Современная математика. Фундаментальные направления. Том 67, № 3 (2021). С. 526–534
Contemporary Mathematics. Fundamental Directions. ISSN 2413-3639 (Print)

DOI: 10.22363/2413-3639-2021-67-3-526-534 УДК 517.958

УЛУЧШЕННЫЙ КРИТЕРИЙ РАЗРУШЕНИЯ РЕШЕНИЙ ДЛЯ МАГНИТОГИДРОДИНАМИКИ С ЭФФЕКТАМИ ХОЛЛА И СКОЛЬЖЕНИЯ ИОНОВ

© 2021 г. **С. ГАЛА, М. А. РАГУЗА**

Аннотация. В $\mathbb{R}^3$ рассматривается магнитогидродинамическая система с эффектами Холла и скольжения ионов. Основной результат работы — достаточное условие регулярности на отрезке времени $[0,T]$. Для давления этот результат выражен в терминах норм в однородных пространствах Бесова $\dot{B}^0_{\infty,\infty}$, для градиента магнитного поля — в терминах BMO-норм, а именно:

$$\int_0^T \left(\|\nabla\pi(t)\|^{\frac{2}{3}}_{\dot{B}^0_{\infty,\infty}} + \|\nabla B(t)\|^2_{BMO} \right) dt < \infty.$$

Этот результат улучшает результат работы [3].

ОГЛАВЛЕНИЕ

1. Введение и основные результаты

Магнитогидродинамика (МГД) имеет дело с взаимодействием между потоком жидкости и магнитным полем. Основные уравнения МГД — это уравнения Навье—Стокса, описывающие динамику сжимаемых жидкостей, и уравнения Максвелла, описывающие электромагнитные явления. В настоящей работе рассматривается следующая задача Коши для уравнений МГД несжимаемой жидкости с эффектом Холла и ионным скольжением в $\mathbb{R}^3$:

$$\begin{cases} \partial_t u + (u\cdot\nabla)u + \nabla\pi = (\nabla\times B)\times B + \mu\Delta u, \\ \partial_t B + \nabla\times(u\times B) + \sigma\nabla\times((\nabla\times B)\times B) = \kappa\nabla\times[B\times(B\times(\nabla\times B))] + \eta\Delta B, \\ \nabla\cdot u = \nabla\cdot B = 0, \\ u(x,0) = u_0(x), \quad B(x,0) = B_0(x). \end{cases} \tag{1.1}$$

Здесь неотрицательные параметры μ и η связаны со свойствами материалов: μ обозначает коэффициент кинематической вязкости жидкости, а η — число, обратное к магнитному числу Рейнольдса. Коэффициенты $\kappa \geqslant 0$ и σ — постоянные. Математическая теория уравнений МГД с эффектом Холла и ионным скольжением имеет большое значение для математики и физики — этой теории посвящено большое количество публикаций (см., например, [3, 4] и имеющуюся там библиографию).

Математическая теория указанной выше системы имеет важные приложения в гидромеханике и материаловедении. В последнее время она привлекает значительное внимание исследователей (см., например, [6–8]). Физический смысл u — скорость движения жидкости, π — давление, B — магнитное поле, а $u_0(x)$ и $B_0(x)$ — заданные начальная скорость и начальное магнитное поле (соответственно), удовлетворяющие соотношениям $\nabla \cdot u_0 = 0$ и $\nabla \cdot B_0 = 0$ в смысле обобщенных функций. По сравнению с классическими уравнениями МГД вязкой несжимаемой жидкости, система (1.1) содержит два дополнительных слагаемых: $\nabla \times ((\nabla \times B) \times B)$ — это так называемое слагаемое Холла, а $\nabla \times [B \times (B \times (\nabla \times B))]$ описывает ионное скольжение. Для удобства, мы нормируем здесь коэффициент вязкости и коэффициент магнитной диффузии так, чтобы каждый был равен единице.

Система (1.1) описывает такие физические явления, как магнитное пересоединение в космической плазме, формирование звезд, нейтронные звезды, генераторы тока. При $\sigma = \kappa = 0$ система (1.1) сводится к классическим уравнениям МГД; при $\kappa = 0$ — к системе МГД Холла.

В [8], для случая малых данных доказано глобальное существование сильных решений в ограниченной области. Этим обусловлена важность изучения критерия глобальной регулярности и структуры возможных особенностей сильных решений. В [3] доказано существование сильных решений, локальных по времени. В [3] для (1.1) предложены различные критерии регулярности в терминах поля скоростей, магнитного поля, давления и их производных; в частности, доказано, что, если (u, π, B) удовлетворяет одному из условий

$$\left\{\begin{array}{c} u \in L^{\frac{2q}{q-3}}(0,T;L^q(\mathbb{R}^3)), \quad 3 < q < \infty, \\ \nabla\pi \in L^{\frac{2s}{3s-3}}(0,T;L^s(\mathbb{R}^3)), \quad 3 < s \leqslant \infty, \\ \nabla\pi \in L^{\frac{2}{3}}(0,T;BMO(\mathbb{R}^3)), \end{array}\right. \tag{1.2}$$

а

$$B \in L^\infty(0,T;L^\infty(\mathbb{R}^3)),\ \nabla B \in L^{\frac{2s}{s-3}}(0,T;L^s(\mathbb{R}^3)), \quad \text{где}\ \ 3 < s \leqslant \infty \tag{1.3}$$

и $0 < T < \infty$, то решение (u, B) можно продолжить и на значения времени, превосходящие T. Здесь BMO обозначает пространство функций ограниченной средней осцилляции (см. [9]).

В [4] результаты [3] обобщены на случай критического пространства Бесова $\dot{B}^{-1}_{\infty,\infty}$ и на пространства мультипликаторов. Несмотря на большие усилия математиков, в глобальном случае вопрос о разрушении гладких решений трехмерных уравнений МГД за конечное время остается одной из самых значительных нерешенных проблем прикладного анализа. Читателей, интересующихся дальнейшим прогрессом в этой области, отсылаем к [1, 6, 7] (см. также имеющуюся там библиографию).

Из работ [3, 4] ясно, что для компонент давления и магнитного поля решения задачи (1.1) является актуальной задача определения критерия разрушения. Наша основная цель — улучшить и обобщить результаты [3,4] о регулярности, а также рассмотреть основной механизм возможного разрушения сильных решений задачи (1.1) в терминах критических пространств Бесова $\dot{B}^0_{\infty,\infty}$, сняв условие $B \in L^\infty(0,T;L^\infty(\mathbb{R}^3))$, наложенное на магнитное поле в работе [3].

Чтобы корректно сформулировать критерий разрушения решений (*blow-up*), нужно ввести следующие понятия функционального анализа. Напомним, что *однородное пространство Бесова* $\dot{B}^0_{\infty,\infty}$ определяется следующим образом. Пусть $\{\varphi_j\}_{j\in\mathbb{Z}}$ — диадическое разбиение единицы Литтлвуда—Пэли, где носителем преобразования Фурье является кольцо $\{\xi \in \mathbb{R}^3 : 2^{j-1} \leqslant |\xi| < 2^j\}$ (см., например, [2, 9]). Тогда

$$f \in \dot{B}^0_{\infty,\infty}(\mathbb{R}^3)\ \ \textit{тогда и только тогда, когда}\ \ \sup_{j\in\mathbb{Z}} \|\varphi_j * f\|_{L^\infty} = \|f\|_{\dot{B}^0_{\infty,\infty}} < \infty.$$

Следующий результат о вложении хорошо известен (ср. [9, с. 244]):

$$L^\infty(\mathbb{R}^3) \hookrightarrow BMO(\mathbb{R}^3) \hookrightarrow \dot{B}^0_{\infty,\infty}(\mathbb{R}^3). \tag{1.4}$$

Теперь можно привести наш результат:

Теорема 1.1. *Пусть* (u, B) *— локальное сильное решение системы* (1.1) *с начальными данными* $(u_0, B_0) \in H^2(\mathbb{R}^3)$ *и* $\nabla \cdot u_0 = \nabla \cdot B_0 = 0$. *Тогда* (u, B) *можно продолжить в область* $\{t > T\}$, *если*

$$\nabla\pi \in L^{\frac{2}{3}}(0,T;\dot{B}^0_{\infty,\infty}(\mathbb{R}^3)) \quad \textit{и} \quad \nabla B \in L^2(0,T;BMO(\mathbb{R}^3)) \tag{1.5}$$

при $0 < T < \infty$.

Замечание 1.1. Сравним (1.5) с соответствующими результатами $(1.2)_2$ и $(1.2)_3$ для полей давлений. В силу вложения (1.4) наш результат, представленный здесь, улучшает предыдущие результаты $(1.2)_2$ и $(1.2)_3$. Отметим также, что наш критерий регулярности (1.5) охватывает и предельный случай $s=\infty$ в $(1.2)_2$, а также обобщает его на более широкие пространства $\dot{B}^0_{\infty,\infty}$. Кроме того, снято условие $B \in L^\infty(0,T;L^\infty(\mathbb{R}^3))$, ранее наложенное на магнитное поле.

Замечание 1.2. Предельный случай $s=\infty$ условия (1.3), наложенного на магнитное поле, является более сложным. Поэтому мы уточним на случай пространств BMO результаты, полученные ранее в критических пространствах Лебега:

$$\nabla B \in L^2(0,T;BMO(\mathbb{R}^3)).$$

Замечание 1.3. Если корректность глобальной задачи не имеет места, то развитие теории разрушения решений приобретает особую важность (как для теории, так и для приложений). Для уравнений Эйлера и Навье—Стокса для несжимаемой жидкости, согласно хорошо известному критерию Биля—Като—Майды (см. [1]), любое решение u является гладким вплоть то момента T, если

$$\int\limits_0^T \|\nabla \times u(\cdot,t)\|_{L^\infty}\,dt < \infty.$$

В [5] критерий Биля—Като—Майды несколько улучшен в предположении, что

$$\int\limits_0^T \|\nabla \times u(\cdot,t)\|_{BMO}\,dt < \infty.$$

В настоящей работе критерий типа Биля—Като—Майды получен для разрушения гладких решений задачи Коши для магнитогидродинамической системы Холла; критерий выражен в терминах давления и магнитного поля.

В дальнейшем нам понадобится следующая оценка давления из $(1.1)_1$. Поскольку $\nabla\cdot u = \nabla\cdot B = 0$, справедливо равенство

$$\nabla\times(u\times B) = (B\cdot\nabla)u - (u\cdot\nabla)B.$$

Следуя [10], применим оператор $\nabla\mathrm{div}$ к обоим частям $(1.1)_1$ и используем тождество

$$(\nabla\times B)\times B = (B\cdot\nabla)B - \nabla\left(\frac{|B|^2}{2}\right).$$

Получим, что

$$\nabla\left(\pi + \frac{|B|^2}{2}\right) = (-\Delta)^{-1}\sum_{i,j=1}^3 \frac{\partial^2}{\partial x_i\partial x_j}\left(\nabla(u_iu_j - B_iB_j)\right)$$

(здесь мы использовали то, что $\nabla\cdot u = \nabla\cdot B = 0$). Тогда из неравенства Кальдерона—Зигмунда следует, что

$$\|\nabla\pi\|_{L^q} \leqslant C\,\|(u\cdot\nabla)u\|_{L^q} + C\,\|(B\cdot\nabla)B\|_{L^q}\,, \quad 1<q<\infty. \tag{1.6}$$

Замечание 1.4. Принимая во внимание условие $(1.2)_1$, накладываемое на скорость роста, а также оценку (1.6), есть основания ожидать, что регулярности сильных решений можно добиться, наложив подходящие условия на рост давления.

2. Доказательство теоремы 1.1

Данный раздел посвящен доказательству теоремы 1.1. Существование и единственность локального сильного решения доказаны в [3], поэтому достаточно установить априорные оценки для (u,B) при любом $T>0$. Ключевой шаг доказательства — установить ограниченность $\|u(\cdot,t)\|_{L^4}$ и $\|B(\cdot,t)\|_{L^4}$, используя классический критерий типа Серрина для трехмерных уравнений МГД.

Доказательство. Скалярно умножим $(1.1)_1$ на u, проинтегрируем результат этого умножения по частям и учтем свойство бездивергентности. Получим, что

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u\|_{L^2}^2+\|\nabla u\|_{L^2}^2 &= \int\limits_{\mathbb{R}^3}((\nabla\times B)\times B)\cdot u dx = \\ &= \int\limits_{\mathbb{R}^3}((B\cdot\nabla)B-\frac{1}{2}\nabla|B|^2)\cdot u dx=\int\limits_{\mathbb{R}^3}(B\cdot\nabla)B\cdot u dx. \end{aligned} \tag{2.1}$$

Аналогично, скалярно умножая $(1.1)_2$ на B и используя свойство бездивергентности, получаем, что

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|B\|_{L^2}^2+\|\nabla B\|_{L^2}^2+\|B\times(\nabla\times B)\|_{L^2}^2=\int\limits_{\mathbb{R}^3}\nabla\times(u\times B)\cdot B dx =$$

$$=\int\limits_{\mathbb{R}^3}[(B\cdot\nabla)u-(u\cdot\nabla)B]\cdot B dx=\int\limits_{\mathbb{R}^3}(B\cdot\nabla)u\cdot B dx=-\int\limits_{\mathbb{R}^3}(B\cdot\nabla)B\cdot u dx; \tag{2.2}$$

здесь применено следующее свойство сокращения:

$$\int\limits_{\mathbb{R}^3}\nabla\times((\nabla\times B)\times B)\cdot B dx=\int\limits_{\mathbb{R}^3}((\nabla\times B)\times B)\cdot(\nabla\times B)dx=0.$$

Складывая (2.1) и (2.2), легко получаем равенство

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}(\|u\|_{L^2}^2+\|B\|_{L^2}^2)+\|\nabla u\|_{L^2}^2+\|\nabla B\|_{L^2}^2+\|B\times(\nabla\times B)\|_{L^2}^2=0,$$

доказывающее неравенство

$$\|(u,B)\|_{L^\infty(0,T;L^2)}+\|(u,B)\|_{L^2(0,T;H^1)}\leqslant C. \tag{2.3}$$

Теперь, чтобы получить L^4-оценку для u и B, умножим $(1.1)_1$ на $|u|^2 u$, учтем свойство бездивергентности и проинтегрируем получившееся равенство. Получим соотношение

$$\begin{aligned}&\frac{1}{4}\frac{d}{dt}\|u\|_{L^4}^4+\int\limits_{\mathbb{R}^3}|u|^2|\nabla u|^2 dx+\frac{1}{2}\int\limits_{\mathbb{R}^3}\left|\nabla|u|^2\right|^2 dx = \\ =\ &\int\limits_{\mathbb{R}^3}((B\cdot\nabla)B-\frac{1}{2}\nabla|B|^2)\cdot|u|^2 u dx-\int\limits_{\mathbb{R}^3}u|u|^2\cdot\nabla\pi dx = \\ =\ &K_1+K_2. \end{aligned} \tag{2.4}$$

Аналогично, умножая $(1.1)_2$ на $|B|^2 B$, находим, что

$$\begin{aligned}&\frac{1}{4}\frac{d}{dt}\|B\|_{L^4}^4+\int\limits_{\mathbb{R}^3}|B|^2|\nabla B|^2 dx+\frac{1}{2}\int\limits_{\mathbb{R}^3}\left|\nabla|B|^2\right|^2 dx = \\ =\ &\int\limits_{\mathbb{R}^3}(B\cdot\nabla)u\cdot|B|^2 B dx+\int\limits_{\mathbb{R}^3}(B\times(\nabla\times B))\cdot\nabla\times(|B|^2 B)dx + \\ &+\int\limits_{\mathbb{R}^3}[((\nabla\times B)\times B)\times B]\cdot(\nabla\times(|B|^2 B))dx = \\ =\ &K_3+K_4+K_5. \end{aligned} \tag{2.5}$$

Объединяя (2.4) и (2.5), получаем равенство

$$\frac{1}{4}\frac{d}{dt}\left(\|u\|_{L^4}^4+\|B\|_{L^4}^4\right)+\||u|\,|\nabla u|\|_{L^2}^2+\||B|\,|\nabla B|\|_{L^2}^2+\frac{1}{2}(\left\|\nabla|u|^2\right\|_{L^2}^2+\frac{1}{2}\left\|\nabla|B|^2\right\|_{L^2}^2)=\sum_{m=1}^{5}K_m. \tag{2.6}$$

Далее рассматриваем каждое слагаемое правой части (2.6) по отдельности.

Применяя к слагаемому K_1 неравенства Гельдера и Янга, получаем, что

$$\begin{aligned} K_1 &\leqslant C\int\limits_{\mathbb{R}^3} |B|\,|\nabla B|\,|u|^3\,dx \leqslant C\left\||u|^3\right\|_{L^{\frac{4}{3}}}\left\|\nabla\,|B|^2\right\|_{L^4} \leqslant \\ &\leqslant C\,\|u\|_{L^4}^3\,\|B\|_{L^4}\,\|\nabla B\|_{BMO} \leqslant \\ &\leqslant C\left(\|u\|_{L^4}^3+\|B\|_{L^4}^4\right)\|\nabla B\|_{BMO} \leqslant \\ &\leqslant C\left(\|u\|_{L^4}^3+\|B\|_{L^4}^4\right)(1+\|\nabla B\|_{BMO}^2); \end{aligned} \tag{2.7}$$

здесь использован следующий факт (см. [5]):

$$\left\|\nabla\,|B|^2\right\|_{L^4} \leqslant C\,\||B|\,\nabla B\|_{L^4} \leqslant C\,\|B\|_{L^4}\,\|\nabla B\|_{BMO}\,.$$

Чтобы оценить $K_2 = \int\limits_{\mathbb{R}^3} \nabla\pi\cdot|u|^2\,udx$, разобъем K_2 на три слагаемых следующим образом:

$$\nabla\pi = \sum_{j\in\mathbb{Z}}\varphi_j*\nabla\pi = \sum_{j<-N}\varphi_j*\nabla\pi + \sum_{j=-N}^{N}\varphi_j*\nabla\pi + \sum_{j>N}\varphi_j*\nabla\pi;$$

здесь использовано разбиение Литтлвуда—Пэли, а натуральное N будет определено ниже. Применяя это разбиение к K_2, получаем оценку

$$\begin{aligned} K_2 &\leqslant \left|\int\limits_{\mathbb{R}^3}\sum_{j<-N}\varphi_j*\nabla\pi\cdot|u|^2\,udx\right| + \left|\int\limits_{\mathbb{R}^3}\sum_{j=-N}^{N}\varphi_j*\nabla\pi\cdot|u|^2\,udx\right| + \left|\int\limits_{\mathbb{R}^3}\sum_{j>N}\varphi_j*\nabla\pi\cdot|u|^2\,udx\right| = \\ &= K_{21}+K_{22}+K_{23}. \end{aligned}$$

Используя неравенство Бернштейна (см. [2])

$$\|\varphi_j*f\|_{L^q} \leqslant C2^{3j(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})}\,\|\varphi_j*f\|_{L^p}\,, \quad 1\leqslant p\leqslant q\leqslant\infty, \tag{2.8}$$

где положительная постоянная C не зависит ни от f, ни от j, и применяя неравенство Гельдера, выводим соотношение

$$\begin{aligned} K_{21} &\leqslant \sum_{j<-N}\|\varphi_j*\nabla\pi\|_{L^4}\,\|u\|_{L^4}^3 \leqslant \\ &\leqslant C\,\|u\|_{L^4}^3\sum_{j<-N}2^{3j(\frac{1}{2}-\frac{1}{4})}\,\|\varphi_j*\nabla\pi\|_{L^2} \leqslant \\ &\leqslant C\,\|u\|_{L^4}^3\left(\sum_{j<-N}2^{\frac{3}{2}j}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\sum_{j<-N}\|\varphi_j*\nabla\pi\|_{L^2}^2\right)^{\frac{1}{2}} \leqslant \\ &\leqslant C2^{-\frac{3}{4}N}\,\|u\|_{L^4}^3\,\|\nabla\pi\|_{L^2} \leqslant \\ &\leqslant C2^{-\frac{3}{4}N}\,\|u\|_{L^4}^3\,(\|(u\cdot\nabla)u\|_{L^2}+\|(\nabla\times B)\times B\|_{L^2}) = \\ &= C\left(2^{-\frac{3}{2}N}\,\|u\|_{L^4}^6\right)^{\frac{1}{2}}\left(\|(u\cdot\nabla)u\|_{L^2}^2+\|(\nabla\times B)\times B\|_{L^2}^2\right)^{\frac{1}{2}} \leqslant \\ &\leqslant C\left(2^{-N}\,\|u\|_{L^4}^4\right)^{\frac{6}{4}}+\frac{1}{8}\,\|(u\cdot\nabla)u\|_{L^2}^2+\frac{1}{8}\,\|(\nabla\times B)\times B\|_{L^2}^2\,. \end{aligned}$$

Используя неравенства Гельдера и Янга, получаем следующую оценку на K_{22}:

$$\begin{aligned} K_{22} &\leqslant \int\limits_{\mathbb{R}^3}\sum_{j=-N}^{N}|\varphi_j*\nabla\pi|\,|u|^3\,dx = \int\limits_{\mathbb{R}^3}\sum_{j=-N}^{N}|\varphi_j*\nabla\pi|^{\frac{1}{2}}\,|\varphi_j*\nabla\pi|^{\frac{1}{2}}\,|u|^3\,dx = \\ &= \sum_{j=-N}^{N}\left\||\varphi_j*\nabla\pi|^{\frac{1}{2}}\right\|_{L^\infty}\left\||\varphi_j*\nabla\pi|^{\frac{1}{2}}\right\|_{L^4}\|u\|_{L^4}^3 = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \|u\|_{L^4}^3 \left(\sum_{j=-N}^{N} \|\varphi_j * \nabla\pi\|_{L^\infty}^{\frac{1}{2}} \|\varphi_j * \nabla\pi\|_{L^2}^{\frac{1}{2}} \right) \leqslant \\
&\leqslant C \|u\|_{L^4}^3 \left(\sup_{j\in\mathbb{Z}} \|\varphi_j * \nabla\pi\|_{L^\infty}^{\frac{1}{2}} \right) \left(\sum_{j=-N}^{N} \|\varphi_j * \nabla\pi\|_{L^2}^{\frac{1}{2}} \right) \leqslant \\
&\leqslant CN^{\frac{3}{4}} \|u\|_{L^4}^3 \|\nabla\pi\|_{\dot{B}^0_{\infty,\infty}}^{\frac{1}{2}} \|\nabla\pi\|_{L^2}^{\frac{1}{2}} \leqslant \\
&\leqslant CN^{\frac{3}{4}} \|u\|_{L^4}^3 \|\nabla\pi\|_{\dot{B}^0_{\infty,\infty}}^{\frac{1}{2}} \left(\|(u\cdot\nabla)u\|_{L^2} + \|(\nabla\times B)\times B\|_{L^2}\right)^{\frac{1}{2}} \leqslant \\
&\leqslant CN \|u\|_{L^4}^4 \|\nabla\pi\|_{\dot{B}^0_{\infty,\infty}}^{\frac{2}{3}} + \frac{1}{8} \|(u\cdot\nabla)u\|_{L^2}^2 + \frac{1}{8} \|(\nabla\times B)\times B\|_{L^2}^2 .
\end{aligned}$$

С помощью неравенств Бернштейна, Гельдера и Соболева получаем следующую оценку на K_{23}:

$$\begin{aligned}
K_{23} &\leqslant \sum_{j>N} \int_{\mathbb{R}^3} |\varphi_j * \nabla\pi|\, |u|^3\, dx \leqslant \\
&\leqslant \sum_{j>N} \|\varphi_j * \nabla\pi\|_{L^{\frac{12}{7}}} \|u\|_{L^4} \left\| |u|^2 \right\|_{L^6} \leqslant \\
&\leqslant C \|u\|_{L^4} \left\| \nabla |u|^2 \right\|_{L^2} \sum_{j>N} 2^{-\frac{j}{4}} \|\varphi_j * \nabla\pi\|_{L^2} \leqslant \\
&\leqslant C \|u\|_{L^4} \left\| \nabla |u|^2 \right\|_{L^2} \left(\sum_{j>N} 2^{-\frac{j}{2}} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{j>N} \|\varphi_j * \nabla\pi\|_{L^2}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leqslant \\
&\leqslant C 2^{-\frac{N}{4}} \|u\|_{L^4} \left\| \nabla |u|^2 \right\|_{L^2} \|\nabla\pi\|_{L^2} \leqslant \\
&\leqslant C \left(2^{-N} \|u\|_{L^4}^4 \right)^{\frac{1}{4}} \left(\|(u\cdot\nabla)u\|_{L^2} + \|(\nabla\times B)\times B\|_{L^2}\right)^2 \leqslant \\
&\leqslant C \left(2^{-N} \|u\|_{L^4}^4 \right)^{\frac{1}{4}} \left(\|(u\cdot\nabla)u\|_{L^2}^2 + \|(\nabla\times B)\times B\|_{L^2}^2\right) .
\end{aligned}$$

Подставляя оценки K_{21}, K_{22}, K_{23} в разбиение K_2, получаем, что

$$\begin{aligned}
K_2 \leqslant{}& \left(C2^{-N} \|u\|_{L^4}^4 \right)^{\frac{6}{4}} + \frac{1}{4} \|(u\cdot\nabla)u\|_{L^2}^2 + \frac{1}{4} \|(\nabla\times B)\times B\|_{L^2}^2 + \\
&+ CN \|u\|_{L^4}^4 \|\nabla\pi\|_{\dot{B}^0_{\infty,\infty}}^{\frac{2}{3}} + \left(C2^{-N} \|u\|_{L^4}^4 \right)^{\frac{1}{4}} \left(\|u\cdot\nabla u\|_{L^2}^2 + \|(\nabla\times B)\times B\|_{L^2}^2 \right) . \qquad (2.9)
\end{aligned}$$

Теперь выберем и зафиксируем такое натуральное N, что $C2^{-N} \|u\|_{L^4}^4 \approx \dfrac{1}{4}$, т. е.

$$N = \left[\frac{\ln C + \ln(\|u\|_{L^4}^4 + e)}{\ln 4} \right] + 1,$$

где $[a]$ обозначает целую часть a. Тогда, подставляя N в (2.9), приходим к неравенству

$$K_2 \leqslant C + C\left(\ln C + \ln(\|u\|_{L^4}^4 + e) \right) \|\nabla\pi\|_{\dot{B}^0_{\infty,\infty}}^{\frac{2}{3}} \|u\|_{L^4}^4 + \frac{1}{8} \|(u\cdot\nabla)u\|_{L^2}^2 + \frac{1}{8} \|(\nabla\times B)\times B\|_{L^2}^2 . \quad (2.10)$$

Для K_3, используя интегрирование по частям, а также неравенства Гельдера и Янга, можно вывести оценку

$$K_3 = \sum_{i=1}^{3} \int_{\mathbb{R}^3} B_i \partial_i u \cdot |B|^2 B dx = -\sum_{i=1}^{3} \int_{\mathbb{R}^3} B_i u \partial_i (|B|^2 B) dx =$$

$$\begin{aligned}
&= -\int_{\mathbb{R}^3} u\,|B|^2\,(B\cdot\nabla)B dx - \int_{\mathbb{R}^3} B\cdot u\cdot \sum_{i=1}^{3} B_i\partial_i B^2 dx \leqslant \\
&\leqslant C\,\|(B\cdot\nabla)B\|_{L^4}\,\|u\|_{L^4}\,\left\||B|^2\right\|_{L^2} \leqslant \\
&\leqslant C\,\|B\|_{L^4}^3\,\|u\|_{L^4}\,\|\nabla B\|_{BMO} \leqslant \\
&\leqslant C\left(\|u\|_{L^4}^3 + \|B\|_{L^4}^4\right)(1+\|\nabla B\|_{BMO}^2).
\end{aligned} \tag{2.11}$$

Точно так же получаем следующие оценки на K_4 и K_5:

$$\begin{aligned}
K_4 &= \int_{\mathbb{R}^3} ((B\times(\nabla\times B)))(\nabla\,|B|^2\times B)dx \leqslant \\
&\leqslant C\,\|B\times(\nabla\times B)\|_{L^4}\left\|\nabla\,|B|^2\right\|_{L^4}\|B\|_{L^2} \leqslant \\
&\leqslant C\,\|B\|_{L^4}^2\,\|\nabla B\|_{BMO}^2 \leqslant C\left(1+\|B\|_{L^4}^4\right)\|\nabla B\|_{BMO}^2
\end{aligned} \tag{2.12}$$

(здесь использовано двойное неравенство

$$\|B\times(\nabla\times B)\|_{L^4} \leqslant C\,\||B|\,\nabla B\|_{L^4} \leqslant C\,\|B\|_{L^4}\,\|\nabla B\|_{BMO}\,,$$

известное из [5]),

$$\begin{aligned}
K_5 &= \int_{\mathbb{R}^3} [((\nabla\times B)\times B)\times B](\nabla\,|B|^2\times B)dx \leqslant \\
&\leqslant C\,\|B\times(\nabla\times B)\|_{L^4}\left\|\nabla\,|B|^2\right\|_{L^4}\left\||B|^2\right\|_{L^2} \leqslant \\
&\leqslant C\,\|B\|_{L^4}^4\,\|\nabla B\|_{BMO}^2\,.
\end{aligned} \tag{2.13}$$

Подставив оценки слагаемых K_m $(m = 1, 2, \ldots, 5)$ в (2.6), получим неравенство

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{4}\frac{d}{dt}\left(\|u\|_{L^4}^4 + \|B\|_{L^4}^4\right) + \frac{1}{2}\,\||u|\,|\nabla u|\|_{L^2}^2 + \frac{1}{2}\,\||B|\,|\nabla B|\|_{L^2}^2 + \frac{1}{2}\left\|\nabla\,|u|^2\right\|_{L^2}^2 + \frac{1}{2}\left\|\nabla\,|B|^2\right\|_{L^2}^2 \leqslant \\
&\leqslant C + C\left(\ln C + \ln(\|u\|_{L^4}^4 + e)\right)\|\nabla\pi\|_{\dot B^0_{\infty,\infty}}^{\frac{2}{3}}\,\|u\|_{L^4}^4 + C(1+\|\nabla B\|_{BMO}^2)\left(\|B\|_{L^4}^4 + \|u\|_{L^4}^4\right).
\end{aligned}$$

Оно сводится к неравенству

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\left(\|u\|_{L^4}^4 + \|B\|_{L^4}^4\right) &\leqslant C + C(1+\|\nabla B\|_{BMO}^2)\left(\|B\|_{L^4}^4 + \|u\|_{L^4}^4\right) + \\
&\quad + C\,\|\nabla\pi\|_{\dot B^0_{\infty,\infty}}^{\frac{2}{3}}\ln(\|u\|_{L^4}^4 + \|B\|_{L^4}^4 + e)\left(\|B\|_{L^4}^4 + \|u\|_{L^4}^4\right)
\end{aligned}$$

для всех $0 \leqslant t < T$.

Для наглядности введем обозначение

$$F(t) = e + \|u(\cdot,t)\|_{L^4}^4 + \|B(\cdot,t)\|_{L^4}^4\,.$$

Таким образом, имеем оценку

$$\frac{dF}{dt}(t) \leqslant C(1+\|\nabla B\|_{BMO}^2)F(t) + CF(t)\,\|\nabla\pi\|_{\dot B^0_{\infty,\infty}}^{\frac{2}{3}}\ln(F(t)) + C.$$

Используя неравенство Гроноулла, получаем, что следующая оценка справедлива при $0 \leqslant t \leqslant T$:

$$F(t) \leqslant (F(0)+CT)\exp\left(C\int_0^T \|\nabla\pi(\tau)\|_{\dot B^0_{\infty,\infty}}^{\frac{2}{3}}\ln F(\tau)d\tau\right)\exp\left(\int_0^T 1+\|\nabla B(\tau)\|_{BMO}^2\,d\tau\right). \tag{2.14}$$

Логарифмируя обе части неравенства (2.14), приходим к оценке

$$\ln F(t) \leqslant \ln\left(F(0)+CT\right) + C\int_0^T \|\nabla\pi(\tau)\|_{\dot B^0_{\infty,\infty}}^{\frac{2}{3}}\ln F(\tau)d\tau + \int_0^T \left\{1+\|\nabla B(\tau)\|_{BMO}^2\right\}d\tau.$$

Применяя неравенство Гронуолла еще раз, получаем, что

$$\ln F(t) \leqslant \ln\left(F(0) + CT\right) \int_0^T \|\nabla \pi(\tau)\|_{\dot{B}^0_{\infty,\infty}}^{\frac{2}{3}} d\tau < \infty$$

для любого $0 \leqslant t \leqslant T$. Отсюда следует, что

$$(u, B) \in L^\infty(0, T; L^4(\mathbb{R}^3)) \subset L^8(0, T; L^4(\mathbb{R}^3)). \tag{2.15}$$

Из (2.15) и (1.2) делаем вывод, что решение (u, B) можно продолжить за точку $t = T$, что завершает доказательство теоремы 1.1. □

3. Благодарности

Работа выполнена во время пребывания первого автора в университете города Катания (Италия). Он хотел бы поблагодарить этот университет за гостеприимство и поддержку. Работа выполнена при частичной поддержке программы Piano della Ricerca 2016–2018 — Linea di intervento 2: «Metodi variazionali ed equazioni di erenziali». Работа выполнена при поддержке Программы стратегического академического лидерства РУДН.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Beale J., Kato T., Majda A.* Remarks on breakdown of smooth solutions for the three-dimensional Euler equations// Commun. Math. Phys. — 1984. — *94.* — С. 61–66.
2. *Chemin J.-Y.* Perfect incompressible fluids. — New York: Clarendon Press & Oxford University Press, 1998.
3. *Fan J., Jia X., Nakamura G., Zhou Y.* On well-posedness and blowup criteria for the magnetohydrodynamics with the Hall and ion-slip effects// Z. Angew. Math. Phys. — 2015. — *66.* — С. 1695–1706.
4. *Gala S., Ragusa M. A.* On the blow-up criterion of strong solutions for the MHD equations with the Hall and ion-slip effects in $\mathbb{R}^3$// Z. Angew. Math. Phys. — 2016. — *67.* — С. 18.
5. *Kozono H., Taniuchi Y.* Bilinear estimates in BMO and the Navier—Stokes equations// Math. Z. — 2000. — *235.* — С. 173–194.
6. *Maiellaro M.* Uniqueness of MHD thermodiffusive mixture flows with Hall and ion-slip effects// Meccanica. — 1977. — *12.* — С. 9–14.
7. *Mulone G., Salemi F.* Some continuous dependence theorems in MHD with Hall and ion-slip currents in unbounded domains// Rend. Accad. Sci. Fis. Mat. Napoli. — 1988. — *55.* — С. 139–152.
8. *Mulone G., Solonnikov V. A.* On an initial boundary-value problem for the equation of magnetohydrodynamics with the Hall and ion-slip effects// J. Math. Sci. (N.Y.). — 1997. — *87.* — С. 3381–3392.
9. *Triebel H.* Theory of function spaces. — Basel: Birkhäuser, 1983.
10. *Zhou Y.* Regularity criteria for the 3D MHD equations in terms of the pressure// Int. J. Nonlinear Mech. — 2006. — *41.* — С. 1174–1180.

Sadek Gala
Ecole Normale Supérieure of Mostaganem, Mostaganem, Algeria;
Università di Catania, Catania, Italy
E-mail: sadek.gala@gmail.com

Maria Alessandra Ragusa
Università di Catania, Catania, Italy;
RUDN University, Moscow, Russia
E-mail: maragusa@dmi.unict.it

DOI: 10.22363/2413-3639-2021-67-3-526-534 UDC 517.958

An Improved Blow-Up Criterion for the Magnetohydrodynamics with the Hall and Ion-Slip Effects

© 2021 **S. Gala, M. A. Ragusa**

Abstract. In this work, we consider the magnetohydrodynamics system with the Hall and ion-slip effects in $\mathbb{R}^3$. The main result is a sufficient condition for regularity on a time interval $[0, T]$ expressed in terms of the norm of the homogeneous Besov space $\dot{B}^0_{\infty,\infty}$ with respect to the pressure and the $BMO-$norm with respect to the gradient of the magnetic field, respectively

$$\int_0^T \left(\|\nabla\pi(t)\|^{\frac{2}{3}}_{\dot{B}^0_{\infty,\infty}} + \|\nabla B(t)\|^2_{BMO} \right) dt < \infty,$$

which can be regarded as improvement of the result in [3].

REFERENCES

1. J. Beale, T. Kato, and A. Majda, "Remarks on breakdown of smooth solutions for the three-dimensional Euler equations," *Commun. Math. Phys.*, 1984, **94**, 61–66.
2. J.-Y. Chemin, *Perfect Incompressible Fluids*, Clarendon Press & Oxford University Press, New York, 1998.
3. J. Fan, X. Jia, G. Nakamura, and Y. Zhou, "On well-posedness and blowup criteria for the magnetohydrodynamics with the Hall and ion-slip effects," *Z. Angew. Math. Phys.*, 2015, **66**, 1695–1706.
4. S. Gala and M. A. Ragusa, "On the blow-up criterion of strong solutions for the MHD equations with the Hall and ion-slip effects in $\mathbb{R}^3$," *Z. Angew. Math. Phys.*, 2016, **67**, 18.
5. H. Kozono and Y. Taniuchi, "Bilinear estimates in BMO and the Navier—Stokes equations," *Math. Z.*, 2000, **235**, 173–194.
6. M. Maiellaro, "Uniqueness of MHD thermodiffusive mixture flows with Hall and ion-slip effects," *Meccanica*, 1977, **12**, 9–14.
7. G. Mulone and F. Salemi, "Some continuous dependence theorems in MHD with Hall and ion-slip currents in unbounded domains," *Rend. Accad. Sci. Fis. Mat. Napoli*, 1988, **55**, 139–152.
8. G. Mulone and V. A. Solonnikov, "On an initial boundary-value problem for the equation of magnetohydrodynamics with the Hall and ion-slip effects," *J. Math. Sci. (N.Y.)*, 1997, **87**, 3381–3392.
9. H. Triebel, *Theory of Function Spaces*, Birkhäuser, Basel, 1983.
10. Y. Zhou, "Regularity criteria for the 3D MHD equations in terms of the pressure," *Int. J. Nonlinear Mech.*, 2006, **41**, 1174–1180.

S. Gala
Ecole Normale Supérieure of Mostaganem, Mostaganem, Algeria;
Università di Catania, Catania, Italy
E-mail: sadek.gala@gmail.com

M. A. Ragusa
Università di Catania, Catania, Italy;
RUDN University, Moscow, Russia
E-mail: maragusa@dmi.unict.it