Современная математика. Фундаментальные направления. Том 67, № 3 (2021). С. 535–548
Contemporary Mathematics. Fundamental Directions. ISSN 2413-3639 (Print)

DOI: 10.22363/2413-3639-2021-67-3-535-548 УДК 517.925.44

О ПЕРИОДИЧЕСКИХ РЕШЕНИЯХ ОДНОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА

© 2021 г. **Г. В. ДЕМИДЕНКО, А. В. ДУЛЕПОВА**

Аннотация. В работе исследуется движение перевернутого маятника, точка подвеса которого совершает высокочастотные колебания вдоль прямой, составляющей малый угол с вертикалью. Доказано, что при выполнении некоторых условий на функцию, описывающую колебания точки подвеса маятника, возникает периодическое движение маятника, и оно является асимптотически устойчивым.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Введение

В настоящей работе исследуется вопрос об устойчивости движения перевернутого маятника, точка подвеса которого совершает высокочастотные колебания вдоль прямой, составляющей с вертикалью малый угол α. Предполагается, что закон движения точки подвеса описывается функцией $f(\omega t)$, $\omega \gg 1$, где

$$f(t) = \sum_{k=1}^{m}(a_k \sin(kt) + b_k \cos(kt)). \tag{0.1}$$

Задачи такого типа обычно исследуются методом усреднения, основы которого были заложены Н. Н. Боголюбовым [1]. С помощью этого метода решено большое число теоретических и прикладных задач, связанных с нелинейными дифференциальными уравнениями, содержащими осциллирующие коэффициенты. Развитию метода усреднения и применению его к различным задачам посвящено ряд монографий (см., например, [3, 4, 8]).

В нашей работе для решения указанной задачи мы будем применять подход, основанный на использовании дифференциального матричного уравнения Ляпунова, изложенный в монографии [5]. В частности, будем использовать критерий асимптотической устойчивости решений систем линейных уравнений с периодическими коэффициентами, формулируемый в терминах разрешимости краевой задачи для дифференциального уравнения Ляпунова [6].

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 18-29-10086).

1. Периодические колебания перевернутого маятника

Уравнение движения маятника, точка подвеса которого осциллирует по закону, определяемому функцией $f(\omega t)$, вдоль прямой, наклоненной под углом α, имеет следующий вид:

$$\varphi'' + \varepsilon\varphi' + \frac{g + \omega^2\, f''(s)|_{s=\omega t}\cos\alpha}{l}\sin\varphi + \frac{\omega^2 f''(s)|_{s=\omega t}\sin\alpha}{l}\cos\varphi = 0, \tag{1.1}$$

где $\varphi = \varphi(t)$ — угол отклонения маятника от нижнего вертикального положения равновесия, ε — коэффициент трения, g — ускорение свободного падения, l — длина маятника, и в силу (0.1)

$$f''(s)|_{s=\omega t} = -\sum_{k=1}^{m} k^2(a_k\sin(k\omega t) + b_k\cos(k\omega t)).$$

Как сказано, мы рассматриваем движение в предположении, что частота колебаний достаточно высокая. Будем предполагать, что $\omega > 0$ такое, что выполнены следующие условия:

$$2gl < \omega^2\left(\sum_{k=1}^{m} k^2(a_k^2 + b_k^2)\right), \tag{1.2}$$

$$\frac{\omega}{l}\left(\sum_{k=1}^{m}(|a_k| + |b_k|)\right) \leqslant \Delta < \infty, \quad \Delta = \mathrm{const}, \tag{1.3}$$

$$0 \leqslant \alpha < \frac{c}{\omega^2}, \quad c = \mathrm{const}\,. \tag{1.4}$$

Введем малый параметр $\mu = \dfrac{1}{\omega}$. Тогда, осуществив переход к «быстрому» времени $\tau = \omega t$ и сдвиг по углу на π с сохранением обозначения, т. е. $\varphi := \varphi + \pi$, представим уравнение движения маятника (1.1) в виде

$$\hat\varphi'' + \varepsilon\mu\hat\varphi' - \frac{\mu^2 g + f''(\tau)\cos\alpha}{l}\sin\hat\varphi - \frac{f''(\tau)\sin\alpha}{l}\cos\hat\varphi = 0, \tag{1.5}$$

где $\hat\varphi(\tau) = \varphi(\tau\mu)$. Перепишем его в виде системы

$$\frac{d}{d\tau}\begin{pmatrix}\tilde\varphi_1\\ \tilde\varphi_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & -\varepsilon\mu\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\tilde\varphi_1\\ \tilde\varphi_2\end{pmatrix}\left(\begin{matrix}0\\ \dfrac{\mu^2 g + f''(\tau)\cos\alpha}{l}\sin\tilde\varphi_1 + \dfrac{f''(\tau)\sin\alpha}{l}\cos\tilde\varphi_1\end{matrix}\right), \tag{1.6}$$

где $\tilde\varphi_1 = \hat\varphi$, $\tilde\varphi_2 = \hat\varphi'$, $f'' = f''(\tau) = -\sum\limits_{k=1}^{m} k^2(a_k\sin(k\tau) + b_k\cos(k\tau))$.

Вначале рассмотрим почти линейное приближение ($\sin\tilde\varphi_1 \approx \tilde\varphi_1$) системы (1.6)

$$\frac{d}{d\tau}\begin{pmatrix}\tilde\varphi_1\\ \tilde\varphi_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & 1\\ \dfrac{\mu^2 g + f''(\tau)\cos\alpha}{l} & -\varepsilon\mu\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\tilde\varphi_1\\ \tilde\varphi_2\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0\\ \dfrac{f''(\tau)\sin\alpha}{l}\cos\tilde\varphi_1\end{pmatrix}. \tag{1.7}$$

Вводя обозначение $\tilde\varphi = \begin{pmatrix}\tilde\varphi_1\\ \tilde\varphi_2\end{pmatrix}$, будем записывать систему (1.7) в виде

$$\frac{d\tilde\varphi}{d\tau} = A_{lin}(\tau,\mu)\tilde\varphi + F_{lin}(\tau,\tilde\varphi,\mu).$$

Справедливо следующее утверждение.

Теорема 1.1. *Пусть выполнены условия* (1.2)–(1.4). *Существует* ω_0 *такое, что система* (1.7) *имеет единственное* 2π*-периодическое решение* $\tilde\varphi_{lin}(\tau,\mu)$ *при* $\mu = \dfrac{1}{\omega} \in \left(0, \dfrac{1}{\omega_0}\right)$, *и выполнена оценка*

$$\|\tilde\varphi_{lin}(\tau,\mu)\| \leqslant c_{lin}\cdot\mu, \quad c_{lin} = \mathrm{const}\,. \tag{1.8}$$

Доказательство. С использованием линейного невырожденного преобразования

$$\tilde\varphi = Qu, \quad Q = Q(\tau,\mu) \tag{1.9}$$

систему (1.7) можно переписать в виде

$$\frac{d}{d\tau}\begin{pmatrix}u_1\\u_2\end{pmatrix} = [(Q^{-1})' + Q^{-1}A_{lin}(\tau,\mu)]Q\begin{pmatrix}u_1\\u_2\end{pmatrix} + Q^{-1}F_{lin}(\tau, Qu, \mu)$$

или

$$\frac{d}{d\tau}\begin{pmatrix}u_1\\u_2\end{pmatrix} = U(\tau,\mu)\begin{pmatrix}u_1\\u_2\end{pmatrix} + \tilde{F}_{lin}(\tau,u,\mu).$$

По аналогии с [7] в качестве невырожденной матрицы $Q = Q(\mu,\tau)$ возьмем матрицу вида

$$Q = \begin{pmatrix}1+\mu a(\tau,\mu) & 0\\ \mu b(\tau,\mu) & \mu\end{pmatrix}, \tag{1.10}$$

где $a(\tau,\mu), b(\tau,\mu)$ — 2π-периодические функции по τ. Тогда элементы матрицы $U = U(\tau,\mu)$ имеют вид

$$u_{11} = \frac{\mu(b(\tau,\mu) - a'(\tau,\mu))}{1+\mu a(\tau,\mu)}, \quad u_{12} = \frac{\mu}{1+\mu a(\tau,\mu)},$$

$$u_{21} = -\mu\biggl(-\frac{g}{l} + \varepsilon b(\tau,\mu) - \mu\frac{g}{l}a(\tau,\mu) - \frac{1}{\mu}\frac{f''(\tau)a(\tau,\mu)\cos\alpha}{l} +$$

$$+\frac{b(\tau,\mu)(b(\tau,\mu)-a'(\tau,\mu))}{1+\mu a(\tau,\mu)}\biggr) - b'(\tau,\mu) + \frac{1}{\mu}\frac{f''(\tau)\cos\alpha}{l},$$

$$u_{22} = -\mu\left(\varepsilon + \frac{b(\tau,\mu)}{1+\mu a(\tau,\mu)}\right).$$

Выберем функции $a(\tau,\mu), b(\tau,\mu)$ так, чтобы

$$a'(\tau,\mu) - b(\tau,\mu) \equiv 0, \quad b'(\tau,\mu) - \frac{1}{\mu}\frac{f''(\tau)\cos\alpha}{l} \equiv 0. \tag{1.11}$$

Следовательно, получаем систему

$$\frac{d}{d\tau}\begin{pmatrix}u_1\\u_2\end{pmatrix} = \mu\left(U_1(\mu) + U_2(\tau,\mu) + \mu^2 U_3(\tau,\mu)\right)\begin{pmatrix}u_1\\u_2\end{pmatrix} +$$

$$+\begin{pmatrix}0\\ \dfrac{1}{\mu}\dfrac{f''(\tau)}{l}\sin\alpha\cos[(1+\mu a(\tau,\mu))u_1]\end{pmatrix}, \tag{1.12}$$

где

$$U_1(\mu) = \begin{pmatrix}0 & 1\\ \dfrac{g}{l} - I(\mu) & -\varepsilon\end{pmatrix}, \quad I(\mu) = -\frac{1}{\mu}\frac{\cos\alpha}{2\pi l}\int\limits_0^{2\pi} f''(s)a(s,\mu)ds, \tag{1.13}$$

$$U_2(\tau,\mu) = \begin{pmatrix}0 & -\mu a(\tau,\mu)\\ -\varepsilon b(\tau,\mu) + \mu\dfrac{g}{l}a(\tau,\mu) + \dfrac{1}{\mu}\dfrac{f''(\tau)a(\tau,\mu)\cos\alpha}{l} + I(\mu) & (\mu a(\tau,\mu) - 1)b(\tau,\mu)\end{pmatrix}, \tag{1.14}$$

$$U_3(\tau,\mu) = \begin{pmatrix}0 & \dfrac{a^2(\tau,\mu)}{1+\mu a(\tau,\mu)}\\ 0 & \dfrac{-a^2(\tau,\mu)b(\tau,\mu)}{1+\mu a(\tau,\mu)}\end{pmatrix}.$$

Теперь выберем функции $a(\tau,\mu), b(\tau,\mu)$, удовлетворяющие условию (1.11), таким образом, чтобы выполнялось

$$\int\limits_0^{2\pi} a(s,\mu)ds = 0, \quad \int\limits_0^{2\pi} b(s,\mu)ds = 0.$$

А именно, учитывая выражение (0.1) для функции $f(\tau)$, положим

$$a(\tau,\mu) = \frac{1}{\mu}\frac{\cos\alpha}{l}f(\tau), \quad b(\tau,\mu) = \frac{1}{\mu}\frac{\cos\alpha}{l}f'(\tau). \tag{1.15}$$

Тогда, учитывая определение (0.1), нетрудно показать, что при любом μ выполняется равенство

$$\int\limits_0^{2\pi} U_2(s,\mu)ds = 0. \tag{1.16}$$

Действительно, для элементов $u_{11}^{(2)}, u_{12}^{(2)}, u_{21}^{(2)}$ матрицы $U_2(\tau,\mu)$ это очевидно в силу выбора функций $a(\tau,\mu), b(\tau,\mu)$ и определения интеграла $I(\mu)$. Для элемента $u_{22}^{(2)}$ это вытекает из (0.1) и цепочки равенств

$$\int\limits_0^{2\pi} a(s,\mu)b(s,\mu)ds = \frac{1}{\mu^2}\frac{\cos^2\alpha}{l^2}\int\limits_0^{2\pi} f(s)f'(s)ds = \frac{1}{\mu^2}\frac{\cos^2\alpha}{2l^2}(f^2(2\pi)-f^2(0)) = 0.$$

□

Приведем хорошо известное утверждение, которое потребуется нам в дальнейшем.

Лемма 1.1. *Пусть $B(\tau)$ — T-периодическая матрица, и ни один из мультипликаторов системы*

$$\frac{dy}{d\tau} = B(\tau)y \tag{1.17}$$

не лежит на единичной окружности. Тогда краевая задача

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{d\tau} = B(\tau)y + F(\tau), \quad 0 < \tau < T, \\ y(0) = y(T) \end{cases} \tag{1.18}$$

имеет единственное решение для любой непрерывной T-периодической вектор-функции $F(\tau)$, при этом справедлива оценка

$$\|y(\tau)\| \leqslant c \cdot \max_s \|F(s)\|, \quad c = \text{const}. \tag{1.19}$$

Установим следующее утверждение.

Лемма 1.2. *Пусть $Y(2\pi,\mu)$ — матрица монодромии системы*

$$\frac{dy}{d\tau} = \mu\left(U_1(\mu) + U_2(\tau,\mu) + \mu^2 U_3(\tau,\mu)\right)y. \tag{1.20}$$

Тогда существует число $\mu_1 > 0$ такое, что при всех $\mu \in (0,\mu_1)$ справедлива оценка

$$\|\,(I - Y(2\pi,\mu))^{-1}\,\| \leqslant \frac{\tilde{c}}{\mu}, \quad \mu \in (0,\mu_1), \quad \tilde{c} = \text{const}. \tag{1.21}$$

Доказательство. Сначала покажем, что при достаточно малых значениях параметра μ спектр матрицы $U_1(\mu)$ лежит строго в левой полуплоскости.

Отметим, что в силу условия (1.2) имеем

$$2gl\mu^2 < \left(\sum_{k=1}^m k^2(a_k^2 + b_k^2)\right). \tag{1.22}$$

Выпишем теперь определитель матрицы $U_1(\mu)$. Из определений (0.1), (1.13) имеем

$$\det U_1(\mu) = -\frac{g}{l} - \frac{1}{\mu}\frac{\cos\alpha}{2\pi l}\int\limits_0^{2\pi} f''(s)a(s,\mu)ds =$$

$$= -\frac{g}{l} + \frac{1}{\mu^2}\frac{\cos^2\alpha}{2\pi l^2}\int\limits_0^{2\pi}\left(\sum_{k=1}^m k^2(a_k^2\sin^2(ks) + b_k^2\cos^2(ks))\right)ds =$$

$$= -\frac{g}{l} + \frac{1}{\mu^2}\frac{\cos^2\alpha}{2l^2}\left(\sum_{k=1}^m k^2(a_k^2 + b_k^2)\right).$$

Третье равенство справедливо в силу того, что интегралы от всех остальных попарных произведений синусов и косинусов нулевые.

Поскольку выполнено условие (1.4) на малость угла α, то существует такое значение параметра μ', что $\cos\alpha$ достаточно близок к единице при $\mu \in (0,\mu')$; тем самым, в силу условия (1.22), определитель матрицы $U_1(\mu)$ положителен. А поскольку след этой матрицы равен $-\varepsilon < 0$, то при $\mu \in (0,\mu')$ ее спектр лежит в левой полуплоскости.

Учитывая теперь, что для 2π-периодической матрицы $U_2(\tau,\mu)$ выполнено равенство (1.16), получим, что согласно результатам из [6] существует $\mu'' \in (0,\mu']$ такое, что нулевое решение системы

$$\frac{dy}{d\tau} = \mu(U_1(\mu) + U_2(\tau,\mu))y \tag{1.23}$$

асимптотически устойчиво при $\mu \in (0,\mu'')$. А так как перед матрицей $U_3(\tau,\mu)$ в (1.20) стоит множитель μ^2, то из результатов, полученных в [6], следует, что существует $\mu_0 \in (0,\mu''])$ такое, что нулевое решение системы (1.20) асимптотически устойчиво при всех $\mu \in (0,\mu_0)$. Таким образом, спектр матрицы монодромии данной системы лежит строго внутри единичного круга. Следовательно, обратная матрица $(I - Y(2\pi,\mu))^{-1}$ существует.

Замечание. Коэффициенты матриц $U_1(\mu), U_2(\tau,\mu), U_3(\tau,\mu)$ являются ограниченными, несмотря на наличие множителя $\dfrac{1}{\mu}$ перед некоторыми элементами этих матриц, а также в выражениях для $a(\tau,\mu), b(\tau,\mu)$. Ограниченность обеспечивается условием (1.3). А именно,

$$|a(\tau,\mu)| = \left|\frac{1}{\mu}\frac{\cos\alpha}{l}\left(\sum_{k=1}^{m}(a_k\sin(k\tau) + b_k\cos(k\tau))\right)\right| =$$

$$= \left|\frac{\omega\cos\alpha}{l}\left(\sum_{k=1}^{m}(a_k\sin(k\tau) + b_k\cos(k\tau))\right)\right| \leqslant \frac{\omega}{l}\left(\sum_{k=1}^{m}(|a_k| + |b_k|)\right) \leqslant \Delta < \infty.$$

Аналогичные оценки справедливы для величин $b(\tau,\mu)$ и $\dfrac{1}{\mu}\dfrac{f''(\tau)}{l}$.

Для доказательства оценки (1.21) рассмотрим формулу

$$I - Y(2\pi,\mu) = -\int_0^{2\pi}\frac{d}{ds}Y(s,\mu)ds$$

и перепишем ее с учетом (1.20) в следующем виде:

$$I - Y(2\pi,\mu) = -\int_0^{2\pi}\mu\left(U_1(\mu) + U_2(s,\mu) + \mu^2U_3(s,\mu)\right)Y(s,\mu)ds =$$

$$= -\mu\int_0^{2\pi}\left(U_1(\mu) + U_2(s,\mu) + \mu^2U_3(s,\mu)\right)(Y(s,\mu) - I)ds -$$

$$-\mu\int_0^{2\pi}\left(U_1(\mu) + U_2(s,\mu) + \mu^2U_3(s,\mu)\right)ds.$$

А учитывая равенство (1.16), имеем

$$I - Y(2\pi,\mu) = -\mu 2\pi U_1(\mu)\Bigg(I + \frac{\mu^2}{2\pi}U_1^{-1}(\mu)\int_0^{2\pi}U_3(s,\mu)ds +$$

$$+\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(I + U_1^{-1}(\mu)U_2(s,\mu) + \mu^2U_1^{-1}(\mu)U_3(s,\mu)\right)(Y(s,\mu) - I)ds\Bigg). \tag{1.24}$$

Поскольку $Y(s,\mu)$ является решением задачи Коши

$$\begin{cases} \dfrac{dY}{d\tau} = \mu\left(U_1(\mu) + U_2(\tau,\mu) + \mu^2 U_3(\tau,\mu)\right) Y, \\ Y|_{\tau=0} = I, \end{cases}$$

то из теоремы о непрерывной зависимости решений от параметров следует, что $Y(s,\mu)$ равномерно сходится к I на $[0,2\pi]$ при μ, стремящемся к нулю. Таким образом, мы можем выбрать столь малое $\mu_1 \in (0,\mu_0]$, что

$$r(\mu) = \frac{1}{2\pi}\Bigg\|\mu^2 U_1^{-1}(\mu)\int\limits_0^{2\pi} U_3(s,\mu)ds +$$

$$+\int\limits_0^{2\pi}\left(I + U_1^{-1}(\mu)U_2(s,\mu) + \mu^2 U_1^{-1}U_3(s,\mu)\right)(Y(s,\mu) - I)ds\Bigg\| \leqslant \frac{1}{2}, \quad \mu \in (0,\mu_1). \tag{1.25}$$

Тогда в силу теоремы фон Неймана оператор

$$K(\mu) := I + \frac{\mu^2}{2\pi}U_1^{-1}(\mu)\int\limits_0^{2\pi} U_3(s,\mu)ds +$$

$$+\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\left(I + U_1^{-1}(\mu)U_2(s,\mu) + \mu^2 U_1^{-1}(\mu)U_3(s,\mu)\right)(Y(s,\mu) - I)ds$$

обратим. С учетом представления оператора $K^{-1}(\mu)$ в виде ряда Неймана и оценки (1.25) имеем

$$\|K^{-1}(\mu)\| \leqslant \sum_{j=0}^{\infty} r^j(\mu) \leqslant 2, \quad \mu \in (0,\mu_1).$$

Таким образом, с учетом равенства (1.24)

$$\|\left(I - Y(2\pi,\mu)\right)^{-1}\| \leqslant 2\frac{\|U_1^{-1}(\mu)\|}{\mu 2\pi} = \frac{\|U_1^{-1}(\mu)\|}{\mu\pi}, \quad \mu \in (0,\mu_1).$$

Лемма 1.2 доказана. □

Из лемм 1.1, 1.2 вытекает, что при $\mu \in (0,\mu_1)$ система

$$\frac{dy}{d\tau} = \mu\bar{U}(\tau,\mu)y + F(\tau,\mu), \quad \bar{U}(\tau,\mu) = U_1(\mu) + U_2(\tau,\mu) + \mu^2 U_3(\tau,\mu), \tag{1.26}$$

имеет единственное 2π-периодическое решение $y(\tau,\mu)$ при любой непрерывной 2π-периодической вектор-функции $F(\tau,\mu)$.

Используя явную формулу решения для задачи (1.18)

$$y(\tau) = Y(\tau)[I - Y(T)]^{-1}\int\limits_0^T Y(T)Y^{-1}(s)F(s)ds + \int\limits_0^{\tau} Y(\tau)Y^{-1}(s)F(s)ds,$$

где $Y(\tau)$ — матрицант системы (1.17), и неравенство (1.21), для решения $y(\tau,\mu)$ системы (1.26) нетрудно получить оценку

$$\|y(\tau,\mu)\| \leqslant \frac{c_0}{\mu}\cdot\max_s\|F(s,\mu)\|, \quad c_0 = \mathrm{const}, \quad \mu \in (0,\mu_1).$$

Отсюда следует, что оператор

$$\left(\frac{d}{d\tau}\circ I - \mu\bar{U}(\tau,\mu)\right), \quad \mu \in (0,\mu_1),$$

имеет ограниченный обратный в пространстве непрерывных 2π-периодических вектор-функций, при этом справедливо неравенство

$$\left\| \left(\frac{d}{d\tau} \circ I - \mu \bar{U}(\tau, \mu) \right)^{-1} \right\| \leqslant \frac{c_0}{\mu}. \tag{1.27}$$

Задача о нахождении 2π-периодических решений системы (1.26) эквивалентна построению решений краевой задачи

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{d\tau} = \mu \bar{U}(\tau, \mu) y + F(\tau, \mu), \quad 0 < \tau < 2\pi, \\ y|_{\tau=0} = y|_{\tau=2\pi}. \end{cases}$$

А решение этой задачи при $\mu \in (0, \mu_1)$ представимо в виде

$$y(\tau, \mu) = \int\limits_0^{2\pi} G(\tau, s, \mu) F(s, \mu) ds,$$

где $G(\tau, s, \mu)$ — матрица Грина. Таким образом, задача о нахождении 2π-периодических решений системы (1.12) эквивалентна построению решений следующего интегрального уравнения:

$$u(\tau, \mu) = \mu \int\limits_0^{2\pi} G(\tau, s, \mu)[\mu g(s, u(s, \mu), \mu)] ds, \tag{1.28}$$

где

$$g(\tau, u, \mu) = \begin{pmatrix} 0 \\ \dfrac{1}{\mu^3} \dfrac{f''(\tau) \sin \alpha}{l} \cos[(1 + \mu a(\tau, \mu)) u_1] \end{pmatrix}. \tag{1.29}$$

Уравнение (1.28) можно переписать в виде

$$u(\tau, \mu) = \mu \left(\frac{d}{d\tau} \circ I - \mu \bar{U}(\tau, \mu) \right)^{-1} \circ [\mu g(\tau, u(\tau, \mu), \mu)], \tag{1.30}$$

или

$$u = A_\mu(u). \tag{1.31}$$

В силу оценки (1.27) оператор

$$\mu \left(\frac{d}{d\tau} \circ I - \mu \bar{U}(\tau, \mu) \right)^{-1}, \quad \mu \in (0, \mu_1)$$

является ограниченным в пространстве непрерывных 2π-периодических вектор-функций, а так как вектор-функция $g = g(\tau, u, \mu)$ является 2π-периодической по τ и достаточно гладкой по u, то можно доказать следующую лемму.

Лемма 1.3. *Существуют $\mu_{lin} \in (0, \mu_1]$ такое, что при $\mu \in (0, \mu_{lin})$ оператор A_μ удовлетворяет принципу сжимающих отображений в пространстве непрерывных 2π-периодических вектор-функций $C_{2\pi}$.*

Доказательство. Для произвольных u^1, u^2 из $C_{2\pi}$ и $\mu \in (0, \mu_1)$ имеем

$$\begin{aligned} \|A_\mu(u^1) - A_\mu(u^2)\| &= \|\mu^2 \left(\frac{d}{d\tau} \circ I - \mu \bar{U}(\tau, \mu) \right)^{-1} \left(g(\tau, u^1, \mu) - g(\tau, u^2, \mu) \right) \| \leqslant \\ &\leqslant \|\mu \left(\frac{d}{d\tau} \circ I - \mu \bar{U}(\tau, \mu) \right)^{-1} \| \cdot \|\mu \left(g(\tau, u^1, \mu) - g(\tau, u^2, \mu) \right) \| \leqslant \\ &\leqslant c_0 \mu L_g \cdot \|u^1 - u^2\|, \end{aligned}$$

где L_g — константа Липшица вектор-функции $g(\tau, u, \mu)$ по второму аргументу и

$$\|u\| = \max_{s \in [0, 2\pi]} \|u(s)\|.$$

Для константы Липшица справедлива оценка

$$L_g \leqslant \sup_{\substack{u\in C_{2\pi},\ \tau\in[0,2\pi],\\ \mu\in(0,\mu_1)}} \|g_u(\tau,u,\mu)\|,$$

где

$$g_u(\tau,u,\mu) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -(1+\mu a(\tau,\mu))\dfrac{1}{\mu^3}\dfrac{f''(\tau)\sin\alpha}{l}\sin[(1+\mu a(\tau,\mu))u_1] & 0 \end{pmatrix}.$$

С учетом условий (1.3), (1.4) и соотношений (1.15) получаем

$$\begin{aligned} \sup_{\substack{u\in C_{2\pi},\ \tau\in[0,2\pi],\\ \mu\in(0,\mu_1)}} \|g_u(\tau,u,\mu)\| &= \sup_{\substack{u\in C_{2\pi},\ \tau\in[0,2\pi],\\ \mu\in(0,\mu_1)}} |(1+\mu a(\tau,\mu))\frac{1}{\mu^3}\frac{f''(\tau)\sin\alpha}{l}\sin[(1+\mu a(\tau,\mu))u_1(\tau)]| \leqslant \\ &\leqslant \sup_{\substack{u\in C_{2\pi},\ \tau\in[0,2\pi],\\ \mu\in(0,\mu_1)}} |(1+\mu a(\tau,\mu))\frac{c}{\mu}\frac{f''(\tau)}{l}\sin[(1+\mu a(\tau,\mu))u_1(\tau)]| \leqslant \\ &\leqslant (1+\mu_1\Delta_1)c\Delta_2, \end{aligned}$$

где Δ_1, Δ_2 — константы.

Положим

$$\mu_{lin} = \min\left\{\mu_1, \frac{1}{2c_0c\Delta_2\cdot(1+\mu_1\Delta_1)}\right\}. \tag{1.32}$$

Тогда в силу сказанного получаем, что при $\mu \in (0,\mu_{lin})$ оператор A_μ является сжимающим в пространстве $C_{2\pi}$. Лемма доказана. □

В силу леммы 1.3 по принципу сжимающих отображений уравнение (1.30) имеет единственное 2π-периодическое решение $u(\tau,\mu)$ при любом $\mu \in (0,\mu_{lin})$. Следовательно, и система (1.7) имеет единственное 2π-периодическое решение $\tilde{\varphi}_{lin}(\tau,\mu)$. Полагаем $\omega_0 = \dfrac{1}{\mu_{lin}}$.

Покажем теперь оценку (1.8). Следуя рассуждениям из доказательства принципа сжимающих отображений, зафиксируем некоторый элемент $u^1 \in C_{2\pi}$ и рассмотрим последовательность $\{u^k\}_{k=1}^{\infty}$:

$$u^1, \quad u^2 = A_\mu(u^1), \quad u^3 = A_\mu(u^2), \dots$$

Как известно,

$$u^k \to u, \quad k\to\infty,$$

где u есть решение уравнения (1.31). Рассмотрим теперь следующую цепочку неравенств:

$$\begin{aligned} \|u^2-u^1\| &= \|A_\mu(u^1)-u^1\| = d, \\ \|u^3-u^2\| &= \|A_\mu(u^2)-A_\mu(u^1)\| \leqslant \frac{1}{2}\|u^2-u^1\| = \frac{d}{2}, \\ &\dots \\ \|u^k-u^{k-1}\| &= \|A_\mu(u^{k-1})-A_\mu(u^{k-2})\| \leqslant \frac{1}{2}\|u^{k-1}-u^{k-2}\| = \frac{d}{2^{k-2}}. \end{aligned}$$

Отсюда вытекает

$$\begin{aligned} \|u^{k+l}-u^k\| &\leqslant \|u^{k+l}-u^{k+l-1}\| + \|u^{k+l-1}-u^{k+l-2}\| + \dots + \|u^{k+1}-u^k\| \leqslant \\ &\leqslant d\left(\frac{1}{2^{k+l-2}} + \frac{1}{2^{k+l-3}} + \dots + \frac{1}{2^{k-1}}\right) \leqslant \frac{d}{2^{k-1}}\left(1+\frac{1}{2}+\dots\right) \leqslant \frac{d}{2^{k-2}}. \end{aligned}$$

Поэтому переходя к пределу при $l\to\infty$, получим оценку

$$\|u-u^k\| \leqslant \frac{d}{2^{k-2}}.$$

В частности,

$$\|u-u^1\| \leqslant 2d.$$

Возьмем $u^1 = 0$. В силу (1.27), (1.29), (1.30) получаем

$$\|u\| \leqslant 2d = 2\|A_\mu(0)\| \leqslant c_1\mu.$$

Отсюда в силу (1.9) вытекает оценка (1.8):

$$\|\tilde{\varphi}_{lin}\| \leqslant \|Q\| \cdot \|u\| = \|Q\| c_1\mu = c_{lin}\mu.$$

Учитывая определения (1.10), (1.15), константу c_{lin} в оценке (1.8) можно указать явно.

Теорема 1.1 доказана.

Рассмотрим теперь исходную нелинейную систему (1.6). Для нее справедливо следующее утверждение.

Теорема 1.2. *Пусть выполнены условия* (1.2)–(1.4), $\omega_0 = \dfrac{1}{\mu_{lin}}$, *где* μ_{lin} *определено в* (1.32). *Тогда существует* $\omega_1 \geqslant \omega_0$ *такое, что система* (1.6) *имеет единственное* 2π*-периодическое решение*

$$\overline{\varphi}(\tau,\mu) = \begin{pmatrix} \overline{\varphi}_1(\tau,\mu) \\ \overline{\varphi}_2(\tau,\mu) \end{pmatrix}$$

при $\mu = \dfrac{1}{\omega} \in \left(0, \dfrac{1}{\omega_1}\right)$, *и выполнена оценка*

$$\|\overline{\varphi}(\tau,\mu)\| \leqslant \bar{c}\mu, \quad \bar{c} = \mathrm{const}\,. \tag{1.33}$$

Доказательство. Используя тривиальное равенство $\sin\tilde{\varphi}_1 = \sin\tilde{\varphi}_1 - \tilde{\varphi}_1 + \tilde{\varphi}_1$, после замены (1.9), (1.10), (1.15) перепишем систему (1.6) в следующем виде:

$$\frac{d}{d\tau}\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \mu\bar{U}(\tau,\mu)\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \dfrac{1}{\mu}\dfrac{f''(\tau)\sin\alpha}{l}\cos[(1+\mu a(\tau,\mu))u_1] \end{pmatrix} +$$

$$+ \begin{pmatrix} 0 \\ \left(\mu\dfrac{g}{l} + \dfrac{1}{\mu}\dfrac{f''(\tau)\cos\alpha}{l}\right)(\sin[(1+\mu a(\tau,\mu))u_1] - (1+\mu a(\tau,\mu))u_1) \end{pmatrix}. \tag{1.34}$$

Аналогично доказательству теоремы 1.1 задача о нахождении 2π-периодических решений системы (1.34) эквивалентна построению решений уравнения

$$u(\tau,\mu) = \mu\left(\frac{d}{d\tau}\circ I - \mu\bar{U}(\tau,\mu)\right)^{-1} \circ F(\tau, u(\tau,\mu),\mu), \tag{1.35}$$

где

$$F(\tau,u,\mu) = \mu g(\tau,u(\tau,\mu),\mu) + \begin{pmatrix} 0 \\ \left(\dfrac{g}{l} + \dfrac{1}{\mu^2}\dfrac{f''(\tau)\cos\alpha}{l}\right)(\sin[(1+\mu a(\tau,\mu))u_1] - (1+\mu a(\tau,\mu))u_1) \end{pmatrix},$$

или в операторном виде

$$u = \mathcal{A}_\mu(u).$$

Покажем, что данный оператор $\mathcal{A}_\mu$ удовлетворяет принципу сжимающих отображений в шаре достаточно малого радиуса пространства $C_{2\pi}$.

С учетом определения вектор-функции F для произвольных u^1, $u^2 \in C_{2\pi}$ имеем

$$\|F(\tau,u^1,\mu) - F(\tau,u^2,\mu)\| \leqslant \|\mu(g(\tau,u^1(\tau,\mu),\mu) - g(\tau,u^2(\tau,\mu),\mu))\| +$$

$$+ \left|\left(\frac{g}{l} + \frac{1}{\mu^2}\frac{f''(\tau)\cos\alpha}{l}\right)(\sin w_1^1(\tau,\mu) - w_1^1(\tau,\mu) - \sin w_1^2(\tau,\mu) + w_1^2(\tau,\mu))\right|,$$

где

$$w^i(\tau,\mu) = (1+\mu a(\tau,\mu))u^i(\tau,\mu), \quad i = 1,2.$$

Пусть u^1, u^2 принадлежат шару

$$B_\mu(0) = \{u \in C_{2\pi} : \|u\| \leqslant \tilde{c}\mu\}\,.$$

Тогда, учитывая представление (опускаем для краткости аргументы)

$$\sin w_1^1 - w_1^1 - \sin w_1^2 + w_1^2 = -(w_1^1 - w_1^2)\int_0^1\int_0^1\int_0^1 \cos(\lambda''\lambda'(w_1^2 + \lambda(w_1^1 - w_1^2)))\lambda'[w_1^2 + \lambda(w_1^1 - w_1^2)]^2 d\lambda'' d\lambda' d\lambda,$$

получим

$$|\sin w_1^1 - w_1^1 - \sin w_1^2 + w_1^2| \leqslant |w_1^2 + \lambda(w_1^1 - w_1^2)|^2 |w_1^1 - w_1^2| \leqslant$$
$$\leqslant (4|w_1^2|^2 + 4|w_1^1 w_1^2| + |w_1^1|^2)|w_1^1 - w_1^2| \leqslant$$
$$\leqslant |1 + \mu a(\tau,\mu)|^3 (4|u_1^2|^2 + 4|u_1^1 u_1^2| + |u_1^1|^2)|u_1^1 - u_1^2| \leqslant$$
$$\leqslant |1 + \mu a(\tau,\mu)|^3 (4\|u^2\|^2 + 4\|u^1\|\|u^2\| + \|u^1\|^2)\|u^1 - u^2\| \leqslant |1 + \mu a(\tau,\mu)|^3 9\tilde{c}^2\mu^2\|u^1 - u^2\|.$$

Выберем $\mu_2' \in (0,\mu_1]$ таким, чтобы

$$\max_{\tau\in[0,2\pi]} |1 + \mu a(\tau,\mu)|^3 \leqslant 2, \quad \mu \in (0,\mu_2').$$

Тогда

$$\left|\left(\frac{g}{l} + \frac{1}{\mu^2}\frac{f''(\tau)\cos\alpha}{l}\right)(\sin[(1+\mu a(\tau,\mu))u_1^1] - (1+\mu a(\tau,\mu))u_1^1 -\right.$$
$$\left. - \sin[(1+\mu a(\tau,\mu))u_1^2] + (1+\mu a(\tau,\mu))u_1^2)\right| \leqslant$$
$$\leqslant 18\tilde{c}^2\mu \max_{\tau\in[0,\mathcal{T}]}\left|\mu\frac{g}{l} + \frac{1}{\mu}\frac{f''(\tau)\cos\alpha}{l}\right|\|u^1 - u^2\|.$$

Для всех $\mu \in (0,\mu_2')$ справедлива оценка

$$\max_{\tau\in[0,2\pi]}\left|\mu\frac{g}{l} + \frac{1}{\mu}\frac{f''(\tau)\cos\alpha}{l}\right| \leqslant \mu_2'\frac{g}{l} + \max_{\tau\in[0,2\pi]}\left|\frac{1}{\mu}\frac{f''(\tau)\cos\alpha}{l}\right| \leqslant \mu_2'\frac{g}{l} + \Delta_2.$$

А для оператора $\mathcal{A}_\mu$ в нуле имеем

$$\|\mathcal{A}_\mu(0)\| \leqslant \mu c_0 c\Delta_2.$$

Теперь выберем константу $\tilde{c}$ так, чтобы $2c_0c\Delta_2 \leqslant \tilde{c}$, тогда

$$\|\mathcal{A}_\mu(0)\| \leqslant \mu\frac{\tilde{c}}{2},$$

и положим

$$\mu_2 = \min\left\{\mu_2', \frac{1}{4c_0c\Delta_2\cdot(1+\mu_1\Delta_1)}, \frac{1}{72c_0\tilde{c}^2(\mu_2'\frac{g}{l} + \Delta_2)}\right\}. \tag{1.36}$$

Тогда, очевидно, при $\mu \in (0,\mu_2]$ имеем

$$\|\mathcal{A}_\mu(u^1) - \mathcal{A}_\mu(u^2)\| \leqslant \frac{1}{2}\|u^1 - u^2\|,$$

и для любого u из шара $B_\mu(0)$ выполняется неравенство

$$\|\mathcal{A}_\mu(u)\| \leqslant \|\mathcal{A}_\mu(u) - \mathcal{A}_\mu(0)\| + \|\mathcal{A}_\mu(0)\| \leqslant \frac{1}{2}\|u\| + \frac{1}{2}\tilde{c}\mu \leqslant \tilde{c}\mu.$$

Таким образом, оператор $\mathcal{A}_\mu$ является сжимающим в шаре $B_\mu(0)$, и по принципу сжимающих отображений существует единственное 2π-периодическое решение $\overline{u}(\tau,\mu)$ уравнения (1.35) при $\mu \in (0,\mu_2)$. Следовательно, существует единственное 2π-периодическое решение $\overline{\varphi}(\tau,\mu)$ исходной нелинейной системы (1.6). Полагаем $\omega_1 = \dfrac{1}{\mu_2}$.

Доказательство оценки (1.33) проводится по аналогии с доказательством оценки (1.8) из теоремы 1.1. Теорема 1.2 доказана. □

2. Устойчивость периодического решения

Этот раздел посвящен исследованию устойчивости 2π-периодического решения $\overline{\varphi}(\tau,\mu)$ системы (1.6), существование которого при $\mu \in (0,\mu_2)$ доказано в предыдущем разделе.

Теорема 2.1. *Пусть выполнены условия* (1.2)–(1.4), $\omega_1 = \dfrac{1}{\mu_2}$, *где* μ_2 *определено в* (1.36). *Тогда существует* $\omega_{st} \geqslant \omega_1$ *такое, что* 2π*-периодическое решение системы* (1.6)

$$\overline{\varphi}(\tau,\mu) = \begin{pmatrix} \overline{\varphi}_1(\tau,\mu) \\ \overline{\varphi}_2(\tau,\mu) \end{pmatrix}$$

при $\mu = \dfrac{1}{\omega} \in \left(0, \dfrac{1}{\omega_{st}}\right)$ *асимптотически устойчиво.*

Доказательство. Воспользуемся стандартной техникой: сделав замену

$$z(\tau,\mu) = \tilde{\varphi}(\tau,\mu) - \overline{\varphi}(\tau,\mu), \tag{2.1}$$

перейдем от исследования устойчивости решения $\overline{\varphi}(\tau,\mu)$ системы (1.6) к исследованию устойчивости *нулевого* решения системы

$$\frac{d}{d\tau}\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -\varepsilon\mu \end{pmatrix}\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} +$$
$$+ \begin{pmatrix} 0 \\ v_1(\tau,\mu)(\sin(z_1+\overline{\varphi}_1) - \sin\overline{\varphi}_1) - v_2(\tau,\mu)(\cos(z_1+\overline{\varphi}_1) - \cos\overline{\varphi}_1) \end{pmatrix}, \tag{2.2}$$

где

$$v_1(\tau,\mu) = \frac{\mu^2 g}{l} + \frac{f''(\tau)}{l}\cos\alpha, \quad v_2(\tau,\mu) = -\frac{f''(\tau)}{l}\sin\alpha. \tag{2.3}$$

В дальнейшем мы будем использовать следующие формулы:

$$\sin(z_1+\overline{\varphi}_1) - \sin\overline{\varphi}_1 = z_1 - \overline{\varphi}_1^2 I_1 z_1 - \tilde{I}_1 z_1^2, \tag{2.4}$$

где

$$I_1 = \int_0^1\int_0^1\int_0^1 \lambda'\cos(\lambda''\lambda'(\lambda z_1+\overline{\varphi}_1))\,d\lambda d\lambda' d\lambda'', \tag{2.5}$$

$$\tilde{I}_1 = \int_0^1\int_0^1\int_0^1 \lambda'(\lambda^2 z_1 + 2\lambda\overline{\varphi}_1)\cos(\lambda''\lambda'(\lambda z_1+\overline{\varphi}_1))\,d\lambda d\lambda' d\lambda'', \tag{2.6}$$

$$\cos(z_1+\overline{\varphi}_1) - \cos\overline{\varphi}_1 = -\overline{\varphi}_1 I_2 z_1 - \tilde{I}_2 z_1^2, \tag{2.7}$$

где

$$I_2 = \int_0^1\int_0^1 \cos(\lambda'(\lambda z_1+\overline{\varphi}_1))\,d\lambda d\lambda', \tag{2.8}$$

$$\tilde{I}_2 = \int_0^1\int_0^1 \lambda\cos(\lambda'(\lambda z_1+\overline{\varphi}_1))\,d\lambda d\lambda'. \tag{2.9}$$

Формулы (2.4), (2.7) позволяют переписать систему (2.2) в виде

$$\frac{d}{d\tau}\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ v_1(\tau,\mu)(1-\overline{\varphi}_1^2 I_1) + v_2(\tau,\mu)\overline{\varphi}_1 I_2 & -\varepsilon\mu \end{pmatrix}\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} +$$
$$+ \begin{pmatrix} 0 \\ (-v_1(\tau,\mu)\tilde{I}_1 + v_2(\tau,\mu)\tilde{I}_2)z_1^2 \end{pmatrix} = A^z(\tau,\mu)z + F^z(\tau,z,\mu). \tag{2.10}$$

Рассмотрим линейную систему

$$\frac{d}{d\tau}\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ v_1(\tau,\mu)(1-\overline{\varphi}_1^2 I_1) + v_2(\tau,\mu)\overline{\varphi}_1 I_2 & -\varepsilon\mu \end{pmatrix}\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}. \tag{2.11}$$

Сделав замену

$$z = Qu,$$

где матрица $Q = Q(\tau, \mu)$ определяется соотношениями (1.10), (1.15), и учитывая обозначения (2.3), получим следующую систему для вектор-функции $u = u(\tau, \mu)$:

$$\frac{du}{d\tau} = \mu(U_1(\mu) + U_2(\tau, \mu) + \mu\tilde{U}_3(\tau, \mu))u. \tag{2.12}$$

Здесь матрицы $U_1(\mu)$, $U_2(\tau, \mu)$ определяются формулами (1.13), (1.4), а матрица $\tilde{U}_3(\tau, \mu)$ имеет вид

$$\tilde{U}_3(\tau, \mu) = \begin{pmatrix} 0 & \dfrac{\mu a^2(\tau, \mu)}{1 + \mu a(\tau, \mu)} \\ u_{21}^{(3)} & \dfrac{-\mu a^2(\tau, \mu) b(\tau, \mu)}{1 + \mu a(\tau, \mu)} \end{pmatrix},$$

где

$$u_{21}^{(3)} = \frac{1 + \mu a(\tau, \mu)}{\mu^2} \left(\overline{\varphi}_1^2 I_1 \left[\frac{-\mu g}{l} - \frac{1}{\mu} \frac{f''(\tau) \cos \alpha}{l} \right] - \overline{\varphi}_1 I_2 \frac{1}{\mu} \frac{f''(\tau)}{l} \sin \alpha \right).$$

В силу условий (1.3), (1.4) на коэффициенты функции f и малость угла α, оценки (1.33) для решения $\overline{\varphi}(\tau, \mu)$, а также определений (2.5), (2.8), все элементы матрицы $\tilde{U}_3(\tau, \mu)$ являются ограниченными при $\mu \in (0, \mu_2)$ и не имеют особенностей при $\mu \to 0$.

Напомним, что значение μ_2 было выбрано так, что при $\mu \in (0, \mu_2)$ нулевое решение системы

$$\frac{du}{d\tau} = \mu(U_1(\mu) + U_2(\tau, \mu))u,$$

было асимптотически устойчиво. А поскольку перед матрицей $\tilde{U}_3(\tau, \mu)$ в (2.12) находится коэффициент μ, то из результатов [6] вытекает, что существует $\mu_{st} \in (0, \mu_2]$ такое, что при $\mu \in (0, \mu_{st})$ нулевое решение системы (2.12) асимптотически устойчиво. Как следствие, нулевое решение линейной системы (2.11) также асимптотически устойчиво при $\mu \in (0, \mu_{st})$. Полагаем $\omega_{st} = \dfrac{1}{\mu_{st}}$.

Рассмотрим теперь систему (2.10). В силу определений (2.6), (2.9) имеем

$$\max_{\substack{\tau \in [0, 2\pi], \\ \mu \in [0, \mu_{st}]}} \|F^z(\tau, z, \mu)\| \leqslant p\|z\|^2, \quad p = \text{const}.$$

Обозначим через $H(\tau, \mu)$ решение краевой задачи для дифференциального уравнения Ляпунова

$$\begin{cases} \dfrac{dH}{d\tau} + HA^z(\tau, \mu) + (A^z(\tau, \mu))^* H = -C(\tau), \quad 0 < \tau < 2\pi, \\ H(0, \mu) = H(2\pi, \mu) > 0, \end{cases}$$

где $C(\tau)$ — эрмитова положительно определенная матрица с непрерывными элементами на $[0, 2\pi]$. Эрмитово решение $H(\tau, \mu)$ существует, поскольку нулевое решение системы (2.11) асимптотически устойчиво (см. [6]).

Учитывая условия на $H(\tau, \mu)$ и $F^z(\tau, z, \mu)$, получаем

$$\operatorname{Re} \langle H(\tau, \mu) F^z(\tau, z, \mu), z \rangle \leqslant \|H(\tau, \mu)\| \|F^z(\tau, z, \mu)\| \|z\| \leqslant p \|H(\tau, \mu)\| \frac{\langle H(\tau, \mu) z, z \rangle^{\frac{3}{2}}}{(h_1(\tau, \mu))^{\frac{3}{2}}}, \quad \tau > 0,$$

где $h_1(\tau, \mu)$ — минимальное собственное число матрицы $H(\tau, \mu)$. То есть система (2.10) относится к классу систем вида

$$\frac{dx}{d\tau} = \mathcal{A}(\tau)x + \mathcal{F}(\tau, x), \quad \tau > 0,$$

где $\mathcal{A}(\tau)$ — матрица с непрерывными 2π-периодическими элементами, $\mathcal{F}(\tau, x)$ — вещественнозначная гладкая вектор-функция такая, что $\mathcal{F}(\tau, 0) = 0$, и удовлетворяющая условию вида

$$\operatorname{Re} \langle H(\tau) \mathcal{F}(\tau, x), x \rangle \leqslant q \langle H(\tau) x, x \rangle^{1+\gamma}, \quad \tau \geqslant 0, \ q \geqslant 0, \ \gamma > 0.$$

Тогда, как следует из результатов [7], нулевое решение системы (2.10) асимптотически устойчиво.

Отсюда вытекает асимптотическая устойчивость нулевого решения приведенной системы (2.2) при $\mu \in (0, \mu_{st})$. Следовательно, в силу (2.1) 2π-периодическое решение $\overline{\varphi}(\tau, \mu)$ исходной системы (1.6) также асимптотически устойчиво. Теорема 2.1 доказана. $\square$

Из теорем 1.2, 2.1 при соответствующих оценках на параметр $\mu = \dfrac{1}{\omega}$, коэффициенты функции $f(t)$ и угол α вытекает следующая теорема об устойчивости движения перевернутого маятника, точка подвеса которого совершает высокочастотные колебания, определяемые функцией (0.1), вдоль прямой, составляющей малый угол α с вертикалью.

Теорема 2.2. *Пусть выполнены условия* (1.2)–(1.4). *Обозначим* $T = \dfrac{2\pi}{\omega}$. *Тогда при* $\omega > \omega_{st}$ *уравнение* (1.1) *имеет единственное* T*-периодическое решение* $\Phi(t)$, *и оно является асимптотически устойчивым.*

Отметим, что при $f(t) = a\sin t$ условие (1.2) имеет вид

$$\sqrt{2gl} < \omega a.$$

Как известно, при $\alpha = 0$ это неравенство является условием устойчивости верхнего положения равновесия маятника при высокочастотных гармонических колебаниях малой амплитуды $\left(\dfrac{a}{l} \ll 1\right)$ точки подвеса. Строгое доказательство этого факта было установлено Н. Н. Боголюбовым [2].

Заключение. В работе исследуется движение перевернутого маятника, точка подвеса которого совершает высокочастотные колебания вдоль прямой, составляющей малый угол с вертикалью. Используя результаты из [6, 7], а также принцип сжимающих отображений, мы доказали, что при выполнении определенных условий на частоту колебаний и на функцию, описывающую колебания точки подвеса маятника, возникает периодическое движение маятника, и оно является асимптотически устойчивым.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Боголюбов Н. Н.* О некоторых статистических методах в математической физике. — Киев: Изд-во АН УССР, 1945.
2. *Боголюбов Н. Н.* Теория возмущений в нелинейной механике// Сб. тр. Ин-та строительной механики АН УССР. — 1950. — *14*. — С. 9–34.
3. *Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А.* Асимптотические методы теории нелинейных колебаний. — М.: Физматлит, 1963.
4. *Бурд В. Ш.* Метод усреднения на бесконечном промежутке и некоторые задачи теории колебаний. — Ярославль: ЯрГУ, 2013.
5. *Далецкий Ю. Л., Крейн М. Г.* Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве. — М.: Наука, 1970.
6. *Демиденко Г. В., Матвеева И. И.* Об устойчивости решений линейных систем с периодическими коэффициентами// Сиб. мат. ж. — 2001. — *42*, № 2. — С. 332–348.
7. *Демиденко Г. В., Матвеева И. И.* Об устойчивости решений квазилинейных периодических систем дифференциальных уравнений// Сиб. мат. ж. — 2004. — *45*, № 6. — С. 1271–1284.
8. *Митропольский Ю. А., Хома Г. П.* Математическое обоснование асимптотических методов нелинейной механики. — Киев: Наукова Думка, 1983.

Г. В. Демиденко
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Новосибирск, Россия
E-mail: `demidenk@math.nsc.ru`

А. В. Дулепова
Новосибирский государственный университет, Новосибирск, Россия
E-mail: `nasty731@gmail.com`

DOI: 10.22363/2413-3639-2021-67-3-535-548 UDC 517.925.44

On Periodic Solutions of One Second-Order Differential Equation

© 2021 **G. V. Demidenko, A. V. Dulepova**

Abstract. In this paper, we investigate the movement of an inverted pendulum, the suspension point of which performs high-frequency oscillations along a line making a small angle with the vertical. We prove that under certain conditions on the function describing the oscillations of the suspension point of the pendulum, a periodic motion of the pendulum arises, and it is asymptotically stable.

REFERENCES

1. N. N. Bogolyubov, *O nekotorykh statisticheskikh metodakh v matematicheskoy fizike* [On some statistical methods in mathematical physics], AN USSR, Kiev, 1945 (in Russian).
2. N. N. Bogolyubov, "Teoriya vozmushcheniy v nelineynoy mekhanike" [Teoriya vozmushcheniy v nelineynoy mekhanike], *Sb. tr. In-ta stroitel'noy mekhaniki AN USSR* [Proc. Inst. Struct. Mech. Acad. Sci. Ukr. SSR], 1950, **14**, 9–34 (in Russian).
3. N. N. Bogolyubov and Yu. A. Mitropol'skiy, *Asimptoticheskie metody teorii nelineynykh kolebaniy* [Asymptotic Methods of the Theory of Nonlinear Oscillations], Fizmatlit, Moscow, 1963 (in Russian).
4. V. Sh. Burd, *Metod usredneniya na beskonechnom promezhutke i nekotorye zadachi teorii kolebaniy* [The method of averaging over an infinite interval and some problems in the theory of oscillations], YarGU, Yaroslavl', 2013 (in Russian).
5. Yu. L. Daletskii and M. G. Kreyn, *Ustoychivost' resheniy differentsial'nykh uravneniy v banakhovom prostranstve* [Stability of Solutions of Differential Equations in a Banach Space], Nauka, Moscow, 1970 (in Russian).
6. G. V. Demidenko and I. I. Matveeva, "Ob ustoychivosti resheniy lineynykh sistem s periodicheskimi koeffitsientami" [On the stability of solutions to linear systems with periodic coefficients], *Sib. mat. zh.* [Siberian Math. J.], 2001, **42**, No. 2, 332–348 (in Russian).
7. G. V. Demidenko and I. I. Matveeva, "Ob ustoychivosti resheniy kvazilineynykh periodicheskikh sistem differentsial'nykh uravneniy" [On the stability of solutions of quasilinear periodic systems of differential equations], *Sib. mat. zh.* [Siberian Math. J.], 2004, **45**, No. 6, 1271–1284 (in Russian).
8. Yu. A. Mitropol'skii and G. P. Khoma, *Matematicheskoe obosnovanie asimptoticheskikh metodov nelineynoy mekhaniki* [Mathematical Justification of Asymptotic Methods of Nonlinear Mechanics], Naukova Dumka, Kiev, 1983 (in Russian).

G. V. Demidenko
Sobolev Institute of Mathematics, Siberian Branch of the Russian Academy of Sciences, Novosibirsk, Russia
E-mail: demidenk@math.nsc.ru

A. V. Dulepova
Novosibirsk State University, Novosibirsk, Russia
E-mail: nasty731@gmail.com