), но вместо частной производной по z в уравнении (7.1) стоит вариационная производная $\dfrac{\delta}{\delta v_1(t)}$.

Пусть $\chi(t_0, t, s)$ — функция переменной $s \in \mathbb{R}$, определенная следующим образом: $\chi(t_0, t, s) = \operatorname{sign}(s - t_0)$ при s, принадлежащем отрезку $[\min\{t_0, t\}, \max\{t_0, t\}]$, и $\chi(t_0, t, s) = 0$ при s, не принадлежащих отрезку.

Рассмотрим отображение $g_k : L_1(T) \to \mathbb{R}$,

$$g_k(v) = \int_T \dots \int_T B_k(s_1, s_2, \dots, s_k) v(s_1) \dots v(s_k)\, ds_1 \dots ds_k,$$

где B_k — непрерывная, симметричная по любой паре переменных функция.

Теорема 7.1. *Пусть a — непрерывная на отрезке $[t_0, t_1] = T$ функция, A — линейный оператор, действующий в Y. Тогда существует частная производная по переменной t отображения*

$$\Phi_k(t, v) = \int_T \dots \int_T B_k(s_1, s_2, \dots, s_k)(v(s_1)E + a(s_1)\chi(t_0, t, s_1)A) \dots (v(s_k)E + a(s_k)\chi(t_0, t, s_k)A)\, ds_1 \dots ds_k$$

и справедливо равенство

$$\frac{\partial \Phi_k(t,v)}{\partial t} = a(t)Ak \int_T \ldots \int_T B_k(s_1, s_2, \ldots, s_{k-1}, t)(v(s_1)E + a(s_1)\chi(t_0,t,s_1)A) \times$$
$$\times \ldots \times (v(s_{k-1})E + a(s_{k-1})\chi(t_0,t,s_{k-1})A)\, ds_1 \ldots ds_{k-1}. \quad (7.3)$$

Доказательство. Пусть $\triangle t$ — приращение переменной t, тогда, используя формулу бинома Ньютона и симметричность функции B_k, получаем

$$\frac{1}{\triangle t}(\Phi_k(t+\triangle t, v) - \Phi_k(t,v)) =$$
$$= \frac{1}{\triangle t}\int_T \ldots \int_T B_k(s_1, \ldots, s_k)[(v(s_1)E + a(s_1)\chi(t_0, t+\triangle t, s_1)A) \ldots (v(s_k)E + a(s_k)\chi(t_0, t+\triangle t, s_k)A) -$$
$$- (v(s_1)E + a(s_1)\chi(t_0,t,s_1)A) \ldots (v(s_k)E + a(s_k)\chi(t_0,t,s_k)A)]\, ds_1 \ldots ds_k =$$
$$= \frac{1}{\triangle t}\int_T \ldots \int_T B_k(s_1, \ldots, s_k)\sum_{m=0}^{k} C_k^m \Big[(v(s_1)E + a(s_1)\chi(t_0,t,s_1)A) \ldots (v(s_{k-m})E + a(s_{k-m})\chi(t_0,t,s_{k-m})A) \times$$
$$\times (a(s_{k-m+1})\chi(t, t+\triangle t, s_{k-m+1})) \ldots (a(s_k)\chi(t, t+\triangle t, s_k)) -$$
$$- (v(s_1)E + a(s_1)\chi(t_0,t,s_1)A) \ldots (v(s_k)E + a(s_k)\chi(t_0,t,s_k)A)\Big]\, ds_1 \ldots ds_k =$$
$$= \frac{k}{\triangle t}\int_T \ldots \int_T B_k(s_1, \ldots, s_k)(v(s_1)E + a(s_1)\chi(t_0,t,s_1)A) \ldots (v(s_{k-1})E + a(s_{k-1})\chi(t_0,t,s_{k-1})A) \times$$
$$\times (a(s_k)\chi(t, t+\triangle t, s_k)A)\, ds_1 \ldots ds_k +$$
$$+ \frac{1}{\triangle t}\int_T \ldots \int_T B_k(s_1, \ldots, s_k)\sum_{m=2}^{k} C_k^m (v(s_1)E + a(s_1)\chi(t_0,t,s_1)A) \ldots (v(s_{k-m})E + a(s_{k-m})\chi(t_0,t,s_{k-m})A) \times$$
$$\times A^{k-m} a(s_{k-m+1})\chi(t, t+\triangle t, s_{k-m+1}) \ldots a(s_k)\chi(t, t+\triangle t, s_k)\, ds_1 \ldots ds_k. \quad (7.4)$$

Согласно теореме о среднем значении [11, с. 113], при непрерывной функции f

$$\frac{1}{\triangle t}\int_T f(s_k)Aa(s_k)\chi(t, t+\triangle t, s_k)\, ds_k = \frac{1}{\triangle t}\int_t^{t+\triangle t} f(s_k)Aa(s_k)\, ds_k \to Aa(t)f(t)$$

при $\triangle t \to 0$. Переходя к пределу в равенстве (7.4) при $\triangle t \to 0$, получаем (7.3). □

Теорема 7.2. *В условиях теоремы* 7.1 *существует частная вариационная производная* $\dfrac{\delta_p \Phi_k(t,v)}{\delta v(t)}$ *и справедливо равенство*

$$\frac{\delta_p \Phi(t,v)}{\delta v(t)} = k \int_T \ldots \int_T B_k(s_1, \ldots, s_{k-1}, t)(v(s_1)E + a(s_1)\chi(t_0,t,s_1)A) \times$$
$$\times \ldots \times (v(s_{k-1})E + a(s_{k-1})\chi(t_0,t,s_{k-1})A) ds_1 \ldots ds_{k-1}. \quad (7.5)$$

Доказательство. Пусть h — приращение переменной v, тогда

$$\Phi_k(t, v+h) - \Phi_k(t,v) =$$
$$= \int_T \ldots \int_T B_k(s_1, \ldots, s_k)[(v(s_1)E + a(s_1)\chi(t_0,t,s_1)A + h(s_1)E) \ldots (v(s_k)E+$$
$$+a(s_k)\chi(t_0,t,s_k)A + h(s_k)E) - (v(s_1)E + a(s_1)\chi(t_0,t,s_1)A) \ldots (v(s_k)E + a(s_k)\chi(t_0,t,s_k)A)]\, ds_1 \ldots ds_k =$$
$$= k\int_T \ldots \int_T B_k(s_1, \ldots, s_k)(v(s_1)E + a(s_1)\chi(t_0,t,s_1)A) \ldots (v(s_{k-1})E + a(s_{k-1})\chi(t_0,t,s_{k-1})A)h(s_k)E\, ds_1 \ldots ds_k +$$

$$+\int\limits_T \dots \int\limits_T B_k(s_1,\dots,s_k)\sum_{m=2}^{k} C_k^m (v(s_1)E + a(s_1)\chi(t_0,t,s_1)A)\times$$
$$\times \dots \times (v(s_{k-m})E + a(s_{k-m})\chi(t_0,t,s_{k-m}))h(s_{k-m+1})\dots h(s_k)E\,ds_1\dots ds_k. \quad (7.6)$$

Последнее слагаемое является бесконечно малой величиной высшего порядка относительно h. Согласно определению вариационной производной из (7.6) следует существование $\dfrac{\delta_p\Phi(t,v)}{\delta v(t)}$ и ее представление в виде (7.5). □

Замечание 7.1. Из соотношений (7.3), (7.5) следует, что Φ_k удовлетворяет операторному дифференциальному уравнению

$$\frac{\partial\Phi_k(t,v)}{\partial t} = a(t)A\frac{\delta_p\Phi_k(t,v)}{\delta v(t)}. \quad (7.7)$$

Пусть теперь $\Phi(t,v) = \sum\limits_{k=0}^{\infty}\Phi_k(t,v)$. Поскольку $\Phi_k, k = 0,1,\dots$ удовлетворяют уравнению (7.7), то Φ удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial\Phi(t,v)}{\partial t} = a(t)A\frac{\delta_p\Phi(t,v)}{\delta v(t)}.$$

Теорема 7.3. *Пусть функционал $\psi(v_1,v_2)$ разлагается в ряд*

$$\psi(v_1,v_2) = \sum_{k=0}^{\infty}\int\limits_T \dots \int\limits_T \psi_k(s_1,\dots,s_k,v_2)v_1(s_1)\dots v_1(s_k)\,ds_1\dots ds_k, \quad \psi_{00} = 1, \quad (7.8)$$

где ψ_{km} — симметрические по любой паре переменных функции, имеющие вариационные производные по переменной v_2. Тогда

$$F_z(\widetilde{y})(t,\xi,v_1,v_2) = F_z(E[y_0])(\xi)\psi(v_1E - \xi\chi(t_0,t)A,v_2) - i\int\limits_{t_0}^{t} F_z\left(\frac{\delta_p\psi(v_1E - \xi\chi(s,t)A,v_2)}{\delta v_2(s,z)}\right)ds$$

является решением задачи (7.1), (7.2).

Доказательство. Легко видеть, что условие (7.2) выполняется. Переменная v_2 в уравнении (7.1) является параметром. Отображение $\psi(v_1E - \xi\chi(t_0,t)A,v_2)$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial\psi(v_1E - \xi\chi(t_0,t)A,v_2)}{\partial t} = -\xi A\frac{\delta_p\psi(v_1E - \xi\chi(t_0,t)A,v_2)}{\delta v_1(t)}.$$

Используя это равенство, находим

$$\frac{\partial F_z(\widetilde{y})(t,\xi,v_1,v_2)}{\partial t} = -\xi A\frac{\delta_p\psi(v_1E - \xi\chi(t_0,t)A,v_2)}{\delta v_1(t)}F_z(E[y_0])(\xi) -$$
$$- iF_z\left(\frac{\delta_p\psi(v_1E,v_2)}{\delta v_2(t,z)}\right) - i\int\limits_{t_0}^{t} F_z\left(\frac{\delta^2\psi(v_1E - \xi\chi(s,t)A,v_2)\xi A}{\delta v_1(t)\delta v_2(s,z)}\right)ds.$$

Далее,

$$\frac{\delta_p F_z(\widetilde{y})(t,\xi,v_1,v_2)}{\delta v_1(t)} = \frac{\delta_p\psi(v_1E - \xi\chi(t_0,t)A,v_2)}{\delta v_1(t)}F_z(E[y_0])(\xi) - i\int\limits_{t_0}^{t} F_z\left(\frac{\delta^2\psi(v_1E - \xi\chi(s,t)A,v_2)}{\delta v_1(t)\delta v_2(s,z)}\right)ds.$$

Подстановкой этих выражений в (7.1) убеждаемся, что (7.8) является решением уравнения (7.1). □

8. Математическое ожидание решения задачи (6.1), (6.2)

Для нахождения среднего значения решения задачи (6.1), (6.2) нужно найти отображение $\widetilde{y}(t,z,v_1,v_2)$. Это можно сделать, вычислив обратное преобразование Фурье F_ξ^{-1} выражения (7.8). Поскольку преобразование Фурье от произведения равно свертке преобразований Фурье сомножителей (см. [12, с. 154]), то

$$\widetilde{y}(t,z,v_1,v_2)=F_\xi^{-1}\psi(v_1E-\xi\chi(t_0,t)A,v_2))*E[y_0(z)]-i\int\limits_{t_0}^{t}F_\xi^{-1}\left(F_z\left(\frac{\delta_p\psi(v_1E-\xi\chi(s,t)A,v_2)}{\delta v_2(s,z)}\right)\right)ds. \quad (8.1)$$

Здесь $*$ обозначает свертку по переменной z.

Теорема 8.1. *Пусть характеристический функционал $\psi(v_1,v_2)$ разлагается в степенной ряд вида* (7.8)*, тогда*

$$E[y(t,z)]=F_\xi^{-1}\psi(-\xi\chi(t_0,t)A,0))*E[y_0(z)]-i\int\limits_{t_0}^{t}F_\xi^{-1}\left(F_z\left(\frac{\delta_p\psi(-\xi\chi(s,t)A,0)}{\delta v_2(s,z)}\right)\right)ds \quad (8.2)$$

является математическим ожиданием решения задачи (6.1)*,* (6.2).

Доказательство. Поскольку $E[y(t,z)]=\widetilde{y}(t,z,0,0)$, то утверждение получается подстановкой $v_1=0$, $v_2=0$ в (8.1). □

9. Частные случаи

Пусть процессы ε и b независимы, тогда $\psi(v_1,v_2)=\psi_\varepsilon(v_1)\psi_b(v_2)$, где ψ_ε,ψ_b — характеристические функционалы для ε и b соответственно. При этом

$$\frac{\delta_p\psi(-\xi\chi(s,t)A,0)}{\delta v_2(s,z)}=\psi_\varepsilon(-\xi\chi(s,t)A)\frac{\delta_p\psi_b(0)}{\delta_p v_2(s,z)}=i\psi_\varepsilon(-\xi\chi(s,t)A)E[b(s,z)].$$

Среднее значение $E[y(t,z)]$ решения задачи (6.1), (6.2) имеет вид

$$E[y(t,z)]=F_\xi^{-1}\psi_\varepsilon(-\xi\chi(t_0,t)A))*E[y_0(z)]+\int\limits_{t_0}^{t}F_\xi^{-1}(\psi_\varepsilon(-\xi\chi(s,t)A)F_z(E[b(s,z)]))ds=$$

$$=F_\xi^{-1}(\psi_\varepsilon(-\xi\chi(t_0,t)A))*E[y_0(z)]+\int\limits_{t_0}^{t}F_\xi^{-1}(\psi_\varepsilon(-\xi\chi(s,t)A))*E[b(s,z)]ds.$$

Отметим, что для нахождения математического ожидания $E[y(t,z)]$ нужно знать характеристический функционал процесса ε и только математическое ожидание процесса b.

Пусть процессы ε и b независимы и ε — гауссов случайный процесс с характеристическим функционалом

$$\psi_\varepsilon(v_1)=\exp(i\int\limits_T E[\varepsilon(s)]v_1(s)ds-\frac{1}{2}\int\limits_T\int\limits_T(E[\varepsilon(s_1)\varepsilon(s_2)]-E[\varepsilon(s_1)]E[\varepsilon(s_2)])v_1(s_1)v_1(s_2)ds_1ds_2).$$

При этом находим

$$E[y(t,z)]=F_\xi^{-1}(\exp(-i\int\limits_{t_0}^{t}\xi E[\varepsilon(s)]A\,ds-\frac{1}{2}\int\limits_{t_0}^{t}\int\limits_{t_0}^{t}\xi^2A^2(E[\varepsilon(s_1)\varepsilon(s_2)]-E[\varepsilon(s_1)]E[\varepsilon(s_2)])ds_1ds_2)*E[y_0(z)]))+$$

$$+\int\limits_{t_0}^{t}F_\xi^{-1}(\exp(-i\int\limits_{s}^{t}\xi E[\varepsilon(\tau)]Ad\tau-\frac{1}{2}\int\limits_{s}^{t}\int\limits_{s}^{t}\xi^2A^2(E[\varepsilon(s_1)\varepsilon(s_2)]-E[\varepsilon(s_1)]E[\varepsilon(s_2)])ds_1ds_2)*E[b(s,z)]))ds.$$

Приведем еще один пример. Пусть процессы ε и b независимы и процесс ε имеет равномерное распределение с характеристическим функционалом

$$\psi_\varepsilon(v_1) = \frac{\sin \int\limits_T a(s)v_1(s)ds}{\int\limits_T a(s)v_1(s)ds} \exp\left(i\int\limits_T E[\varepsilon(s)]v_1(s)ds\right), \quad a(s) \geqslant 0.$$

Аналогично вычисляя, получаем

$$E[y(t,z)] = F^{-1}\left(\frac{\sin \xi \int\limits_{t_0}^{t} a(s)Ads}{\xi \int\limits_{t_0}^{t} a(s)Ads} \exp\left(i\xi \int\limits_{t_0}^{t} E[\varepsilon(s)]Ads\right)\right) * E[y_0(z)] +$$

$$+ \int\limits_{t_0}^{t} F^{-1}\left(\frac{\sin \xi \int\limits_{s}^{t} a(\tau)Ad\tau}{\xi \int\limits_{s}^{t} a(\tau)Ad\tau} \exp\left(i\xi \int\limits_{s}^{t} E[\varepsilon(\tau)]Ad\tau\right)\right) * E[b(s,z)]ds.$$

Выражение

$$\frac{\sin \xi \int\limits_{t_0}^{t} a(s)Ads}{\xi \int\limits_{t_0}^{t} a(s)Ads}$$

обозначает сумму ряда

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}(\xi \int\limits_{t_0}^{t} a(s)A)^{k-1}}{k!}.$$

10. Примеры

Пример 10.1. Рассмотрим систему уравнений

$$\frac{\partial y_1}{\partial t} = 2(t-1)\frac{\partial y_1}{\partial z} + (t-1)\frac{\partial y_2}{\partial z} + (t^2+1)\frac{\partial y_1}{\partial x} + y_1 + t^2 z x^3,$$

$$\frac{\partial y_2}{\partial t} = 2(t-1)\frac{\partial y_2}{\partial z} + (t^2+1)\frac{\partial y_2}{\partial x} + y_2 + t z^2 x$$

с начальными условиями

$$y_1(0,z,x) = z^2,$$

$$y_2(0,z,x) = x^2 z.$$

Задача имеет вид (1.1), (4.1), где $a_1(t) = t-1$, $a_2(t) = t^2+1$, $a_3(t) = 1$,

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad b(t,z,x) = \begin{pmatrix} t^2 z x^3 \\ t z^2 x \end{pmatrix}, \quad y(0,z,x) = \begin{pmatrix} z^2 \\ x^2 z \end{pmatrix}, \quad e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

По формуле (5.1) выпишем решение системы:

$$y(t,z,x) = e^t\left(zE + A\left(\frac{t^2}{2} - t\right)\right)^2 e_1 + e^t\left(zE + A\left(\frac{t^2}{2} - t\right)\right)\left(x + \frac{t^3}{3} + t\right)^2 e_2 +$$

$$+ \int\limits_0^t [e^{t-s}s^2\left(zE + A\left(\frac{t^2}{2} - \frac{s^2}{2} - t + s\right)\right)\left(x + \frac{t^3}{3} - \frac{s^3}{3} + t - s\right)^3 e_1 +$$

$$+ e^{t-s}s\left(zE + A\left(\frac{t^2}{2} - \frac{s^2}{2} - t + s\right)\right)^2\left(x + \frac{t^3}{3} - \frac{s^3}{3} + t - s\right)e_2]\,ds. \quad (10.1)$$

$$zE + A\left(\frac{t^2}{2} - \frac{s^2}{2} - t + s\right) = \begin{pmatrix} z + t^2 - s^2 - 2t + 2s & \frac{t^2}{2} - \frac{s^2}{2} - t + s \\ 0 & z + t^2 - s^2 - 2t + 2s \end{pmatrix},$$

$$\left(zE + A\left(\frac{t^2}{2} - \frac{s^2}{2} - t + s\right)\right)^2 = \begin{pmatrix} (z+t^2-s^2-2t+2s)^2 & (z+t^2-s^2-2t+2s)(t^2-s^2-2t+2s) \\ 0 & (z + t^2 - s^2 - 2t + 2s)^2 \end{pmatrix}.$$

Подставляя эти выражения в (10.1), после интегрирования и упрощающих преобразования находим

$$y_1 = -206313024 + 206313024e^t - 208491824t + 2178800e^t t - 103705016t^2 - 1630292e^t t^2 -$$
$$-33516680t^3 - 327933e^t t^3 - 7808856t^4 - (45455e^t t^4)/6 - 1371960t^5 + (15475e^t t^5)/3 - 183816t^6 +$$
$$+327e^t t^6 - 18384t^7 + (260e^t t^7)/9 - 1272t^8 - (299e^t t^8)/18 - 48t^9 + (2e^t t^9)/9 - (4e^t t^{10})/27 +$$
$$+(2e^t t^{11})/27 + 1029552x - 1029552e^t x + 1051816tx - 22264e^t tx + 521572t^2 x + 15466e^t t^2 x +$$
$$+165004t^3 x + 2253e^t t^3 x + 36456t^4 x + 499/3e^t t^4 x + 5736t^5 x - 299/3e^t t^5 x + 612t^6 x + 36t^7 x -$$
$$-4/3e^t t^7 x + 2/3e^t t^8 x - 3816x^2 + 3816e^t x^2 - 4056tx^2 + 239e^t tx^2 - 1998t^2 x^2 - 299/2e^t t^2 x^2 -$$
$$-600t^3 x^2 - 6e^t t^3 x^2 - 114t^4 x^2 - 4e^t t^4 x^2 - 12t^5 x^2 + 2e^t t^5 x^2 + 12x^3 - 12e^t x^3 + 16tx^3 - 4e^t tx^3 + 8t^2 x^3 +$$
$$+2e^t t^2 x^3 + 2t^3 x^3 + 1604348z - 1604348e^t z + 1589378tz + 14966e^t tz + 787354t^2 z - 148e^t t^2 z +$$
$$+255070t^3 z + 14959/3e^t t^3 z + 59534t^4 z - 278/3e^t t^4 z + 10368t^5 z + 7/3e^t t^5 z + 1338t^6 z - 46/3e^t t^6 z +$$
$$+120t^7 z + 2/3e^t t^7 z + 6t^8 z + 2/27e^t t^9 z - 14950xz + 14950e^t xz - 14672txz - 278e^t txz - 7204t^2 xz +$$
$$+7e^t t^2 xz - 2268t^3 xz - 92e^t t^3 xz - 492t^4 xz + 4e^t t^4 xz - 72t^5 xz - 6t^6 xz + 2/3e^t t^6 xz + 138x^2 z -$$
$$-138e^t x^2 z + 132tx^2 z + 6e^t tx^2 z + 63t^2 x^2 z + 18t^3 x^2 z + 2e^t t^3 x^2 z + 3t^4 x^2 z - 2x^3 z + 2e^t x^3 z - 2tx^3 z -$$
$$-t^2 x^3 z + e^t z^2,$$

$$y_2 = 8016 - 8016e^t + 8656t - 640e^t t + 4336t^2 + 312e^t t^2 + 1288t^3 + 54e^t t^3 + 240t^4 - (31e^t t^4)/3 + 24t^5 -$$
$$-(e^t t^5)/3 - (2e^t t^6)/3 + (e^t t^7)/9 + (e^t t^8)/9 - 48x + 48e^t x - 56tx + 8e^t tx - 32t^2 x - 4e^t t^2 x - 8t^3 x -$$
$$-2e^t t^3 x - 1/3e^t t^4 x + 2/3e^t t^5 x - 2e^t tx^2 + e^t t^2 x^2 - 344z + 344e^t z - 380tz + 36e^t tz - 184t^2 z - 23e^t t^2 z -$$
$$-52t^3 z + 2/3e^t t^3 z - 8t^4 z - 2/3e^t t^4 z + 2/3e^t t^5 z + 1/9e^t t^6 z + 4xz - 4e^t xz + 8txz - 2e^t txz + 4t^2 xz +$$
$$+2e^t t^2 xz + 2/3e^t t^3 xz + e^t x^2 z + 10z^2 - 10e^t z^2 + 9tz^2 + e^t tz^2 + 4t^2 z^2 + t^3 z^2 + 1/3e^t t^3 z^2 - xz^2 + e^t xz^2 - txz^2.$$

Пример 10.2. Рассмотрим систему уравнений

$$\frac{\partial y_1}{\partial t} = 2(t-1)\frac{\partial y_1}{\partial z} + (t-1)\frac{\partial y_2}{\partial z} + (t^2+1)\frac{\partial y_1}{\partial x} + \frac{1}{1+t}y_1 + t^2 zx^3,$$
$$\frac{\partial y_2}{\partial t} = 2(t-1)\frac{\partial y_2}{\partial z} + (t^2+1)\frac{\partial y_2}{\partial x} + \frac{1}{1+t}y_2 + tz^2 x$$

с начальными условиями

$$y_1(0, z, x) = z^2,$$
$$y_2(0, z, x) = x^2 z.$$

Задача имеет вид (1.1), (4.1), где $a_1(t) = t - 1$, $a_2(t) = t^2 + 1$, $a_3(t) = \dfrac{1}{1+t}$,

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad b(t,z,x) = \begin{pmatrix} t^2 zx^3 \\ tz^2 x \end{pmatrix}, \quad y(0,z,x) = \begin{pmatrix} z^2 \\ x^2 z \end{pmatrix}, \quad e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

По формуле (5.1) выпишем решение системы:

$$y(t,z,x) = (zE + A(\frac{t^2}{2} - t))^2(t+1)e_1 + (zE + A(\frac{t^2}{2} - t))(x + \frac{t^3}{3} + t)^2(t+1)e_2 +$$
$$+ \int_0^t [s^2(zE + A(\frac{t^2}{2} - \frac{s^2}{2} - t + s))(x + \frac{t^3}{3} - \frac{s^3}{3} + t - s)^3 \frac{t+1}{s+1}e_1 +$$
$$+ s(zE + A(\frac{t^2}{2} - \frac{s^2}{2} - t + s))^2(x + \frac{t^3}{3} - \frac{s^3}{3} + t - s)\frac{t+1}{s+1}e_2]\,ds. \quad (10.2)$$

Подставляя полученные раннее выражения в (10.2), после интегрирования и упрощающих преобразования, находим

$$
\begin{gathered}
y_1=(1+t)(-t+t^2/2)(t+t^3/3+x)^2+(1+t)(-2t+t^2+z)^2+1/3(1+t)\{1/840t(-618t^6+413t^7+\\
+14t^4(533+96x-16z)-2520(4+3x)(-3+z)+70t^5(-52+7z)-420t(-114+3x(-15+z)+22z)-\\
-70t^3(132+33x+26z)+420t^2(5-30x+5z+4xz))-(-3-2t+t^2)(4+3t+t^3+3x)(-3-2t+t^2+z)\times\\
\times\ln(1+t)\}+(1+t)(-(1073t^{12})/41580+(207t^{13})/40040-(t^9(17133+17226x-1043z))/68040+\\
+t^{10}(-71/3402+3x/56-3z/140)+t^{11}(2801/93555+3z/440)-1/27t(4+3x)^3(-3+z)+\\
+1/54t^2(4+3x)^2(58-14z+3x(1+z))-(t^6(-3780+1377x^2+401z-27x(-95+6z)))/1620+\\
+(t^8(21095-2298z+81x(67+21z)))/22680-1/162t^3(162x^3-27x^2(-15+z)+18x(-69+7z)+\\
+8(-249+43z))+1/324t^4(1940+81x^3-636z-27x^2(-20+9z)-18x(-67+45z))+(t^5(11434-\\
-2838z+27x^2(37+18z)-18x(-578+57z)))/1620+(t^7(2187x^2-270x(-7+9z)-\\
-11(79+408z)))/11340+1/27(4+3t+t^3+3x)^3(-3-2t+t^2+z)\ln(1+t),\\
y_2=(1+t)(t+t^3/3+x)^2(-2t+t^2+z)+1/3(1+t)(-(103t^7)/140+(59t^8)/120+t(4+3x)(-3+z)^2+\\
+1/60t^5(533+96x-32z)+1/6t^6(-26+7z)-1/12t^4(132+33x+52z-9z^2)+t^2(57-22z+\\
+x(45/2-3z)+z^2)+t^3(5/2+5z+z^2/3+x(-15+4z))-(4+3t+t^3+3x)(-3-2t+t^2+z)^2\ln(1+t).
\end{gathered}
$$

11. Заключение

Явные формулы решений дифференциальных уравнений позволят провести анализ качественного поведения системы. В статье получены формулы для решения систем дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка с начальными условиями. Реальные динамические системы подвержены случайным возмущениям, которые можно учитывать в математических моделях, коэффициенты которых являются случайными процессами. Скалярные дифференциальные уравнения первого порядка со случайными коэффициентами применены для анализа модели переноса в атмосфере (см. [13]).

Отметим, что первые интегралы (даже нелинейных) систем обыкновенных дифференциальных уравнений удовлетворяют линейным системам дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка. В данной статье получены формулы для математического ожидания решения линейных систем дифференциальных уравнений первого порядка в частных производных со случайными коэффициентами. Для приложений важна общая формула для математического ожидания (8.2). Для ее применения достаточно знать характеристический функционал ψ. Мы рассмотрели наиболее распространенный вариант, когда ψ_ε определяет гауссов случайный процесс ε.

Авторы благодарны А. Л. Скубачевскому за конструктивное обсуждение темы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Боровских А. В., Перов А. И.* Дифференциальные уравнения: учебник и практикум для академического бакалавриата. — М.: Юрайт, 2017.
2. *Бронштейн И. Н., Семендяев К. А.* Справочник по математике для инженеров и учащихся втузов. — М.: Наука, 1986.
3. *Задорожний В. Г.* Методы вариационного анализа. — М.—Ижевск: РХД, 2006.
4. *Зайцев В. Ф., Полянин А. Д.* Справочник по дифференциальным уравнениям с частными производными первого порядка. — М.: Физматлит, 2003.
5. *Ильин В. А., Садовничий В. А., Сендов Б. Х.* Математический анализ: учебник для академического бакалавриата. — М.: Юрайт, 2018.
6. *Коддингтон Э. А., Левинсон Н.* Теория обыкновенных дифференциальных уравнений. — М.: URSS, 2010.
7. *Кружков С. Н.* Нелинейные уравнения с частными производными. Ч. 2. Уравнения первого порядка. — М.: МГУ, 1970.
8. *Курант Р.* Уравнения с частными производными. — М.: Мир, 1964.
9. *Петровский И. Г.* Лекции об уравнениях с частными производными. — М.: ГИФМЛ, 1961.
10. *Филиппов А. Ф.* Сборник задач по дифференциальным уравнениям. — М.: Либроком, 2013.
11. *Фихтенгольц Г. М.* Курс дифференциального и интегрального исчисления. Т. II. — М.: Наука, 1970.
12. *Шилов Г. Е.* Математический анализ. Второй специальный курс. — М.: Физматлит, 1965.

13. *Zadorozhniy V. G., Semenov M. E., Selavesyuk N. T., Ulshin I. I., Nozhkin V. S.* Statistical characteristics of solutions of the system of the stochastic transfer model// Math. Models Comput. Simul. — 2021. — *13*, № 1. — С. 11–25.

В. Г. Задорожний
Воронежский государственный университет, Москва, Россия
E-mail: zador@amm.vsu.ru

Л. Ю. Кабанцова
Воронежский государственный университет, Москва, Россия
E-mail: dlju@yandex.ru

DOI: 10.22363/2413-3639-2021-67-3-549-563 UDC 517.97

On Solution of First-Order Linear Systems of Partial Differential Equations

© 2021 **V. G. Zadorozhniy, L. Yu. Kabantsova**

Abstract. Explicit formulas for the first-order partial differential equations system solving were obtained. Solution found for the system with initial conditions. Calculation examples establishing statements truth mentioned. Searching for partial differential equations system solution mathematical expectation became more difficult issue as partial differential equations system with random processes coefficients were covered. Gaussian coefficients and uniformly distributed random process cases examples has been reviewed.

REFERENCES

1. A. V. Borovskikh and A. I. Perov, *Differentsial'nye uravneniya: uchebnik i praktikum dlya akademicheskogo bakalavriata* [Differential Equations: Textbook and Workshop for Academic Bachelors], Yurayt, Moscow, 2017 (in Russian).
2. I. N. Bronshteyn and K. A. Semendyaev, *Spravochnik po matematike dlya inzhenerov i uchashchikhsya vtuzov* [A Guide to Mathematics for Engineers and Students of Higher Educational Technical Institutions], Nauka, Moscow, 1986 (in Russian).
3. V. G. Zadorozhniy, *Metody variatsionnogo analiza* [Variational Analysis Methods], RKhD, Moscow–Izhevsk, 2006 (in Russian).
4. V. F. Zaytsev and A. D. Polyanin, *Spravochnik po differentsial'nym uravneniyam s chastnymi proizvodnymi pervogo poryadka* [First-Order Partial Differential Equations Handbook], Fizmatlit, Moscow, 2003 (in Russian).
5. V. A. Il'in, V. A. Sadovnichiy, and B. Kh. Sendov, *Matematicheskiy analiz: uchebnik dlya akademicheskogo bakalavriata* [Mathematical Analysis: Textbook for Academic Bachelors], Yurayt, Moscow, 2018 (in Russian).
6. E. A. Coddington and N. Levinson, *Teoriya obyknovennykh differentsial'nykh uravneniy* [Theory of Ordinary Differential Equations], URSS, Moscow, 2010 (Russian translation).
7. S. N. Kruzhkov, *Nelineynye uravneniya s chastnymi proizvodnymi. Ch. 2. Uravneniya pervogo poryadka* [Nonlinear Partial Differential Equations. Vol. 2. First-Order Equations], MGU, Moscow, 1970 (in Russian).
8. R. Courant, *Uravneniya s chastnymi proizvodnymi* [Partial Differential Equations], Mir, Moscow, 1964 (Russian translation).
9. I. G. Petrovskii, *Lektsii ob uravneniyakh s chastnymi proizvodnymi* [Lectures on Partial Differential Equations], GIFML, Moscow, 1961 (in Russian).

10. A. F. Filippov, *Sbornik zadach po differentsial'nym uravneniyam* [Collection of Tasks on Differential Equations], Librokom, Moscow, 2013 (in Russian).
11. G. M. Fikhtengol'ts, *Kurs differentsial'nogo i integral'nogo ischisleniya. T. II* [Differential and Integral Calculus Course. Vol. II], Nauka, Moscow, 1970 (in Russian).
12. G. E. Shilov, *Matematicheskiy analiz. Vtoroy spetsial'nyy kurs* [Mathematical Analysis. Second Special Course], Fizmatlit, Moscow, 1965 (in Russian).
13. V. G. Zadorozhniy, M. E. Semenov, N. T. Selavesyuk, I. I. Ulshin, and V. S. Nozhkin, "Statistical characteristics of solutions of the system of the stochastic transfer model," *Math. Models Comput. Simul.*, 2021, **13**, No. 1, 11–25.

V. G. Zadorozhniy
Voronezh State University, Voronezh, Russia
E-mail: zador@amm.vsu.ru

L. Yu. Kabantsova
Voronezh State University, Voronezh, Russia
E-mail: dlju@yandex.ru